Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 29, núm. 2, 2014. Pàg. 135–165. DOI: 10.2436/20.2002.01.56

Joseph-Louis Lagrange: *in memoriam*

Josep Pla i Carrera

> Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête, et cent années peut-être ne suffiront pas pour en reproduire une semblable.[1]

Resum: Aquest article és un homenatge a Joseph-Louis Lagrange en ocasió del doscents aniversari de la seva mort. Té tres parts: una primera part de caire biogràfic; la segona recull la seva producció científica de manera molt succinta, i la tercera, la més matemàtica i extensa, explicita alguns dels resultats assolits per l'insigne matemàtic.

Paraules clau: Joseph-Louis Lagrange, biografia d'un matemàtic, història de les matemàtiques.

Classificació MSC2010: 01A50, 01A70.

1 Introducció

Joseph-Louis Lagrange és un dels grans matemàtics de l'època de la Revolució i de l'Imperi francesos —en paraules de Napoleó Bonaparte (1769–1821), «la immensa piràmide de la ciència matemàtica» (vegeu [6, edició castellana de 2010, p. 178]). Tal com ja vaig defensar en un altre indret (vegeu [89, p. 33–34]), els insignes matemàtics d'aquest període —recordem-los cronològicament: Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Marie Jean Antoine de Caritat Condorcet (1743–1794), Gaspard Monge (1746–1818), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Adrien Marie Legendre (1752–1833), Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823)— són els artífexs del desenvolupament de la nova matemàtica del segle XVIII (geometria analítica, càlcul diferencial i integral, càlcul de variacions, càlcul de probabilitats, aritmètica, aplicació de la matemàtica a

1 Són les paraules que Lagrange li digué a Jean-Baptiste Joseph Delambre (1749–1822) en conèixer la mort, a la guillotina, del seu amic Antoine Laurent Lavoisier (1743–1794), que, pels seus estudis, és considerat el pare de la química. Vegeu [16, p. 46].

la física i a l'astronomia, equacions diferencials, sèries infinites, etc.) i la van aconduir a l'extrem de les seves possibilitats, com reconeix Lagrange (vegeu la tercera citació de la p. 138). Aquesta aportació féu indispensable una «revolució científica» (vegeu [14, edició castellana, p. 22–29]) en el món de la matemàtica: un canvi de paradigma epistemològic i metodològic.

2 Gotes biogràfiques

Podem dividir la vida de Lagrange en tres períodes ben diferenciats, que corresponen a les circumstàncies i els indrets on va desenvolupar la tasca investigadora i docent.[2] Aquests períodes són (vegeu [44, edició francesa de 1984, p. 309]):

- El que passa a la vila natal de Torí, on neix el dia 25 de gener de l'any 1736 i on viu fins a l'any 1766. Dura, doncs, una trentena d'anys.
- El que s'estén del 1766 al 1787 i que comprèn la seva activitat a l'Acadèmia de Berlín[3] i cobreix vint-i-un anys de la seva vida.
- El que passa a París: s'inicia l'any 1787 i s'extingeix amb la seva mort, que s'esdevé el 10 d'abril de 1813 als setanta-sis anys complerts.

Joseph-Louis Lagrange neix a la ciutat italiana de Torí amb el nom de Giuseppe Lodovico Lagrangia, però des de jove signa com a Lodovico La-Grange o Luigi Lagrange, adoptant la grafia francesa en el cognom. Per naixença, doncs, és italià, però, per adopció, francès.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE
Torí, 25 de gener de 1736-París, 10 d'abril de 1813

El seu primer treball imprès, datat el 27 de juliol de 1754, es titula *Lettera di Luigi De la Grange Tournier*.[4]

És el fill il·legítim —l'únic dels onze germans que aconsegueix arribar a l'edat adulta— de Giuseppe Francesco Lodovico —tresorer de l'Office des Travaux Publics et Fortifications de Sardenya, establert a Torí— i de Teresa Grosso —filla d'un metge de Cambiano, una ciutat propera a Torí.

La família era benestant —tant el pare com la mare provenien de famílies ben assentades econòmicament—, però l'ànsia especulativa del pare féu que, quan arribà el moment, no quedés res digne d'heretar. Aquest fet obligà Joseph-Louis a haver de treballar, un fet que considerava «la primera causa de tot el que de feliç li esdevindria». En una ocasió, digué:

2 Per tal de confegir aquesta biografia m'he basat en [16], [77], [44] i [6, edició castellana de 2010, p. 178–198], molt més novel·lada que les anteriors. Hom pot recórrer també a [45, p. 14–20], a «Joseph-Louis Lagrange (1736–1813)» dins de la web *The MacTutor History of Mathematics archive*, i finalment a [3, p. 330–339].

3 L'Acadèmia Reial de Ciències de Prússia fou fundada a Berlín el 18 de març de 1701, quatre anys després de l'Acadèmia de les Arts de Berlín, a la qual hom es refereix també amb el nom Acadèmia de les Arts de Berlín, breument Acadèmia de Berlín. Vegeu [5, tom 1, capítol 2].

4 Per aprofundir en les variacions del nom al llarg de la vida, vegeu [44, edició francesa, p. 309].

> Si hagués tingut fortuna familiar, probablement no hauria fet de la matemàtica el meu afer. I aleshores, quins beneficis hauria aconseguit en una altra carrera de l'època comparables als de la vida tranquil·la pròpia de l'estudiós, amb aquesta seqüela radiant d'èxits indiscutibles en un gènere eminentment difícil i amb aquesta consideració envers la meva persona que ha anat creixent dia rere dia fins ara?[5]

El seu pare desitjava que es dediqués a l'advocacia i, al començament, Joseph-Louis no hi tingué inconvenient. Fou precisament quan aprofundia en l'estudi del grec i del llatí que conegué l'obra d'Euclides (III aC) i d'Arquimedes (287 aC–212 aC), però sembla que no l'impressionaren gaire. Als disset anys, amb la lectura d'una monografia d'Edmond Halley (1656–1742) —el prestigiós astrònom anglès amic d'Isaac Newton (1642 julià, 1643 gregorià–1727)—, s'adonà de la superioritat del càlcul respecte de la geometria. En tota l'obra manté aquesta tendència que sintetitza la frase de la introducció de la *Méchanique analytique* (vegeu [76, tom 11, p. XII]):

> Hom no trobarà cap figura en aquest text. Els mètodes que s'hi exposen no precisen ni de construccions ni de raonaments geomètrics o mecànics; només calen operacions algèbriques sotmeses a unes lleis regulars i uniformes. Els qui estimen l'anàlisi veuran com creix el seu domini i me n'estaran agraïts.

El Decret reial del 28 de setembre de 1755 nomena Lagrange professor de les Écoles Royales d'Artillerie amb un sou anual de 250 escuts, un tracte que, en els onze anys que Lagrange va viure a Torí, no fou millorat.

La seva tasca creativa —de la qual faré una ressenya breu a la secció 3— porta Leonhard Euler (1707–1783) a elogiar-lo davant del seu superior jeràrquic Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759), president de l'Acadèmia de Berlín. En els treballs es troba una defensa inspirada del *principi de la mínima acció*, un fet que porta Maupertuis a indicar-li que, tan aviat com es presenti l'ocasió, li oferirà una càtedra a Prússia molt més avantatjosa que la de Torí. Lagrange, però, refusa l'oferiment. En contrapartida, el 2 de setembre de 1756 —quan tenia vint anys— és nomenat membre corresponent de l'Acadèmia de Berlín en la categoria d'associat estranger.

Placa dedicada a Lagrange

L'any 1757, Giuseppe Angelo Saluzzo di Menusiglio (1734–1810), el metge Giovanni Francesco Cigna (1734–1790) i Lagrange van crear una societat científica que fou la llavor de l'Acadèmia de Ciències de Torí.[6] Una de les tasques principals de la Societat era la publicació de les *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatæ Taurinensia*, en la qual la participació de Lagrange fou molt important.[7]

5 Vegeu [16, p. 16].

6 L'anomenaren Società Privata Torinese i era el primer nucli de la futura Accademia delle Scienze di Torino (1783), de la qual Saluzzo fou el president fins al 1788.

7 Els tres primers volums aparegueren els estius de 1759, 1762 i 1766, quan Lagrange encara vivia a Torí. El quart volum, corresponent als anys 1766–1769 i que aparegué l'any 1773, contenia

L'any 1763, Lagrange —que no havia sortit mai de Torí— marxa cap a París, on és molt ben acollit gràcies a la memòria sobre la libració de la Lluna. En el viatge de tornada a Torí sojorna a Ginebra on, aconsellat per Jean Baptiste le Rond D'Alembert (1717–1783), coneix l'il·lustre filòsof i escriptor francès François-Marie Arouet, dit *Voltaire* (1694–1778).

A la tardor de 1765, D'Alembert —amb la intenció de millorar-li la situació professional que té a Torí— li ofereix un lloc a Berlín que Lagrange refusa amb les paraules (vegeu [44, edició francesa, p. 315]):

> Mentre hi hagi *monsieur* Euler no em sembla que em convingui.

Això no obstant, D'Alembert li comunica que Euler abandona Berlín per tornar a Sant Petersburg i li demana que accepti el relleu, una possibilitat que ell mateix ja havia suggerit a Frederic II el Gran.

Lagrange pren possessió del càrrec de director de la classe de matemàtiques de l'Acadèmia de Berlín el dia 6 de novembre de 1766. En aquesta ciutat fa amistat amb Jean-Henri Lambert (1728–1777) i amb Johann III Bernoulli (1744–1807).

Les obligacions que adquireix amb l'Académie són la lectura d'una memòria mensual que, en algunes ocasions, serà publicada al *Recueil de l'Académie* —en total, en publica seixanta-tres— i la direcció de treballs de matemàtiques. No té, en canvi, cap responsabilitat docent, una activitat que recuperarà, però d'una manera molt esporàdica, a l'època parisenca.

Onze mesos després d'haver-se instal·lat a Berlín es casa amb la seva cosina Vittoria Conti, que s'hi acaba de traslladar. En una carta adreçada a D'Alembert el juliol de 1769, diu (vegeu [44, edició francesa, p. 315]):

> La meva dona —una cosina que ha viscut a casa de la meva família durant molt de temps— és bona mestressa de casa i, a més, no té pretensions.

El matrimoni no tingué fills. Vittoria emmalalteix i, després de suportar una malaltia llarga —durant la qual Lagrange se'n cuida amb molta dedicació—, mor l'any 1783. És en aquest període quan Lagrange expressa la seva preocupació pel futur de la matemàtica (vegeu [69]):

> [...] Començo a sentir que la inèrcia creix a poc a poc i ara mateix no puc respondre del que faré els propers deu anys. Em sembla que ara la mina és massa profunda i que, si no hi ha algú que descobreixi filons nous, tard o d'hora caldrà abandonar-la.

