

Aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea a \mathbb{R}^2

CARLES SIMÓ

Resum: Considero la descripció, explicació i predicció de les propietats de les òrbites d'un sistema donat com un dels objectius principals dels sistemes dinàmics. En aquesta lliçó ens centrem en les aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea (APM) a \mathbb{R}^2 . Hi ha diverses raons per a aquesta elecció. En primer lloc, són un model paradigmàtic. A més, molts problemes referents a l'existència de corbes invariants difeomorfes a un cercle, el paper de les varietats invariants de punts fixos o periòdics de tipus hiperbòlic i com porten a l'existència de caos, els mecanismes geomètrics que porten a la destrucció de corbes invariants, i mesures quantitatives de les diferents propietats d'APM generals es poden entendre gràcies al nostre coneixement del cas quadràtic. En aquest article passem revista a alguns d'aquests temes. Al final es presenten diverses qüestions obertes i extensions a dimensió superior.

Paraules clau: aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea, corbes invariants, varietats invariants, caos, mesures quantitatives.

Classificació MSC2010: 37E30, 37A05, 37E40, 37C29.

1 Introducció

Donada una aplicació $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ estem interessats en el comportament dels iterats dels punts de \mathbb{R}^2 (o d'algun subconjunt connex de \mathbb{R}^2). Si $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ és un punt inicial qualsevol, volem veure quin és el comportament dels iterats $z_{k+1} = F(z_k)$. El conjunt $\{z_k, k \in \mathbb{N}\}$ s'anomena l'òrbita de z_0 .

Hi ha diverses maneres d'obtenir un sistema dinàmic descrit per una aplicació F . Podem donar explícitament l'aplicació o bé considerar una equació diferencial ordinària autònoma (EDO) $dz/dt = f(z)$ i definir $F(z)$ com la imatge d'un punt z pel flux de l'EDO després d'un temps τ fixat: $F(z) = \varphi(\tau, z)$ o, simplement, $\varphi_\tau(z)$, que s'anomena *l'aplicació temps- τ* .

Aquest article es basa en la lliçó inaugural del curs acadèmic 2013–2014 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, impartida per l'autor. Una primera versió d'aquest text, en anglès, va aparèixer a les Publicacions de la Universitat de Barcelona. La presentació està disponible a l'enllaç <http://www.maia.ub.es/dsg/2013/>.

Agraïm a Narcís Migué i Arturo Vieiro la traducció al català de l'article original.

Una altra manera interessant d'arribar a una aplicació F és usant l'anomenada *aplicació de Poincaré*. Per a una EDO, $dw/dt = f(w)$, en \mathbb{R}^3 (o en un subconjunt connex d'aquest espai, o en una varietat 3D), sigui Σ una superfície en \mathbb{R}^3 definida, per exemple, per $g(w) = 0$, on suposem que g és prou regular. Si el flux de l'EDO interseca Σ transversalment (és a dir, $f(w)$ no és tangent a Σ en cap punt $w \in \Sigma$) podem fer el següent. Prenem un punt inicial $w \in \Sigma$ i busquem la solució $\varphi(t, w)$ que té w com a condició inicial. Si existeix $t = t(w) > 0$ per al qual $\varphi(t(w), w) \in \Sigma$ i $\varphi(t, w) \notin \Sigma$ per a $0 < t < t(w)$, definim aquest punt $\varphi(t(w), w)$ com la imatge $\mathcal{P}(w)$ de w per l'aplicació de Poincaré \mathcal{P} . Aquesta aplicació està definida sobre la varietat Σ , que és 2D.

Cal destacar el cas en què el camp vectorial f prové d'un hamiltonià amb 2 graus de llibertat, en un nivell d'energia fixat. Un *sistema d'equacions hamiltonià* amb n graus de llibertat i hamiltonià $H(q, p)$ és de la forma

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

per a $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (o en varietats adequades). Se segueix de manera immediata que el valor de $H(q, p)$ es preserva al llarg de les solucions de l'EDO. A aquest valor se'l coneix per l'*energia*. Per a $n = 2$, si considerem un valor de l'energia fixat, tenim una EDO en 3D. Si a més podem definir una aplicació de Poincaré com abans, obtenim una aplicació sobre una varietat 2D, Σ .

En aquest cas, l'aplicació \mathcal{P} té una propietat important: *preserva l'àrea a Σ* . Així, d'ara en endavant podem simplificar la presentació. Considerarem \mathbb{R}^2 en comptes d'una superfície general Σ , denotarem l'aplicació simplement per F i, a més, suposarem que preserva l'àrea. Això implica que $\det(DF(z)) = 1$ per a tota $z \in \mathbb{R}^2$, on DF representa la diferencial de F . Per simplificar la notació ens referirem a les aplicacions que preserven l'àrea amb el terme APM (de les seves sigles en anglès, *area preserving maps*).

D'entre totes aquestes aplicacions, el cas més simple és el d'aplicacions polinomials F de grau 1. Són de la forma $F(z) = Mz + b$, $b \in \mathbb{R}^2$, on M és una matriu 2×2 . Llevat dels casos trivials en què M té un valor propi doble igual a 1, es pot suposar que $b = 0$, traslladant l'origen. Els valors propis de M són de la forma

- 1) $\exp(\pm i\alpha)$, $\alpha \in (0, \pi)$, cas conegut com *el·líptic*,
- 2) λ, λ^{-1} , $\lambda > 1$, cas conegut com *hiperbòlic*,
- 3) 1 doble, però M no es pot diagonalitzar, cas conegut com de *cisallament*.

Hi ha dos altres casos que poden aparèixer: una parella de valors propis λ, λ^{-1} , $\lambda < -1$ (cas conegut com *hiperbòlic amb reflexió*), i -1 doble, de nou amb M no diagonalitzable. Es redueixen als 2) i 3) anteriors component l'aplicació amb la simetria central $-\text{Id}$ o prenent F^2 en comptes de F .

