Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 30, núm. 1, 2015. Pàg. 57–101. DOI: 10.2436/20.2002.01.59

Eleccions mitjançant el vot d'aprovació. El mètode de Phragmén i algunes variants

Xavier Mora i Maria Oliver

Resum: S'estudien diverses variants d'un mètode de representació proporcional que Edvard Phragmén va proposar a finals del segle xix. Cada elector expressa la seva opinió mitjançant un vot d'aprovació, on indica totes les opcions que li semblen adients. Les opcions poden ser candidats individuals, com suposava Phragmén, o bé candidatures de partit que ofereixen múltiples representants cadascuna. Donat un conjunt de vots d'aquest tipus i un nombre prefixat d'escons, es tracta de repartir aquests escons entre les diferents candidatures de manera que el resultat sigui el més representatiu possible. El present estudi presta una atenció especial a una propietat de monotonia que demana que l'addició d'aprovacions a favor d'una candidatura no pugui produir una disminució del nombre d'escons que li són assignats. En la variant bàsica, on els escons s'assignen mitjançant un procediment seqüencial, aquesta monotonia es compleix en el cas de candidats individuals, però no en el cas de candidatures de partit. També s'exploren breument unes variants directes, on els escons s'assignen tots d'una vegada mitjançant algun criteri adient d'optimització. Aquestes variants semblen millors des del punt de vista de la monotonia, però presenten un problema de multiplicitat de solucions que fa necessari algun criteri addicional de selecció.

Paraules clau: representació proporcional, vot d'aprovació, llistes obertes, Edvard Phragmén.

Classificació MSC2010: 91B12.

1 Introducció

Suposem que un grup de 1000 individus vol elegir quatre persones que representin tot el grup, incloent-hi no solament les opinions i els punts de vista majoritaris, sinó també, en la deguda proporció i en la mesura que sigui possible, totes les altres opinions i els altres punts de vista. Es compta amb vuit candidats, a, b, c, d, e, f, g, h, i es demana a cada membre del grup que indiqui

Aquest article és una versió més elaborada del treball de fi de grau de Matemàtiques realitzat el curs 2011–2012 a la Universitat Autònoma de Barcelona per Maria Oliver sota la direcció de Xavier Mora.

quins d'aquests candidats li semblen acceptables per a reflectir la seva opinió. Imaginem que les respostes dels 1000 individus es reparteixen de la manera següent:

$$250 : \mathsf{a, b, c, d}; \quad 250 : \mathsf{b, c, e}; \quad 200 : \mathsf{e, f, g, h}; \quad 200 : \mathsf{a, e, f}; \quad 100 : \mathsf{a, c, e, f}. \tag{1}$$

Quins són els quatre representants més adequats?

Aquest és el problema que es planteja en l'elecció de representants mitjançant llistes obertes no ordenades. En aquest article ens ocuparem d'ell junt amb una generalització en què les opcions sobre les quals s'expressa l'elector no són els candidats individuals, sinó unes candidatures col·lectives cadascuna de les quals pot proporcionar múltiples representants. En aquest escenari també pot passar que l'elector trobi acceptable més d'una d'aquestes candidatures. Suposem, per exemple, que un país vol elegir un parlament de 135 diputats i que es demana a cada elector que indiqui quines de les candidatures que presenten els partits li semblen prou oportunes des del seu punt de vista. Cada candidatura ofereix tants candidats com escons hi ha al parlament. Imaginem que els electors voten com segueix, on A, B, C, D, E, F, G denoten les candidatures corresponents als diferents partits i les xifres indiquen centenars de milers d'electors:

$$\begin{gathered} 6 : \mathsf{A}; \quad 8 : \mathsf{A, B}; \quad 2 : \mathsf{B, C}; \quad 2 : \mathsf{B, C, D}; \quad 3 : \mathsf{C, D}; \\ 3 : \mathsf{C, E}; \quad 2 : \mathsf{E}; \quad 4 : \mathsf{F}; \quad 2 : \mathsf{F, G}; \quad 2 : \mathsf{G}. \end{gathered} \tag{2}$$

Quants diputats s'han d'assignar a cada candidatura?

Aquesta forma de vot en què l'elector indica totes les opcions que li semblen adients s'anomena **vot d'aprovació.** Òbviament, un vot d'aquest tipus dóna més informació que no pas un vot on només es permet indicar una sola opció. A conseqüència d'això, els resultats poden reflectir millor les veritables opinions dels electors (que ho aconsegueixin o no dependrà de l'algorisme utilitzat). Una altra conseqüència molt positiva és que s'evita en certa mesura el problema del vot útil: l'elector no té res a perdre si inclou en el seu vot les opcions que realment prefereix, possiblement acompanyades d'altres opcions menys preferides però amb més possibilitats d'èxit.[1]

> En la forma tradicional de vot que demana a cada elector una sola opció, habitualment s'accepta també com a vàlid el vot en blanc. Tanmateix, el significat d'aquest últim no és gens clar: en principi, tant pot significar el rebuig de totes les opcions plantejades, com l'acceptació de qualsevol d'elles. Amb el vot d'aprovació, en canvi, aquests dos significats oposats queden perfectament separats: el primer cas correspon a no aprovar cap opció, mentre que el segon correspon a aprovar-les totes.

En lloc del vot d'aprovació, es pot plantejar d'usar el **vot preferencial**, on a més d'indicar les opcions que li semblen adients, l'elector les ordena també per ordre de preferència. De fet, el vot preferencial en termes de candidats individuals s'utilitza per a l'elecció de representants en el mètode del **vot**

1 Les notes les posem en paràgrafs sagnats amb un cos de lletra més petit, la qual cosa facilita de continuar la lectura.

únic transferible. Com veurem més avall, però, aquest mètode presenta certs problemes —de manca de monotonia respecte al contingut dels vots— que fan interessant d'estudiar unes altres vies.

En principi, també serien possibles altres formes de vot que no considerarem aquí, com ara que també es puguin expressar preferències entre les opcions no aprovades, o bé que només s'expressin preferències entre les diverses opcions, sense especificar quines d'aquestes compten amb l'aprovació de l'elector. En certs contextos, el terme «vot preferencial» es refereix a aquesta última forma de vot. Però en el context de l'elecció de representants és habitual entendre aquest terme en el sentit que hem dit, és a dir, com un vot d'aprovació junt amb una ordenació de les opcions aprovades.

Més concretament, aquest article girarà al voltant d'un mètode que va ser proposat a finals del segle XIX pel matemàtic suec Edvard Phragmén. El mètode en qüestió combina idees del vot únic transferible i del mètode de D'Hondt, la qual cosa ens portarà a revisar abans aquests antecedents.

Tal com ja hem dit més amunt, ens situarem en un marc general en què les opcions que aprova l'elector no són necessàriament candidats individuals, sinó que poden ser candidatures col·lectives a cadascuna de les quals es tracta d'assignar un cert nombre de representants. De fet, aquest treball està especialment motivat per aquesta possibilitat, la qual seria adient en eleccions d'àmbit extens, on els electors difícilment coneixen directament els candidats, i també en escenaris on domina la disciplina de partit. La proposta que les opcions sobre les quals s'expressi l'elector siguin les candidatures col·lectives presentades pels partits també ha estat feta recentment per altres autors en el context del vot preferencial [23].

L'article està estructurat de la manera següent: Les seccions 2–6 introdueixen les diverses idees i antecedents que ens interessen. En la secció 7 estudiem detalladament la variant bàsica del mètode de Phragmén, la qual treballa amb vots d'aprovació i assigna els escons mitjançant un procediment seqüencial. Tal com hem dit, però, ens situem en el marc general de candidatures col·lectives. Una mica inesperadament, veurem que en el cas general falla una propietat de monotonia que sí que es compleix en el cas de candidatures individuals. En la secció 8 explorem breument les variants directes, on els escons s'assignen tots d'una vegada mitjançant algun criteri adient d'optimització. Segons comentarem, hi ha indicis que aquestes variants sí que tenen la propietat de monotonia. A canvi, però, ens trobem amb un problema de multiplicitat de solucions que fa necessari algun criteri addicional de selecció. L'article se suplementa amb dos apèndixs que recullen, respectivament, una breu nota biogràfica sobre Edvard Phragmén i una classificació de les diverses variants que aquest autor va considerar del seu mètode.

2 Representació proporcional amb partits o sense

2.1 L'objectiu general de la representació proporcional és elegir un conjunt de representants on les diverses opinions i punts de vista estiguin presents en la mateixa proporció que a tota la societat [24, 51]. El 1789, mesos abans de la Revolució Francesa, Honoré Gabriel Riquetti, comte de Mirabeau, ho comparava amb la representació que un mapa fa d'un territori, on certament convé que les longituds i àrees del mapa siguin tan proporcionals a les del territori com sigui possible [24, § 117].

Per intentar assolir aquest objectiu, sovint es demana als electors que escullin una, i només una, de les candidatures presentades pels partits polítics. Fet això, es tracta de repartir els escons del parlament entre aquestes candidatures assignant a cadascuna d'elles un nombre d'escons tan proporcional als vots obtinguts com sigui possible. Com que els nombres en qüestió són enters, les desviacions respecte a la proporcionalitat exacta són inevitables. Aquestes desviacions esdevenen especialment importants quan el nombre d'escons que es reparteixen és petit, com passa sovint com a resultat d'una divisió en circumscripcions territorials. Tot plegat dóna lloc a una diversitat de regles de repartiment, entre les quals destaquen la de Jefferson i D'Hondt i la de Webster i Sainte-Laguë, que seran discutides amb més detall a § 5.

Tanmateix, tot això suposa que cada elector s'identifica amb una i només una de les propostes que presenten els partits. Aquesta hipòtesi pot estar molt allunyada de la realitat, la qual cosa pot comportar resultats desencertats.

2.2 En aquest article ens interessem en procediments alternatius basats en formes més obertes de vot que no requereixen una classificació prèvia dels candidats en classes disjuntes. Tal com veurem, tot i això encara es pot mirar de respectar el principi de representació proporcional.

Tanmateix, no serveix pas qualsevol procediment. Per exemple, suposem que es volen elegir n representants a partir d'un cert conjunt prou ampli de candidats. Un possible procediment és demanar a cada elector que doni una llista dels n candidats que més li agraden i declarar elegits els n candidats que obtinguin més vots.

Aquest procediment pot semblar força natural, però el cert és que és molt lluny de l'ideal de la representació proporcional. Suposem, per exemple, que $n = 4$ i que els vots són com mostrem a continuació:

$$75 : \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}; \quad 25 : \mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}. \tag{3}$$

És a dir, 75 electors coincideixen a seleccionar els candidats a, b, c, d, mentre que 25 electors coincideixen a seleccionar els candidats e, f, g, h. Aplicant el procediment que hem dit, resultarien elegits els candidats a, b, c, d. Tanmateix, per la manera en què s'ha votat és obvi que l'electorat està clarament dividit en dos sectors que tenen una presència respectiva del 75 % i 25 %. En canvi, en el conjunt escollit aquests dos sectors tenen una presència respectiva del 100 % i 0 %.

Certament, l'ideal de la representació proporcional demana elegir com a representants tres candidats del conjunt $\mathsf{X} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$ i un del conjunt $\mathsf{Y} = \{\mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}\}$, ja que $75/25 = 3/1$.

2.3 En l'exemple precedent, el fet que es reconegui la similitud entre els elements de X per una banda i els de Y per una altra és possible perquè els electors han seleccionat més d'un candidat. Si només n'haguessin seleccionat un, llavors no hi hauria cap pista sobre la relació de similitud entre candidats.

A més a més, per tal de capturar aquesta relació de la millor manera possible, és preferible no forçar l'elector a donar cap nombre concret de candidats. Per exemple, si hi ha 75 electors que s'identifiquen amb qualsevol dels candidats del conjunt $X' = \{a, b, c, d, e, f\}$ i cap altre, i 25 electors que s'identifiquen amb qualsevol dels de $Y' = \{g, h\}$ i cap altre, llavors el fet de demanar-los que seleccionin exactament quatre candidats no permetrà als partidaris de X' incloure tots els seus preferits, alhora que obligarà els partidaris de Y' a incloure algun element de X' en la seva llista, la qual cosa desdibuixarà la partició que hi ha realment entre X' i Y'. En canvi, si se'ls permet seleccionar un nombre arbitrari de candidats, llavors la votació pot posar de manifest aquesta partició. Evidentment, perquè quedi reflectida de la millor manera possible cal que cada elector inclogui tots els candidats que li semblen bé. És per això que *en el vot d'aprovació és essencial permetre que l'elector indiqui totes les opcions que li semblen adients*. Per descomptat, també cal que realment existeixi una partició del tipus que estem dient. Tot això és aplicable també a una partició en més de dues classes.

En l'exemple (3) és molt clara la divisió en dos punts de vista diferents. Però en general pot passar com a (1), on la relació de similitud entre candidats no és pas tan clara. Com ho hem de fer en un cas així?

3 El vot únic transferible

3.1 El mètode més conegut que aplica la idea de representació proporcional sense requerir als electors que es pronunciïn per un sol partit és el **vot únic transferible**. Aquest mètode utilitza el vot preferencial (en el sentit que hem dit a § 1, és a dir, un vot d'aprovació junt amb una ordenació de les opcions aprovades). En principi, les opcions que es consideren són els candidats individuals, independentment de si pertanyen a un partit o un altre, i de fet, independentment de si estan definits uns partits o no. Tot i això, s'aconsegueix un efecte de representació proporcional, la qual cosa vol dir que aquest mètode detecta d'alguna manera les similituds entre candidats a partir dels vots dels electors.

El mètode del vot únic transferible s'associa normalment a l'advocat anglès Thomas Hare, que el va proposar el 1857 i va obtenir un gran ressò a través del filòsof i aleshores membre del parlament anglès John Stuart Mill. De tota manera, l'any anterior havia estat utilitzat ja a Dinamarca, on el matemàtic danès Carl Christofer Georg Andræ, llavors ministre de Finances del seu país, l'havia proposat independentment. I encara abans, la mateixa idea l'havia utilitzat el 1840 a Austràlia Rowland Hill, i fins i tot el 1819 a Anglaterra Thomas Wright Hill, pare de l'anterior.

El mètode del vot únic transferible parteix del principi que cada diputat hauria de representar el mateix nombre d'electors. Aquest nombre d'electors per diputat s'anomena **quota** i nosaltres l'anomenem q. El seu valor es fixa des del principi i s'usa de la manera següent: mentre quedin més candidats que escons per assignar, el que determina que un candidat sigui elegit és que reuneixi —en el sentit que de seguida concretarem— un nombre de vots superior, o en tot cas igual, a la quota q.

D'ara endavant w i n representen, respectivament, el nombre d'electors i el nombre de representants que s'han d'elegir. Hare i Andræ prenien com a quota q el quocient $w/n =: q_0$ i l'objectiu era superar o igualar aquest valor. El 1868, però, l'advocat anglès Henry Richmond Droop va proposar de prendre q igual a $w/(n+1) =: q_D$ i requerir que el nombre de vots superi estrictament aquest valor. El valor q_0 rep el nom de **quota simple**, o **quota de Hare**, i q_D es coneix com a **quota de Droop.** Noteu que en el cas extrem $n = 1$, és a dir, l'elecció d'un sol representant comú per a tothom, la quota de Hare correspon a la noció d'unanimitat, mentre que la de Droop correspon a la noció de majoria absoluta.

La manera de reunir els vots requerits consisteix a figurar com a primera opció en la butlleta d'un elector, o alternativament, figurar-hi per sota d'altres candidats que ja han obtingut un escó o que no poden arribar a obtenir-ne cap. Tan bon punt un candidat assoleix la quota, se li assigna un escó i cadascun dels vots sobrants és transferit al candidat que el segueix en la butlleta. Quan no hi ha cap candidat que assoleixi la quota, llavors s'elimina el que en aquell moment té menys vots; si en aquest moment resten tants candidats com escons, aleshores aquests candidats resulten elegits independentment dels vots amb què comptin i finalitza el procediment; altrament, cadascun dels vots del candidat eliminat és transferit al candidat següent en la butlleta. En l'apartat que segueix ho il·lustrem amb un parell d'exemples.

Per ser exactes, Droop prenia com a quota a superar o igualar el primer enter N estrictament superior a $w/(n+1)$. Que un nombre enter (de vots) superi o iguali aquest valor N és exactament equivalent a superar estrictament el valor $w/(n+1)$. Tanmateix, amb els nombres fraccionaris de vots que sorgiran més avall, aquestes dues condicions no són exactament equivalents. D'altra banda, aquesta distinció també afecta la quantitat exacta de vots que es transferiran. Sobre aquestes qüestions, seguirem Irwin Mann en requerir que se superi estrictament la quota $w/(n+1)$ i al mateix temps transferir tot l'excés sobre aquesta quantitat [56, p. 271–272].