I, tanmateix, aquests anys berlinesos són anys d'una gran productivitat en els quals consolida el càlcul i les aplicacions de les matemàtiques a la física de l'època torinesa i hi aprofundeix alhora que endega recerques en l'àlgebra de polinomis i en aritmètica, una ciència que considera heretada de Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1581–1638), malgrat les enormes aportacions degudes a Euler. L'activitat l'ajuda a superar la malaltia i la mort de Vittoria.

---

quatre memòries de Lagrange confegides a Berlín el 1767, 1768 i 1770. Vegeu [44, edició francesa, p. 311–312].

Aquesta feina la descriu en la carta a D'Alembert de l'1 d'abril de 1781 (vegeu [68]):

> [...] Les meves ocupacions es redueixen a cultivar amb tranquil·litat i en silenci la matemàtica. No hi ha res que m'apressi i treballo més per plaer que pel deure. Sóc com els grans mestres que construeixen: faig, desfaig, refaig, fins que em trobo còmode amb el treball que he elaborat, quelcom que s'esdevé molt rarament.

Una de les tasques que porta a terme després de la mort de Vittoria és el tancament de la *Méchanique analytique* —una obra que havia projectat als dinou anys durant l'època torinesa—, com podem llegir a la carta adreçada a Laplace (vegeu [71]):

> He completat gairebé del tot un tractat sobre mecànica analítica que es fonamenta solament en el principi o fórmula de la primera secció de la memòria que us adjunto; no sé, però, ni quan ni a on el podré imprimir i, per això, no m'apresso a fer els darrers retocs.

La qüestió de l'edició la resol l'abat Marie, un antic amic de Legendre, que va convèncer un editor parisenc. El llibre apareix finalment l'any 1788, quan Lagrange pateix una depressió profunda.

Aquesta depressió l'ha provocada, d'una banda, la mort de Vittoria i, de l'altra, la del rei Frederic II el Gran (1712–1786), esdevinguda el 17 d'agost, amb el que això comporta de pèrdua de suport en l'àmbit científic berlinès. És aleshores quan Honoré Gabriel Riqueti, comte de Mirabeau (1749–1791), promou que sigui reclamat per a anar a París. El contracte que s'estableix perdurà malgrat els canvis de règim que s'esdevingueren a França. Alhora Prússia li concedeix una pensió que es va mantenir fins a l'any 1792.

Lagrange abandona Berlín el 18 de maig de 1787 i el 29 de juliol esdevé pensionista veterà de l'Académie de Sciences de Paris,[8] de la qual era membre associat estranger des del 22 de maig de 1772.

És ben acollit pels erudits parisencs per l'ampli ventall de coneixements que té —metafísica, història, religió, lingüística, medicina, botànica, etc.— quelcom que respon a una regla de conducta que havia adoptat feia temps (vegeu [44, edició francesa, p. 325]):

> Crec que, en general, un dels principis dels savis és mantenir un acord estricte amb les normes del país en tot allò que experimenta, fins i tot quan no són raonables [...].

Això no obstant, quan parla ho fa usant un to de dubte, i acostuma a començar l'explicació amb «no sé» (vegeu [16, p. 54].

I, malgrat que mai no pren partit en els esdeveniments polítics de l'època —reialisme, Revolució, Imperi—, sembla talment que, en esperit, mostra una certa simpatia per la Revolució.

L'any 1792 demana la mà de Renée-François-Adélaide Le Monnier (1767–1833), filla de l'astrònom Pierre-Charles Le Monnier (1715–1799), un col·lega

8 Se l'anomena Acadèmia de París.

de l'Académie. Es casen el 31 de maig. La diferència d'edat és de vint-i-cinc anys. El matrimoni tampoc no va tenir fills però, com el primer, és tranquil. Són anys políticament convulsos per a la monarquia, que signa el contracte de matrimoni el 3 de juny per indicar «com els n'és, de plaent, la unió». El 13 d'agost la família reial era empresonada a la Tour du Temple.

També són anys difícils per als científics: el 28 de març de 1794, Condorcet se suicida i el 8 de maig Lavoisier és decapitat sota l'imperi de *la Terreur* (vegeu la nota 1).

Uns anys abans —el 8 de maig de 1790—[9] l'Assemblée Nationale havia decretat la unificació de les mesures, quelcom que confià a l'Académie de Sciences. Malgrat la supressió de l'Académie, esdevinguda el 8 d'agost de 1793, la Comissió es manté. Lagrange en forma part, com a president, des de l'inici fins al final.

El 30 d'octubre de 1794, per decret, s'institueix l'École Normale, que té com a objectiu formar docents i uniformitzar l'ensenyament. Solament dura tres mesos i onze dies; en aquest període Lagrange —que té Laplace com a ajudant— hi ensenya matemàtica elemental.

Gràcies als esforços de Gaspard Monge, l'11 de març de 1794 es crea l'École Centrale des Travaux Publics que, seguidament, esdevé l'École Polytechnique —que encara avui perdura. Lagrange hi ensenya anàlisi matemàtica fins a l'any 1799, en què el succeeix Sylvestre-François Lacroix (1765–1843).

A partir del 1799 Lagrange forma part —amb Laplace, Monge, Claude Louis Berthollet (1748–1822) i Carnot, entre d'altres— d'un senat conservador creat per Bonaparte i que subsisteix durant l'Imperi. Rep aleshores moltes distincions, com ara l'Ordre de la Légion d'Honneur, el títol de Comte d'Empire (1808), i el nomenament de Grand Croix de l'Ordre Imperial de la Réunion (1813), creat per l'emperador el 1811.

Però Lagrange ja està molt malalt i espera, amb resignació, el moment de la mort, que s'esdevé el 10 d'abril. Tres dies més tard és enterrat al Panthéon, un monument dedicat als «Grandes Hommes» per «la Patrie reconnaissante». Els elogis fúnebres són llegits per Laplace, en nom del Senat, i per Bernard Germain Étienne de Laville-sur-Illon, comte de Lacépède (1756–1825), en nom de l'Académie. També a Itàlia se li reten homenatges públics, però no pas així a Berlín que, en aquells moments, es troba en plena insurrecció contra els francesos.

Tomba de Lagrange
Cripta del Panthéon
París

L'emperador fa comprar els treballs i manuscrits de l'insigne matemàtic —italià de naixença però francès d'adopció, qui en dubta?— i els confia, per a la seva salvaguarda, a l'Institut de France.

9 Vegeu `http://smdsi.quartier-rural.org/histoire/8mai70.htm`. Això no obstant, no s'instaurarà a França fins al 7 d'abril de 1795. Vegeu [98].

3 Notes sobre la producció científica

L'obra de Joseph-Louis Lagrange és molt diversa i extensa.[10] Els àmbits d'estudi més importants els he concretat en ordre alfabètic, en la llista següent, i els he acompanyat d'una bibliografia *ad hoc*:

1. Àlgebra: [101], [80], [93].
2. Astronomia: [32], [81], [100].
3. Aritmètica o teoria de números: [95], [104], [36].
4. Càlcul de variacions: [97], [37].
5. Equacions diferencials: [2], [41].
6. Filosofia de l'anàlisi matemàtica: [20].
7. Mecànica: [72], [12], [13], [9].
8. Sèries: [91, capítol II, p. 140–159], [27].[11]

L'article de Jean Itard [44] fa una presentació —força recomanable per la capacitat de síntesi d'aquest historiador francès de la matemàtica— de setanta-dos treballs de Lagrange, amb una descripció breu dels continguts i els situa en el seu lloc en la vida de l'insigne torinès.[12] En faré una selecció molt succinta: n'explicitaré el títol, el període en què el va realitzar ([T] per torinès, [B] per berlinès i [P] per parisenc) i la citació bibliogràfica corresponent.

3.1 Lagrange com a matemàtic aplicat

En la fase inicial de la seva producció Lagrange se'ns mostra com un *matemàtic aplicat* —resolució de problemes suggerits per la mecànica, l'astronomia, la gravitació, etc. Tanmateix, no oblida mai elaborar la teoria matemàtica que li cal per assolir l'objectiu que s'ha plantejat.

Primer treball. L'any 1754 fa imprimir una memòria en forma de carta, en italià, adreçada a Giulio Carlo di Fagnano (1682–1766) (vegeu [47]), on desenvolupa un càlcul formal que es fonamenta en l'analogia que hi ha entre el binomi de Newton i les diferències successives del producte de dues funcions, de la qual havia enviat una notícia a Euler abans de la publicació de la memòria.[13] [T]

La corba tautòcrona. El 30 de setembre escriu una altra carta a Fagnano —que s'ha perdut—, en què estudia la *corba tautòcrona*.

Recordem que Galileo Galilei (1564–1642), en la carta adreçada a Guidobaldo del Monte (1545–1607) de 29 de novembre de 1602 [28] afirma que

10 La trobem recollida en els catorze volums ressenyats a [76]. Es pot consultar també [96].

11 Molts d'aquests ítems —amb més o menys detall i extensió— es poden trobar en llibres d'història de caire més general com ara [84, vol. III i IV], [11, vol. 4], [82, vol. IX], [46], [39] i [40]. Vegeu també [89].

12 Una descripció més humanitzada és la que s'ofereix a [16].

13 Un cop sortí publicat s'assabentà que el resultat es trobava ja en la correspondència entre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) i Johann Bernoulli (1667–1748).

el període d'oscil·lació del pèndol depèn *només* de la longitud del pèndol, però, en canvi, *no depèn* ni de la massa ni de l'amplada. Aquesta afirmació serà analitzada per Christiaan Huygens (1629–1695) a l'*Horologium oscillatorium* (1673) [42], on demostra que cal que la corba que descrigui el pèndol sigui una *cicloide* —que és la corba de descens mínim o corba tautòcrona o isòcrona. Aquest resultat —mínim temps de caiguda— és el que agafa Jakob Bernoulli (1654–1705) en la seva solució del problema de la branquistòcrona, del qual parlarem més endavant a la pàgina 151 (vegeu [88, p. 66–68]).

Lagrange dedicà dos treballs més a l'estudi de la corba tautòcrona: el primer fou una comunicació a l'Acadèmia de Berlín el 4 de març de 1767 (vegeu [55]) en la qual feia servir idees incipients del càlcul de variacions. Fou criticat per l'acadèmic Alexis Fontaine des Bertins (1707–1771). Lagrange li va respondre amb l'article *Nouvelles réflexions sur les tautochrones*, publicat el 1770 (vegeu [60]). [B]

El càlcul de variacions. És, però, a partir de l'any 1755 —tenia dinou anys— quan Lagrange es preocupa del que, en un treball de 1766, Euler anomena *càlcul de variacions* (vegeu el títol de [25]). Diu: «És el primer fruit dels meus estudis».[14]

Les tècniques que va desenvolupar per al càlcul de variacions seran la base de la *Méchanique analytique*.