En els tres casos considerats, després d'un canvi de coordenades, la matriu M es pot reduir a una de les formes següents:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

En el cas el·líptic, segons (2), la dinàmica és essencialment una rotació. Tots els punts tenen òrbites acotades, confinades en el·lipses. Cal notar que si α és de la forma $\alpha = \frac{m}{n}2\pi$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $(m, n) = 1$, llavors tots els punts són fixos per F^n , una situació extremament degenerada. És a dir, tots els punts són periòdics amb període minimal n . Recordem que un punt z es diu que és *periòdic amb període minimal* $n > 1$ si $F^n(z) = z$ i $F^k(z) \neq z$ per a $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

En el cas hiperbòlic, la dinàmica és de tipus sella. Escrivint $F(x, y) = (\lambda x, \lambda^{-1}y)$, segons (2), tots els punts amb $x_0 \neq 0$ s'escapen a l'infinit, mentre que aquells amb $x_0 = 0$ tendeixen a l'origen.

En el cas de cisallament, per a $b = 0$ i d'acord amb (2), podem escriure l'aplicació F com $F(x, y) = (x + y, y)$. Tots els punts amb $y_0 \neq 0$ tendeixen a infinit, mentre que els punts amb $y_0 = 0$ són fixos.

La figura 1 mostra els tres casos, amb un punt inicial representat per 0, i les imatges respectives representades per 1, 2, 3, ... És molt important notar que en aquest cas lineal *tots els iterats pertanyen a corbes* que són solució d'una EDO lineal, que preserva l'àrea. És a dir, l'EDO està associada a un hamiltonià quadràtic. De fet, hi ha un hamiltonià tal que l'aplicació F coincideix amb l'aplicació temps-1 del flux hamiltonià.

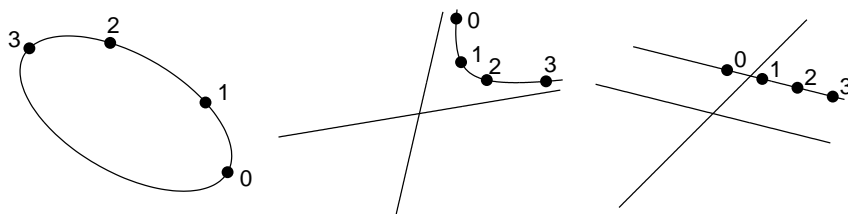


FIGURA 1: Exemples de la dinàmica dels tres models d'aplicacions lineals. D'esquerra a dreta: rotació, sella i cisallament. Les formes normals de les matrius corresponents són les donades a (2).

Si per a una aplicació general F de \mathbb{R}^2 existeix una funció no constant G que és invariant per F , és a dir $G(F(z)) = G(z)$, diem que l'aplicació és *integrable*.

El primer que se'n acut és el cas de les *aplicacions quadràtiques* definides per $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$, on les funcions F_1 i F_2 són polinomis quadràtics en (x, y) . Aquest cas és extremament rellevant, perquè

- a) Permet fer una reducció que fa decreixer de manera molt important el nombre de paràmetres involucrats en l'aplicació. A més, té algunes simetries rellevants i una interpretació geomètrica molt simple. Aquest és el contingut de la secció 2.
- b) Apareix de manera natural com una aproximació molt bona en algunes parts de \mathbb{R}^2 quan considerem una APM arbitrària. En particular, quan estudiem aplicacions de Poincaré de hamiltonians amb 2 graus de llibertat.

- c) És un model paradigmàtic. Molts problemes relacionats amb l'existència de corbes invariants difeomorfes a \mathbb{S}^1 (secció 4), com ara el rol de les varietats invariants de punts hiperbòlics, fixos o periòdics, i com duen a l'existència de caos (secció 5), els mecanismes geomètrics que duen a la destrucció de corbes invariants (secció 6), i mesures quantitatives de diverses propietats (seccions 7 i 8) per a APM generals [26], es poden entendre gràcies al coneixement actual del cas quadràtic.

Finalment, és interessant ressaltar que les APM quadràtiques són *analítiques*, fet que permet usar resultats útils per a aplicacions analítiques, i encara més: són *aplicacions enteres*. Per a una discussió completa de les propietats de diferents tipus d'aplicacions d'Hénon i algunes aplicacions, vegeu [19]. Diverses figures i idees que aquí es presenten s'han extret d'aquest article. En el que segueix, per fixar idees, totes les APM es consideraran analítiques.

Diverses qüestions romanen encara obertes, i algunes d'aquestes es presenten a la secció 9.

2 Reducció i simetries

A finals dels seixanta, Michel Hénon [13] va iniciar l'estudi de les APM quadràtiques. Més tard, a mitjans del setanta, va estudiar el cas dissipatiu [14]. En el cas que va considerar, el jacobíà és constant, però amb valor absolut més petit que 1. Aquí apareix el popular *atractor d'Hénon*.

Un fet remarcable, que no és difícil de provar, és que la condició de tenir jacobíà constant permet, via escalats adequats de les variables i traslladant l'origen de forma adient, escriure una aplicació quadràtica genèrica de \mathbb{R}^2 de la forma:

$$F: (x, y) \rightarrow (1 - ax^2 + y, bx) \quad (3)$$

per a certes constants a, b . Quan a tendeix a 0, l'escalat s'ha de fer de manera lleugerament diferent. Òbviament, el jacobíà és igual a $-b$ i, per tant, el cas conservatiu s'obté per a $b = -1$.

El cas conservatiu té una interpretació geomètrica molt simple. Es tracta de la composició de dues aplicacions. La primera és $(x, y) \rightarrow (x, y + 1 - ax^2)$, una de les anomenades aplicacions de *de Jonquières*, mentre que la segona és simplement una rotació d'angle $-\pi/2$. La figura 2 mostra, per a $a = -1/2$, el quadrat $[-3, 3]^2$ (en gris molt fosc), la seva primera imatge (en gris fosc) i part de les dues imatges consecutives següents (en gris i gris clar, respectivament). Ens podem preguntar si, en iterar, tots els punts s'escaparan. Com a resposta a aquesta pregunta, dibuixem en negre el conjunt de punts que romanen acotats per a qualsevol nombre d'iteracions, per al valor de a seleccionat. Aquest és el tipus d'objectes que volem estudiar, així com la seva evolució en funció del paràmetre.