3.2 Vegem amb més detall un parell d'exemples. Considerem primer un cas similar a (3) però amb vots preferencials:

$$75 : \mathsf{a} > \mathsf{b} > \mathsf{c} > \mathsf{d}; \quad 25 : \mathsf{e} > \mathsf{f} > \mathsf{g} > \mathsf{h}. \tag{4}$$

Suposem que volem elegir $n = 4$ representants. La quota de Droop és $100/(4+1) = 20$. Per tant, resulten elegits directament tant a com e. En el cas de a sobren 55 vots, els quals passen a b; aquest resulta elegit i encara sobren 35 vots, els quals passen a c; aquest també resulta elegit, però els 15 vots que ara sobren i passen a d no són suficients perquè aquest últim candidat obtingui un escó. En el cas de e, només sobren 5 vots, els quals passen a f però també són insuficients per a donar-li un escó. En total, ha resultat elegit el conjunt de representants següent: $\{\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{e}\}$, que inclou tres membres del conjunt $\mathsf{X} = \{\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{c},\mathsf{d}\}$ i un del conjunt $\mathsf{Y} = \{\mathsf{e},\mathsf{f},\mathsf{g},\mathsf{h}\}$, tal com demana la noció de proporcionalitat.

Considerem ara l'exemple següent, on hi ha 96 electors:

$$34 : \mathsf{a} > \mathsf{b} > \mathsf{c} > \mathsf{d}; \quad 20 : \mathsf{b} > \mathsf{a} > \mathsf{d} > \mathsf{c}; \quad 21 : \mathsf{c} > \mathsf{d} > \mathsf{a} > \mathsf{b}; \quad 21 : \mathsf{d} > \mathsf{c} > \mathsf{b} > \mathsf{a}. \qquad (5)$$

Suposem que volem elegir $n = 3$ representants. La quota de Droop és $96/(3 + 1) = 24$. Per tant, resulta elegit directament el candidat a. Els 10 vots que li sobren a a passen a b, que resulta elegit i transfereix 6 vots; com que 10 dels 30 vots que havia obtingut b donaven c com a opció subseqüent i els altres 20 donaven a, ja elegit, i després d, és raonable mantenir la proporcionalitat i passar 2 dels 6 vots sobrants a c i els altres 4 a d. Com a resultat d'això queda elegit d, però no c. Per tant, resulta elegit el conjunt de representants següent: $\{\mathsf{a},\mathsf{b},\mathsf{d}\}$. Noteu que aquest conjunt inclou dos membres del conjunt $\mathsf{X} = \{\mathsf{a},\mathsf{b}\}$ i només un del conjunt $\mathsf{Y} = \{\mathsf{c},\mathsf{d}\}$, la qual cosa està d'acord amb el fet que els vots (5) es poden veure en la forma

$$54 : \mathsf{X} > \mathsf{Y}; \quad 42 : \mathsf{Y} > \mathsf{X}. \qquad (6)$$

En canvi, si ens haguéssim guiat només per les primeres opcions dels vots (5) haguéssim elegit només un membre de X i dos de Y.

En considerar altres exemples, o petites variacions dels precedents, se susciten de seguida certes qüestions secundàries que requereixen regles addicionals en les quals no entrarem i sobre les quals hi ha diverses variants.

3.3 En el cas especial $n = 1$ —un sol representant comú per a tots— el vot únic transferible pren la forma que descrivim a continuació, la qual es coneix com a **vot alternatiu** [56, p. 193–195].

Si un candidat figura com a primera opció en més de la meitat dels vots, aleshores resulta elegit. En cas contrari, s'elimina el candidat que té menys vots i cadascun d'aquests vots es transfereix al candidat que ocupa el lloc següent de la llista en el vot. Fet això, es torna a mirar si algun candidat reuneix més de la meitat dels vots, en el qual cas resulta elegit. Si no n'hi ha cap que compleixi aquesta condició, aleshores es procedeix novament a eliminar el que té menys vots i a transferir els seus vots. Aquest procés es repeteix successivament fins que resulti elegit un candidat. A tot això cal afegir que en cada volta es revisa el nombre total de vots per tal de comptar només els que encara contenen algun candidat no eliminat.

Aquest procediment es coneix també com a «doble volta instantània» (*instant runoff voting*), però aquest nom no és gaire encertat, ja que en general poden ser necessàries més de dues voltes.

3.4 Tot i que el procediment del vot únic transferible està clarament inspirat en la idea de representació proporcional, segons com es miri, la seva proporcionalitat no és gens clara: què és proporcional a què? La regla de Jefferson i D'Hondt i altres regles similars de repartiment responen clarament a un intent que el nombre d'escons assignats a un partit sigui tan proporcional al nombre de vots obtinguts com sigui possible. Però aquí ni tan sols estan definits els partits. I encara que ho estiguessin, tampoc estaria gens clar què vol dir el nombre de vots obtinguts.

Tanmateix, en certes situacions s'evidencia l'existència d'una propietat realment relacionada amb la proporcionalitat. Concretament, es tracta del cas en què un determinat nombre v d'electors coincideixen a encapçalar la seva llista de preferències per un mateix conjunt X de candidats, en un ordre o un altre. Aquests vots es poden interpretar com a favorables al conjunt X. Segons el **criteri de proporcionalitat de Droop** —vegeu, per exemple, [36, § 3.1]—, si $v > mq_D$ amb m enter, llavors haurien d'obtenir un escó almenys m candidats del conjunt X, sempre que aquest conjunt contingui efectivament tants candidats. El compliment d'aquest criteri per part del vot únic transferible el va posar en relleu el 1984 Michael Dummett [15, p. 282–283] (vegeu també [58, 55]).

> L'exemple següent, tret de [24, § 204], mostra l'interès d'aquesta propietat: S'han d'elegir cinc representants a partir dels 100 vots següents: $51 : \mathsf{a} > \mathsf{b} > \mathsf{c} > \mathsf{d} > \mathsf{e}$; $17 : \mathsf{f} > \mathsf{g} > \mathsf{h} > \mathsf{i} > \mathsf{j}$; $17 : \mathsf{g} > \mathsf{f} > \mathsf{h} > \mathsf{i} > \mathsf{j}$; $15 : \mathsf{h} > \mathsf{f} > \mathsf{g} > \mathsf{i} > \mathsf{j}$. Aquests vots es poden veure en la forma $51 : \mathsf{X}$; $49 : \mathsf{Y}$ amb $\mathsf{X} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}, \mathsf{e}\}$ i $\mathsf{Y} = \{\mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}, \mathsf{i}, \mathsf{j}\}$, de manera que l'ideal de la representació proporcional demana tres representants del conjunt X i dos del conjunt Y. La quota de Droop val $q_D = 100/6 = 50/3$, de manera que es compleix $51 > 3q_D$ i $49 > 2q_D$. D'acord amb la propietat que acabem de comentar, el vot únic transferible basat en la quota de Droop dóna el resultat desitjat. En canvi, la quota simple $q_0 = w/n = 20$ dóna dos representants de X i tres de Y.

3.5 El vot únic transferible s'utilitza sobretot en països de la *Commonwealth*. En la seva versió més tradicional, que s'usa per exemple en les eleccions al parlament irlandès [27], les transferències de vot entre candidats es fan materialment, transportant les butlletes d'una banda a l'altra. Això posa en evidència el fet que cada elector queda assignat a un diputat en concret.

Tanmateix, té l'inconvenient que, en general, segons quines butlletes són transferides, pot sortir elegit un candidat o un altre (vegeu, per exemple, [56, p. 272–273]). Aquest problema s'arregla en certes versions més elaborades on la representació d'un elector pot quedar distribuïda entre diversos diputats. Un mètode d'aquest tipus és utilitzat des de 1984 per la *Royal Statistical Society* a l'hora d'elegir els membres del seu *Council* [22].

3.6 Malgrat tot això, el vot únic transferible té un defecte gairebé inacceptable. Suposem que amb uns vots concrets resulta seleccionat un determinat candidat x. Imaginem que aquests vots experimenten un canvi que només actua en el sentit d'afavorir aquest candidat x. Tothom estarà d'acord que després d'aquest canvi hauria de continuar seleccionat x. D'aquesta propietat en direm **monotonia** (respecte al contingut dels vots). Doncs bé, el vot únic transferible no la compleix! Tot seguit en donarem un exemple amb $n = 1$. Segons el que hem vist més amunt, això significa que aquest defecte està present ja en el conegut mètode de la doble volta per a l'elecció d'un sol representant, el qual s'utilitza, per exemple, en les eleccions presidencials franceses.

Vet aquí un exemple. S'ha d'elegir un sol representant i hi ha tres candidats a, b, c. Suposem que els electors expressen les preferències següents:

$$36 : \mathsf{a} > \mathsf{b} > \mathsf{c}; \quad 30 : \mathsf{c} > \mathsf{a} > \mathsf{b}; \quad 24 : \mathsf{b} > \mathsf{c} > \mathsf{a}; \quad 10 : \mathsf{b} > \mathsf{a} > \mathsf{c}. \tag{7}$$

La quota de Droop és $100/2 = 50$. Com que no hi ha cap candidat que la superi amb les primeres preferències dels electors, es passa a eliminar el que en té menys, que resulta ser el candidat c, amb 30 vots. Aquests vots passen a a, que en reuneix 66 i, per tant, resulta elegit. Suposem ara que els darrers deu electors canvien d'opinió en sentit favorable a a: en lloc de $\mathsf{b} > \mathsf{a} > \mathsf{c}$, ara voten $\mathsf{a} > \mathsf{b} > \mathsf{c}$. Aquest canvi també porta a l'eliminació d'un candidat, però ara el que resulta eliminat és b, amb 24 vots, i aquests vots passen a c, que en reuneix 54 i, per tant, resulta elegit. Així doncs, el candidat a ha deixat de ser elegit tot i que els vots han variat clarament a favor seu.

Aquest defecte del vot únic transferible és assenyalat a [13] i [7, p. 38] (vegeu també [59]). Davant de mancances inesperades com aquesta, els defensors d'un mètode —en aquest cas el vot únic transferible— solen argumentar que es tracta de fets molt poc freqüents. De tota manera, el que acabem de veure no hauria de passar mai. Si una variació clarament favorable a un determinat candidat fa que aquest deixi de sortir elegit, vol dir que almenys un dels dos resultats —abans o després de la variació— és incorrecte.

Arran d'aquests fenòmens, Michael Dummett, el mateix que el 1984 havia posat en relleu el compliment del criteri de proporcionalitat de Droop, afirmava el 1992 que el vot únic transferible és el segon mètode més dolent després del vot uninominal, on només es permet indicar una sola opció [16, p. 110–111].

Respecte a aquesta qüestió és molt interessant la contribució feta el 1987 per Douglas Woodall [57]. Aquest autor va demostrar la impossibilitat matemàtica d'un mètode basat en el vot preferencial que combini les propietats de proporcionalitat i monotonia que estem considerant amb unes altres que també són presents en el vot únic transferible. La primera d'aquestes propietats addicionals demana simplement que si els electors es limiten a indicar una sola opció, resultin elegides les opcions més votades. L'altra requereix que les opcions menys preferides d'una butlleta mai no ajudin ni perjudiquin les més preferides. Aquesta última condició és prou desitjable, ja que altrament els electors es poden veure conduïts a ometre o falsejar les seves veritables preferències. La demostració que dóna Woodall de la impossibilitat esmentada consisteix simplement a posar un exemple concret on l'aplicació de les diverses propietats permet arribar a una contradicció.

Per a més detalls sobre el mètode del vot únic transferible, remetem el lector a [56, p. 267–279].

4 Candidatures col·lectives

4.1 Tal com hem dit en la introducció, en el que segueix adoptem un marc general on les opcions sobre les quals s'expressa l'elector són conjunts de candidats individuals. Aquests conjunts, que anomenarem **candidatures,** són els mateixos per a tots els electors i poden estar reduïts a un sol candidat, en el qual cas es recupera el plantejament original.

Les candidatures col·lectives poden ser fixades en el plantejament de la votació. Aquest seria el cas de les llistes tancades que presenten els partits o coalicions electorals, llevat que aquí tenim la intenció que l'elector no hagi de limitar el seu vot a escollir-ne només una.

Tanmateix, les candidatures col·lectives també poden sorgir de manera espontània quan es vota en termes de candidats individuals. Així, en la votació (3) es poden veure com a candidatures col·lectives els conjunts $\mathsf{X} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$ i $\mathsf{Y} = \{\mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h}\}$. En canvi, en la votació

$$65 : \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}; \quad 15 : \mathsf{a}, \mathsf{f}, \mathsf{h}; \quad 20 : \mathsf{e}, \mathsf{f}, \mathsf{g}, \mathsf{h} \tag{8}$$

hauríem de prendre $\mathsf{X1} = \{\mathsf{a}\}$, $\mathsf{X2} = \{\mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d}\}$, $\mathsf{Y1} = \{\mathsf{e}, \mathsf{g}\}$ i $\mathsf{Y2} = \{\mathsf{f}, \mathsf{h}\}$. En termes d'aquests conjunts, aquesta última votació es veu en la forma següent:

$$65 : \mathsf{X1}, \mathsf{X2}; \quad 15 : \mathsf{X1}, \mathsf{Y2}; \quad 20 : \mathsf{Y1}, \mathsf{Y2}. \tag{9}$$

Quan les candidatures sorgeixen de manera espontània tot i que es vota en termes de candidats individuals, els diversos elements d'una mateixa candidatura se solen qualificar de **clons.**

En el marc general que introduïm, una **assignació d'escons** es limita a especificar quants escons rep cada candidatura i. Aquest nombre l'anomenarem n_i. El seu valor no pot superar en cap cas el nombre de candidats individuals que formen la candidatura en qüestió. D'aquest valor màxim en direm la **capacitat** de la candidatura i, i l'anomenarem v_i. En el cas de candidatures reduïdes cadascuna a un sol candidat individual tenim $v_i = 1$ per a tota i. En el cas de llistes de partit s'acostuma a entendre que $v_i = n$ per a tota i.

Una assignació d'escons en el sentit que acabem de dir no acaba de determinar quins candidats concrets resulten elegits. A aquest efecte, hi ha diverses possibilitats. Una d'aquestes és simplement fer un sorteig. Una altra és utilitzar un ordre prefixat dins de cada candidatura, tal com fan els partits en el sistema de llistes tancades. Finalment, es pot considerar la possibilitat que l'elector també expressi preferències entre candidats individuals, en el qual cas correspondrà basar-se en aquesta informació.

De tota manera, en el que segueix ens ocupem només de la primera part del problema, és a dir, la determinació del nombre d'escons que rep cada candidatura.

4.2 Quan es vota en termes de candidats individuals però existeix una agrupació d'aquests en partits i uns líders reconeguts dins de cada partit, aleshores el vot d'aprovació dóna peu a les anomenades estratègies de **decapitació** [8, p. 25, 50, 56]. Si els seguidors d'un determinat partit aproven sistemàticament tots els seus candidats, aleshores uns pocs vots que aprovin la mateixa llista llevat dels líders poden aconseguir que aquests últims no resultin elegits.

En rigor, això dependrà del mètode que s'utilitzi per determinar els candidats elegits. Però ja es veu a venir que tots els mètodes raonables tindran aquest problema, i el mètode de Phragmén que utilitza el vot d'aprovació no n'és una excepció. Davant d'això, Phragmén va proposar unes certes variacions que utilitzen el vot preferencial (vegeu l'apèndix B).

Tanmateix, des del moment que tenen sentit les estratègies de decapitació vol dir que hi ha unes candidatures col·lectives ben definides, de manera que es pot plantejar la votació en termes d'aquestes candidatures col·lectives, i llavors desapareix la qüestió de la decapitació.

5 La regla de Jefferson i D'Hondt i les seves alternatives

5.1 La regla de Jefferson i D'Hondt i les seves alternatives corresponen al cas en què els electors voten en termes de candidatures col·lectives però es limiten a indicar-ne només una. D'altra banda, també suposen que cada candidatura pot arribar a proporcionar n representants. D'aquest escenari en direm a partir d'ara el **cas uninominal no limitat.**

En aquest escenari, el principi de proporcionalitat demana que els nombres d'escons assignats n_i siguin proporcionals als nombres de vots obtinguts, que d'ara endavant seran denotats per w_i.