Les sèries recurrents i la probabilitat. L'any 1776 en una carta a Laplace —on indica que ha començat la traducció francesa de *The doctrine of chances* d'Abraham De Moivre (1667–1754) (vegeu [18]) que no pensa continuar i que es congratula que Laplace ho estigui fent— li esmenta que la memòria [50] era una introducció a la teoria de la probabilitat que, per manca de temps, no desenvoluparà. Lagrange recuperarà en els treballs [66], [49] i [65] la seva idea de l'ús de sèries recurrents per a la resolució de problemes plantejats per De Moivre. [T, B]

Sobre el so. També és en aquests anys quan Lagrange es preocupa de la teoria del so.[15] En la primera de les obres que dedica a aquesta qüestió fa una declaració de principis que em sembla que val la pena de retenir (vegeu [50, p. 40]):

> I la concordància dels meus resultats amb l'experiència servirà, potser, per destruir els prejudicis d'aquells a qui els desespera que la matemàtica no pugui aportar mai la llum vertadera a la física. És un dels principals objectius que m'he plantejat ara com ara. [T]

La libració de la Lluna. L'any 1763 s'interessa per la libració de la Lluna arran de la proposta del concurs per a l'any 1764 de l'Académie des Sciences:

14 Vegeu [57, p. 154]. Les aportacions de Lagrange es troben recollides a «Recherches sur la méthode de maximis et minimis» [48] i a «Sur la méthode des variations» [53]. Les tècniques emprades les sintetitza a [51].

15 Són els treballs que es recullen a [76, tom I, p. 39–148; 151–316; 319–332].

Com podem explicar la raó per la qual la Lluna presenta sempre la mateixa cara a la Terra; i de quina manera podem determinar per mitjà de les observacions i de la teoria, si l'eix d'aquest Planeta es troba subjecte a alguna mena de moviment propi que s'assembli al que coneixem de la Terra i que produeix la precessió i la nutació.

Per a estudiar aquest problema fa servir el *segon principi de les velocitats virtuals* que presenta un lligam íntim i necessari amb les tècniques del càlcul de variacions.[16] [T, B]

El problema dels tres cossos. També es presenta al concurs de 1768 amb una memòria molt notable sobre la teoria dels tres cossos —Sol, Terra i Lluna. És una qüestió d'una gran profunditat i que obre tot un camp de recerca novell.[17] Després ho generalitza a l'estudi dels sis cossos: Sol, Júpiter i les seves quatre llunes. Aquests estudis serien represos, vint-i-quatre anys més tard, per Laplace.

També en aquesta ocasió es basa en les lleis de la dinàmica: es limita a considerar, en l'aire, les partícules que es troben alineades i aleshores recorre al problema de les cordes que vibren, amb el qual els geòmetres no estaven pas d'acord; els mostra que els seus càlculs són deficients, i elabora una solució general.[18] [B]

Estudis sobre la dinàmica dels fluids. En el decenni següent es preocupa pel comportament del moviment dels fluids; el primer treball, llegit a l'Académie el 22 de novembre de 1781, es publica l'any 1783 (vegeu [70]). [B]

3.2 Lagrange com a matemàtic pur

Ara, en canvi, ens trobem amb un Lagrange entès com a matemàtic pur —és a dir, planteja i resol problemes propis de la matemàtica en si mateixa que aprofundeixen en la naturalesa i el comportament dels seus objectes més preuats com ara els números enters, els polinomis, etc.

L'equació de Pell. Dedica diversos treballs a demostrar l'existència de solució de l'equació de Pell, d'acord amb el nom que li atribuí Euler,[19] $y^2 - Ax^2 = 1$, on x i $y \neq 0$ són enters positius i A no és un quadrat perfecte.[20] [B]

16 Vegeu [52]. Aquest treball serà millorat de manera sensible en un treball ulterior de 1780: [67].

17 Vegeu [62]. Aquests treballs el porten, d'una manera natural, a l'estudi de les pertorbacions i a la teoria del potencial que desenvolupà durant els anys setanta del segle XVIII. També val la pena indicar que tracta de manera explícita el concepte de *determinant*; vegeu [46, vol. II, p. 800] o [40, p. 320–322].

18 Cal remarcar la idea que tingué d'invertir el sumatori i la integral i que el portaren de manera inconscient als *coeficients de Fourier*. Vegeu [46, vol. II, p. 510–511].

19 El 1738 —vegeu [22]— Euler parla d'un problema aritmètic, però, en canvi, el 1759 parla ja del problema de Pell —vegeu [24]. Per a més informació, vegeu la nota 31.

20 Vegeu [55], publicat el 1769. A les notes que acompanyen el *Vollständige Anleitung zur Algebra* d'Euler —vegeu [63]— ofereix una demostració molt més simplificada.

Un problema aritmètic. Ofereix la primera demostració completa del teorema de Bachet: *Tot número natural és la suma de quatre quadrats enters*. Es basa en les demostracions inacabades d'Euler.[21] [B]

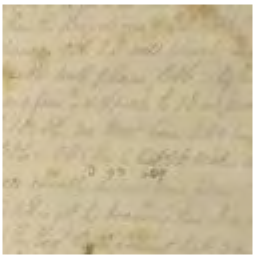
El teorema de Wilson. El 13 de juny de 1771 llegeix a l'Acadèmia de Berlín una demostració molt original del teorema de Wilson: *Si p és un número primer,* $(p-1)!+1$ *és múltiple de p* (vegeu [61]). [B]

La resolució de les equacions algèbriques. Una de les qüestions de la matemàtica que preocupava des de feia temps era el comportament de les equacions polinòmiques. L'any 1770, Lagrange fa una aportació notable en la memòria extensa «Réflexions sur la résolution algébrique des équations» on analitza en profunditat els algorismes de resolució d'equacions polinòmiques subministrats pels matemàtics que l'han precedit en la qüestió (vegeu [59]).

Aquesta memòria notable la completa una altra memòria [75] que proporciona mètodes per a determinar arrels aproximades de les equacions polinòmiques, i en la qual analitza el treball de D'Alembert relatiu al *teorema fonamental de l'àlgebra* i on reconeix la validesa de la demostració de D'Alembert amb les paraules següents: «Aquesta demostració és molt enginyosa i, al meu parer, no deixa res a desitjar pel que fa a l'exactitud» (vegeu [15] i [64, p. 479]); i que conté també la llei d'interpolació —avui coneguda amb el nom de *llei d'interpolació de Lagrange*— que trobem a les lliçons que donà a l'École Normale l'any 1795, si bé ja havia estat indicada per Edward Waring (1734–1798) l'any 1779 i Euler, el 1783 (vegeu [73] i [103]. I, per a més informació, [83]). [B, P]

Cloc aquesta síntesi breu amb dos tractats alhora metodològics i epistemològics:

La mecànica analítica. Lagrange la presenta com una manera nova de resoldre problemes de la mecànica dels cossos, tant si són sòlids com si són fluids, basant-se per a tots ells en els mateixos principis. Així, als vint-i-tres anys havia copsat ja els fonaments de les seves grans obres, obres que serien admirades per tots els erudits de l'època (vegeu [16, p. 20]). Els principis en què es basa són *principis de minimalització*. [T, B, P]



Méchanique analytique (1788)
Pàgina manuscrita

La teoria de les funcions analítiques. És un tractat d'índole epistemològica on Lagrange fa una presentació clara i rigorosa —i alhora parcial— del càlcul diferencial (vegeu [74]). [P]

21 Vegeu [58], aparegut l'any 1772.

4 Alguns resultats matemàtics explicitats

Em sembla que aquest *in memoriam* a Lagrange seria coix si no digués quelcom d'algunes de les seves aportacions matemàtiques; dedico, doncs, aquesta secció a fer un repàs breu d'algunes d'aquestes aportacions. En aquest repàs, tanmateix, no aprofundeixo en les qüestions de què tracto —suposo que el lector en té ja un cert coneixement—; solament em fixo en alguns detalls històrics i en d'altres de relatius a l'originalitat de l'obra de Lagrange.

4.1 Àlgebra

L'objectiu del treball de Lagrange de 1770, *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* [59], és trobar, a partir de l'anàlisi —la reflexió— dels mètodes de resolució de la cúbica i la quàrtica generals assolits pels matemàtics que l'han precedit en l'estudi del problema, un camí per a poder resoldre la *quíntica general* que sigui de la naturalesa fins aleshores assolida, és a dir, *per radicals*.

Recordem que, el mateix any, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735–1796) establia: *Tota equació $X^p - 1 = 0$, amb p primer, és resoluble per radicals*. Ho establia, però, solament per als casos $p = 2, 3, 5, 7$ i 11. La demostració general la donaria Carl Friedrich Gauss (1777–1855), a les *Disquisitiones arithmeticæ* (1801) [31] (vegeu-ne la traducció catalana de Griselda Pascual, [86]).

Entenem per *equació polinòmica general* una equació en la qual els coeficients són «paràmetres» —és a dir, totalment generals. En concret, són equacions de la forma

$$X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = 0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}.^{22} \tag{1}$$

Els lligams estructurals de les arrels de (1) són sempre funcions simètriques i, de retruc, són expressables com a funcions racionals dels coeficients de l'equació inicial que, en principi, són elements genèrics de $\mathbb{Q}$ (respectivament, de K), via les *fórmules de Cardano-Viète* i del *teorema fonamental de les funcions simètriques*.[23] Aquesta anàlisi el porta a establir una definició i dos teoremes bàsics que constitueixen l'inici d'un canvi de paradigma respecte dels algebristes que l'havien precedit, com palesen els exemples que segueixen els enunciats següents (vegeu [59, § 100, p. 374–379]):

Definició. Diem que la funció racional $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, funció de les arrels $x_1, \ldots, x_n$ de (1), admet totes les permutacions de la funció racional $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ si, i només si, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ és invariant per tota permutació que deixa invariant $\psi(x_1, \ldots, x_n)$.[24]

22 El cos podria ser més general; en tot cas, els coeficients són genèrics en el cos en qüestió.

23 Aquest teorema fou intuït per Albert Girard (1595–1632) [35], aprofundit per Isaac Newton [85, p. 102] i demostrat per Edward Waring [102, p. 76]. Lagrange el considera «autoevident» [59, p. 372].

24 Lagrange les anomena *funcions semblants* i suposa que són funcions racionals. Vegeu [59, § 88, p. 350–351].

Teorema I. *Si una funció racional de les arrels de* (1), $\varphi(x_1,\dots,x_n)$*, admet totes les permutacions d'una altra funció* $\psi(x_1,\dots,x_n)$ *(i, potser, d'altres), aleshores la funció* φ *es pot expressar com una funció racional de* ψ *els coeficients de la qual són funcions racionals dels de l'equació general.*

Un exemple senzill ajudarà a copsar el significat del teorema. Considerem l'equació quadràtica general $a\,X^2+b\,X+c=0$ de la qual suposem que les arrels són x_1, x_2. La funció *projecció primera* $\pi_2^1(x_1,x_2):=x_1$ admet les mateixes permutacions de les variables x_1, x_2 que la funció $t(x_1,x_2):=x_1-x_2$: solament la identitat. Per tant, $x_1=\frac{1}{2}(-\frac{b}{a}+t(x_1,x_2))$.