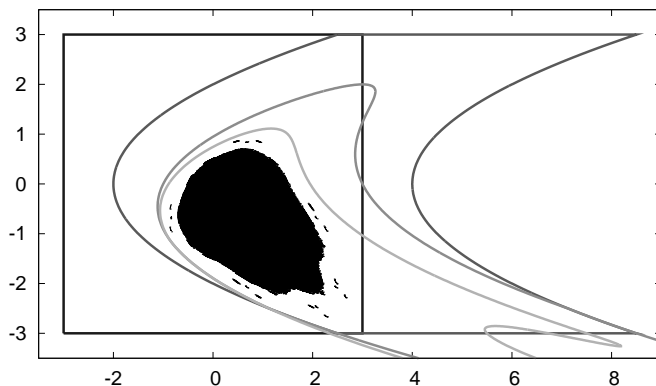


FIGURA 2: El quadrat $[-3, 3]^2$ (en gris molt fosc) i les seves tres primeres imatges per l'aplicació d'Hénon amb $a = -0.5$, $b = -1$, mostrades en gris fosc, gris i gris clar, respectivament. Les dues últimes tenen parts fora del rang mostrat. El conjunt en negre és el conjunt invariant de punts que romanen acotats per qualsevol nombre d'iteracions.

Una representació millor de l'APM quadràtica, que usarem d'ara en endavant, és

$$F_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y + \frac{c}{2}(1 - (x + y)^2) \\ y + \frac{c}{2}(1 - (x + y)^2) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

on és suficient considerar $c > 0$. Aquesta nova forma s'obté amb una petita modificació de la versió usada en [34]. El subíndex c de F_c l'escrivim per emfatitzar que l'aplicació depèn d'aquest paràmetre. L'aplicació té dos punts fixos. Un està situat a $(-1, 0)$ i és hiperbòlic per a qualsevol $c > 0$. L'altre està a $(1, 0)$ i és el·líptic per a $0 < c < 2$, *parabòlic* (de fet, de cisallament) per a $c = 2$ i hiperbòlic amb reflexió per a $c > 2$.

Es pot comprovar fàcilment que la inversa de l'aplicació F_c es pot expressar per $F_c^{-1} = SF_cS$, on S és la simetria $S(x, y) = (x, -y)$. Així, si definim $R = SF_c$, que és també una involució com S , tenim $F_c = SR$ i $F_c^{-1} = RS$. Les dues aplicacions S i R s'anomenen *reversors*. Podem considerar conjunts de punts fixos pels dos reversors, és a dir, punts $z = (x, y)$ tals que $S(z) = z$ (que són els punts amb $y = 0$), o bé uns punts per als quals $R(z) = z$, que pertanyen a una paràbola.

L'existència de reversors d'una aplicació F té una conseqüència important: si K és un reversor i z^* és un punt del conjunt $\text{Fix}(K)$ de punts fixos de K , llavors, si existeix $m \in \mathbb{N}$ tal que $F^m(z^*) \in \text{Fix}(K)$, el punt z^* és periòdic per F . Òbviament, si $F^m(z^*) = z^*$, té període m , i si $F^m(z^*) \neq z^*$, té període $2m$. És clar que un punt fix també es pot considerar com a periòdic de període 1.

Per a estudiar les propietats locals (lineals) d'un punt periòdic z^* de període m , és suficient considerar l'aplicació lineal definida per $DF^m(z^*)$ i usar la descripció de la dinàmica donada a la secció 1. D'acord amb això, el punt s'anomenarà el·líptic, hiperbòlic, hiperbòlic amb reflexió o, si els valors propis de $DF^m(z^*)$ són $+1$ doble o -1 doble, parabòlic.

3 Un flux límit: comparació amb les aplicacions discretes

Un procediment útil per a l'estudi preliminar de la dinàmica d'una aplicació F , en el cas que aquesta sigui *propèria a la identitat*, consisteix a buscar l'existència d'una EDO de tal manera que l'aplicació temps-1 associada al flux sigui una bona aproximació de F . La forma de (4) suggereix introduir noves variables $(\xi, \eta) = (x, 2y/\sqrt{c})$. Ara, en les variables (ξ, η) , F_c difereix de la identitat en una quantitat $\mathcal{O}(\sqrt{c})$. És elemental que si considerem F_c , que ens passa de les variables (ξ, η) a les variables $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$, llavors $\tilde{\xi} = \xi + \sqrt{c}\eta + \mathcal{O}(c)$, $\tilde{\eta} = \eta + \sqrt{c}(1 - \xi^2) + \mathcal{O}(c)$. La variació de les variables (ξ, η) per unitat de temps és $(\sqrt{c}\eta, \sqrt{c}(1 - \xi^2) + \mathcal{O}(c))$. Un escalat del temps, també pel factor \sqrt{c} , i fer tendir c cap a zero, ens proporciona l'EDO

$$\frac{d\xi}{dt} = \eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = 1 - \xi^2, \quad (5)$$

que és hamiltoniana amb $H(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\eta^2 - \xi + \frac{1}{3}\xi^3$ (vegeu (1)). Així, les solucions estan contingudes en les corbes de nivell de H . La dinàmica de (5) és elemental i les seves propietats principals s'il·lustren a la figura 3, esquerra. També té $(-1, 0)$ i $(1, 0)$ com a punts fixos, els quals són hiperbòlic i el·líptic, respectivament.

El nivell $H = 2/3$ del punt fix hiperbòlic conté dues branques no acotades (la superior és, de fet, una branca de $W^{s,+}$, la *varietat estable* del punt fix, mentre que la inferior és una branca de $W^{u,-}$, la *varietat inestable* d'aquest punt) i una branca acotada que tanca un domini de \mathbb{R}^2 . Aquesta última branca de les varietats invariants es coneix per *separatriu*, i està formada per les dues altres branques de les varietats que, de fet, coincideixen: $W^{s,-} = W^{u,+}$. Tots els punts no acotats per la separatriu s'escapen a l'infinit, a excepció dels punts de $W^{s,+}$. Els punts dins del conjunt acotat per la separatriu es mouen en òrbites periòdiques de l'EDO al voltant del punt el·líptic. Aquestes òrbites folien aquest domini acotat.

La separatriu és la solució de (5) amb condició inicial $(2, 0)$ per a $t = 0$ i va des de $\xi = -1$ fins a $\xi = 2$. El valor més gran que pren $|\eta|$ és $\sqrt{8/3}$. A més, cal dir que aquesta solució és el cas límit d'una funció el·líptica que tendeix a $(-1, 0)$ per a $t \rightarrow \pm\infty$ i que té una *singularitat* en $t = i\pi/\sqrt{2}$.