La proporcionalitat exacta la donarien els valors següents, que anomenarem **quotes exactes:**

$$n_i = n\, w_i / w, \tag{10}$$

$$\text{on} \quad w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_I, \tag{11}$$

i I denota el nombre de candidatures. Noteu que les quotes exactes s'obtenen a partir dels nombres de vots w_i tot dividint-los per la quantitat $q_0 = w/n$. Més amunt, en el context del vot únic transferible, ens referíem a aquesta última quantitat com a «quota simple». Aquí usarem una altra terminologia on aquesta quantitat, i certes alternatives que de seguida veurem, reben el nom de **divisor.**

Però en general les quotes exactes no seran nombres enters, de manera que cal decidir com arrodonir-les per tal de desviar-se de la proporcionalitat tan poc com sigui possible.

Una possibilitat molt natural és la regla de les **restes majors,** que consisteix a *assignar d'entrada tants escons com digui la part entera de la quota exacta, i després donar-ne un de més als partits amb restes més grans.*

5.2 Tanmateix, en l'esperit del principi de proporcionalitat és més propi procedir de la manera següent: *trobar un divisor q de manera que, en formar els quocients w_i/q i arrodonir el seu valor per defecte, la suma dels nombres* *enters obtinguts sigui exactament n* (la qual cosa requereix $q \leq q_0$). Aquesta regla va ser proposada el 1882 per l'advocat belga Victor D'Hondt. Noranta anys abans, Thomas Jefferson havia proposat exactament la mateixa regla amb motiu del repartiment territorial dels escons de la cambra baixa dels Estats Units d'Amèrica. D'acord amb això, d'ara en endavant en direm **regla de Jefferson i D'Hondt**.

Encara que a la pràctica és molt poc freqüent, de vegades hi pot haver empats que donin lloc a indecisions. Per exemple, amb la regla de Jefferson i D'Hondt ens trobem amb problemes a l'hora de repartir dos escons entre dos partits que han obtingut, respectivament, $\boldsymbol{w} = (2000, 1000)$ vots. Per a $q \in (1000, 2000)$ les parts enteres de w_i/q són $(1, 0)$, mentre que per a $q \leq 1000$ són $(2, 1)$, i cap d'aquests dos repartiments dóna un total de dos escons. Tanmateix, per a dades molt properes obtenim tant el repartiment $\boldsymbol{n} = (2, 0)$, per exemple per a $\boldsymbol{w} = (2001, 999)$, com el repartiment $\boldsymbol{n} = (1, 1)$, per exemple per a $\boldsymbol{w} = (1999, 1001)$. Davant d'això, en el cas problemàtic $\boldsymbol{w} = (2000, 1000)$ és natural admetre qualsevol d'aquests dos repartiments. En general, admetrem, doncs, la possibilitat de més d'una solució. En relació amb això i amb la regla de Jefferson i D'Hondt, resulta convenient redefinir la part entera d'un nombre real z de manera que quan z sigui enter s'admetin llavors tant el mateix valor z com $z - 1$. Amb aquesta finalitat farem ús de la notació següent:

$$\llbracket z \rrbracket = \begin{cases} \text{l'enter més gran inferior a } z, & \text{si } z \text{ no és enter;} \\ \text{o bé } z \text{ o bé } z - 1, & \text{si } z \text{ és enter.} \end{cases} \tag{12}$$

Equivalentment, $\llbracket z \rrbracket$ és qualsevol enter que satisfaci les desigualtats

$$\llbracket z \rrbracket \leq z \leq \llbracket z \rrbracket + 1. \tag{13}$$

Per parlar amb tota propietat hauríem de considerar $\llbracket z \rrbracket$ com un conjunt i escriure $k \in \llbracket z \rrbracket$ en lloc de $k = \llbracket z \rrbracket$; tanmateix, per als nostres propòsits serà suficient suposar que s'ha fet una elecció concreta del valor de $\llbracket z \rrbracket$ sempre que z sigui enter.

A més de la formulació que n'hem donat més amunt, la regla de Jefferson i D'Hondt es pot reformular de les diverses maneres equivalents que recull el resultat següent:

TEOREMA 5.1. *Siguin $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_I)$ uns nombres reals positius i $\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_I)$ uns nombres enters no negatius restringits a sumar un valor donat n. Les condicions següents són totes equivalents:*

(a) *Existeix un nombre real positiu q tal que $n_i = \llbracket w_i/q \rrbracket$ per a tota i.*

(b) *n_i és el nombre de vegades que w_i figura com a numerador en els n quocients més grans de la forma w_i/k amb $i = 1, 2, \ldots, I$ i $k = 1, 2, \ldots$*

(c) *$\boldsymbol{n}$ s'obté recursivament procedint de la manera següent: Per a $n = 0$ es posa $n_i = 0$ per a tota i. El pas de n a $n + 1$ es fa incrementant n_i a $n_i + 1$ per a una i qualsevol que maximitzi la quantitat $w_i/(n_i + 1)$.*

(d) $\min_i w_i/n_i \geq \max_i w_i/(n_i+1)$.

(e) $\boldsymbol{n}$ *maximitza la quantitat* $\min_i w_i/n_i$*, i a més, minimitza el nombre de valors de* i *que realitzen el mínim que apareix en aquesta última expressió.*

El quocient w_i/n_i que apareix als apartats (d) i (e) es pot veure com el preu, en vots, que li costa cada escó a la candidatura i. Des d'aquest punt de vista, les desviacions respecte a la proporcionalitat no són més que diferències en el preu de cada escó per a les diferents candidatures. La caracterització (e) del resultat precedent correspon, doncs, a dir que les candidatures més afavorides siguin tan poc afavorides com sigui possible, i que a més, el nombre d'aquestes candidatures sigui el més petit possible. En el cas habitual d'absència d'empats entre els quocients w_i/k, aquesta caracterització, que aleshores es redueix al primer criteri que hi apareix, va ser posada en relleu el 1901 per Léon Rouyer, i també el 1910 per Maurice Equer. La caracterització general, vàlida en presència d'empats, es demostra a [36, § 2].

En lloc del quocient w_i/n_i, és interessant considerar també el seu invers n_i/w_i. Aquest ens dóna la fracció d'escó que correspon a cadascun dels electors que han votat la candidatura i. Dit d'una altra manera, ens mesura la quantitat de representació que obté cadascun d'aquests electors. Des d'aquest punt de vista, la caracterització (e) del teorema 5.1 ens diu que la regla de Jefferson i D'Hondt minimitza la representació dels electors més representats.

5.3 En lloc d'arrodonir els quocients w_i/q per defecte, com fa la regla de Jefferson i D'Hondt, també hi ha altres opcions. En particular, és molt natural l'arrodoniment a l'enter més proper (que admet dues possibilitats en el cas de valors semienters). El resultat és la regla de **Webster i Sainte-Laguë**: *trobar un divisor* q *de manera que, en formar els quocients* w_i/q *i arrodonir-los a l'enter més proper, la suma dels nombres enters obtinguts sigui exactament* n. Aquesta regla va ser proposada per Daniel Webster el 1832 en el context del repartiment territorial, i per André Sainte-Laguë el 1910 en el context que aquí ens ocupa d'assignar un nombre de representants a cada candidatura segons els vots obtinguts.

Més concretament, Sainte-Laguë hi va arribar com a resultat de buscar la manera de minimitzar la suma dels quadrats de les diferències de representació entre els electors. Segons hem dit més amunt, la representació que obté un elector que ha votat la candidatura i és el quocient n_i/w_i del nombre d'escons que rep aquesta candidatura pel nombre d'electors que l'han votat. Si la proporcionalitat fos perfecta, tots aquests quocients serien iguals, i valdrien, per tant, n/w. En conseqüència, s'anul·laria la quantitat següent, que expressem en dues formes que són exactament equivalents:

$$y = \sum_i w_i \left(\frac{n_i}{w_i} - \frac{n}{w}\right)^2 = \frac{1}{2w} \sum_{i,j} w_i w_j \left(\frac{n_i}{w_i} - \frac{n_j}{w_j}\right)^2. \qquad (14)$$

En termes estadístics, n/w i y/w no són altra cosa que la mitjana i variància de les representacions dels electors, és a dir, dels nombres n_i/w_i repetits cadascun amb la freqüència w_i. Doncs bé, Sainte-Laguë va demostrar que el criteri de minimitzar la suma y portava a la regla que hem enunciat més amunt:

TEOREMA 5.2. *La regla de repartiment de Webster i Sainte-Laguë és l'única que minimitza la suma y dels quadrats de les diferències de representació entre els electors.*

La regla de Webster i Sainte-Laguë aconsegueix millors resultats que la de Jefferson i D'Hondt pel motiu que les desviacions respecte a la proporcionalitat depenen de la mida dels partits. Més concretament, amb la regla de Jefferson i D'Hondt ocorre que les desviacions $\delta_i = n_i - nw_i/w$ tendeixen a ser positives per als partits grans, és a dir, per a valors grans de w_i/w, i negatives per als petits. Aquest efecte, que té un caràcter probabilístic, adquireix especial importància quan el territori està dividit en moltes circumscripcions, ja que aleshores es produeix un efecte acumulatiu. En canvi, la regla de Webster i Sainte-Laguë és molt més equilibrada des d'aquest punt de vista.

Per a més detalls sobre la regla de Jefferson i D'Hondt i les seves alternatives, remetem el lector a [36] i [49].

6 La correspondència de representació

6.1 Els mètodes de representació proporcional no es limiten a decidir quins candidats es converteixen en diputats; darrere d'aquesta decisió hi ha també una especificació —si més no potencial— de la **correspondència de representació,** és a dir, la correspondència entre electors i representants, la qual s'ha d'amotllar a les restriccions i possibles preferències expressades pels electors. La proporcionalitat que es voldria aconseguir es refereix a les quantitats de representants i d'electors que es posen en correspondència. La idea és que el quocient d'aquestes dues quantitats hauria de ser el mateix per a qualsevol sector de la societat. Una altra manera de veure-ho és que cada elector hauria de tenir assignada la mateixa quantitat de representants. Com que hi ha molts menys representants que electors, a la pràctica aquesta quantitat de representants per elector serà una fracció molt petita de la unitat. Però el que importa no és això, sinó que tots els electors tinguin uns valors «com més iguals millor» d'aquesta variable. D'ara endavant ens hi referirem com la (quantitat de) **representació** obtinguda per l'elector en qüestió.

Quan els vots es limiten a escollir una sola candidatura, com hem considerat en la secció precedent, llavors cada elector queda representat pels diputats que hagi obtingut la candidatura escollida, i aquests diputats es reparteixen a parts iguals entre tots els electors que han votat aquesta candidatura. Per tant, cada elector que ha optat per la candidatura i obté una representació igual a n_i/w_i, on recordem que n_i denota el nombre d'escons obtinguts per aquesta candidatura i w_i, el nombre d'electors que hi han optat.

Tal com ja hem dit, les versions més tradicionals del vot únic transferible assignen a cada elector un sol representant o bé cap. En aquest escenari, el principi d'igualtat entre electors també porta a repartir cada representant a parts iguals entre els electors als quals és assignat. La proporcionalitat (aproximada) del mètode deriva del fet que cada escó requereix un nombre d'electors superior a la quota i que els vots sobrants són transferits a altres candidats.

Ja hem dit també que en les versions més elaborades del vot únic transferible la representació d'un elector sol quedar distribuïda entre diversos diputats. A continuació considerarem amb més detall aquest tipus de correspondències entre electors i representants, ja que també apareixen en els mètodes que estudiarem. D'altra banda, les considerarem només en el marc del vot d'aprovació, que és el que utilitzen aquests mètodes. En aquest cas, la restricció que ha de complir la correspondència de representació és molt clara: l'assignació de representants a un elector només pot utilitzar els candidats que ell ha aprovat.

6.2 Tot seguit concretem la manera d'especificar una correspondència de representació.

Sovint descriurem els vots mitjançant una enumeració freqüencial. És a dir, que en lloc de donar els vots un a un, direm quants electors han votat d'una o una altra manera (de fet, és el que hem fet des del principi en donar exemples de votacions). Les maneres de votar les anomenarem **opinions,** i el nombre d'electors que han expressat l'opinió k l'anomenarem u_k. Si estem enumerant els vots un a un, llavors $u_k = 1$ per a qualsevol k. Per a referir-nos als electors que han expressat l'opinió k, tot sovint direm simplement «els electors k».

Per a especificar el contingut dels vots d'aprovació, utilitzarem una variable binària indexada per i i k: a_{ik} val 1 si els electors k aproven la candidatura i; en cas contrari val 0. Alternativament, ho expressarem també escrivint $k \surd i$ en el primer cas, i $k \not\surd i$ en el segon. El conjunt de candidatures aprovades pels electors k el denotarem A_k. Aquest conjunt el suposarem sempre no buit. Dit d'una altra manera, només tindrem en compte els vots que aproven alguna candidatura. El nombre total de vots en consideració és

$$w = \sum_k u_k. \tag{15}$$

El nombre d'aprovacions obtingudes per la candidatura i és

$$w_i = \sum_k a_{ik} u_k = \sum_{k \surd i} u_k. \tag{16}$$

D'altra banda, el nombre de candidatures aprovades pels electors k és

$$\sigma_k = \sum_i a_{ik}. \tag{17}$$

La notació que hem introduït fins aquí es referia a les dades del problema. Parlem ara de les incògnites. Tot gira al voltant de la correspondència de representació, la qual especificarem mitjançant una variable real, positiva o nul·la, indexada també per i i k; aquesta variable la denominarem x_{ik} i el seu valor dóna la fracció de la candidatura i que és assignada a cada elector de l'opinió k. El nombre d'escons obtinguts per la candidatura i és

$$n_i = \sum_k x_{ik} u_k. \tag{18}$$

D'altra banda, la suma

$$r_k = \sum_i x_{ik} \tag{19}$$

dóna la quantitat de representació que obté cada elector de l'opinió k.

Les restriccions que tenim són les següents. En primer lloc, les fraccions de representació han de ser positives o nul·les:

$$x_{ik} \geq 0, \quad \text{per a qualssevol } i, k. \tag{20}$$

En segon lloc, la representació de cada elector s'ha de restringir a les candidatures que ell aprova:

$$x_{ik} = 0, \quad \text{sempre que } a_{ik} = 0. \tag{21}$$

En tercer lloc, el nombre d'escons que obté una candidatura ha de ser enter, no negatiu, i inferior o igual a la seva capacitat v_i (§ 4):

$$n_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq n_i \leq v_i. \tag{22}$$

Finalment, cal que el nombre total d'escons sigui el desitjat:

$$\sum_i n_i = n. \tag{23}$$

Noteu que la restricció (21) permet limitar la suma (18) als electors k que aproven la candidatura i, i una cosa similar passa amb la suma (19):

$$n_i = \sum_{k \surd i} x_{ik} u_k, \tag{24}$$

$$r_k = \sum_{i \mid k \surd i} x_{ik}. \tag{25}$$

En vista de (18) o (24), és clar que si totes les quantitats u_k es multipliquen per una mateixa constant i totes les quantitats x_{ik} es divideixen per aquesta mateixa constant, aleshores s'obté el mateix repartiment (n_i). Per tant, el que importa no són els valors concrets de u_k i x_{ik}, sinó les seves proporcions respectives, és a dir, els quocients u_k/u_ℓ i $x_{ik}/x_{i\ell}$.

L'objectiu que es tracta d'aconseguir és que les representacions r_k siguin com més iguals millor per a totes les opinions k. Com és ben sabut —vegeu, per exemple, [36, § 5]— això admet diverses interpretacions, les quals donaran lloc a mètodes diferents.

6.3 La noció de correspondència de representació apareix també en els treballs de Monroe [35] i de Potthoff i Brams ([47], [5, ch. 6]). Entre les diverses possibilitats que exploren aquests autors, s'hi pot trobar una idea d'alguna manera dual a la precedent: minimitzar una mesura de la manca de representativitat (*misrepresentation*), és a dir, $\sum_{i,k}(1 - a_{ik})x_{ik}u_k$, sota les restriccions (20), (22), (23) i una altra que imposa una mateixa quantitat predeterminada de representació r_k per a qualsevol k (a canvi d'això no s'imposa pas la restricció (21), i per tant no valen ni (24) ni (25), sinó solament (18) i (19)). En virtut de (18) i (23), aquest plantejament equival a maximitzar la representativitat $\sum_{i,k} a_{ik}x_{ik}u_k$ sota les condicions esmentades.

6.4 Suposem per un moment que no hi hagués la restricció (22), és a dir, que els nombres d'escons n_i poguessin ser fraccionaris i prendre qualsevol valor entre 0 i n. Suposem també que cada elector ha aprovat almenys una candidatura. En aquestes condicions no hi ha obstacle per a aconseguir que les representacions r_k siguin exactament iguals (i coincideixin, per tant, amb n/w). En efecte, per a cada opinió k es poden trobar fàcilment unes x_{ik} que compleixin les condicions (20)–(21) i tinguin com a suma el valor n/w.