Recordem, de passada, que el *discriminant* de l'equació de segon grau anterior és $\Delta:=a^2\,(x_1-x_2)^2=a^2\,(x_1^2+x_2^2-2\,x_1\,x_2)=((x_1+x_2)^2-4\,x_1\,x_2)=a^2\left((\frac{-b}{a})^2-4\frac{c}{a}\right)=b^2-4\,a\,c$. Per tant, $t(x_1,x_2):=\sqrt{\Delta}=\sqrt{b^2-4\,a\,c}$, i recuperem l'expressió ben coneguda de resolució de l'equació de segon grau general $x_1=-\frac{b}{2\,a}+\frac{1}{2\,a}\sqrt{\Delta}=-\frac{b}{2\,a}+\frac{1}{2\,a}\sqrt{b^2-4\,a\,c}$. El càlcul de x_2 és ara elemental, ja que $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, i dóna $x_2=-\frac{b}{2\,a}-\frac{1}{2\,a}\sqrt{\Delta}=-\frac{b}{2\,a}-\frac{1}{2\,a}\sqrt{b^2-4\,a\,c}$.

Teorema II. *Si una funció racional de les arrels de* (1), $\varphi(x_1,\dots,x_n)$*, no admet totes les permutacions d'una altra funció racional* $\psi(x_1,\dots,x_n)$*, sinó que pren* r *valors diferents, aleshores la funció* φ *és arrel d'una equació de grau* r *els coeficients de la qual són funcions racionals de* ψ *i dels coeficients de l'equació general* [59, § 103, p. 382–387].

Com a exemple d'aplicació del teorema anterior, considerem l'equació general de tercer grau $X^3+a_2X^2+a_1X+a_0$ i les funcions de les seves arrels $\varphi=x_1$ i $\psi=x_1x_2$. Les permutacions que deixen fixa ψ són la identitat i la que intercanvia x_1 i x_2. Per aquestes permutacions φ pren dos valors: x_1 i x_2. Aleshores φ és arrel de l'equació de segon grau $(Y-x_1)(Y-x_2)=Y^2-(x_1+x_2)Y+x_1x_2=0$. El terme independent del polinomi és ψ i el coeficient de grau 1 és

$$-(x_1+x_2)=-(x_1+x_2+x_3-x_3)=-\left(a_2-\frac{x_1x_2x_3}{x_1x_2}\right)=-a_2+\frac{-a_0}{\psi}.$$

Entre les funcions de les arrels, Lagrange introdueix les anomenades *resolvents primeres*, definides com:

$$\rho=x_1+\xi\,x_2+\xi^2\,x_3+\cdots+\xi^{n-1}\,x_n,$$

on $1,\xi,\xi^2,\dots,\xi^{n-1}$ són les n arrels enèsimes de la unitat, que s'utilitzen, per exemple, en la resolució de la cúbica com veurem a continuació.

Procediment de Lagrange. Volem resoldre l'equació general (1). Comencem amb una funció simètrica de les arrels com ara $\varphi_0:=x_1+\cdots+x_n$. És invariant per a les $n!$ permutacions de les arrels $x_1,\dots,x_n$.

Sigui ara $\varphi_1(x_1,\dots,x_n)$ una funció que pren r valors quan sotmetem les variables $x_1,\dots,x_n$ a les permutacions $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Aleshores, pel teorema II, φ_1 serà arrel d'una equació de grau r, $g_1(Y)=0$, els coeficients de la qual seran funcions racionals de φ_0 i dels coeficients de l'equació general.

Sigui ara $\varphi_2(x_1,\ldots,x_n)$ una funció que pren s valors quan sotmetem les variables $x_1,\ldots,x_n$ a les permutacions $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ que deixen invariant $\varphi_1(x_1,\ldots,x_n)$. Serà l'arrel d'una equació de grau s, $g_2(Y)=0$, amb coeficients en el cos de funcions racionals de φ_1 i els coeficients de l'equació general.

Obtenim una successió $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2,\ldots$, fins que arribem a x_1 (que només admet la identitat). Són arrels d'equacions $g_1(Y)=0$, $g_2(Y)=0$, $g_3(Y)=0,\ldots$, de graus $r,s,t,\ldots$ Aquestes equacions són les *resolvents de Lagrange* de l'equació (1).

Si cada una de les equacions $g_1(Y)=0$, $g_2(Y)=0$, $g_3(Y)=0,\ldots$, és resoluble per radicals, l'equació general (1) serà resoluble per radicals.

Vegem ara el mètode anterior aplicat a la cúbica. Considerem la funció —el cub de la resolvent primera— $\varphi(x_1,x_2,x_3):=(x_1+\xi\,x_2+\xi^2\,x_3)^3$, on $\xi^3=1$, associada a la cúbica general $X^3+p\,X+q=0$. Pren dos valors A i B quan sotmetem les arrels x_1, x_2, x_3 a les susbtitucions possibles de $\mathfrak{S}_3$ que deixen fix $s(x_1,x_2,x_3):=x_1+x_2+x_3$. Per tant són les arrels d'una equació de segon grau —en concret de l'equació $Z^2+27\,q\,Z-27\,p^3=0$— i, per tant, resoluble per radicals.[25] A més tenim

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &= 0,\\ x_1+\xi\,x_2+\xi^2\,x_3 &= \sqrt[3]{A},\\ x_1+\xi^2\,x_2+\xi\,x_3 &= \sqrt[3]{B}. \end{aligned}$$

Sumem i obtenim $x_1=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$. Les altres arrels s'obtenen anàlogament. L'hem resolt per radicals —quelcom que ja havia aconseguit el 1535 Niccolò Fontana, (1499–1557), dit *Tartaglia* (el Quec). La resolució de la quàrtica la tracta de manera anàloga.

Aleshores, ple d'esperança, aplica el mètode a la quíntica i es troba que la resolvent és una sèxtica —per tant més complexa de resoldre que la que es proposava inicialment.[26]

Serà, doncs, impossible resoldre la quíntica per radicals? Gauss així ho afirma taxativament el 1801. Aquesta anàlisi —que hom podria pensar que és fallida— obre la porta a les recerques de Paolo Ruffini (1765–1822) [94], Niels Herik Abel (1802–1829) [1] i Évariste Galois (1811–1832) [30]. En particular, Ruffini estableix que *quan $n>4$, no hi ha cap funció de les arrels que prengui 3 o 4 valors* [94, vol. 2, p. 162–170] i d'aquí en dedueix la *impossibilitat* de resoldre la quíntica general. Però, per a justificar-ho, recorre al fet següent (supòsit de Ruffini): *Si una equació és resoluble per radicals, les expressions de*

25 És un exercici veure que $A+B=-27\,q$ i $A\cdot B=-27p^3$.

26 Vegeu [59, § 74, p 342]. Diu: «Mais nou n'entrerons point ici dans ce détail qui, outre qu'il exigerait des calculs très-longs, ne saurait d'ailleurs jeter aucune limière sur la résolution des équations de cinquième degré; car comme la réduite en z est de sixième degré, elle ne sera pas résoluble a moins qu'elle ne puisse s'assabaiser a un degré inférieur au cinquième»: [«No ens estendrem en els detalls que, a banda d'exigir càlculs massa llargs, tampoc no ens aportarien llum a la resolució de la quíntica; atès que la reduïda en z és de grau sisè, no serà pas resoluble, llevat que puguem abaixar-li per dessota del grau cinquè»].

les arrels es poden expressar per mitjà de radicals que són funcions racionals de les arrels amb coeficients en el cos dels coeficients de l'equació inicial que cal resoldre i de les arrels complexes de la unitat corresponents [94, p. 11]. Aquest resultat l'establiria, però, Abel en la seva demostració de la impossibilitat de resolució de la quíntica general. Per a consultar el treball de Ruffini, vegeu [93, capítol VIII]; per al d'Abel, [87], i per al de Galois, [90].

4.1.1 El teorema de Lagrange de la teoria de grups. Val a dir que, en aquest context, li cal que el conjunt de les permutacions de les arrels es trenqui de manera adequada (vegeu [92, cinquena edició, p. 207–209]).

Aquest resultat el va establir Lagrange quan encara no s'havia introduït el concepte de *grup*, originari de Galois. Utilitzant ara aquesta noció el resultat de Lagrange és el següent:

TEOREMA DE LAGRANGE DE LA TEORIA DE GRUPS. *Si H és un subgrup d'un grup G —tots són grups de permutacions d'arrels—, aleshores l'ordre del subgrup H —el nombre d'elements— divideix l'ordre del grup G.*

4.2 Aritmètica o teoria de números

En aquest àmbit Lagrange fa tres aportacions que es recullen als llibres d'història de la matemàtica: la demostració de la fórmula de Wilson, la solució del problema de Bachet i la resolució de l'equació de Pell. Comentarem aquí la primera i l'última.

4.2.1 La fórmula de Wilson. Aquesta fórmula ja era coneguda pels matemàtics indis i en trobem la primera petjada en Bhāskara I (~600–~680); la retrobem en Ibn al-Haytham (~1000). A Occident,[27] l'enuncia Edward Waring l'any 1770, que l'atribueix al seu deixeble, John Wilson (1741–1793); cap dels dos, emperò, no la demostra.[28]

TEOREMA DE WILSON. *Si p és un número primer, $(p-1)!+1$ és múltiple de p.*

L'any 1771, Lagrange n'ofereix una demostració realment simple (vegeu [61]). Tot consisteix a considerar el polinomi

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+p-1) = x^{p-1} + A_1\, x^{p-2} + \cdots + A_{p-1},$$

27 Hi ha constància que, un segle abans, ja l'havia intuït Leibniz [99, p. 114] però mai no la va publicar. Diu: «Productus continuorum usque ad numerum qui antepraecedit datum divisus per datum relinquit 1 (vel complementum ad unum?) si datus sit primitivus. Si datus sit derivativus relinquet numerum qui cum dato habeat communem mensuram unitate majorem» (El producte de tots els enters que precedeixen un enter donat, quan es divideix per aquest enter, dóna 1 si el número enter és primer. Si és compost, dóna un número que té un factor comú major que 1 amb l'enter donat).

28 Vegeu [102, p. 218, i com a problema 5, en l'edició de 1782, p. 380] d'Edward Waring. En l'esmentada pàgina de la tercera lliçó, hi llegim: «Hanc maxime elegantem primorum numerorum proprietatem invenit vir clarissimus, rerumque mathematicarum peritissimus Joannes Wilson Armiger» (Un personatge il·lustre i molt expert en matemàtiques, John Wilson, trobà aquesta propietat elegant dels números primers).

a substituir x per $x+1$ i a multiplicar-ho tot per $x+1$. Comparant els coeficients en resulta que $k\,A_k$, amb $1 \le k \le p-2$, i, per tant, cada A_k, amb $1 \le k \le p-2$ és múltiple de p i, a més, $(p-1)\,A_{p-1} = 1 + A_1 + \cdots + A_{p-2}$. D'on trivialment $A_{p-1}+1$ és múltiple de p; però $A_{p-1} = (p-1)!$

D'aquest resultat en dedueix el *teorema petit de Fermat* i finalment demostra el recíproc del teorema de Wilson (breument i clara exposat a [19, vol. I, p. 62–63]).