El període de les òrbites periòdiques al voltant del punt fix $(1, 0)$ tendeix a $\sqrt{2}\pi$ quan aquestes s'acosten al punt fix, i tendeix a ∞ quan s'apropen a la separatriu. El període creix de manera monòtona, la qual cosa és conseqüència d'algunes propietats simples de les funcions el·líptiques.

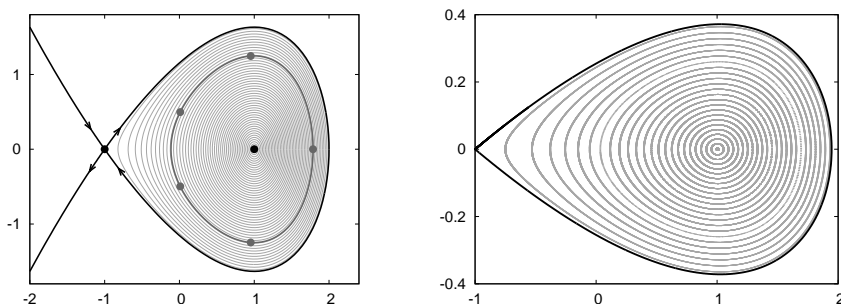


FIGURA 3: A l'esquerra: espai de fase del sistema (5). Els punts fixos es mostren en negre, així com les varietats invariants del punt hiperbòlic. Les òrbites periòdiques es mostren en gris clar. Vegeu el cos del text per als detalls sobre les òrbites periòdiques que es mostren en gris fosc. A la dreta: les branques de la dreta de les varietats invariants del punt fix hiperbòlic i (part de) les òrbites de F_c per a diverses condicions inicials, per a $c = 0.2$.

Com es pot comparar el comportament descrit amb el de F_c per a c petita? A la dreta de la figura 3, prenent condicions inicials en l'eix de les x amb valors 1.01 (0.04) 1.93, per al valor $c = 0.2$, es mostren 5 000 punts de cada òrbita de F_c , després d'un transitori de 10^6 iterats.

Les separatrius de l'aplicació semblen coincidents, però en realitat no ho són (vegeu secció 5). Les òrbites que es mostren sembla que estiguin sobre *corbes invariants*. Probablement la majoria pertanyin a una d'aquestes corbes, però si es fan càlculs amb cura, es pot comprovar que hi ha un petit interval de punts inicials a prop de $x = 1.741\ 262\ 421\ 4$ on algunes òrbites semblen ser *caòtiques*. És clar que si es prenen condicions inicials en el costat oposat del punt fix el·líptic, en el rang $[-0.083\ 43, -0.082\ 46]$ aproximadament, les òrbites no estan sobre corbes invariants al voltant del punt el·líptic.

El que provoca aquesta dificultat a l'hora d'interpretar el que s'observa al gràfic de la dreta de la figura 3 i quina és la dinàmica real es discutirà a les seccions 4, 5 i 6.

Una característica important dels punts l'òrbita dels quals és una corba invariant és el *número de rotació*. Aquest mesura la mitjana de la fracció de revolució que gira un punt per a cada iterat. Considerant els angles respecte del punt fix el·líptic (mesurat en el sentit de les agulles del rellotge) no a \mathbb{S}^1 , sinó en l'*aixecament* a \mathbb{R} , si denotem per θ_k l'angle del k -èsim iterat, el número de rotació es defineix com

$$\rho = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\theta_k}{k}. \quad (6)$$

Aquest número sempre existeix i no depèn de la condició inicial sobre la corba. És clar, però, que el valor de ρ depèn de la corba invariant. Si les corbes invariants es parametritzen pel punt x en què intersequen l'eix de les x a la

dreta del punt el·líptic, podem escriure $\rho = \rho(x)$. Hi ha molts mètodes per a calcular ρ , i la majoria no depenen ni de l'existència d'un punt central (com s'ha considerat abans) ni de la dimensió de l'espai on estigui definida l'aplicació. Vegeu [11, 12, 24].

En el cas del flux, podem definir l'aplicació temps-1 associada, φ_1 , com s'ha fet a la secció 1. El número de rotació és l'invers del període. Per poder veure la bona concordança entre les parts dreta i esquerra de la figura 3, en la figura 4 es mostra el número de rotació en els dos casos, com a funció de x , $x > 1$. El número de rotació del flux s'ha escalat per tenir en compte l'escalat del temps, i s'ha aplicat una petita correcció al valor inicial de x per tenir en compte, també, que les varietats de l'aplicació F_c intersequen l'eix de les x en un punt lleugerament per sota de 2.

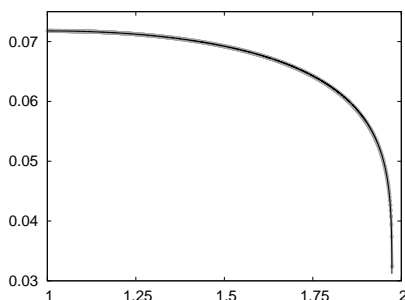


FIGURA 4: Comparació entre ρ per a l'aplicació F_c , $c = 0.2$, en punts gris clar, amb el valor per al camp (5), com a línia negra, després d'haver escalat adequadament. Noteu la concordança excel·lent a aquest nivell de resolució.

Tornant al cas del flux, hem triat un punt (el situat més a la dreta, d'entre els grisos foscos) del gràfic de l'esquerra de la figura 3 que defineix una òrbita periòdica de període 5. Aquest punt té període 5 per φ_1 , i és clar que tots els punts en aquesta òrbita periòdica del flux tenen període 5 per φ_1 . Els altres punts en gris fosc són les imatges del situat més a la dreta, per $(\varphi_1)^k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Què passaria si haguéssim considerat l'aplicació F_c , per a c petita, com a pertorbació $\mathcal{O}(\sqrt{c})$ de l'aplicació φ_1 del flux, i busquéssim punts amb període n per iteració de F_c ? Un punt n -periòdic compleix la condició $G(z) = F_c^n(z) - z = 0$. Si escrivim $F_c^n = \varphi_1^n + \mathcal{O}(\sqrt{c})$ i busquem solucions de $G(z) = 0$ usant el teorema de la funció implícita ens trobarem que no podem fer-ho, perquè la diferencial de $\varphi_1^n - \text{Id}$ és singular. Per tant, cal usar altres mètodes.