Si els electors k han aprovat més d'una candidatura, aleshores aquesta assignació de valors a les x_{ik} es pot fer de moltes maneres diferents. Davant d'això, el més natural és tractar de la mateixa manera totes les candidatures aprovades per uns mateixos electors. És a dir, amb la notació que hem introduït a (17), prendre $x_{ik} = (n/w)/\sigma_k$ per a qualsevol i tal que $k \surd i$ (i $x_{ik} = 0$ per a qualsevol i tal que $k \not\surd i$). Els nombres (fraccionaris) d'escons que resulten per a cada candidatura són $n_i = (n/w) \sum_{k \surd i} u_k/\sigma_k$. Aquests nombres són exactament proporcionals a les quantitats

$$\widehat{w}_i = \sum_{k \surd i} \frac{u_k}{\sigma_k}, \tag{26}$$

les quals compten els vots que obté cada candidatura quan cada vot es reparteix a parts iguals entre totes les candidatures que hi són aprovades.

Així doncs, en el supòsit que n_i/n pogués prendre qualsevol valor fraccionari entre 0 i 1, aleshores posant $n_i/n = \widehat{w}_i/w$ s'aconsegueix alhora una representació igual de tots els electors i un tractament igual de les diverses candidatures. Tot i que el supòsit que considerem contradiu la restricció dels n_i a valors enters, hom s'hi acosta cada vegada més en el límit $n \to \infty$ sempre que les candidatures tinguin capacitat màxima $\nu_i = n$. *És raonable, doncs, demanar que en aquest límit el quocient n_i/n s'acosti al valor $\widehat{w}_i/w$.*

Per a valors finits de n o candidatures individuals ($\nu_i = 1$) les dues condicions d'igualtat de què parlàvem fa un moment —entre electors i entre candidatures— fàcilment deixen de poder-se complir simultàniament.

Davant d'això, és natural pensar a implementar la restricció a nombres enters mitjançant alguna regla de repartiment enter, com ara la de Jefferson i D'Hondt o la de Webster i Sainte-Laguë, aplicada a les quantitats $\widehat{w}_i$.

De fet, D'Hondt proposava una regla d'aquesta mena per a tractar els vots «mixtos», és a dir, els que combinaven candidats de diferents partits. A diferència del que nosaltres considerem, un vot d'aquest tipus combina diversos partits en unes proporcions no necessàriament iguals, ja que pot contenir més candidats d'un partit que d'un altre. En aquest context és raonable procedir com proposava D'Hondt ([10, p. 25–30], [11, p. 32–33, 43–49]), és a dir, que cada vot d'aquest tipus sigui dividit entre els partits en qüestió en proporció als respectius nombres de candidats (la qual cosa correspon a substituir (26) per una expressió més general de la forma $\widehat{w}_i = \sum_{k\surd i} \alpha_{ik} u_k$ amb $\sum_{i\,|\,k\surd i} \alpha_{ik} = 1$). Aquesta regla també està clarament enunciada a [2, princip IV].

Tanmateix, el que vol expressar un vot d'aprovació no és pas una divisió en parts iguals, sinó simplement un conjunt de possibilitats acceptables, la qual cosa permet donar preferència a l'objectiu fonamental d'aconseguir que les representacions r_k siguin com més iguals millor. Aquesta és la idea essencial del mètode de Phragmén, el qual estudiarem detalladament en les properes seccions.

El malencert d'aplicar una regla de repartiment enter a les quantitats $\widehat{w}_i$ és especialment acusat en el cas de candidatures individuals, és a dir, amb la restricció $n_i \in \{0, 1\}$. En efecte, en aquest cas qualsevol regla raonable de repartiment enter d'acord amb unes quantitats donades es redueix a seleccionar els n valors més grans d'aquestes quantitats. Si ho apliquem a l'exemple (3) amb les quantitats (26) —i també amb les quantitats (16)— aleshores surten elegits els quatre candidats més votats, la qual cosa és totalment contrària a l'esperit de la representació proporcional.

6.5 En contra del plantejament que estem fent es pot objectar que voler especificar quin diputat representa cada elector és una utopia, i més encara si la representació d'un elector la repartim entre diversos diputats. A la pràctica, l'únic que importa és quins candidats són elegits diputats. Això és ben cert. Però cal recordar que parlem de vots on es poden aprovar diverses candidatures. En aquest context, el problema de decidir quin repartiment d'escons és més adient per a representar el conjunt de l'electorat no és pas senzill. En l'esperit de la representació proporcional, el que toca fer és considerar la correspondència detallada (x_{ik}) i buscar la que doni unes representacions (r_k) més equitatives, en algun sentit o un altre que caldrà especificar.

Un problema anàleg que pot ajudar a entendre el que ens ocupa és el següent: en lloc d'electors als quals cal donar representació, tenim un grup de persones que necessiten alimentació; en lloc de candidats, tenim aliments de diversos tipus, els quals mesurem amb una unitat comuna (que podria correspondre, per exemple, a un determinat contingut energètic). De cada aliment n'hi ha un determinat nombre enter d'unitats, i el consum que se'n faci també ha de ser un nombre enter d'unitats (si s'enceta una unitat llavors cal consumir-la tota). L'objectiu és repartir una quantitat total determinada n d'aliments d'una manera com més equitativa millor, tot respectant la restricció de cada persona als aliments que ella digui.

L'analogia esdevindria més completa si suposéssim que darrere cada aliment hi ha algú, el seu fabricant, que té especial interès que es consumeixi aquell aliment i no els altres, la qual cosa intenta aconseguir mitjançant publicitat i potser també mitjançant algun canvi en l'aliment que l'acosti més als gustos existents.

6.6 Una correspondència de representació pot ser mostrada sobre el paper mitjançant el que en direm un **diagrama de rectangles,** que és una variació del que fa Phragmén a [43, p. 89–90]. La figura 1 en dóna un exemple.

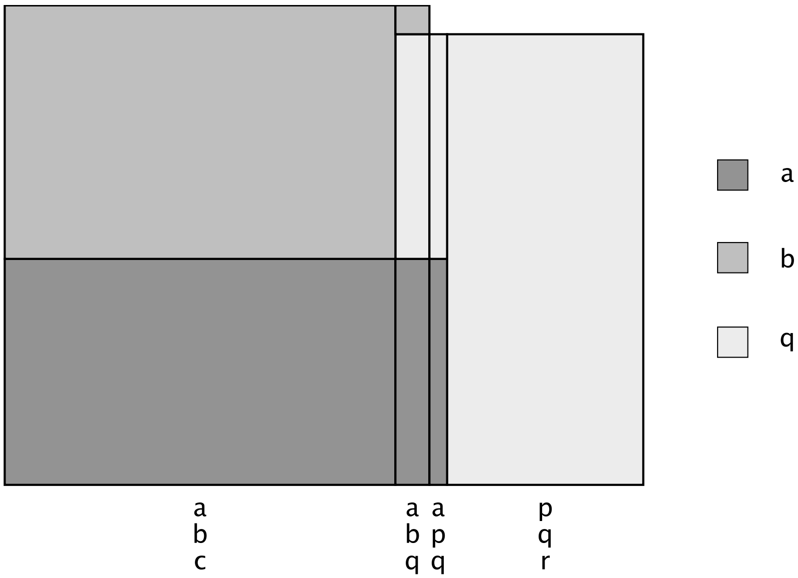

FIGURA 1: Diagrama de rectangles d'una correspondència de representació.

La base de la figura està dividida en tants segments com opinions k s'han manifestat. A sota de cada segment hem indicat la corresponent llista de candidatures aprovades. El segment k té una longitud proporcional a u_k, el nombre d'electors que han manifestat aquella opinió. A sobre del segment k hi ha tants rectangles com candidatures i donen representació a aquests electors. En cada rectangle s'indica a quina candidatura correspon; aquí ho fem mitjançant un codi de colors. L'altura del rectangle ik és proporcional a x_{ik}. Per tant, l'àrea d'aquest rectangle és proporcional a $x_{ik}u_k$, i l'àrea total dels rectangles de la candidatura i és proporcional al nombre d'escons obtinguts. D'altra banda, la suma de les altures dels rectangles que hi ha a sobre del segment k dóna la representació r_k que obté cada elector d'aquesta opinió.

7 El mètode de Phragmén. Variant seqüencial

En aquesta secció estudiem a fons la forma bàsica del mètode de Phragmén, que aquest autor va presentar en els anys 1894–1899 [39, 40, 42, 43]. Abans i després d'aquestes dates, Phragmén va considerar diverses variacions sobre el tema, de les quals donem una classificació en l'apèndix B. A diferència de Phragmén, que considerava només el cas de candidatures individuals, nosaltres ens situarem en el marc general en què les opcions sobre les quals s'expressa l'elector poden ser candidatures col·lectives, cadascuna de les quals ofereix un determinat nombre de candidats individuals.

7.1 La forma bàsica del mètode de Phragmén té un caràcter seqüencial: en cada pas s'assigna un escó a alguna candidatura i aquest escó es reparteix, en parts no necessàriament iguals, entre els electors que l'han aprovat.

Com veurem de seguida, la idea de buscar la màxima proporcionalitat possible s'entén en un sentit que és comú amb la regla de Jefferson i D'Hondt. De fet, i tal com veurem més avall, en el cas uninominal no limitat el mètode de Phragmén es redueix a la regla de Jefferson i D'Hondt.

Suposem, de moment, que les candidatures són individuals. Doncs bé, el primer escó s'assigna al candidat que ha reunit més aprovacions. Aquest primer escó sí que es reparteix a parts iguals; els receptors són tots els electors que han aprovat el dit candidat. Com que es tracta del candidat més aprovat, la representació que obté cada elector és la més petita possible. *El següent escó s'assignarà a un altre candidat i es repartirà de manera que tots els electors que l'aproven igualin la representació acumulada per cadascun d'ells fins aquell moment. El candidat que se selecciona és el que fa que aquesta representació acumulada sigui com més petita millor.* Noteu que els electors que no aproven aquest segon candidat s'han quedat amb la representació que tenien, que pot ser nul·la si tampoc havien aprovat el primer candidat. El següent escó se selecciona i reparteix d'acord amb el mateix principi, i així successivament.

En el cas de candidatures col·lectives, l'única diferència és que *cada candidatura pot continuar rebent escons mentre no arribi a la seva capacitat v_i.*

Vegem com es concreta això en un exemple (extret dels articles de Phragmén). Suposem que s'han d'elegir tres representants, que hi ha sis candidats a, b, c, p, q, r, i que els vots són els següents:

$$1034 : \mathsf{a, b, c}; \quad 90 : \mathsf{a, b, q}; \quad 47 : \mathsf{a, p, q}; \quad 519 : \mathsf{p, q, r}. \tag{27}$$

Segons el que hem dit, el primer escó el rep el candidat a, que és el que totalitza més aprovacions, és a dir, $1034+90+47 = 1171$. Cada elector que l'ha aprovat rep una part alíquota d'aquest escó, és a dir, $1/1171 = 0.854 \cdot 10^{-3}$ escons.

Vegem ara quin candidat obté el segon escó. El candidat b ha estat aprovat pels electors de les opinions abc i abq, els quals ja tenen representació, tots ells la mateixa, a través de a. Per tant, si el nou escó és assignat a b, es repartirà uniformement entre aquests $1034 + 90 = 1124$ electors, cadascun dels quals elevarà la seva representació en $1/1124 = 0.890 \cdot 10^{-3}$ escons, i arribarà, per tant, a $0.854 \cdot 10^{-3} + 0.890 \cdot 10^{-3} = 1.744 \cdot 10^{-3}$ escons. De manera similar, si el nou escó és assignat a c, aleshores es repartirà a parts iguals entre els 1034 electors de l'opinió abc, cadascun dels quals elevarà la seva representació en $1/1034 = 0.967 \cdot 10^{-3}$ escons, i arribarà, per tant, a $0.854 \cdot 10^{-3} + 0.967 \cdot 10^{-3} = 1.821 \cdot 10^{-3}$ escons. Considerem ara la possibilitat d'assignar el segon escó al candidat p. Aquest és aprovat pels electors apq, que ja tenen representació a través de a, i també pels pqr, que encara no tenen representació. Segons hem dit, si l'assignem a p, el nou escó ha de ser repartit de manera que iguali la representació de tots aquests electors. Per a calcular aquesta representació final comuna ρ hem de resoldre l'equació $519\,\rho + 47\,(\rho - 0.854 \cdot 10^{-3}) = 1$, que dóna

$$\rho = \frac{47 \times 0.854 \cdot 10^{-3} + 1}{(519 + 47)} = 1.838 \cdot 10^{-3}. \tag{28}$$

Un càlcul similar per al candidat q ens diu que en aquest cas els electors abq, apq i pqr quedarien tots ells amb una representació igual a $1.703 \cdot 10^{-3}$ escons. Finalment, en el cas del candidat r, aprovat només pels electors pqr, s'obté que aquests electors obtindrien una representació de $1/519 = 1.927 \cdot 10^{-3}$ escons. Recopilant, les cinc possibilitats d'assignació del segon escó eleven la representació dels electors més afavorits als valors següents: b: $1.744 \cdot 10^{-3}$, c: $1.821 \cdot 10^{-3}$, p: $1.838 \cdot 10^{-3}$, q: $1.703 \cdot 10^{-3}$, r: $1.927 \cdot 10^{-3}$. Per tant, el segon escó és assignat al candidat q, que minimitza la representació acumulada fins ara pels seus electors.

Passem, finalment, a considerar el tercer escó. En aquest moment, els electors abc tenen cadascun $0.854 \cdot 10^{-3}$ escons, i els abq, apq i pqr tenen cadascun $1.703 \cdot 10^{-3}$ escons. Mitjançant uns càlculs anàlegs als del paràgraf precedent, s'obté que el tercer escó ha de ser assignat al candidat b, el qual deixa els electors abc i abq amb una representació de $1.812 \cdot 10^{-3}$ escons.

El diagrama de rectangles de la correspondència obtinguda és el que hem donat com exemple a la figura 1.

Tal com fa notar Phragmén [43, p. 299–300], cada vegada que es considera un candidat concret i la seva distribució entre els electors, el problema és anàleg a la distribució d'una unitat de volum d'un cert líquid entre uns recipients cilíndrics que potser ja contenen altres líquids de la mateixa densitat. Cada recipient k té una base d'àrea u_k i només admet els líquids i tals que $k \surd i$. D'altra banda, tots els recipients que admeten el líquid i estan comunicats entre si, de manera que quan s'hi aboca una unitat de volum del líquid i, la gravetat fa que aquest es distribueixi amb un mateix nivell superior en tots aquests recipients.

7.2 En termes matemàtics, es parteix de $n = 0$ i la distribució nul·la, i el pas de n a $n + 1$ es fa de la manera següent: per a cada candidatura i que encara no ha esgotat la seva capacitat v_i, es considera la representació total que reunirien els electors que aproven aquesta candidatura en el supòsit d'assignar-li aquest nou escó, és a dir, la representació que ja tenen més el nou escó, i es divideix pel nombre total d'aquests electors:

$$\rho_i^{(n+1)} = \frac{\sum\limits_{k\surd i} u_k\, r_k^{(n)} + 1}{w_i}. \tag{29}$$

Un valor més o menys elevat d'aquest quocient vol dir que els electors en qüestió resultarien més o menys beneficiats en el cas de seleccionar la candidatura i. En el mateix esperit que la regla de Jefferson i D'Hondt, és a dir, que els electors més afavorits ho siguin com menys millor, Phragmén proposa d'assignar el nou escó a una candidatura i que minimitzi aquest quocient (sota la condició que encara no hagi esgotat la seva capacitat v_i). Si n'hi ha més d'una, aleshores considerem admissible qualsevol d'aquestes. *En el que segueix ens referirem a aquesta candidatura mitjançant la notació $\bar{\imath}_{n+1}$ i escriurem ρ_{n+1} en lloc de $\rho_{\bar{\imath}_{n+1}}^{(n+1)}$; d'altra banda, també convindrem a posar $\rho_0 = 0$.* El nou escó de la candidatura escollida $\bar{\imath}_{n+1}$ es reparteix entre els seus electors de tal manera que tots ells assoleixin la representació ρ_{n+1}. Tal com veurem de seguida, això s'aconsegueix mitjançant l'actualització següent del repartiment x_{ik}:

$$x_{ik}^{(n+1)} - x_{ik}^{(n)} = \begin{cases} \rho_{n+1} - r_k^{(n)}, & \text{si } i = \bar{\imath}_{n+1} \text{ i } k \surd i\,; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases} \tag{30}$$

Multiplicant aquestes quantitats per u_k i sumant sobre k, veiem que efectivament els increments $x_{ik}^{(n+1)} - x_{ik}^{(n)}$ totalitzen exactament un escó. D'altra banda, sumant (30) sobre i s'obté que

$$r_k^{(n+1)} - r_k^{(n)} = \begin{cases} \rho_{n+1} - r_k^{(n)}, & \text{si } k \surd \bar{\imath}_{n+1}; \\ 0, & \text{en cas contrari.} \end{cases} \tag{31}$$

D'això es dedueix el que havíem anunciat més amunt: *els electors k que han aprovat $\bar{\imath}_{n+1}$ assoleixen tots ells $r_k^{(n+1)} = \rho_{n+1}$*. Més generalment, una aplicació reiterada de (31) porta a la conclusió següent (on considerem l'índex n en lloc de $n+1$):

Proposició 7.1. *Per a qualsevol $n \ge 0$ es compleix $r_k^{(n)} = \rho_m$, on m és el màxim índex, anterior o igual a n, tal que k ha aprovat la candidatura $\bar{\imath}_m$; si k no ha aprovat cap de les candidatures $\bar{\imath}_1, \ldots, \bar{\imath}_n$, llavors $r_k^{(n)} = \rho_0 = 0$. És a dir:*

$$r_k^{(n)} = \rho_m, \quad \textit{on } m = \max\bigl(\{0\} \cup \{p \in \mathbb{Z} \mid 1 \le p \le n,\ k \surd \bar{\imath}_p\}\bigr). \tag{32}$$

En els paràgrafs precedents hem donat per suposat que la successió $(\rho_n \mid n = 0, 1, 2, \dots)$ no decreix en cap moment. Si tinguéssim $\rho_{n+1} < \rho_n$, llavors deixaria de ser cert que ρ_{n+1} fos la representació dels electors més afavorits en aquell moment, tal com suposàvem. D'altra banda, alguna de les quantitats que apareixen al segon membre de (30) i (31) llavors podria ser negativa, la qual cosa podria portar a valors negatius de $x_{ik}^{(n)}$, que no són admissibles. Tot això queda descartat amb el resultat següent.