Tanmateix, Lagrange ofereix un teorema més general —que és el que val la pena d'indicar—, avui conegut, com tants d'altres, amb el nom de *teorema de Lagrange*.[29] Diu:

Teorema de Lagrange. *Sigui p un número primer i*

$$f(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

amb $a_k \in \mathbb{Z}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, $n > 1$ i $a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$. Llavors la congruència

$$f(X) \equiv 0 \pmod{p}$$

té, com a màxim, n arrels diferents mòdul p.[30]

I, si bé Lagrange no en dedueix el teorema de Wilson, és possible fer-ho (vegeu [10, p. 102–104]).

4.2.2 La resolució de l'equació de Pell. Es tracta d'estudiar l'equació diofàntica, coneguda amb el nom d'*equació de Pell*:[31]

$$x^2 - A\,y^2 = 1, \quad x, y \in \mathbb{Z}, \text{ i } A \in \mathbb{N}, \text{ no quadrat perfecte.} \tag{2}$$

Euler s'havia adonat del fet següent:

Lema d'Euler. *Si p, q és una solució positiva de $x^2 - A\,y^2 = 1$, aleshores $\frac{p}{q}$ és una convergent del desenvolupament de $\sqrt{A}$ en fracció contínua* [24, p. 32].

S'adonà també del lema:

---

29 Vegeu [56, p. 667–669]. Fa la demostració —que és vàlida en general— en un cas concret.

30 Està enunciat en el llenguatge de Gauss, que l'estableix a [31, § 43, edició catalana, p. 40–41].

31 Com ja he dit a la nota 19, el nom fou erròniament atribuït a John Pell per Euler, que potser el va confondre amb el matemàtic anglès Lord Brouncker (1620–1684), que fou el primer matemàtic europeu que intentà de trobar una solució general. Tot començà amb un problema que l'any 1657 Pierre de Fermat planteja a John Wallis (1616–1703), el matemàtic anglès més notable de l'època.

Ja havia estat estudiat profusament pels matemàtics indis, però Occident no en tindria coneixement fins passats uns cent-cinquanta anys quan Lagrange en trobà la solució general. L'any 628, Brahmagupta (598–668) en *Brahma Sphuta Siddhanta* desenvolupà el *mètode chakravala*. Aquest text fou traduït pels àrabs l'any 773 i traduït al llatí a començaments del segle XII. Aquest mateix segle Bhāskara II (1114–1185) i Narayana Pandit (~1340–~1400) en el XIV assoliren la determinació de la solució general. Recordem, de passada, que el problema famós dels bous d'Arquimedes porta a la resolució d'una equació de Pell, la solució de la qual va haver d'esperar a disposar d'ordinadors.

Una història excel·lent de l'equació de Pell és [105] i un text teòric plantejat en forma de problemes és [4].

LEMA. *Si $\frac{p}{q}$ és una convergent del desenvolupament de $\sqrt{A}$ en fracció contínua, existeix un enter k amb $|k| < 1 + 2\sqrt{A}$ tal que $p^2 - Aq^2 = k$.*

Tanmateix, no fou capaç de veure que aquest mètode sempre dóna solucions i que *totes* les solucions són convergents de $\sqrt{A}$. És Lagrange qui estableix el resultat següent (vegeu [54, p. 672, 678 i 686]):

TEOREMA DE LAGRANGE. *L'equació* (2) *sempre admet solucions enteres.*[32]

I analitzant el comportament del desenvolupament en fracció contínua de $\sqrt{A}$, també proporciona una *infinitat* de parelles (p,q) per a les quals $f(x,y) = x^2 - Ay^2$ pren un mateix valor R (vegeu [54, § 28, p. 727]).

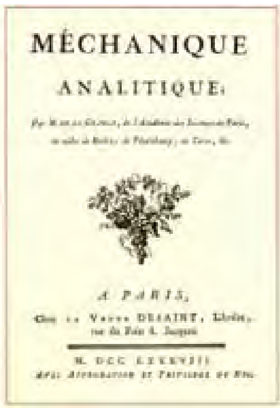
A més, estableix un algorisme força simple per a determinar *totes* les solucions de l'equació (2).

ALGORISME DE LAGRANGE. *Si p_1, q_1 és la solució positiva mínima de* (2)*, aleshores qualsevol altra solució p, q de* (2) *és una parella determinada p_n, q_n obtinguda de la identitat:*[33]

$$p_n + q_n\sqrt{A} = (p_1 + q_1\sqrt{a})^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{3}$$

4.3 El càlcul de variacions

A la història de la matemàtica, abans de l'aparició del càlcul diferencial, la preocupació per les qüestions relatives a la maximització i la minimització de magnituds ha estat molt esparsa. No és estrany, en mancava l'eina. Això no obstant, era possible, com féu Zenodor (~200 aC–~140 aC), plantejar des de la geometria *problemes isoperimètrics*.



Portada de *Méchanique analytique* (1788)

Molts dels enunciats de Zenodor els coneixem gràcies a un comentari que Teó d'Alexandria (~335–~405) féu a l'*Al'magest* de Ptolemeu (~90–~168). Euclides usaria —mode geomètric— el *camí mínim* per donar la llei de la *reflexió de la llum*.

Un altre àmbit —que trigaria segles a plantejar-se— en el qual apareixen problemes d'optimització és el que proporciona la física. Per exemple, Pierre de Fermat recorreria al *temps mínim* i al seu mètode de màxims i mínims per a establir la llei de la *refracció de la llum* (vegeu [26, p. 183–199]). Leibniz s'adonaria que el llenguatge del *càlcul diferencial* que acabava d'introduir en l'article de 1684 [17, traducció castellana de Javier de Lorenzo, p. 271–281] era el llenguatge idoni per a tractar aquesta mena de problemes.

---

32 Vegeu [54, § 15, p. 693]. Tanmateix, aconsello, per la simplificació assolida que es basa en la periodicitat del desenvolupament en fracció contínua de $\sqrt{A}$, [63, § 37, capítol IV, p. 743 i següents].

33 Vegeu [54, § 15, p. 695 i § 17, p. 698–703].

També Isaac Newton, a l'escoli de la proposició 34 del llibre II de la tercera edició del *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1687), plantejaria una qüestió d'índole física —la forma que havia de tenir un sòlid de revolució per a presentar mínima resistència a un fluid en el qual es desplaçava— que comporta determinar una funció que minimitzi una integral.

La consciència de la importància d'aquesta mena de problemes —problemes de maximització/minimització d'integrals— té l'origen l'any 1696 quan el jove dels germans Bernoulli, Johann, plantejà el que avui es coneix com el *problema de la braquistòcrona* (vegeu [7, vol. I, p. 161]): Quina és la corba que ha de seguir un punt que cau lliurement d'un punt a un altre si volem que el temps sigui mínim.

Estàtua de Lagrange
Via Lagrange
Torí

Quatre dels matemàtics més rellevants del moment —Newton, Leibniz, el germà gran de Johann Bernoulli, Jakob (vegeu [17, p. 391]), i el marquès de L'Hôpital (1661–1704)— n'oferiren la solució al costat de la de Johann. Les cinc solucions es van publicar a l'*Acta Eruditorum* de l'any 1697.

La solució de Jakob Bernoulli suggerí a Leonhard Euler un mètode general: el que avui coneixem com el *càlcul de variacions*. De fet, Euler *alterava* una ordenada —l'afectava d'una *variació*. Amb aquest mètode i una gran imaginació d'índole geomètrica, veu de quina manera aquesta variació afecta les derivades $y', y'', \ldots$ i la integral J definida a la fórmula (4). Euler, a [23] (vegeu també [17, p. 399–406]), sintetitza treballs anteriors i estableix, en llenguatge actual, el resultat següent (vegeu [21, p. 178]):

TEOREMA D'EULER. *Considerem una integral de la forma*

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\,dx, \ \textit{on}\ y' = \frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

Llavors, la funció $y = y(x)$ que minimitza o maximitza el valor de J ha de satisfer l'equació diferencial

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0.^{34} \tag{5}$$

34 L'integrand $f(x, y, y')$ depèn funcionalment de x, y, y', i també en depenen f_y i $f_{y'}$. D'aquesta manera cal entendre (5). Recordem que $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}$.

És fàcil de constatar que l'equació diferencial (5) és equivalent a

$$f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y' - f_{y'y'}y'' = 0.^{35} \tag{6}$$

Atès que la funció f és coneguda ens trobem davant d'una equació diferencial ordinària de segon ordre, en $y(x)$, no lineal.

Precisament l'any en què apareix el *Methodus inveniendi*, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, arran de les seves recerques sobre la teoria de la llum, publicava el *principi de mínima acció*; podem reformular-lo dient que *les lleis de la naturalesa s'atenen al principi d'economia*. Euler, que mantenia correspondència amb Maupertuis, reformularia aquest principi, en un apèndix del text esmentat, com un teorema dinàmic i l'inclouria dins el càlcul variacional.

Lagrange, sempre amatent a l'obra d'Euler, començaria a preocupar-se pel càlcul de variacions el 1750. Tenia dinou anys. La seva aportació fou la de descartar la tècnica basada en la geometria, introduïda per Bernoulli i Euler, i sotmetre la teoria a mètodes analítics. En la secció següent veurem com preocupava a Lagrange aconseguir un mètode analític que garantís el rigor de l'anàlisi.

La idea de Lagrange, a diferència de la d'Euler, era cercar directament una funció $y(x)$ dins una família de funcions que passen pels dos punts (x_1, y_1), (x_2, y_2);[36] en concret, considera les funcions de la forma $y(x) + \delta y(x)$, on δ —un símbol introduït per Lagrange— indicava la variació entera de $y(x)$.

En introduir aquesta nova funció dins de l'integrand de J,

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')\, dx,$$

la integral es veia alterada i es podia determinar l'increment ΔJ:

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} \{f(x, y + \delta y, y' + \delta y') - f(x, y, y')\}\, dx.$$

Malgrat que la funció $f(x, y, y')$ depèn de tres variables —que Lagrange mira com a independents—, atès que la x no varia, pot desenvolupar l'integrand de ΔJ en sèrie de Taylor de dues variables. S'obtenen, d'antuvi, termes en δy i $\delta y'$, després termes de segon grau en aquests increments, etc., de manera que:

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + \frac{1}{3!}\delta^3 J + \cdots,$$

35 Recordem que $f_{y'x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial x}$, $f_{y'y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}$, $f_{y'y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'}$.