Més generalment, podem preguntar-nos si, per a l'aplicació F_c , existeix una EDO (propera però diferent a (5)) tal que l'aplicació φ_1 associada coincideix amb F_c . Fins i tot ens podem plantejar això mateix en el cas d'aplicacions F arbitràries suposant que són properes a la identitat (bé la mateixa F o una potència d'ella en un domini adequat).

Aquest últim cas és el de les funcions F de tipus APM al voltant d'un punt fix hiperbòlic. Les òrbites de l'aplicació φ_1 d'una EDO (que es pot provar que existeix i és calculable de manera efectiva) coincideixen amb les de F mentre estiguin en un entorn del punt citat. Aquest és el contingut de la coneguda *forma normal de Birkhoff* (BNF de les seves sigles en anglès); vegeu, per exemple, [25]. A més, en un entorn d'un punt fix el·líptic, es pot calcular una BNF fins a qualsevol ordre, però, en general, *no serà convergent*. Les *formes normals* són eines molt útils que donen molta informació [1]. La idea clau és introduir una successió de transformacions que converteixin el problema original en un altre que sigui molt més fàcil d'estudiar.

Concretament, en el cas d'un punt fix hiperbòlic, existeix un canvi de variables analític, que passa a unes variables (ξ, η) en les quals l'aplicació s'escriu

$$(\xi, \eta) \rightarrow (\lambda(\xi\eta)\xi, \eta/\lambda(\xi\eta)),$$

on $\lambda(\xi\eta) = \sum_{n \geq 0} \lambda_j(\xi\eta)^j$ (convergent) i on el valor de λ_0 és el valor propi dominant en el punt fix. Notem que $\lambda(\xi\eta)$ sols depèn del producte de les variables. Aquest producte és constant per l'aplicació dins d'un cert entorn del punt fix. Òbviament, en aquest entorn, els iterats es mouen sobre hipèrboles de manera semblant al cas lineal.

En el cas d'un punt fix el·líptic i suposant que no hi ha ressonància, és a dir, que si la part lineal és una rotació d'angle α_0 llavors $\alpha_0 \notin 2\pi\mathbb{Q}$, hi ha una successió de canvis analítics que redueixen l'aplicació a formes del tipus

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \rightarrow R_{\alpha_N}(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|(\xi, \eta)\|^{2N+1}),$$

on $R_{\alpha_N}(\xi, \eta)$ vol dir una rotació d'angle $\alpha_N(\xi, \eta)$ que depèn de les variables de la forma $\alpha_N(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^N \alpha_j(\xi^2 + \eta^2)^j$. Però per a qualsevol entorn del punt fix, la successió de residus de la forma normal, $\mathcal{O}(\|(\xi, \eta)\|^{2N+1})$, no tendeix a zero si $N \rightarrow \infty$, llevat de casos molt degenerats. No hi ha convergència en general. Els coeficients α_j s'anomenen coeficients de Birkhoff i moltes vegades s'escriuen b_j en record de Birkhoff.

És immediat escriure els camps el flux temps unitat dels quals reproduceix el que s'obté de la forma normal. En el cas hiperbòlic és $\dot{\xi} = \log(\lambda(\xi\eta))\xi$, $\dot{\eta} = -\log(\lambda(\xi\eta))\eta$, i en el cas el·líptic, en coordenades polars (r, θ) , tindrem $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \alpha_N(r^2)$.

Si estem interessats en l'existència d'una EDO de tal manera que l'aplicació φ_1 associada coincideixi globalment, és a dir, en un domini compacte K fixat, amb una aplicació propera a la identitat F , també hi ha resultats basats en tècniques de mitjanes [20, 28]. Per fixar idees, suposem que $F(z) = F_\varepsilon(z) = z + \varepsilon F_1(z, \varepsilon)$. El primer pas consisteix a construir una *suspensió*, és a dir, una equació diferencial ordinària que depengui periòdicament del temps (per exemple, amb període 1) de manera que la seva aplicació temps-1, des de $t = 0$ fins a $t = 1$, coincideixi amb l'aplicació F_ε [4]. Això és sempre possible si ε és petit. Llavors cal aplicar una *successió de transformacions* per tal de cancel·lar la dependència

del temps de l'EDO [20, 28]. En general això no és possible. La successió de camps vectorials no convergeix a un camp autònom, però si s'atura el procés en el moment adequat, que depèn de ε , es pot obtenir un camp autònom tal que la seva aplicació temps-1 difereix de $F_\varepsilon(z)$ en una quantitat acotada per $c_1 \exp(-c_2/\varepsilon)$, per a tota $z \in K$ i per a certes constants c_1 i c_2 positives. Vegeu la secció 5 per a temes relacionats, que inclouen el tipus de divergència d'aquesta successió de transformacions.

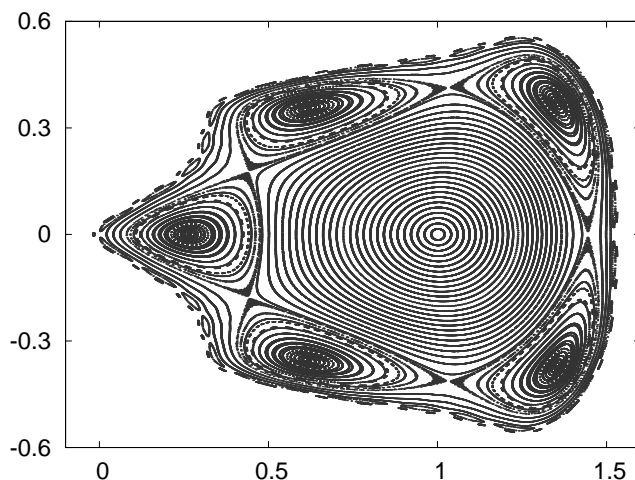


FIGURA 5: Algunes òrbites de l'aplicació F_c per a $c = 0.762$. Com abans, prenem punts inicials i il·lustrem 5 000 iterats de cada un d'ells després d'un transitori de 10^6 iterats. Ara les condicions inicials en $y = 0$ són 0.98 (-0.02) -0.02 . Els punts fora del domini que es mostra s'escapen a l'infinit apropant-se a la branca W^{u-} .