PROPOSICIÓ 7.2. *$\rho_{n+1} \geq \rho_n$ per a qualsevol $n \geq 0$. En el cas $n = 0$ la desigualtat és estricta.*

PROVA. Procedirem per inducció. Per agilitzar el llenguatge, escriurem i en lloc de $\bar{\imath}_{n+1}$. Per a $n = 0$ tenim, efectivament,

$$\rho_1 = \rho_i^{(1)} = \frac{1}{w_i} > 0 = \rho_0. \tag{33}$$

Per a passar de n a $n + 1$ només cal notar que

$$\rho_{n+1} = \rho_i^{(n+1)} = \frac{\sum\limits_{k \surd i} u_k\, r_k^{(n)} + 1}{w_i} \geq \frac{\sum\limits_{k \surd i} u_k\, r_k^{(n-1)} + 1}{w_i} \geq \rho_n, \tag{34}$$

on la darrera desigualtat és conseqüència immediata de la definició de ρ_n, i l'anterior és conseqüència de la hipòtesi d'inducció a través de (32). □

PROPOSICIÓ 7.3. $\rho_n = \max\limits_k r_k^{(n)}$.

PROVA. Combinant la proposició 7.2 amb la igualtat (32) s'obté la desigualtat $r_k^{(n)} \leq \rho_n$ per a qualsevol k. D'altra banda, (32) també ens diu que $r_k^{(n)}$ és igual a ρ_n per als electors k que han aprovat $\bar{\imath}_n$. □

Tot i que en general la desigualtat $\rho_{n+1} \geq \rho_n$ no és estricta, es compleix sempre el fet següent:

PROPOSICIÓ 7.4. *Cada elector rep una fracció estrictament positiva de cada candidatura que ell ha aprovat i que ha resultat escollida.*

PROVA. Comencem per observar que n'hi ha prou amb considerar candidats individuals, ja que una candidatura col·lectiva equival a un conjunt de candidats individuals que van sempre junts. La demostració serà per contradicció. Suposem el contrari del que volem demostrar: l'escó $(n + 1)$-èsim és assignat a un cert candidat i amb la particularitat que hi ha uns electors ℓ que havien aprovat aquest candidat però no reben representació a través d'ell. Si passa això vol dir que, abans d'assignar aquest escó, els electors ℓ ja havien assolit la quantitat de representació que ara obtenen tots els que han aprovat i. És a dir, $r_\ell^{(n)} = \rho_{n+1}$. Suposem que els electors ℓ han assolit aquesta representació en ser assignat l'escó m-èsim, de manera que tenim $r_\ell^{(m-1)} < r_\ell^{(m)} = \rho_{n+1}$.

Combinant els resultats precedents, se'n dedueix que $r_\ell^{(m-1)} < r_\ell^{(n)}$. D'altra banda, per a una k arbitrària tenim la desigualtat no estricta $r_k^{(m-1)} \leq r_k^{(n)}$. Aquests fets ens permeten escriure que

$$\rho_m \leq \rho_i^{(m)} = \frac{\sum_{k\surd i} u_k\, r_k^{(m-1)} + 1}{w_i} < \frac{\sum_{k\surd i} u_k\, r_k^{(n)} + 1}{w_i} = \rho_i^{(n+1)} = \rho_{n+1}. \tag{35}$$

Tanmateix, la proposició 7.3 permet deduir també la desigualtat contrària $\rho_m \geq r_\ell^{(m)} = \rho_{n+1}$, de manera que efectivament hem arribat a una contradicció. □

Observació. En lloc de (29), Phragmén —vegeu, per exemple, [42, p. 191]— expressa $\rho_i^{(n+1)}$ mitjançant la fórmula següent, que deriva de (29) en introduir-hi (32):

$$\rho_i^{(n+1)} = \frac{w_i^{(n,1)}\rho_1 + w_i^{(n,2)}\rho_2 + \cdots + w_i^{(n,n-1)}\rho_{n-1} + w_i^{(n,n)}\rho_n + 1}{w_i^{(n,1)} + w_i^{(n,2)} + \cdots + w_i^{(n,n-1)} + w_i^{(n,n)} + w_i^{(n,0)}}, \tag{36}$$

on, per a cada $m = 1, 2, \ldots, n$, $w_i^{(n,m)}$ representa el nombre total dels electors que aproven els candidats i i $\bar{\imath}_m$ però no cap dels candidats $\bar{\imath}_p$ amb $m < p \leq n$, i d'altra banda, $w_i^{(n,0)}$ representa el nombre total dels electors que aproven i però no cap dels $\bar{\imath}_p$ amb $p = 1, 2, \ldots, n$.

7.3 A continuació considerem el nombre total d'escons que reuneix un conjunt X de candidatures. En relació amb això usarem la notació següent, on cal recordar que A_k representa el conjunt de candidatures aprovades pels electors k:

$$n_X = \sum_{i\in X} n_i, \tag{37}$$

$$u_X = \sum_{A_k = X} u_k, \tag{38}$$

$$w_X = \sum_{A_k\cap X\neq\emptyset} u_k. \tag{39}$$

Proposició 7.5. *Per a qualsevol conjunt X de candidatures es compleix la desigualtat següent: $n_X \leq \rho_n\, w_X$.*

Prova.

$$\begin{aligned} n_X &= \sum_{i\in X}\sum_k x_{ik}\,u_k = \sum_k\sum_{i\in X} x_{ik}\,u_k = \sum_{A_k\cap X\neq\emptyset}\ \sum_{i\in X} x_{ik}\,u_k \\ &\leq \sum_{A_k\cap X\neq\emptyset} r_k\,u_k \leq \sum_{A_k\cap X\neq\emptyset} \rho_n\,u_k = \rho_n\,w_X, \end{aligned}$$

on hem partit de (18), hem tingut en compte que $x_{ik} = 0$ si no és que $i \in A_k$, i hem usat les desigualtats que es dedueixen de (19)–(20) i de la proposició 7.3. □

COROL·LARI 7.6. *El nombre d'escons que rep una candidatura i compleix la desigualtat següent:* $n_i \leq \rho_n\, w_i$.

PROPOSICIÓ 7.7. *Sigui X un conjunt arbitrari de candidatures. Mentre n_X no arriba a la seva capacitat màxima $\sum_{i\in X} v_i$, es compleix sempre la desigualtat següent:* $n_X + 1 \geq \rho_n\, u_X$.

PROVA. Suposem la desigualtat contrària, és a dir,

$$n_X + 1 < \rho_n\, u_X. \tag{40}$$

Sigui i qualsevol candidatura de X amb $n_i < v_i$. Veurem que la desigualtat precedent implicaria $\rho_i^{(n+1)} < \rho_n$, en contradicció amb el fet que $\rho_n \leq \rho_{n+1} \leq \rho_i^{(n+1)}$. En efecte, partint de (29), podem escriure

$$\rho_i^{(n+1)} = \frac{\left(\sum_{k\surd i,\, A_k\neq X} u_k\, r_k^{(n)}\right) + \left(\sum_{k\,|\,A_k=X} u_k\, r_k^{(n)}\right) + 1}{\left(\sum_{k\surd i,\, A_k\neq X} u_k\right) + \left(\sum_{k\,|\,A_k=X} u_k\right)}. \tag{41}$$

Ara bé, el segon terme del denominador no és altre que u_X. D'altra banda, el segon terme del numerador està acotat superiorment per n_X; en efecte,

$$\sum_{k\,|\,A_k=X} u_k\, r_k^{(n)} = \sum_{j\in X}\ \sum_{k\,|\,A_k=X} u_k\, x_{jk}^{(n)} \leq \sum_{j\in X}\sum_{k} u_k\, x_{jk}^{(n)} = \sum_{j\in X} n_j = n_X. \tag{42}$$

Finalment, les representacions $r_k^{(n)}$ que apareixen en el primer terme del numerador es poden acotar totes elles per ρ_n. Per tant, es compleix la desigualtat

$$\rho_i^{(n+1)} \leq \frac{\left(\sum_{k\surd i,\, A_k\neq X} u_k\, \rho_n\right) + n_X + 1}{\left(\sum_{k\surd i,\, A_k\neq X} u_k\right) + u_X}, \tag{43}$$

que combinada amb la hipòtesi (40) dóna $\rho_i^{(n+1)} < \rho_n$. □

7.4 En aquest apartat ens ocupem d'un parell d'escenaris especials. El primer és el cas uninominal no limitat. Recordi's que el caràcter uninominal vol dir que cada elector aprova una sola candidatura. Per tant, les possibles opinions es corresponen amb les diferents candidatures, i per a $X = \{i\}$ les quantitats u_X i w_X definides per (38) i (39) són iguals entre si i coincideixen amb la w_i de la secció 5. D'altra banda, el caràcter no limitat vol dir que cada candidatura i té capacitat $v_i = n$, és a dir, que pot arribar a proporcionar n representants. En aquestes condicions les proposicions 7.5 i 7.7 ens diuen que

$$\frac{w_i}{n_i + 1} \leq \rho_n \leq \frac{w_i}{n_i}. \tag{44}$$

D'acord amb la caracterització (d) del teorema 5.1, això ens permet arribar a la conclusió següent:

PROPOSICIÓ 7.8. *En el cas uninominal no limitat l'algorisme de Phragmén es redueix a la regla de Jefferson i D'Hondt.*

Val a dir que també és fàcil arribar directament a la caracterització (c) del teorema 5.1. En efecte, en les condicions que estem considerant, les desigualtats (42) i (43) per a $X = \{i\}$ es converteixen en igualtats i en la segona d'elles desapareixen els primers termes del numerador i del denominador. Això estableix la igualtat $\rho_i^{(n+1)} = (n_i + 1)/w_i$ per a qualsevol i. Per tant, l'escó $(n + 1)$-èsim s'assigna a una candidatura i que minimitzi aquesta quantitat, és a dir, que maximitzi $w_i/(n_i + 1)$, tal com contempla la coneguda formulació recursiva de la regla de Jefferson i D'Hondt.

Considerem ara el cas que en podem dir uninominal totalment limitat: cada elector aprova una sola candidatura de capacitat 1. En altres paraules, cada elector aprova un sol candidat individual. En aquest cas, tenim $\rho_i^{(n+1)} = 1/w_i$ sempre que el candidat i encara no hagi estat elegit. Per tant, s'arriba a la conclusió següent:

Proposició 7.9. *En el cas en què cada elector es limita a aprovar un sol candidat individual, el mètode de Phragmén es redueix a seleccionar els n candidats més votats.*

7.5 A continuació ens ocupem de la important qüestió de la **monotonia respecte al contingut dels vots**. En el cas del vot d'aprovació es tracta simplement que, si no varia res més, l'addició d'aprovacions a favor d'una candidatura no pugui produir mai una disminució dels escons que li són assignats. Tot i que Phragmén es refereix diverses vegades a aquesta qüestió com a motivació del seu mètode, la veritat és que en cap moment no demostra detalladament que el seu procediment iteratiu tingui aquesta propietat. Tot seguit demostrarem que és efectivament així en el cas de candidatures individuals, però no en el cas de candidatures col·lectives.

Proposició 7.10. *En el cas de candidatures individuals, és a dir, $v_i = 1$ per a tota i, el procediment iteratiu de Phragmén té la propietat de monotonia respecte al contingut dels vots.*

Prova. A continuació anomenarem i el candidat en qüestió i usarem una titlla per indicar les quantitats corresponents als nous vots. D'acord amb la hipòtesi que i rep aprovacions addicionals i que no varia res més, es compleix

$$\tilde{u}_k \geq u_k, \quad \text{sempre que } k \surd i. \tag{45}$$

Suposem que amb els vots originals el candidat en qüestió resultava elegit per a l'escó $(n + 1)$-èsim, és a dir, que $i = \bar{\imath}_{n+1}$. Per a aconseguir el nostre objectiu, n'hi ha prou amb veure que, amb els nous vots, si aquest candidat no surt elegit per a un escó anterior, llavors surt elegit forçosament per a l'escó $(n + 1)$-èsim. Com que suposem que les aprovacions dels altres candidats són exactament les mateixes que en els vots originals, la hipòtesi que el candidat i no ha sortit elegit per a cap escó anterior implica que no hi ha cap variació en les quantitats $\rho_1, \ldots, \rho_n$ i per tant en $r_k^{(n)}$, i tampoc en $\rho_j^{(n+1)}$ per a $j \neq i$. En vista d'això, el nostre objectiu es redueix a demostrar que $\tilde{\rho}_i^{(n+1)} \leq \rho_i^{(n+1)}$.

Partint de (29) i de l'expressió anàloga amb els vots modificats, i tenint en compte que $w_i = \sum_{k \surd i} u_k$ i anàlogament per a $\tilde{w}_i$, se'n dedueix successivament que

$$\tilde{w}_i\,\tilde{\rho}_i^{(n+1)} - w_i\,\rho_i^{(n+1)} = \sum_{k \surd i} (\tilde{u}_k - u_k)\, r_k^{(n)},$$

$$\tilde{w}_i\,\tilde{\rho}_i^{(n+1)} - \tilde{w}_i\,\rho_i^{(n+1)} + \tilde{w}_i\,\rho_i^{(n+1)} - w_i\,\rho_i^{(n+1)} = \sum_{k \surd i} (\tilde{u}_k - u_k)\, r_k^{(n)},$$

$$\Big(\sum_{k \surd i} \tilde{u}_k\Big)(\tilde{\rho}_i^{(n+1)} - \rho_i^{(n+1)}) = \sum_{k \surd i} (\tilde{u}_k - u_k)(r_k^{(n)} - \rho_i^{(n+1)}), \tag{46}$$

on el signe del segon membre és negatiu o zero ja que $r_k^{(n)} = \rho_m$ per alguna $m \le n$, i d'altra banda $\rho_i^{(n+1)} = \rho_{n+1} \ge \rho_m$. □

En el cas de candidatures col·lectives l'addició d'aprovacions a favor d'una pot comportar una disminució del nombre d'escons que li són assignats. Per exemple, per a $n = 3$ i els vots

$$4 : \mathsf{A};\quad 7 : \mathsf{B};\quad 1 : \mathsf{A},\mathsf{B};\quad 16 : \mathsf{A},\mathsf{C};\quad 4 : \mathsf{B},\mathsf{C}, \tag{47}$$

el mètode de Phragmén dóna dos escons a A, però si un dels vots que només aproven B passa a aprovar també A (de manera que els coeficients esdevenen respectivament 4, 6, 2, 16, 4) aleshores A obté només un sol escó (l'assignació successiva d'escons és A B A A B A... en el primer escenari i A C B A A B... en el segon).