36 El seu treball més notable en aquest tema fou [51]. Recordem que, cinc anys abans, en una carta a Euler, havia batejat aquest mètode amb el nom de *mètode de variacions* però Euler l'any 1756 el rebatejaria amb el nom actual: *càlcul de variacions*.

on

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} (f_y \delta y + f_{y'} \delta y')\, dx \tag{7}$$

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} (f_{yy}(\delta y)^2 + f_{yy'}(\delta y)(\delta y') + f_{y'y'}(\delta y')^2)\, dx,$$

$$\vdots$$

Així obté les variacions successives de J: δJ, $\delta^2 J$, etc.

Aleshores Lagrange afirma que, si $y(x)$ proporciona un extrem, llavors $\delta J = 0$ i afegeix, sense explicitar-ne la raó, que d i δ commuten:[37]

$$\delta y' = \frac{d(\delta y)}{dx}.$$

I substituint-ho a (7) obté:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y \delta y + f_{y'} \frac{d}{dx}(\delta y) \right\} dx$$

que, integrant per parts i usant el fet que δy s'anul·la entre x_1 i x_2, dóna:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ f_y \delta y - \left(\frac{d}{dx} f_{y'} \right) \delta y \right\} dx.$$

I, atès que $\delta J = 0$ per a cada variació δy, Lagrange conclou que el coeficient de δy ha de ser 0 i que, per tant, s'obté l'equació d'Euler:

$$f_y - \frac{d}{dx}(f_{y'}) = 0.$$

Heus ací un diàleg fructífer entre Lagrange i Euler que permet un canvi de perspectiva en les aportacions del jove matemàtic italofrancès.

4.4 La mínima acció en la mecànica

La quantitat A, coneguda com l'*acció*, es defineix per

$$A = \int L\, dt,$$

on L s'anomena actualment el *lagrangià*.[38] El lagrangià més simple d'un sistema és l'energia cinètica T menys l'energia potencial V:

$$L(x,t) = T(x,t) - V(x,t).$$

37 Això ho aclariria Euler més endavant.

38 Les idees d'aquesta obra magna són les que ja havia aplicat abans el 1764; vegeu [52, p. 9].

Si fem que l'acció sigui mínima, obtindrem l'*equació d'Euler-Lagrange*.[39]

En efecte, considerem un camí extremal $x(t)$ entre els punts fixos $x(t_0)$ i $x(t_1)$, i un moviment al llarg del camí. La trajectòria és expressada per la funció $a(t)$, i la velocitat $v(t)$ canvia d'acord amb:

$$x(t) \to x(t) + a(t), \quad v(t) \to v(t) + \dot{a}(t).$$

Si prenem $a(t)$ molt petit però de manera que $x(t) + a(t)$ passi pels punts fixos $x(t_0)$ i $x(t_1)$, podem afirmar que $a(t_0) = a(t_1) = 0$.

Tot això afecta el lagrangià. Per a aproximacions de primer ordre de l'element petit $a(t)$, el lagrangià es transforma de la manera següent:

$$L(x,v) \to L(x+a, v+\dot{a}) = L(x,v) + a(t)\frac{\partial L}{\partial x} + \dot{a}(t)\frac{\partial L}{\partial v}.$$

Per tant, l'acció es transforma d'acord amb $A \to A + \delta A$, on:

$$\delta A = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(a(t)\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{da}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} \right).$$

El segon terme que hi ha dins el parèntesi es pot integrar per parts:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \frac{da}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \left[a(t)\frac{\partial L}{\partial v} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt\, a(t)\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}.$$

Atès que $a(t_0) = a(t_1) = 0$, la part ja integrada (entre claudàtors) s'anul·la. En resulta que δA val:

$$\delta A = \int dt\, a(t) \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} \right).$$

Per a $a(t)$ arbitrari, per a minimitzar l'acció (és a dir, si fem $\delta A = 0$), l'expressió que hi ha dins dels parèntesis ha de ser zero. Si ho reescrivim en coordenades generalitzades q, en lloc de x, i $\dot{q}$, en lloc de v, obtenim:

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0,$$

que és l'equació d'Euler-Lagrange (vegeu [72, p. 332, 340]).

4.5 Els multiplicadors de Lagrange

A la pàgina 77 del volum 11 de les *Ouevres* de Lagrange —el volum que conté el tom primer de la *Méchanique analytique*— hi llegim (vegeu [72, p. 77–78]):

39 Aquesta idea s'usa profusament en mecànica quàntica i en física de les partícules, en particular quan es tracta amb *teories gauge*.

§ 1.– *Mètode dels multiplicadors.*

2. Siguin

$$\mathsf{L} = 0, \quad \mathsf{M} = 0, \quad \mathsf{N} = 0, \dots$$

les diferents equacions de les condicions que imposa la naturalesa del sistema, on les quantitats L, M, N, ..., són funcions finites de les variables x, y, z, s', y', z', ...; si les diferenciem, obtenim

$$d\,\mathsf{L} = 0, \quad d\,\mathsf{M} = 0, \quad d\,\mathsf{N} = 0, \dots,$$

que proporcionen la relació que hi ha d'haver entre les diferencials d'aquestes variables. En general, les usarem com a equacions de condició entre aquestes diferencials [...].

Ara, atès que aquestes equacions només les necessitem per a eliminar un nombre semblant de diferencials en la fórmula general de l'equilibri, segons la qual cada un dels coeficients de les diferencials restants ha de ser nul, no és difícil provar, per mitjà de l'eliminació de les equacions lineals, que s'obtindran els mateixos resultats si s'afegeixen a l'equació que s'estudia les diferents equacions de condició $d\,\mathsf{L} = 0$, $d\,\mathsf{M} = 0$, $d\,\mathsf{N} = 0, \dots$, cada una multiplicada per un coeficient indeterminat; seguidament, s'iguala a zero la suma de tots els termes que es troben multiplicats per una mateixa diferencial. Això donarà tantes equacions particulars com diferencials; aleshores hom elimina d'aquestes darreres equacions els coeficients indeterminats amb els quals hem multiplicat les equacions de condició.

3. En resulta aquesta regla extremament simple per a trobar les condicions d'equilibri del sistema arbitrari que se'ns proposi [...]

Com veiem, Lagrange dóna el *mètode dels multiplicadors* com una eina en un text que té com a objecte d'estudi determinats resultats de la física.

En llenguatge actual, es tracta de trobar un màxim (o mínim) local de la funció $f(x,y)$ quan està sotmesa a la condició $g(x,y) = 0$. Si designem el conjunt de nivell de g per $A = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}$, es tracta de trobar un punt (x_0,y_0) per al qual $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ per a tot $(x,y) \in A$.

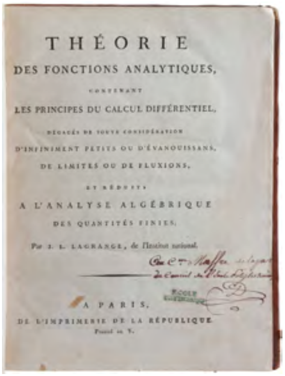
Lagrange observa que el gradient de $f(x_0,y_0)$ —grad $f(x_0,y_0)$—[40] és ortogonal al vector tangent $(x'(t_0), y'(t_0))$ de la corba de nivell A (vegeu [72, p. 78] i [41, p. 325–326]). Per tant, en l'extrem local, els vectors grad $f(x,y)$ i grad $g(x,y)$ tenen la mateixa direcció, i això porta a la condició necessària

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \lambda \operatorname{grad} g(x,y), \quad g(x,y) = 0$$

(si grad $f(x_0,y_0) \neq 0$). El paràmetre λ és el que anomenem *multiplicador de Lagrange*. Les equacions anteriors representen tres condicions per als paràmetres x, y, λ. Si introduïm la funció $\mathcal{L}(x,y,\lambda) := f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$, les tres condicions anteriors es poden substituir per grad $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0$.

40 Recordem que grad f és el vector grad $f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) f = \nabla f$, on ∇ s'anomena *nabla* i prové d'una arpa assíria. Vegeu [33, p. 138].

4.6 La teoria de les funcions analítiques


THÉORIE

DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,

DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION

D'INFINIMENT PETITS OU D'ÉVANOUISSANS,

DE LIMITES OU DE FLUXIONS,

ET RÉDUITS

A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE

DES QUANTITÉS FINIES.

Par J. L. LAGRANGE, de l'Institut national.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

Portada[41] de *Théorie des fonctions analitiques*

El càlcul diferencial plantejava una munió de problemes de caire epistemològic i també metodològic, com van posar de manifest a bastament els seus detractors, el més paradigmàtic dels quals fou George Berkeley (1685–1753), que a *The Analyst, or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician* —l'astrònom Edmond Halley— feia veure l'anomalia que suposa treure conclusions que volen ser rigoroses a partir d'inconsistències lògiques i conceptes ambigus.

D'altra banda, la resolució del problema de la corda vibrant —que portava a la resolució d'una equació diferencial en derivades parcials de segon ordre— obria una escletxa, gens trivial, als conceptes de *funció* i de *continuïtat*.

Calia, doncs, d'alguna manera establir una teoria de funcions prou coherent i sòlida per tal de poder, si més no, pal·liar aquests problemes que, encara que ningú no n'era conscient, portarien molts maldecaps i contribuirien a la crisi de fonaments de finals del segle XIX (vegeu, per exemple, [8]).

Això és el que intentà fer Lagrange en la seva *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797).[42] Volia fer una presentació completa del càlcul que evités tota referència als infinitesimals, als diferencials i als límits.

L'aproximació lagrangiana es basava a considerar el desenvolupament en sèrie de potències d'una funció $f(x)$. D'aquesta manera creia que podria oferir una mena de càlcul de tipus algebraic de la teoria de funcions, atès que, si substituïa x per $x+i$, obtenia l'expressió —de caire polinòmic infinit—

$$f(x+i) = f(x) + p\,i + q\,i^2 + r\,i^3 + \cdots , \tag{8}$$

en la qual $p, q, r, \dots,$ eren funcions de x que d'alguna manera depenien de $f(x)$. Per l'obra de Newton —i, sobretot, d'Euler— sabia que la majoria de les funcions particulars que els eren familiars eren d'aquesta mena. Però, ho eren totes, d'aquesta mena? Lagrange s'esforça a provar-ho. Avui sabem que solament són d'aquest tipus les *funcions analítiques* en x —un nom que és hereu de l'obra de Lagrange. Aviat, Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) provaria que la funció $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ no n'és, d'analítica.

Lagrange s'adona també que p és la primera derivada de $f(x)$ i introdueix tant la notació $f'(x)$ com el nom de *derivada*. Per veure qui són els altres coeficients procedeix de la manera següent: a (8), substitueix i per $i+o$ i

41 Conté la inscripció «Au Cm. Maffre de la part/du Conseil de l'Ecole Polytechnique/L.» Jean-François Maffre fou professor de l'École sobre la construcció de ponts. Vegeu `http://www.vialibri.net/552display/year_1797_1.html`.