A la figura 5 s'il·lustra la situació que es troba per a valors més grans de c . Encara sembla que hi ha moltes corbes invariants al voltant del punt fix el·líptic. Lluny d'aquest punt hi trobem algunes *illes* al voltant de punts el·líptics periòdics de període 5. Prop de les zones on una illa s'apropa a les seves veïnes, és possible detectar-hi una òrbita hiperbòlica periòdica de període 5. En un entorn d'aquestes òrbites periòdiques, la dinàmica sembla caòtica: aparentment les òrbites omplen un conjunt de mesura positiva, i ja no estan sobre corbes. Prop de la perifèria, ens trobem una altra vegada amb més corbes invariants envoltant les illes de període 5 i, finalment, algunes cadenes d'illes molt petites. Aquesta estructura és típica per a APM de qualsevol tipus.

Cal notar, també, que les illes de període 5 intersequen $y = 0$ (el conjunt $\text{Fix}(S)$) a l'esquerra del punt fix el·líptic, però no a la dreta, on podem intuir que hi haurà un punt hiperbòlic de període 5. D'altres illes només poden tenir intersecció a la dreta i algunes no tenen intersecció amb $\text{Fix}(S)$, però poden

tenir-ne amb $\text{Fix}(R)$. Per fer evident l'existència d'illes, a la figura 6 representem el valor del número de rotació en funció de x per a punts inicials triats a $\text{Fix}(S)$ (esquerra) i també per a punts inicials triats a $\text{Fix}(R)$ (dreta) per al valor $c = 0.7$. En l'últim cas només usem dades inicials a l'esquerra de $x = 1$. En ambdós casos s'observa que el màxim de ρ s'assoleix en $x = 1$. Ara bé, com veurem més endavant, això pot canviar en variar el valor de c . A la figura 6, es destaquen amb punts negres les zones on ρ és localment constant, que corresponen a illes. En els llocs on hi ha punts periòdics hiperbòlics a prop, el valor de ρ no està definit, a causa de la manca de corbes invariants i de l'existència de punts homoclínic transversals (vegeu seccions 5 i 6), i ρ té salts.

El número de rotació s'ha calculat després d'un transitori de 10^6 iterats usant els 10^6 iterats següents i un mètode basat en l'ordre en què els iterats es distribueixen sobre la corba invariant. S'han ignorat els valors de x per als quals els iterats s'escapen o no estan sobre corbes invariants (fet que es detecta automàticament amb aquest mètode; simplement, si mirem l'ordre dels angles que s'obtenen considerant els iterats en coordenades polars al voltant del punt el·líptic, els valors successius que prenen no són els que corresponen a una rotació rígida: un raonament purament topològic). Els números de rotació racionals detectats usant valors de x de la forma $k \times 10^{-3}$, $k \in \mathbb{Z}$, d'esquerra a dreta a la il·lustració de l'esquerra, són $3/17$, $25/141$, $13/73$, $7/39$, $11/61$, $15/83$, $23/127$, $2/11$, $5/27$, $1/5$, $4/21$, $2/11$, $8/45$, $14/79$, $10/57$ i $4/23$, tots amb denominador senar. A la il·lustració de la dreta, són $1/6$, $7/40$, $13/74$, $17/96$, $11/62$, $5/28$, $9/50$, $17/94$, $29/160$, $33/182$ i $3/16$, tots amb denominador parell.

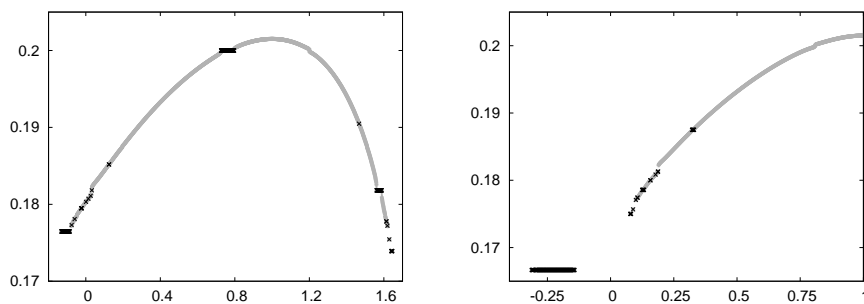


FIGURA 6: Nombre de rotació com a funció de x , per a F_c , $c = 0.7$. A l'esquerra: s'han pres punts inicials en $y = 0$. A la dreta: s'han considerat punts inicials en el conjunt $\text{Fix}(R)$ amb el valor de y més petit. Els punts negres indiquen els valors per als quals el número de rotació és racional i corresponen a illes. Vegeu el text per a més detalls.

4 L'existència de corbes invariants

Ara ens interessem per resultats que assegurin l'*existència de corbes invariants*; no només per a APM quadràtiques, sinó també per a APM generals. Considerarem corbes al voltant d'un punt fix el·líptic de tal manera que, en coordenades polars centrades en aquest punt, el radi es pugui expressar com a funció de l'angle $r = r(\theta)$ o, simplement, corbes definides en un *domini anular* que tingui també la propietat que el radi es pugui expressar com a funció de l'angle usant un punt central adequat.

Primer cal que introduïm les anomenades *aplicacions twist*, les quals són *aplicacions integrables* (que admeten, per tant, una *foliació* formada per corbes invariants en un domini anular). Suposem que, per a $\theta = 0$, el radi r_0 varia en un domini $r_a < r_0 < r_b$ i denotem per $\rho(r_0)$ el número de rotació corresponent. Es diu que una APM d'aquest tipus satisfà la *condició twist* si $d\rho(r_0)/dr_0 \neq 0$. Usarem el símbol T per referir-nos a aquest tipus d'aplicacions. Per a una APM F donada, es poden obtenir aplicacions twist com a aplicacions temps-1 d'un flux que aproxima l'aplicació (bé sigui al voltant d'un punt el·líptic, en un anell, bé usant alguna forma normal).

Suposem que l'aplicació en què estem interessats és una *pertorbació* d'una aplicació twist: $F_\varepsilon = T + \varepsilon P$, on P és una funció normalitzada de manera que tingui alguna norma igual a 1. Per hipòtesi, T té corbes invariants. Podem assegurar que *subsisteixen* per a F_ε ? El resultat ve donat pel conegut *teorema del twist de Moser*.