Un altre exemple interessant és el següent, on també considerem $n = 3$:[2]

$$10 : \mathsf{A};\quad 3 : \mathsf{B};\quad 12 : \mathsf{C};\quad 21 : \mathsf{A},\mathsf{B};\quad 6 : \mathsf{B},\mathsf{C}. \tag{48}$$

En aquest cas, el mètode de Phragmén també dóna dos escons a A, però si els vots que aproven només la candidatura A s'incrementen en una unitat (passant a ser 11 en lloc de 10) aleshores A obté només un sol escó (l'assignació successiva d'escons és A C A B A C... en el primer escenari i A B C A B A... en el segon).

Tal com hem dit més amunt en relació amb el vot únic transferible, la manca de monotonia és un defecte poc menys que inacceptable. A la secció 8 veurem que aquest problema podria desaparèixer en certes variants del mètode de Phragmén.

7.6 El resultat següent estableix una propietat de l'estil del criteri de proporcionalitat de Droop. És una generalització d'un resultat que és ben conegut per a la regla de Jefferson i D'Hondt [36, prop. 3.1]. La demostració també serà anàloga. Recordi's de (38) que u_X vol dir el nombre d'electors que aproven exactament un determinat conjunt X de candidatures.

Proposició 7.11 (continguda a [28, sats 13.5, (ii)]). *Si $u_X > m\,q_D$, amb $q_D = w/(n+1)$ i $m \le \sum_{i\in X} v_i$, aleshores $n_X \ge m$.*

---

2 Aquest exemple ens ha estat assenyalat pel professor Svante Janson.

PROVA. La proposició 7.5, aplicada a X^c, el conjunt complementari de X, ens garanteix la desigualtat següent:

$$n - n_X \leq \rho_n \, w_{X^c} \leq \rho_n (w - u_X). \tag{49}$$

D'altra banda, l'acotació inferior que estem suposant sobre u_X i la identitat $w = (n+1)\, q_D$ impliquen que

$$w - u_X < q_D \, (m + 1 - m). \tag{50}$$

A partir d'aquí procedirem per reducció a l'absurd. Suposem que no tinguéssim $n_X \geq m$ sinó la desigualtat contrària $n_X < m - 1$. Combinant-la amb (49) i (50) s'obtè que $1/\rho_n < q_D$. Usant novament la hipòtesi d'acotació inferior de u_X, se'n dedueix que $1/\rho_n < u_X/m$. Tanmateix, la proposició 7.7 ens assegura que $\rho_n \leq (n_X + 1)/u_X$. Per tant, en resulta que $n_X + 1 > m$, és a dir $n_X \geq m$. □

7.7 El cas de dues candidatures

Considerem dues candidatures A i B. Siguin α, β, ζ les fraccions de l'electorat que aproven respectivament només la candidatura A, només la B, o totes dues A i B (tenim, doncs, $\alpha + \beta + \zeta = 1$). Les quantitats de representació per elector que obtenen respectivament aquests tres tipus d'electors seran denotades aquí per r_n, s_n, t_n, on n indica el nombre d'escons en joc; els nombres d'escons que reben respectivament A i B seran denotats per p_n, q_n ($p_n + q_n = n$). Com que t_n correspon als electors que aproven tant A com B, la proposició 7.1 ens assegura que $t_n = \rho_n$, mentre que $r_n = \rho_{m_1}$ i $s_n = \rho_{m_2}$ amb $m_1, m_2 \leq n$ i $\max(m_1, m_2) = n$. En virtut de la proposició 7.2 se'n dedueix que $t_n = \max(r_n, s_n)$. D'altra banda, la regla que determina (r_{n+1}, s_{n+1}) a partir de (r_n, s_n) es pot escriure en la forma

$$(r_{n+1}, s_{n+1}) = \begin{cases} (r'_n, s_n), & \text{si } r'_n \leq s'_n; \\ (r_n, s'_n), & \text{si } r'_n \geq s'_n, \end{cases} \tag{51}$$

on $r_0 = s_0 = 0$ i r'_n i s'_n vénen donats per les fórmules

$$r'_n = \frac{\alpha r_n + \zeta t_n + 1}{\alpha + \zeta}, \quad s'_n = \frac{\beta s_n + \zeta t_n + 1}{\beta + \zeta}. \tag{52}$$

En el cas $r'_n = s'_n$ admetem les dues possibilitats, la qual cosa dóna lloc a múltiples solucions. El nombre d'escons obtinguts per cada candidatura segueix el procés següent:

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \begin{cases} (p_n + 1, q_n), & \text{si } r_{n+1} > r_n; \\ (p_n, q_n + 1), & \text{si } s_{n+1} > s_n. \end{cases} \tag{53}$$

És natural preguntar-se com depenen p_n, q_n de α, β, ζ i n. Per a $\zeta = 0$, en què la regla de Phragmén es redueix a la de Jefferson i D'Hondt, la caracterització (a) del teorema 5.1 implica que $p_n/n \to \alpha$ i $q_n/n \to \beta$ quan $n \to \infty$.

PROVA. Tenint en compte (13), la caracterització (a) del teorema 5.1 ens permet escriure $n_i \le w_i/q \le n_i + 1$. I sumant aquestes desigualtats sobre i s'obté que $n \le w/q \le n + I$, on I denota el nombre de candidatures. D'aquestes desigualtats es dedueix d'una banda que $n_i \le (n + I)w_i/w$ i d'altra banda que $n_i + 1 \ge nw_i/w$. Per tant, $w_i/w - 1/n \le n_i/n \le (n+I)w_i/nw$, d'on es dedueix el resultat desitjat: $\lim_{n\to\infty} n_i/n = w_i/w$.

Per a $\zeta > 0$ el comportament asimptòtic de $f_n = p_n/n$ quan $n \to \infty$ no és pas tan senzill. D'entrada, no és clar que $f_n = p_n/n$ convergeixi sempre cap a un límit. Dit això, les exploracions numèriques semblen indicar tal convergència per a «quasi tota parella» de valors de α i β. El límit f_∞ seria semblant al que indica la figura 2, on hem representat la dependència de f_{1200} respecte a α i β.

El valor de f_{1200} està indicat per la intensitat de gris: el color blanc correspon al valor 0 i el negre al valor 1. El valor de f_{1200} és constant en cadascun dels lòbuls que s'observen en la figura.[3] El lòbul més extens, situat al mig, correspon al valor 1/2. Els següents en extensió, situats a banda i banda de l'anterior, corresponen als valors 1/3 i 2/3. Més enllà, n'hi ha dos més que corresponen als valors 1/4 i 3/4. També se n'observen prou bé uns altres de més prims que corresponen als valors 1/5, 2/5, 3/5 i 4/5.

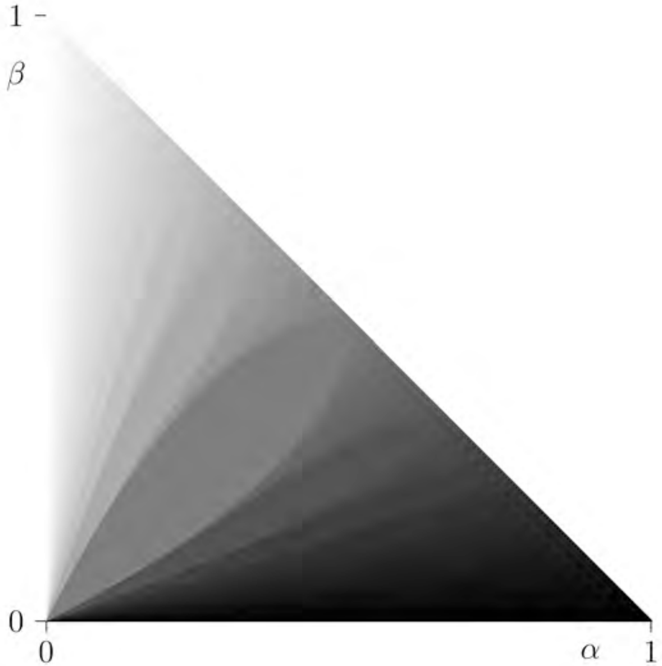

FIGURA 2: Comportament asimptòtic de la variant bàsica del mètode de Phragmén per a dues candidatures. Dependència de f_{1200} respecte de α i β.

3 Malauradament, es produeix una il·lusió òptica que exagera localment els contrastos. Vegeu, per exemple, Wiki Radiography, 2010, Mach bands and other optical illusions, `http://www.wikiradiography.com/page/Mach+bands+and+other+Optical+Illusions`. Tanmateix, si es cobreix la figura llevat d'una part continguda en un sol lòbul, aleshores es percep una intensitat uniforme de gris.

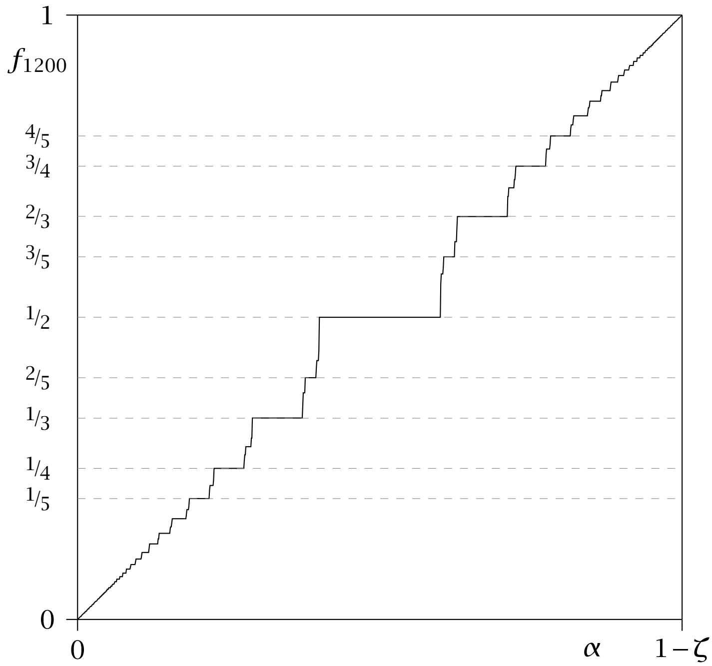

FIGURA 3: Dependència de f_{1200} respecte α per a $\zeta = 0.376$.

Tal com suggereix la figura 3, per a $\zeta > 0$ fixada, la dependència de f_∞ respecte de α tindria un caràcter similar a la funció de Cantor [14], amb la particularitat que aquí cada racional tindria com a antiimatge un interval de mesura positiva.

En qualsevol cas, el fet que f_∞ sigui constant en aquests lòbuls és una mica indesitjable. Fixem-nos, per exemple, en el lòbul central on $f_\infty = 1/2$. Tal com està delimitat, resulta que els escons es reparteixen uniformement entre A i B tant per a $(\alpha, \beta, \zeta) = (0.374, 0.25, 0.376)$ com per a $(\alpha, \beta, \zeta) = (0.25, 0.374, 0.376)$, tot i que en el primer cas el nombre d'electors que aproven només la candidatura A és superior gairebé un 50% al nombre dels que aproven només la candidatura B, i que en el segon cas passa exactament a l'inrevés. En lloc d'això, és més raonable, segons hem argumentat a l'apartat 6.4, repartir els escons proporcionalment a $\alpha + \zeta/2$ i $\beta + \zeta/2$ —que en la figura 3 correspon a una recta des de $(0, \zeta/2)$ fins a $(1 - \zeta, 1 - (\zeta/2))$.

Aquest fenomen no desapareix pas amb un nombre finit d'escons. Per exemple, per a qualsevol valor parell de n es continua obtenint un repartiment a parts iguals per als valors de (α, β, ζ) donats en el paràgraf precedent (i per a tots els valors intermedis).

8 Variants directes. Algunes perspectives

8.1 El procediment que hem estudiat en la secció anterior assigna els escons de manera successiva; en cada pas es mantenen les assignacions anteriors i el nou escó s'assigna de manera que es minimitzi la representació dels electors més afavorits. En lloc d'això, també es poden repartir tots els escons de cop prestant atenció a la quantitat de representació que obtenen els diferents electors i mirant de minimitzar la desigualtat entre ells. Aquests mètodes els anomenem **variants directes.**

Tal com recull el teorema 5.1 —quan afirma que són equivalents els seus apartats (c) i (e)—, en el cas uninominal no limitat el criteri de minimitzar la representació dels electors més afavorits dóna el mateix resultat tant si es procedeix seqüencialment tot mantenint les assignacions anteriors com si es consideren directament tots els escons que hi ha per repartir.

Tanmateix, aquesta equivalència deixa de ser certa quan els electors no es limiten a aprovar una sola candidatura. En aquest cas, la restricció de mantenir les assignacions anteriors pot impedir d'accedir a altres repartiments que redueixen encara més la representació dels electors més afavorits. Considerem, per exemple, els vots d'aprovació següents referents a tres candidats individuals:

$$2 : \mathsf{b}; \quad 2 : \mathsf{a}, \mathsf{b}; \quad 1 : \mathsf{c}; \quad 3 : \mathsf{a}, \mathsf{c}. \tag{54}$$

Per a $n = 1$, l'assignació successiva es redueix a un sol pas, de manera que certament coincidirà amb l'assignació directa. L'objectiu de minimitzar la representació dels electors més afavorits porta a assignar l'escó al candidat més aprovat, en aquest cas a, i a repartir aquest candidat a parts iguals entre tots els electors que l'han aprovat. Per a $n = 2$, la variant d'assignació successiva busca quin altre candidat complementa millor la representació ja assignada a a, i arriba a la conclusió que és b. En canvi, l'assignació directa no manté necessàriament el candidat a, sinó que es planteja de nou com minimitzar la desigualtat de representació mitjançant dos representants. En aquest cas, és obvi que la millor elecció en aquest sentit és b, c, la qual permet donar la mateixa representació a tots els electors.

Tal com es veu de seguida amb aquest exemple, *les variants directes no seran pas monòtones respecte al nombre d'escons n*. És a dir, que un augment del nombre de representants que s'han d'elegir pot comportar que un candidat concret passi de ser elegit a no ser-ho. Aquest fenomen, del mateix tipus que la coneguda *paradoxa d'Alabama* [49, § 9.4–9.7], és força indesitjable. Tanmateix, en la pràctica el nombre de representants que s'han d'elegir és una quantitat prefixada, de manera que aquesta manca de monotonia no és tan greu.

En general no es pot aconseguir que tots els electors tinguin exactament la mateixa quantitat de representació. Davant d'això, és natural mirar de minimitzar algun índex que mesuri la desigualtat de les quantitats que obtenen els diferents electors.

També és cert, però, que no hi ha pas una sola manera de mesurar la desigualtat d'un repartiment.

Fins ara ens hem basat en el valor màxim de les fraccions que obtenen els diferents electors, és a dir, $\max_k r_k$. Aquesta quantitat no és ben bé una mesura de desigualtat, però basta restar-li el valor mitjà, és a dir, n/w, per obtenir un índex que s'anul·la només en el cas d'un repartiment totalment equitatiu. Aquest índex ve donat, doncs, per

$$\mu = \max_k r_k - \frac{n}{w}. \tag{55}$$

De tota manera, com que els valors de n i w ens vénen donats, en lloc de minimitzar aquesta diferència μ podem minimitzar simplement el valor de $\max_k r_k$.

Alternativament, podem prendre com a mesura de desigualtat la variància de les representacions que obtenen els diferents electors. A l'apartat 5.3 ja hem considerat aquest punt de vista en el cas uninominal no limitat, el qual hem vist que dóna lloc a la regla de Webster i Sainte-Laguë. En el cas general, la variància ve donada per les fórmules següents, que generalitzen (14):

$$\gamma = \sum_k u_k \left(r_k - \frac{n}{w}\right)^2 = \frac{1}{2w} \sum_{k,\ell} u_k u_\ell \, (r_k - r_\ell)^2 \tag{56}$$

(la igualtat entre ambdues expressions es comprova fàcilment desenvolupant els quadrats i usant el fet que $\sum_k u_k r_k = n$ i que $\sum_k u_k = w$).

La idea de minimitzar la variància de les representacions apareix ja en un treball de Phragmén publicat el 1896 [42] (bastant anterior, per tant, al treball de Sainte-Laguë, que data de 1910). Més concretament, Phragmén va considerar aquest criteri en el cas de candidatures individuals i sota una restricció especial, és a dir, que cada candidat elegit sigui repartit de la mateixa manera entre tots els electors que l'han aprovat. Mitjançant un exemple va mostrar que aquesta restricció comporta una manca de monotonia respecte al contingut dels vots, és a dir, que un candidat pot deixar de ser elegit a conseqüència de rebre més aprovacions [42, p. 186–188]. Tanmateix, també va fer veure que si es prescindeix d'aquesta restricció aleshores sí que hi ha monotonia respecte al contingut dels vots [42, p. 188].