42 Per a una petita mostra d'aquest text, vegeu [17, p. 388–391] que acompanya altres intents de fonamentar el càlcul en bases sòlides.

desenvolupa; d'altra banda, també, a (8), substitueix x per $x + o$ i desenvolupa. Compara els coeficients de les dues expressions i obté:

$$q(x) = \frac{1}{2}\ p'(x) = \frac{1}{2} f''(x),$$

$$r(x) = \frac{1}{3!} q''(x) = \frac{1}{3!} f'''(x),$$

$$s(x) = \frac{1}{4!} r''(x) = \frac{1}{4!} f''''(x), \quad \text{etc.}$$

Així observa que, de fet, (8) és el desenvolupament en *sèrie de Taylor* de $f(x)$:

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\, i + \frac{1}{2} f''(x)\, i^2 + \frac{1}{3!} f'''(x)\, i^3 + \cdots, \tag{9}$$

i afirma que és fàcil veure que els coeficients $f'(x), f''(x), \ldots$ coincideixen amb les derivades successives de la funció $f(x)$. Tanmateix, això depèn del fet que (8) sigui derivable terme a terme respecte de i.

En el text —concretament al capítol VII— hi apareix el *residu de Lagrange* de la sèrie de Taylor.

A (9) substitueix x per $x - i$:

$$f(x) = f(x-i) + f'(x-i)\, i + \frac{1}{2} f''(x-i)\, i^2 + \frac{1}{3!} f'''(x-i)\, i^3 + \cdots \tag{10}$$

Ara, a (10), substitueix i per $x\,z$ i introdueix el residu:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x - x\,z) + f'(x - x\,z)\, x\,z + \frac{1}{2} f''(x - x\,z)\, (x\,z)^2 + \cdots \\ \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x - x\,z)\, (x\,z)^n + x^{n+1} R(x,z), \end{aligned} \tag{11}$$

que és també l'expressió utilitzada per Taylor per definir el residu. Derivant terme a terme respecte de z, els termes s'eliminen de dos en dos i s'obté:

$$R'(x,z) = \frac{z^n}{n!} f^{(n+1)}(x - x\,z). \tag{12}$$

Si M i N són el màxim i el mínim de $f^{(n+1)}(x - x\,z)$ per a $z \in [0,1]$, s'obté:

$$\frac{M\,z^n}{n!} \le R'(x,z) \le \frac{N\,z^n}{n!}. \tag{13}$$

Integrant entre 0 i 1, resulta:

$$\frac{M\,z^{n+1}}{(n+1)!} \le R(x,z) \le \frac{N\,z^{n+1}}{(n+1)!} \text{ per a } z \in [0,1]. \tag{14}$$

Si, finalment, fem $z = 1$, obtenim

$$\frac{M}{(n+1)!} \le R(x,1) \le \frac{N}{(n+1)!}. \tag{15}$$

Ara Lagrange usa el teorema del valor intermedi per a la funció $\frac{f^{(n+1)}(x-xz)}{(n+1)!}$ i obté l'expressió

$$R(x,1) = \frac{f^{(n+1)}(x - x\overline{z})}{(n+1)!} \text{ per a } \overline{z} \in [0,1]. \tag{16}$$

Per fi, substitueix aquesta expressió a (11) amb $z = 1$ i obté:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}\,x^{n+1},$$

amb $u = x - x\overline{z} \in [0,x]$.

L'èxit d'aquesta presentació i dels seus resultats no faria, però, que passés desapercebuda la necessitat d'aprofundir en la noció de *continuïtat* de les funcions i les qüestions relacionades amb l'existència de màxims i mínims i del teorema del valor mitjà, però això ho farien matemàtics del segle XIX com ara, per exemple, Cauchy.[43]

Referències

[1] Abel, N. H. «Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement». *Journal de Crelle*, 26 (1829), 131–156.

[2] Archibald, T.; Fraser, C.; Grattan-Guinnes, I. (organitzadors). «The History of Differential Equations, 1670–1950». Jornades a Oberwolfach, del 31 d'octubre al 6 de novembre de 2004, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, report n. 51/2004.

[3] Ball, W. W. R. *A short account of the history of mathematics*. 3a ed. Londres: Macmillan, 1901.

[4] Barbeau, E. J. *Pell's equation*. Nova York: Springer-Verlag, 2003. (Problem Books in Mathematics)

[5] Bartholmèss, C. *Histoire philosophique de l'Académie de Prusse depuis Leibniz jusqu'à Schelling*. París: Librairie du Marc Ducloux, 1850.

[6] Bell, E. T. *Men of mathematics*. Nova York: Simon and Schuster, 1937. [Traducció al francès d'Ami Gandillon: *Les grands mathématiciens*. París: Payot, 1939. Reeditat l'any 1959. Traducció al castellà de Felipe Jiménez de Asúa: *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Losada, 1948. Reeditat l'any 2010.]

[7] Bernoulli, J. *Opera*. 4 v. Ginebra: 1742. Reeditat, amb una introducció de J. E. Hofmann, per Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1968.

[8] Bos, H. J. M.; Bunn, R.; Dauben, J. W.; Grattan-Guinness, I.; Hawkins, T. W.; Pedersen, K. M. *From the calculus to set theory, 1630–1910. An introductory history*. Grattan-Guinness, I. (ed.). Londres: Gerald Duckworth

43 Per a més informació vegeu, per exemple, la tesi doctoral de Judith Grabiner, llegida a Harvard l'any 1966 i recollida a [38].

& Co. Ltd., 1980. [Traducció al castellà de Mariano Martínez Pérez: *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910. Una introducción histórica.* Madrid: Alianza Editorial, 1984.]

[9] Brizard, A. J. *An introduction to Lagrangian mechanics.* Hackensack, N. J.: World Scientific Publishing, 2008.

[10] Burton, D. M. *Elementary number theory.* Boston, Mass.; Londres: Allyn and Bacon, 1976. Reeditat per W. C. Brown Publishers, Dubuque, IA, 1989.

[11] Cantor, M. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* 4 v. Berlín: Teubner, 1880–1907.

[12] Capecchi, D. *Lagrange e la storia della meccanica.* Bari: Progedit, 2005.

[13] Capecchi, D.; De Angelis, M.; Sepe, V. *Cinematica piana dei corpi rigidi.* Milà: cisu, 2005.

[14] Cohen, I. B. *Revolution in Science.* Cambridge, Mass.: Belknap Press, 1985. [Traducció al castellà de Daniel Zadunaisky: *Revolución en Ciencia.* Barcelona: Editorial Gedisa, 1988.]

[15] D'Alembert, J. L. R. «Recherches sur le calcul intégral». *Actes de l'Académie des Sciences de Paris* (1746), 182–224.

[16] Delambre, J.-B. J. «Notice sur la vie et les ouvrages de M. le Comte J.-L. Lagrange». A: [76, p. ix–li].

[17] de Lorenzo, J. *Análisis Infinitesimal.* Madrid: Tecnos, 1987, 17–29. [Traducció a l'anglès del text de Leibniz a: *A Source Book in Mathematics, 1200–1800.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1969.]

[18] De Moivre, A. *The doctrine of chances: A method of calculating the probabilities of events in play.* Londres: W. Pearson, 1718. Reeditat per Chelsea Publishing Co., Nova York, 1967.

[19] Dickson, L. E. *History of the theory of numbers.* 3 v. Washington: Carnegie Institute of Washington, 1919. Reeditat, en tres volums, per Chelsea Publishing Co., Nova York, 1971, i per Dover Publications, Inc., Nova York, 2005.

[20] Edwards, C. H., Jr. *The historical development of the calculus.* Nova York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1979.

[21] Euler, L. «Curvarum maximi minimive proprietate gaudentium inventio nova et facilis». *Memorie academiae scientiarum Petropolitanæ*, 8 (1736), 159–190.

[22] Euler, L. «De solvtione problematvm diophanteorvm per nvmeros integros». *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanæ*, 6 (1738), 175–188.

[23] Euler, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti.* Lausane; Ginebra: Marcum Micaelem Bousquet, 1774. [Traducció al castellà d'Alberto Dou: Euler, L. *Método de máximos y mínimos.* Barcelona:

Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i la Universitat Politècnica de Catalunya, 1993.]

[24] Euler, L. «De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo». *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanæ*, 11 (1767), 28–66. [D'acord amb les anotacions fou presentat a l'Acadèmia de Sant Petersburg el 15 d'octubre de 1759, i una altra vegada el 23 de maig de 1763.]

[25] Euler, L. «Elementa calculi variationum». *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanæ*, 10 (1766), 51–93. Sant Petersburg: Saint Petersburg Kaiserliche Academie der Wissenschaften, 1770.

[26] Fermat, P. de *Fermat. Opera Varia*. Barcelona: iec, 2008. [Traducció al català amb comentaris i notes de Pla i Carrera J, Paradís J. i Viader, P.]

[27] Ferraro, G. *The rise and development of the theory of series up to the early 1820s*. Nova York: Springer, 2008. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences)

[28] Galilei, G. «Carta a Guidobaldo del Monte de 29 de novembre de 1602». A: [29, vol. x, p. 97–100].

[29] Galilei, G. *Le Opere di Galileo Galilei*. 21 v. Florència: G. Barbera, 1968.

[30] Galois, E. «Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux». *Journal de Mathématiques Pures et Appliées* (1831), 417–433. Vegeu [79, p. 21–38].

[31] Gauss, C. F. *Disquisitiones arithmeticæ*. Leipzig: Gerhard Fleischer, 1801. [Traducció al català de Griselda Pascual Xufré, [86].]

[32] Gauthier, A. *Essai historique sur le problème des trois corps*. París: Mlle V. Courcier, 1817.

[33] Gibbs, J. W. *Vector analysis*. Yale: Yale University, 1907. Elaborat a partir de les lliçons de J. Willard Gibbs i Edwind Bidwell Wilson. Reimprès per Dover Publications, Nova York, 1960.

[34] Gillispie, C. C. *Biographical Dictionary of Mathematicians: reference biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. 4 v. Nova York: Charles Scribner's Sons, 1970.

[35] Girard, A. *Invention nouvelle en l'Algèbre*. Amsterdam: Blauew, 1629. Reeditat per D. Bierens De Haan, Muré Frères, Leiden, 1884.

[36] Goldman, J. R. *The queen of mathematics. A historically motivated guide to number theory*. Wellesley, Mass.: A K Peters, 1998.

[37] Goldstine, H. H. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. Nova York; Berlín: Springer-Verlag, 1980. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences; 5)

[38] Grabiner, J. V. *The calculus as algebra. J.-L. Lagrange, 1736–1813*. Nova York: Garland Publishing, 1990.

[39] Grattan-Guinness, I. (ed.). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. 2 v. Londres: Rouledge, 1994.

[40] Grattan-Guinness, I. *The Fontana History of the Mathematical Sciences: the Rainbow of Mathematics*. Hammersmith: Fontana Press, 1997.