TEOREMA. Considerem una pertorbació $F_\varepsilon = T + \varepsilon P$ d'una aplicació twist T . Si tenim una corba invariant de T amb número de rotació diofàntic γ , aquesta corba subsisteix, lleugerament deformada, per F_ε sempre que ε sigui suficientment petit.

En aquest moment cal que introduïm una definició: la de *nombre diofàntic*. És clar que qualsevol nombre irracional γ es pot aproximar per nombres racionals tant com vulguem. El problema és que per tenir una bona aproximació necessitem racionals amb *denominadors grans*. Així, si p/q , $q > 0$, és una aproximació racional de γ , podem mesurar quina és la diferència comparant-la amb una potència de $1/q$. Més concretament, diem que γ satisfà una (C, τ) -*condició diofàntica* (per simplificar (C, τ) -DC o simplement DC, de les sigles en anglès de diophantine condition), si $|\gamma - p/q| > C/q^\tau$ per a certs $C > 0$ i $\tau \geq 2$ i per a qualsevol $p/q \in \mathbb{Q}$. És fàcil comprovar que si fixem $\tau > 2$, el conjunt de $\gamma \in \mathbb{R}$ que no satisfan una (C, τ) -DC per a cap $C > 0$ té mesura zero. Entre els nombres diofàntics, el millor és la *raó àuria*, $g = (\sqrt{5} - 1)/2$, en el sentit que satisfà una DC amb $\tau = 2$ (que és el valor mínim que pot prendre τ), i el valor màxim de C que, per a racionals amb denominador que tendeixi a ∞ , tendeix a $1/\sqrt{5} \approx 0.4472136$. El pitjor valor de C per a g s'assoleix per a $p/q = 2/3$. En aquest cas, $C = (9\sqrt{5} - 21)/2 \approx 0.4376941$.

Així, tenim tres condicions que ens garanteixen que F_ε tindrà una corba invariant del tipus desitjat:

- a) Ha de ser una *pertorbació* d'una aplicació twist T .
- b) El seu número de rotació γ ha de ser *diofàntic*.
- c) Ha d'estar suficientment a prop de T , és a dir, ε ha de ser *petit*.

Cal comentar una mica quina és la funció de cada una d'aquestes condicions. Considerem la *representació de Fourier* de la corba invariant de T amb número de rotació γ : $r(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \exp(ij\theta)$. Sigui $r_\varepsilon(\theta) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j \exp(ij\theta)$ la representació de la corba desitjada, invariant per F_ε . La *condició d'invariància* s'expressa (en coordenades polars) per $F_\varepsilon(\theta, r_\varepsilon(\theta)) = (\theta + 2\pi\gamma, r_\varepsilon(\theta + 2\pi\gamma))$. És clar que podem fixar l'origen dels angles de manera arbitrària.

Quan intentem passar dels coeficients a_j als b_j fent una successió de canvis de variable de manera que, després del k -èsim canvi, tinguem una aproximació amb un error $\mathcal{O}(\varepsilon^{2^k})$ de la corba invariant amb $\rho = \gamma$ de F_ε , el que estem fent és aplicar el *mètode de Newton* en l'espai de les sèries de Fourier. A cada pas, hem de resoldre una equació de la forma $G(\theta + 2\pi\gamma) - G(\theta) = R(\theta)$, l'anomenada *equació homològica*, on $R(\theta)$ està relacionat amb l'error de l'aproximació anterior i té *mitjana zero*, una condició necessària per poder resoldre l'equació.

Usant representacions de Fourier per a G i R : $G = \sum_{j \in \mathbb{Z}} g_j \exp(ij\theta)$, $R = \sum_{j \in \mathbb{Z}} r_j \exp(ij\theta)$, $r_0 = 0$, és fàcil obtenir que $g_j = r_j / (\exp(ij2\pi\gamma) - 1)$, $j \neq 0$. Ara bé, el denominador anterior és proper a zero si $j\gamma$ és proper a un enter. Aquest és l'anomenat *problema dels divisors petits*. La DC ens permet controlar el comportament dels coeficients de G de manera que, si R és analítica en una certa banda complexa al voltant de la recta de valors reals de θ , G també és analítica (potser, però, en una banda lleugerament més estreta).

Concretament, si en un pas del procés tenim una funció R amb banda d'analicitat d'amplada Δ , les desigualtats de Cauchy ens donen cotes de la forma $|r_j| \leq M \exp(-\Delta|j|)$. Si γ satisfà una DC, llavors $j\gamma$ dista dels enters una quantitat acotada inferiorment per $C/|j|^{\tau-1}$. El denominador $\exp(ij2\pi\gamma) - 1$ té una cota inferior de l'ordre de $1/|j|^{\tau-1}$ (amb la constant que toqui). Això fa que $|g_j|$ estigui acotat per una quantitat de l'ordre de $\exp(-\Delta|j|) \times |j|^{\tau-1}$ que, a la seva vegada, es pot acotar per una exponencial amb un valor una mica més petit que Δ (i que també pot incloure l'efecte de les constants que han anat apareixent).

El problema és que l'error en l'aproximació següent *no tingui mitjana zero* i no puguem resoldre l'equació homològica següent. Aquesta mitjana es pot cancel·lar modificant el terme independent inicial a_0 (o, equivalentment, triant un valor adequat de g_0) i això és possible gràcies a la condició twist. És convenient expressar la condició twist en la forma $d\rho/da_0 \neq 0$, és a dir, en termes de la mitjana de la corba inicial. Finalment, el fet que ε sigui petit és condició necessària per garantir la convergència del procés de Newton. Noteu que, fixada γ , com més gran sigui la condició twist (és a dir, la magnitud $|d\rho/da_0|$), més grans són els valors de ε admissibles.

Cal mencionar, també, que la demostració de l'existència de corbes invariants per a una aplicació i un ρ donats es pot fer de manera constructiva, produint cotes rigoroses dels errors a cada pas usant *demostracions assistides per ordinador* (CAP, de les sigles en anglès de computer assisted proofs).