Però Phragmén considerava només el cas de candidatures individuals. A l'apartat 7.5 hem vist com el pas de candidatures individuals a candidatures col·lectives feia desaparèixer aquesta propietat de monotonia en la variant seqüencial. Tanmateix, les exploracions numèriques semblen indicar que *les variants directes es comportarien de manera monòtona respecte al contingut dels vots no solament en el cas de candidatures individuals, sinó també en el cas general de candidatures col·lectives.* En relació amb això cal precisar que quan hi ha multiplicitat de solucions el que variaria de manera monòtona no és el nombre d'escons que rep la candidatura en qüestió en una solució concreta, sinó el seu valor màxim al llarg de totes les solucions.

Malauradament, aquesta possible bona propietat de les variants directes ve acompanyada per certs inconvenients. El primer és la dificultat de càlcul, ja que som davant d'un problema d'optimització que requereix algorismes bastant més complexos que el d'assignació successiva.

El segon inconvenient és la multiplicitat de solucions. Considerem, per exemple, el següent cas de dues candidatures provinent de l'apartat 7.7:

$$374 : \mathsf{A}; \quad 250 : \mathsf{B}; \quad 376 : \mathsf{A}, \mathsf{B}. \tag{57}$$

Per a $n = 10$, l'algorisme seqüencial dóna com a resultat el repartiment $(n_\mathsf{A}, n_\mathsf{B}) = (5, 5)$. En canvi, les variants directes donen quatre possibilitats, és a dir: $(n_\mathsf{A}, n_\mathsf{B}) = (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3)$. En efecte, resulta que tots aquests repartiments permeten aconseguir una representació totalment equitativa. Això és així perquè hi ha un gran nombre d'electors que accepten ser representats tant per A com per B. Per poc que es prodiguin les aprovacions a diverses candidatures per part d'un mateix elector, el nombre de repartiments diferents que s'obtenen amb les variants directes creix molt fàcilment amb el nombre de candidatures i amb el nombre total d'escons.

8.2 En l'exemple precedent, el resultat seqüencial $(5, 5)$ no es correspon amb el fet que hi ha bastants més electors partidaris d'A que de B. En aquest sentit podria ser més indicat el repartiment $(6, 4)$ que trobem entre els resultats directes. No obstant això, la mateixa lògica que ens ha portat a aquest repartiment també ens porta al repartiment $(4, 6)$, el qual no s'adiu gens a l'esmentat predomini de partidaris d'A. D'alguna manera ens hem passat de llarg.

Davant d'això, es fa necessari algun criteri addicional per a seleccionar adequadament entre els diversos repartiments que proporciona el criteri d'optimització directa. Una manera de fer-ho podria ser la següent. Tal com hem comentat a l'apartat 6.4, els vots que aproven diverses candidatures també podrien ser dividits a parts iguals entre aquestes. Si es procedeix d'aquesta manera, aleshores anem a parar a regles com les de Jefferson i D'Hondt i de Webster i Sainte-Laguë, on la multiplicitat de repartiments es limita a casos molt singulars (d'igualtat exacta entre certs nombres de vots o els seus múltiples); a canvi d'això, s'està renunciant a minimitzar tot el possible la desigualtat de representació entre els diferents electors. Doncs bé, es tractaria de situar-se en un punt intermedi on encara es minimitzés tot el possible la desigualtat però s'obtingués només un repartiment (o els menys possibles). Més concretament, es podrien combinar els dos tractaments mitjançant un paràmetre $\theta \in [0, 1]$ (on entendrem que $\theta = 1$ correspon a dividir cada vot per complet entre les candidatures aprovades en aquest vot) i escollir un valor d'aquest paràmetre on s'assoleixin alhora els dos objectius esmentats.

Els mètodes que apliquen aquesta idea els anomenem **variants directes relaxades.**

En l'exemple (57) aquest procediment selecciona el repartiment $(n_\mathsf{A}, n_\mathsf{B}) = (6, 4)$ que més amunt assenyalàvem com a més plausible. Aquest repartiment és l'únic que resulta òptim quan θ supera el valor 0.670. D'altra banda, permet una representació totalment equitativa fins a $\theta = 0.798$. Per sobre d'aquest últim valor ja no és possible una representació totalment equitativa, però l'assignació $(6,4)$ encara minimitza μ i γ fins a $\theta = 1$.

En general, però, el resultat de les variants directes relaxades pot dependre de quina mesura de desigualtat s'utilitza. D'altra banda, també pot diferir del repartiment que minimitza la desigualtat per a $\theta = 1$.

Així, en l'exemple (1) amb $n = 4$ resulten elegits els candidats a, c, e, f o bé a, b, c, e segons que s'utilitzi respectivament μ o bé γ. Tanmateix, per a $\theta = 1$ ambdues mesures de desigualtat donen com a òptim el segon d'aquests dos conjunts.

Pel que fa a l'exemple (2) amb $n = 135$, s'obté el repartiment $\boldsymbol{n} = (40, 22, 19, 8, 14, 20, 12)$ tant en el cas de μ com en el cas de γ. En canvi, per a $\theta = 1$ aquestes dues mesures de desigualtat donen, respectivament, els repartiments $(40, 23, 18, 8, 14, 20, 12)$ i $(40, 22, 18, 9, 14, 20, 12)$.

Aquests resultats s'han obtingut mitjançant el programari d'optimització CPLEX [26]. Tanmateix, la gran multiplicitat de solucions no deixa de ser una font d'incertesa, de manera que un estudi més conclusiu hauria de començar per millorar el procediment de càlcul.

9 Conclusions

El vot d'aprovació permet que els electors donin més informació que amb el vot uninominal. En conseqüència, els resultats poden reflectir millor les diverses opinions dels electors. Tanmateix, perquè sigui així calen procediments més laboriosos que els habituals.

Les opcions que són objecte d'aprovació poden ser candidats individuals o bé candidatures col·lectives. El cas de candidats individuals és apropiat en eleccions a petita escala, on els electors tenen una coneixença personalitzada dels candidats. En canvi, en eleccions d'abast ampli és més adient que les opcions per aprovar siguin les candidatures col·lectives presentades pels partits. En aquest cas, l'objectiu és determinar quants escons ha de rebre cada candidatura.

A finals del segle XIX Phragmén va proposar un mètode iteratiu que s'estén fàcilment al cas de candidatures col·lectives. Tanmateix, en aquest cas apareixen alguns fenòmens indesitjables, com ara la manca de monotonia respecte al contingut dels vots i una tendència a igualar més del compte els nombres d'escons que reben les diferents candidatures.

Hi ha indicis que aquests problemes es podrien resoldre mitjançant certes variants que s'han apuntat en aquest article i que convindria estudiar més detingudament.

Tots aquests mètodes són més complicats del que hom voldria. Tanmateix, el seu grau de complicació és comparable a certes variants del mètode de vot únic transferible que són utilitzades per alguns estats i institucions.

En relació amb això, Phragmén afirmava el següent: *tot el que és correcte es pot fer també fàcilment comprensible, encara que per aconseguir-ho pot fer falta temps i feina; a més, el públic en general aprecia millor els resultats que les teories* [41].

A Nota biogràfica [9, 6, 19, 21]

Edvard Phragmén va néixer l'any 1863 a Örebro (Suècia) i va morir el 1937 a Estocolm. El seu nom complet era Lars Edvard Phragmén. Des del segle XVII els seus avantpassats per línia masculina havien sigut pastors protestants, però el seu pare, Lars Phragmén (1832–1920), va trencar amb aquesta tradició i es va dedicar a les matemàtiques.

Seguint aquests passos, el 1882 Edvard Phragmén va ingressar a la Universitat d'Uppsala per cursar estudis de matemàtiques. L'any següent, però, va optar per l'escola superior (*högskola*) d'Estocolm, on no s'obtenia cap mena de títol però hi havia un ambient d'estudi molt autèntic i desinteressat. En particular, l'influent professor Gösta Mittag-Leffler liderava una recerca capdavantera en anàlisi matemàtica [12, 20]. A partir d'aquell mateix any 1883, Phragmén va contribuir a aquesta recerca amb diversos treballs [6].

A principis de l'any 1888, Mittag-Leffler va confiar a Phragmén el càrrec de secretari de redacció de la revista *Acta Mathematica*, una tasca que Phragmén va desenvolupar molt a consciència. Tant va ser així que a finals del mateix any va detectar certs errors en una memòria d'Henri Poincaré sobre el problema dels tres cossos la qual ja havia estat escollida guanyadora d'un important concurs, convocat pel rei Òscar II de Suècia i Noruega amb motiu del seu seixantè aniversari [9, 1]. Els errors en qüestió eren realment seriosos, fins al punt que Mittag-Leffler va decidir aturar l'edició i recuperar unes quantes còpies que ja s'havien distribuït en forma impresa. Poincaré es va veure obligat a fer canvis substancials en la memòria i a costejar les despeses originades, les quals superaven amb escreix l'import del premi. En la versió definitiva, que no va ser publicada fins al 1890, Poincaré expressava així el seu agraïment a Phragmén [46, p. 5]:

> Je dois beaucoup de reconnaissance à M. Phragmén qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le mémoire avec attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter l'entière intelligence de ma pensée. Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^m et de T_i^m à la fin du § 12. C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

El fet d'haver corregit la memòria de Poincaré va donar molt de prestigi a Phragmén, que el desembre de 1889 obtenia el grau de llicenciat (*filosofie licentiat*) a l'Universitat d'Uppsala. El febrer de 1890 va ser nomenat professor associat (*docent*) de matemàtiques i mecànica a l'escola superior d'Estocolm, i el setembre de 1892 va esdevenir-hi professor d'anàlisi matemàtica superior, succeint en aquesta plaça Sofia Kovalevskaya, que havia mort el febrer de 1891 d'una pneumonia.

Edvard Phragmén
(retrat procedent de l'Institut Mittag-Leffler;
fotògraf: Herman Hamnqvist).

En el període 1892–1895 Phragmén va formar part dels òrgans de govern de l'escola. En aquell moment hi havia molta polèmica ja que alguns professors, entre ells el rector Otto Pettersson, que era professor de química, proposaven que l'escola atorgués títols acadèmics, mentre que uns altres s'hi oposaven, entre ells Mittag-Leffler i Phragmén. Aquest tema va dominar unes accidentades eleccions a rector que van tenir lloc el desembre de 1894 i gener de 1895, en les quals es va barrejar també la qüestió de qui tenia dret de vot en el claustre. De fet, es va arribar a votar tres vegades. La segona hauria donat el càrrec a Phragmén. Tanmateix, el resultat definitiu va ser la reelecció d'Otto Pettersson. Amb ell i els seus successors, l'escola va evolucionar progressivament cap a l'atorgament de títols acadèmics.

Alhora que continuava treballant en els temes més clàssics d'anàlisi matemàtica, Phragmén es va interessar cada vegada més en altres temes més aplicats.

Entre els quals hi ha el que hem tractat en el present article: com elegir un conjunt de representants quan els electors s'expressen mitjançant vots d'aprovació o preferencials. La seva primera proposta sobre aquest problema data de març de 1893 [37] i va ser presentada en el marc de l'entitat *Studenter och Arbetare* —Estudiants i Treballadors—, la qual tenia com a objectiu la col·laboració entre els intel·lectuals i la classe obrera. Phragmén va continuar estudiant el problema en quatre publicacions que van aparèixer de l'any 1894 al 1899 [39, 40, 42, 43]. Posteriorment, hi va contribuir també des de dues comissions estatals de les quals va formar part els anys 1902–1903 i 1912–1913 [50, 48]. Entre aquestes dues comissions, l'any 1906 també hi va fer una nova aportació amb motiu d'un informe sobre el tema que havia demanat la comissió finlandesa per a la reforma electoral [44, 45].

La comissió reial sueca de 1902–1903 sobre els drets de vot en la seva primera reunió.
D'esquerra a dreta: Sixten G. von Friesen, Carl O. Moberg, Ivar Månsson i Trää,
Axel Asker, Christofer Johan Rappe, Gustaf J. G. A. Berg,
J. Elof Biesèrt, L. Edvard Phragmén i Emil Svensén
(Stockholms Stadsmuseum, imatge SSMD000156; fotògraf: Anton Blomberg [32]).

Cal notar que pocs dies després de la presentació de Phragmén esmentada en l'associació d'Estudiants i Treballadors, el mateix Gösta Mittag-Leffler donava una conferència sobre el tema de la representació proporcional davant l'associació sueca d'economistes [33]. A més, el 1906 va escriure l'informe per a la comissió finlandesa que ja hem esmentat [34]. Altres matemàtics de l'entorn de Phragmén que van prestar atenció al tema de la representació proporcional són Ivar Bendixson [2, 3, 4], Anders Lindstedt [30, 31] i Ernst Lindelöf [29].

Els noms de Phragmén i Lindelöf estan associats a un celebrat resultat d'anàlisi complexa i d'equacions en derivades parcials que generalitza a la vegada el principi del màxim i el teorema de Cauchy i Liouville. Aquest resultat data de 1908 i estén un treball previ de Phragmén de 1904 (vegeu [6]).

Un altre camp que va atraure l'atenció de Phragmén, i que finalment va absorbir-lo fortament, va ser la matemàtica actuarial, un camp on hi havia llavors molta demanda i en el qual també va estar ocupat el mateix Mittag-Leffler [9, 21]. Un moment crucial en la vida de Phragmén va ser l'inici de l'any 1904, quan, després d'haver treballat com a actuari i com a inspector estatal d'assegurances, va esdevenir director general d'un nou organisme d'inspecció d'assegurances (1904–1908) [21]. Phragmén s'havia imaginat que aquest càrrec podia ser compatible amb la seva dedicació acadèmica, però la realitat va ser una altra i el maig de 1905 va deixar definitivament la plaça de professor a l'escola superior d'Estocolm. Posteriorment, va presidir l'Associació Sueca d'Actuaris (1909–1934, com a successor de Mittag-Leffler), va formar part del consell directiu de la l'Associació Sueca d'Assegurances (1912–1935) i va presidir el consell directiu de la Societat Anònima Estatal de Reassegurances (1914–1937).

B Diverses variants considerades per Phragmén

Les propostes de Phragmén sobre representació proporcional inclouen una diversitat de variants. Aquestes es poden classificar en dues grans classes, 1 i 2, que corresponen essencialment als mètodes «primer» i «segon» de Phragmén en la terminologia de [8] (on aquests termes són aplicats concretament a les variants 1.2 i 2.1).

1. Procediments de quota preestablerta.

Aquests procediments es poden considerar com a variants del mètode de vot únic transferible. Com aquest, comencen per establir la quota, és a dir, el nombre de vots que cal reunir per assignar un escó. També coincideixen amb el vot únic transferible en la idea de transferir els excedents als altres candidats indicats en les butlletes. Els escons s'assignen successivament, fixant-se sempre en el candidat que reuneix més vots, originals o transferits. Tanmateix, si en algun moment s'escau que cap candidat arriba a la quota, aleshores *no* es procedeix a eliminar el candidat que té menys vots, sinó que es relaxa la condició de superar o igualar la quota inicial. En particular, en el cas de voler elegir un sol representant aquests procediments escullen sempre el més votat.

1.1. Variant preferencial inicial (1893) [37, 38]. Aquesta primera proposta considerava només vots preferencials. La quota utilitzada és inicialment la quota de Droop, però si en algun moment s'escau que cap candidat arriba a la quota, aleshores aquesta es disminueix com si es volgués un representant més. De manera molt similar a com ja havia proposat J. B. Gregory a Tasmània pels volts de 1880 ([56, p. 273], [28, § 12.1.4]), quan un candidat supera la quota i obté un escó, l'excedent es reparteix per igual entre tots els vots que tenia aquell candidat i de cada vot es transfereix la fracció excedent al següent candidat.

1.2. Variant de tipus restes majors (introduïda segurament entre 1893 i 1894). S'exposa a [8, § A.b, p. 47–50]. A banda de considerar vots d'aprovació, es diferencia de la variant precedent pel fet que utilitza la quota simple de Hare i que quan cap candidat arriba a la quota aleshores se selecciona el candidat que en aquell moment reuneix més vots. En el cas de llistes de partit es redueix al mètode de les restes majors. Gustaf Eneström va arribar independentment a aquesta mateixa idea el 1896 arran de voler simplificar la variant 2.1 [17, 18].

1.3. Variant final (1906) [44, 45]. També utilitza la quota simple, però la quantitat de vots que es bescanvia per un escó sol ser inferior a la quota. Concretament, si v representa el nombre de vots en qüestió, la part que es bescanvia per un escó és $v/(k+1)$ on k és l'únic enter tal que $kq_0 < v \le (k+1)q_0$. Aquesta especificació correspon a la versió definitiva [45]; en la versió anterior que es dóna a [44] la quota simple es recalcula cada vegada en termes del nombre de vots que resten actius i el nombre d'escons encara no assignats.