[41] Hairer, E.; Wanner, G. *Analysis by its history*. Nova York: Springer, 2008. (Undergraduate Texts in Mathematics. Readings in Mathematics)

[42] Huygens, C. *Horologium oscillatorium*. París: F. Muguet, 1673.

[43] Itard, J. *Essais d'histoire des mathématiques*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1984.

[44] Itard, J. «Lagrange (Joseph-Louis)». A: [34, vol. iii, p. 1 301–1 315], en anglès, o bé a `http://www.encyclopedia.com/topic/Joseph-Louis_Louis_Lagrange.aspx`, i a [43, p. 309–334], en francès.

[45] James, I. *Remarkable mathematicians. From Euler to von Neumann*. Washington, D. C.: Mathematical Association of America; Cambridge: Cambridge University Press, 2002. (MAA Spectrum)

[46] Kline, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nova York: Oxford University Press, 1972. [Traducció al castellà de Carlos Fernández i Alejandro Garciadiego, sota la coordinació de Jesús Hernández: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. 3 v. Madrid: Alianza Editorial, 1992.]

[47] Lagrange, J.-L. «Carta a Giulio Carlo di Fagnano de 27 de juliol de 1754». A: [76, tom 7, 1877, p 583–588].

[48] Lagrange, J.-L. «Recherches sur la méthode de maximis et minimis». *Miscellanea Taurinensia*, vol. i, 3–20. A: [76, tom 1, 1867, p. 3–20].

[49] Lagrange, J.-L. «Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes». *Miscellanea Taurinensia*, vol. i, 23–36. A: [76, tom 1, 1867, p. 23–36].

[50] Lagrange, J.-L. «Recherches sur la nature et la propagation du son». *Miscellanea Taurinensia*, vol. i, 39–148. A: [76, tom 1, 1867, p. 39–148].

[51] Lagrange, J.-L. «Essai d'une nouvelle méthode pour détérminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies». *Miscellanea Taurinensia*, vol, i, 173–195. A: [76, tom 1, 1867, p. 335–362]. [Traducció parcial a l'anglès a [17, p. 407–413].]

[52] Lagrange, J.-L. «Recherches sur la libration de la Lune, dans lesquelles on tâche de résoudre la question proposéee par l'Académie royale des sciences pour le Prix de l'année 1764». *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, vol. ix (1764). A: [76, tom 6, 1870, p. 5–61].

[53] Lagrange, J.-L. «Sur la méthode des variations». *Miscellanea Taurinensia*, vol. iv, p. 37–63. A: [76, tom 2, 1868, p. 37–63].

[54] Lagrange, J.-L. «Solution d'un problème arithmétique». *Miscellanea Taurinensia*, vol. iv, p. 671–731. A: [76, tom 1, 1867, p. 671–731].

[55] Lagrange, J.-L. «Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. xxiii (1769). A: [76, tom 2, 1868, p. 377–535].

[56] Lagrange, J.-L. «Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, vol. xxiv (1770). A: [76, tom 2, 1868, p. 655–726].

[57] Lagrange, J.-L. «Carta a D'Alembert de 20 de novembre de 1769». A: [76, tom 14, 1892, p. 153–156].

[58] Lagrange, J.-L. «Démonstration d'un théorème d'arithmétique». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, (1770). A: [76, tom 3, 1892, p. 189–201].

[59] Lagrange, J.-L. «Réflexions sur la résolution algébrique des équations». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, (1770) i (1771). A: [76, tom 3, 1892, p. 205–421].

[60] Lagrange, J.-L. «Nouvelles réflexions sur les tautochrones». *Nouveaux Mémoires de l'Acadèmie royale des Sciences et Lettres de Berlin*, vol. i (1770), 97–122. A: [76, tom 3, 1869, p. 157–186].

[61] Lagrange, J.-L. «Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers». *Nouveaux Mémoires de l'Acadèmie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, (1771). A: [76, tom 3, 1892, p. 425–438].

[62] Lagrange, J.-L. «Essai sur le problème des trois corps». *Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, vol. ix (1772). A: [76, tom 6, 1869, p. 229–331].

[63] Lagrange, J.-L. *Additions aux éléments d'algèbre d'Euler*. Lió: Bruyset, 1774. A: [76, tom 7, 1877, p. 5–180].

[64] Lagrange, J.-L. «Sur la forme des racines imaginaires des équations». *Nouveaux Mémoires de l'Acadèmie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1772). A: [76, tom 3, 1877, p. 479–516].

[65] Lagrange, J.-L. «Recherches sur les suites récurrentes dont les termes varient de plusieurs manières différentes, ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards». *Nouveaux Mémoires de l'Acadèmie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1775). A: [76, tom 4, 1869, p. 151–251].

[66] Lagrange, J.-L. «Carta a Laplace de 30 de decembre de 1776». A: [76, tom 14, 1892, p. 66–68].

[67] Lagrange, J.-L. «Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète». *Nouveaux Mémoires de l'Acadèmie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin* (1780). A: [76, tom 5, 1870, p. 5–122].

[68] Lagrange, J.-L. «Carta a D'Alembert d'1 d'abril de 1781». A: [76, tom 14, 1892, p. 360, carta 164].

[69] Lagrange, J.-L. «Carta a D'Alembert de 21 de setembre de 1781». A: [76, tom 14, 1892, p. 368, carta 167].

[70] Lagrange, J.-L. «Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides». A: [76, tom 4, 1869, p. 695–748].

[71] Lagrange, J.-L. «Carta a Laplace del 15 de setembre de 1782». A: [76, tom 14, 1882, p. 116, carta 20].

[72] Lagrange, J.-L. *Méchanique analytique*. París: Chez la Veuve Desainte, 1888. A: [76, tom 11, 1788].

[73] Lagrange, J.-L. «Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'École Normale en 1795». *Journal de l'École Polytechnique*, viie et viiie cahiers, tom ii, 1812. A: [76, tom 7, 1877, p. 183–288].

[74] Lagrange, J.-L. *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. París: Mlle Courcier, 1797. A: [76, tom 9, 1881, p. 13–413].

[75] Lagrange, J.-L. *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. París: Courcier, 1808.

[76] Lagrange, J.-L. *Œuvres de Lagrange*. Publicades per J.-A. Serret en catorze volums: 1867, 1868, 1869, 1869, 1870, 1873, 1877, 1879, 1881, 1884, 1888, 1889, 1882, 1892.

[77] Loria, G. «G. L. Lagrange nella vita e nelle opere». *Ann. Mat.*, 20 (1913), 9–52. Reimprès a [78, p. 293–333].

[78] Loria, G. *Scritti, conferenze, discorsi*. Pàdua: Casa Editrice Dott., 1937.

[79] Malet, A. (ed.). *Obra d'Évariste Galois*. Barcelona: iec, 1984. (Monografies de la Secció de Ciències; 1)

[80] Marachia, S. *Storia dell'algebra*. Nàpols: Liguori Editore, 2002.

[81] Marchal, C. *The three-body problem*. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, B. V., 1990. (Studies in Astronautics; 4)

[82] Marie, M. M. *Histoire des sciences mathématiques et physiques*. París: Gauthier-Villars, 1883–1888. 12 t. en 4 v.

[83] Meijering, E. «A chronology of interpolation from ancient astronomy to modern signal and image processing». *Proceedings of the IEEE*, 90 (3) (2002), 319–342.

[84] Montucla, J. E. *Histoire des mathématiques*. 4 v. París: Jombert, 1754. Reeditat per Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París, 1968.

[85] Montucla, J. E. *Arithmetica Universalis*. Cambridge: 1707. [Traducció a l'anglès de D. T. Whiteside (ed.): *Mathematical Works of Isaac Newton*, ii. Londres: Johnson Reprint Co., 1964.]

[86] Pascual i Xufré, G. *Disquisicions aritmètiques*. Barcelona: iec, 1996.

[87] Pesic, P. *Abel's proof. An essay on the sources and meaning of mathematical unsolvability*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 2003.

[88] Pla i Carrera, J. «La helena de las matemáticas». *Quaderns*, Fundació Caixa de Pensions, 43 (1989), 61–71.

[89] Pla i Carrera, J. «Les matemàtiques i els matemàtics de la Revolució Francesa». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 11 (2) (1996), 31–78.

[90] Pla i Carrera, J. «La *Mémoire* d'Évariste Galois, anotada i comentada». Pendent de publicació.

[91] Reiff, R. A. *Geschichte der unendlichen Reihen*. Tübingen: H. Laupp'sche Buchhandlung, 1889. Reimprès per Martin Sändig, Wiesbaden, 1969, i novament per BiblioBazaar.

[92] Rey Pastor, J. *Resumen de las Lecciones de Análisis Matemático*. Madrid: 1915. Reeditat amb el títol: *Lecciones de Álgebra*. Toledo: A. Medina, 1924 i 1931; Madrid: C. Bermejo, 1947; Madrid: Nuevas Gráficas, 1954 i 1960.

[93] Rosso, R. *Corso di Storia della algebra*, 2012.

[94] Ruffini, P. *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali; opuscolo del cav. dott. Paolo Ruffini*. Mòdena: Società tipografica, 1813. Es recull a: *Opere Matematiche*. Bertolotti, E. (ed.). 3 v. Roma: Cremonese della Casa Editrice Perrella, 1953–1954.

[95] Scharlau, W.; Opolka, H. *Von Fermat bis Minkowski. Eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung*. Berlín; Nova York: Springer-Verlag, 1980. [Traducció a l'anglès de W. K. Bühler i G. Cornell: *From Fermat to Minkowski: lectures on the theory of numbers and its historical development*. Nova York: Springer, 1985.]

[96] Taton, R. «Inventaire chronologique de l'oeuvre de Lagrange». *Rev. Hist. Sci.*, 27 (1974), 3–36.

[97] Todhunter, I. *A history of the calculus of variations during the nineteenth century*. Londres: MacMillan, 1873. Reproduït a Nova York: Dover Publications, 1949.

[98] Thomasset, T. *Histoire du Système métrique*.

[99] Vacca, G. «Sui manoscritti inediti di Leibniz». *Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 2 (1899), 113–166.

[100] Valtonen, M.; Karttunen, H. *The three-body problem*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[101] van der Waerden, B. L. *A history of algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Berlín: Springer-Verlag, 1985.

[102] Waring, E. *Meditationes algebraicæ*. Cambridge: Archdeacon, 1770.

[103] Waring, E. «Problems concerning Interpolations». *Proceedings of the Royal Society of London. Philosophical Transactions of the Royal Society*, 69, 59–67.

[104] Weil, A. *Number theory. An approach through history. From Hammurapi to Legendre*. Boston, Mass.: Birkhäuser Boston, 1984.

[105] Whitford, E. E. *The Pell equation*. Nova York: College of the City of New York, 1912.

Departament de Probabilitat, Lògica i Estadística
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
jpla@ub.edu