1.4. Variants que distingeixen dos graus d'aprovació [8, 44, 45]. En prevenció de les estratègies de decapitació (apartat 4.2) Phragmén va suplementar les dues variants precedents amb la possibilitat que el votant distingeixi dos graus d'aprovació (la qual cosa es pot considerar com una forma especial de vot preferencial). Quan es vota així, llavors els candidats secundaris d'un vot no entren en joc fins que no hagin estat seleccionats tots els candidats primaris d'aquell vot.

2. Procediments d'optimització.

Aquests procediments miren de minimitzar la desigualtat de representació entre els diferents electors.

2.1. Variant seqüencial (1894–1899) [39, 40, 42, 43]. És la que nosaltres estudiem a la secció 7. Considera vots d'aprovació i assigna els escons de manera successiva. Cada escó s'assigna de manera que en aquell moment es minimitzi una certa mesura de la desigualtat de representació entre els diferents electors.

2.2. Variants directes (1896). Els escons no s'assignen de manera successiva, sinó que es distribueixen tots d'una vegada de manera que es minimitzi alguna mesura especificada de la desigualtat de representació entre els diferents electors. En general, la determinació d'aquesta distribució requereix algorismes d'optimització més complexos que els algorismes d'assignació successiva. Tot i això, Phragmén va adoptar aquest punt de vista directe o global en alguna ocasió, com ara a [42, p. 184, 188]. Nosaltres també l'adoptem a la secció 8.

2.3. Variant preferencial relativa (1895) [40, § 7]. Aquesta proposta consistia a substituir un vot preferencial de la forma a > b > c > d > e per un vot d'aprovació de la forma a, b, c, d, e més una fracció especificada, com ara 1/10, repartida a parts iguals entre les llistes a, b, c, d; a, b, c; a, b; a.

2.4. Variant preferencial absoluta (1903–1913). Utilitza el procediment seqüencial, però els vots preferencials són tractats amb el caràcter «absolut» següent (que generalitza la idea de la variant 1.4): el candidat $(k+1)$-èsim d'un vot preferencial no entra en joc fins que no han estat seleccionats els k candidats anteriors. En una primera versió, la informació preferencial es reduïa a distingir dos graus d'aprovació [8, p. 56, 62–64], però després es va admetre una ordenació qualsevol dels candidats aprovats [48, p. 47–54]. Aquesta versió general havia estat considerada ja el 1910 per Nore Tenow [54]. L'algorisme final es descriu també a [28, § 12.3.5, 13]. A diferència dels mètodes de vot únic transferible, en el cas $n = 1$ no es redueix al vot alternatiu (apartat 3.3), sinó a elegir el candidat que rep més vots de primera opció. Tanmateix, coincideix amb una determinada variant del vot únic transferible —l'anomenat mètode de Gregory inclusiu— si s'escull adequadament la quota d'aquest últim i l'ordre de les transferències [28, sats 13.1].

Aquesta variant és monòtona respecte a variacions dels vots a favor d'un determinat candidat. Tanmateix, no compleix el criteri de proporcionalitat de Droop. Per tal de garantir aquest últim, l'any 2002 Olli Salmi va proposar una modificació mitjançant certs elements del vot únic transferible [52, 53]. Aquesta modificació ha estat estudiada detalladament per Douglas Woodall [60], que en distingeix dues versions i demostra que totes dues compleixen el criteri de proporcionalitat de Droop. Un altre estudi en aquesta direcció és el de Ross Hyman [25]. Tanmateix, en el cas $n = 1$ aquestes modificacions es redueixen al vot alternatiu, la qual cosa implica la indesitjable manca de monotonia que hem comentat a l'apartat 3.6.

La variant preferencial absoluta va acabar formant part del sistema electoral suec, on va ser introduïda el 1921 i encara hi és present actualment [28, § 13.10, C.2.3]. Tanmateix, no afecta el nombre d'escons que són assignats a cada candidatura, sinó només quins candidats concrets reben aquests escons. De fet, l'elector ha d'optar per una sola candidatura, tot i que pot variar fins a un cert punt la llista ordenada de candidats. El nombre d'escons que obté cada candidatura es determinava inicialment mitjançant la regla de Jefferson i D'Hondt, però el 1952 aquesta va ser substituïda per una certa modificació de la regla de Webster i Sainte-Laguë. Per a més detalls remetem el lector a [28].

Agraïments

Els autors volem manifestar el nostre agraïment al senyor Mikael Rågstedt, bibliotecari de l'Institut Mittag-Leffler, per haver-nos ajudat a localitzar diversos documents. També estem molt agraïts al senyor Mikael Abrahamsson, bibliotecari del Centre de Ciències Matemàtiques de la Universitat de Lund, pel seu ajut a obtenir còpies de diversos treballs de Phragmén i d'altres autors. Els professors Magnus Fontes i Joachim Kock ens han ajudat també en la traducció de textos nòrdics. Moltes gràcies a tots dos. També volem donar les gràcies a la professora Rosa Camps, la qual ens ha ajudat a entendre les idees de Phragmén i a resoldre diverses qüestions tècniques. Finalment, agraïm també els comentaris dels professors Aureli Alabert i Svante Janson, els quals ens han permès millorar el contingut en diversos punts.

Referències

[1] Barrow-Green, J. *Poincaré and the three body problem*. Providence: American Mathematical Society; Londres: London Mathematical Society, 1997. (History of Mathematics; 11)

[2] Bendixson, I. *Regeringens förslag till proportionellt valsätt och dess verkningar. Framställning och kritik*. Estocolm: Nordiska Bokhandeln, 1905.

[3] Bendixson, I. «Rösträttsfrågan». Conferència donada el 2 de novembre de 1906 en l'associació Stockholms Högskolas Studentföreningen. Resum manuscrit de la conferència i de la discussió, segons notes d'Adolf Larsson: Estocolm, Kungliga Biblioteket, Gösta Mittag-Leffler papper, L62:55, núm. 6.

[4] [Bendixson, I.] «Promemoria rörande regeringens proportionella valmetod, af en antiproportionalist». *Frisinnade Landsföreningens Meddelanden* (Estocolm), núm. 52 (8) (1907).

[5] Brams, S. J. *Mathematics and democracy. Designing better voting and fair-division procedures*. Princeton: Princeton University Press, 2008.

[6] Carleman, T. «L. E. Phragmén in memoriam». *Acta Math.*, 69 (1) (1938), XXXI–XXXIII.

[7] Carstairs, A. M. *A Short History of Electoral Systems in Europe*. Londres: George Allen & Unwin, 1980.

[8] Cassel, C. G. *Proportionella Val. Systematisk framställning*. Apèndix I de [50]. Estocolm: Isaac Marcus' Boktryckeri-Aktiebolag, 1903.

[9] Cramér, H. «Lars Edvard Phragmén: Minnesteckning». *Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Årsbok* (1958), 279–301. Reproduït a *Levnadsteckningar över Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Ledamöter*, 9 (Estocolm: Almqvist & Wiksell, 1962), 255–277.

[10] [D'Hondt, V.] *La Représentation Proportionnelle des Partis, par un électeur*. Brussel·les: Bruylant-Christophe, 1878.

[11] D'Hondt, V. *Système Pratique et Raisonné de Représentation Proportionnelle*. Gant: J. S. Van Dooselaere; Brussel·les: C. Muquardt, 1882.

[12] DOMAR, Y. «Matematisk forskning under Stockholms högskolas första decennier». Univ. Stockholm, 1981. Reproduït a http://www2.math.su.se/matematik/Historia/Historia.pdf. Traducció anglesa: «Mathematical research during the first decades of the University of Stockholm». http://www2.math.su.se/ matematik/Historia/Histeng.pdf.

[13] DORON, G.; KRONICK, R. «Single transferable vote: an example of a perverse social choice function». *American Journal of Political Science*, 21 (1977), 303–311.

[14] DOVGOSHEY, O.; MARTIO, O.; RYAZANOV, V.; VUORINEN, M. «The Cantor function». *Expo. Math.*, 24 (1) (2006), 1–37.

[15] DUMMETT, M. A. E. *Voting Procedures*. Oxford: Clarendon Press, 1984.

[16] DUMMETT, M. A. E. «Towards a more representative voting system: The Plant Report». *New Left Rev.*, I/194 (1992), 98–113.

[17] ENESTRÖM, G. H. Carta a l'editor. *Aftonbladet* (23 febrer 1896).

[18] ENESTRÖM, G. H. «Om aritmetiska och statistiska metoder för proportionella val». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 53 (1896), 543–570.

[19] ENGLUND, K. «L Edward Phragmén». *Svenskt Biografiskt Lexikon*, 29 (1995–1997), 303–306. Reproduït a http://sok.riksarkivet.se/sbl/artikel/7271.

[20] GÅRDING, L. *Matematik och Matematiker. Matematiken i Sverige före 1950*. Lund: Lund University Press, 1994. Traducció anglesa: *Mathematics and mathematicians. Mathematics in Sweden before 1950*. Providence: American Mathematical Society; Londres: London Mathematical Society, 1998. (History of Mathematics; 13)

[21] HAGBERG, J. «Svenska Aktuarieföreningen 100 år. Aktuarier i svensk försäkring». *Nordisk Forsikringstidskrift*, 4 (2005), 377–385.

[22] HILL, I. D. «Election method for Council». Royal Statistical Society (1995). http://www.rss.org.uk/site/cms/contentviewarticle.asp?article=1005.

[23] HILL, I. D. «Party lists and preference voting». *Voting Matters*, 29 (2011), 15–19.

[24] HOAG, C. G.; HALLETT, JR., G. H. *Proportional Representation*. Nova York: Macmillan, 1926.

[25] HYMAN, R. «Divisor method proportional representation in preference-ballot elections». *Voting Matters*, 28 (2011), 15–30.

[26] IBM. «CPLEX Optimizer. High-performance mathematical programming solver for linear programming, mixed integer programming, and quadratic programming». http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/index.html.

[27] IRELAND GOVERNMENT. Department of the Environment, Heritage and Local Government. *Guide to Ireland's PR-STV Electoral System*. `http://www.environ.ie/en/LocalGovernment/Voting/PublicationsDocuments/FileDownLoad,1895,en.pdf`.

[28] JANSON, S. *Proportionella Valmetoder*. `http://www2.math.uu.se/~svante/papers/sjV6.pdf`, 2012–2014.

[29] LINDELÖF, E. «Utkast till ett på proportionalitetsidéen grundadt valsätt, jämte förklaring och motivering af de principer som ligga till grund för detsamma». Manuscrit de 1906. Estocolm: Kungliga Biblioteket: Gösta Mittag-Leffler papper, L62:55, núm. 3.

[30] LINDSTEDT, A. «Promemoria angående metoder för proportionella val». Estocolm: Kungliga Boktryckeriet, 1906.

[31] LINDSTEDT, A. «Förslag till metod för proportionella val». Estocolm: Kungliga Boktryckeriet, 1906.

[32] MILLQVIST, V. «Rösträttskommittén». *Idun. Illustrerad Tidning för Kvinnan och Hemmet*, 15 (45) (1902), 719–720.

[33] MITTAG-LEFFLER, M. G. «Proportionella val». Conferència donada el 16 de març de 1893 en l'associació Nationalekonomiska Föreningen. Referència: *Nationalekonomiska Föreningens Förhandlingar*, 1893 (1893), p. 44.

[34] MITTAG-LEFFLER, M. G. [«Resultatet av en granskning av A. Lindstedts och E. Phragméns förslag till proportionell valmetod»]. Informe dirigit al Ministeri de Justícia de Finlàndia. Manuscrit de 1906. Estocolm: Kungliga Biblioteket: Gösta Mittag-Leffler papper, L62:55, núm. 2.

[35] MONROE, B. L. «Fully proportional representation». *American Political Science Review*, 89 (1995), 925–940.

[36] MORA, X. «La regla de Jefferson-D'Hondt i les seves alternatives». *MatMat*, 2013 (4), 34 p. `http://mat.uab.cat/matmat/PDFv2013/v2013n04.pdf`.

[37] PHRAGMÉN, E. «Om proportionella val». Conferència donada en l'associació Studenter och Arbetare (1893). Resum: *Stockholms Dagblad* (14 març 1893).

[38] PHRAGMÉN, E. «Öfver proportionella val». Contingut: Quatre taules amb comentaris, 13 pàgines impreses, *circa* 1893, nom de l'autor i títol escrits a llapis. Institut Mittag-Leffler, Biblioteket, Sep. Coll., Sv. 9 [Phragmén].

[39] PHRAGMÉN, E. «Sur une méthode nouvelle pour réaliser, dans les élections, la représentation proportionnelle des partis». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 51 (3) (1894), 133–137.

[40] PHRAGMÉN, E. *Proportionella Val. En valteknisk studie*. Estocolm: Lars Hökerbergs, 1895. (Svenska Spörsmål; 25)

[41] PHRAGMÉN, E. Carta a l'editor. *Aftonbladet* (23 febrer 1896).

[42] PHRAGMÉN, E. «Sur la théorie des élections multiples». *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar*, 53 (1896), 181–191.

[43] PHRAGMÉN, E. «Till frågan om en proportionell valmethod». *Statsvetenskaplig Tidskrift*, 2 (1899), 297–308 (núm. 2, 88–98).

[44] Phragmén, E. «Utkast till föreskrifter beträffande val av riksdagsmän i andra kammaren och deras suppleanter». Estocolm: Kungliga Boktryckeriet, 1906.

[45] Phragmén, E. «Promemoria beträffande en förenklad form af den af undertecknad föreslagna valmetoden». Manuscrit de 1906. Estocolm: Kungliga Biblioteket: Gösta Mittag-Leffler papper, L62:55, núm. 4.

[46] Poincaré, H. «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique». *Acta Math.*, 13 (1890), A3–A270.

[47] Potthoff, R. F.; Brams, S. J. «Proportional representation: Broadening the options». *Journal of Theoretical Politics*, 10 (1998), 147–178.

[48] Proportionsvalkommittén [von Friesen, S.; Appelberg, G.; Bendixson, I.; Phragmén, E.]. *Betänkande angående ändringar i gällande bestämmelser om den proportionella valmetoden*. Estocolm: Isaac Marcus' Boktryckeri-Aktiebolag, 1913.

[49] Pukelsheim, F. *Proportional representation. Apportionment methods and their applications*. Cham: Springer, 2014.

[50] Rösträttskommittén [Asker, A.; Berg, G. J. G. A.; Biesèrt, J. E.; von Friesen, S. G.; Månsson, I.; Moberg, C. O.; Phragmén, L. E.; Rappe, C. J.; Svensén, E.; Cassel, C. G.] *Betänkande med förslag till proportionellt valsätt vid val till Riksdagens andra kammare jämte vissa ändringar i regeringsformen och riksdagsordningen*. Estocolm: Hæggström, 1903.

[51] Rovira i Virgili, A. *Els Sistemes Electorals*. Barcelona: Barcino, 1932. 2a ed: Barcelona, Ed. Undarius, 1977.

[52] Salmi, O. «D'Hondt without lists». *Election Methods Mailing List*. `http://lists.electorama.com/pipermail/election-methods-electorama.com/2002-September/073943.html`, 2002. Vegeu també *ibidem* `2002-August/073862.html`, `2002-November/074151.html`, `2002-November/106914.html` i `2003-August/108863.html`.

[53] Salmi, O. «Henkilökohtainen suhteellinen vaali». `http://www.uusikaupunki.fi/~olsalmi/vaalit/henkkoht.html`, 2004.

[54] Tenow, N. B. «En proportionell rangmetod, afsedd att på de proportionella valens område utgöra en motsvarighet till den vanliga formen för majoritetsval i enmansvalkretsar». *Statsvetenskaplig Tidskrift*, 13 (1910), 317–325.

[55] Tideman, T. N. «The single transferable vote». *Journal of Economic Perspectives*, 9 (1995), 27–38.

[56] Tideman, T. N. *Collective Decisions and Voting*. Ashgate, 2006.

[57] Woodall, D. R. «An impossibility theorem for electoral systems». *Discrete Math.*, 66 (1–2) (1987), 209–211.

[58] Woodall, D. R. «Properties of preferential election rules». *Voting Matters*, 3 (1994), 8–15.

[59] WOODALL, D. R. «Monotonicity. An in-depth study of one example». *Voting Matters*, 4 (1995), 5–7.

[60] WOODALL, D. R. «QPQ, a quota-preferential STV-like election rule». *Voting Matters*, 17 (2003), 1–7.

XAVIER MORA
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
CATALONIA, SPAIN
xmora@mat.uab.cat

MARIA OLIVER
DEPARTAMENT DE TECNOLOGIES DE LA INFORMACIÓ I LES COMUNICACIONS
UNIVERSITAT POMPEU FABRA
CATALONIA, SPAIN
maria.oliverp@upf.edu