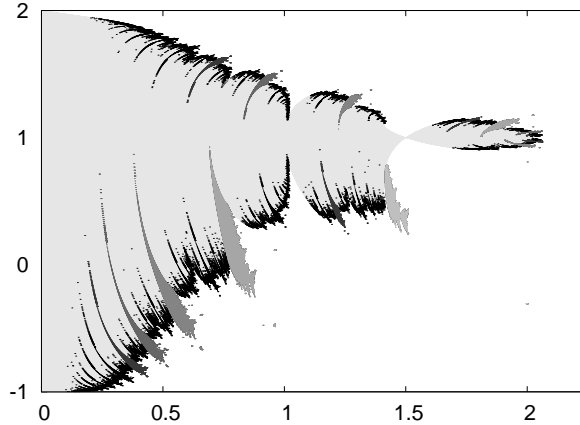


FIGURA 7: La il·lustració mostra, en funció de c , els valors de x per a punts de $\text{Fix}(S)$ per als quals s'ha calculat el nombre de rotació. Els punts en gris molt clar corresponen a punts amb $\rho \notin \mathbb{Q}$, mentre que els altres tons de gris corresponen a $\rho \in \mathbb{Q}$. Per a $\rho = m/n$ i $n = 3, 5, 7, 9, 11$, els grisos són cada vegada més foscos. Usem el negre per a altres valors racionals.

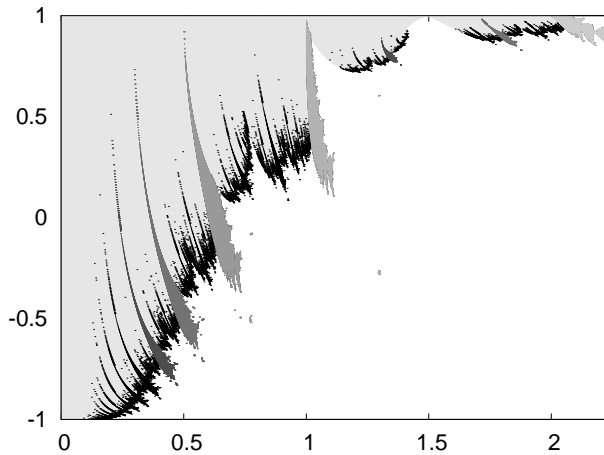


FIGURA 8: La il·lustració mostra, en funció de c , els valors de x per a punts de $\text{Fix}(S)$ per als quals s'ha calculat el nombre de rotació. Els punts en gris molt clar corresponen a punts amb $\rho \notin \mathbb{Q}$, mentre que els altres tons de gris corresponen a $\rho \in \mathbb{Q}$. Per a $\rho = m/n$ i $n = 2, 4, 6, 8, 10$, els grisos són cada vegada més foscos. Usem el negre per a altres valors racionals.

Tornant a l'APM quadràtica, és instructiu calcular números de rotació per a valors de c prenent condicions inicials a $\text{Fix}(S)$ ($y = 0$) o a $\text{Fix}(R)$, per veure on podem esperar trobar, respectivament, *corbes invariants*, *illes periòdiques*, *zones caòtiques* o, simplement, *escapament*. El resultat es mostra a les figures 7 i 8. Noteu que la majoria de les llengüetes associades amb illes arriben a $x = 1$, però són extremament estretes; per sota de la resolució de píxel. Com que els nombres racionals són densos, els dominis en gris molt clar en aquestes figures tenen, de fet, una *estructura de tipus cantoriana*. Hi ha un conjunt dens de llengüetes que cal treure del domini gris molt clar, però aquest té mesura positiva (i, de fet, relativament gran). Això està relacionat amb el fet que el conjunt de números que satisfan una (C, τ) -DC, per a $\tau > 2$ i C molt petita fixades, és un conjunt de Cantor amb *mesura gairebé total*.

Cal dir que alguns dels dominis d'illes en les figures anteriors no surten de $x = 1$. Estan relacionats amb *satèl·lits* (i satèl·lits de satèl·lits i així successivament) de les illes principals. En certa manera, l'estructura al voltant de cada illa i al voltant de les seves illes satèl·lit repeteix l'estructura del conjunt sencer, com un *objecte fractal*.

Arribats a aquest punt, pot ser instructiu veure com les illes d'un cert número de rotació donat evolucionen quan c canvia. Les illes amb número de rotació p/q neixen del punt $(1, 0)$ quan $c = 1 - \cos(2\pi p/q)$. Aquesta evolució es veu a la pel·lícula *movie1*, que es pot trobar a <http://www.maia.uab.es/dsg/QuadraticAPM>.

La qüestió següent sorgeix de manera natural: què passa si l'aplicació integrable aproximada *perd la seva condició twist*? A la figura 9 mostrem la variació de ρ en funció de x per a $c = 1.35$. Si la comparem amb la figura 6 veiem que, en primer lloc, a la figura 9 el valor de ρ en $x = 1$ és un mínim local en comptes d'un màxim. També veiem un màxim per a $x < 1$ (el màxim per a $x > 1$ està relacionat amb aquest). La condició twist es perd però continuen existint corbes invariants; vegeu la figura 10. Són les anomenades *corbes meandre*, que no es poden representar com a gràfic del radi en funció de l'angle vist des del punt el·líptic. Les corbes es pleguen (formant meandres), però hi ha eines per provar-ne l'existència [29].

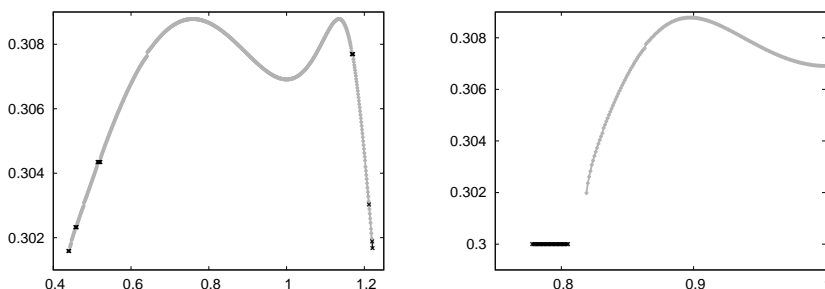


FIGURA 9: Similar a la figura 6, però per a $c = 1.35$. Es representa el valor de $\rho = \rho(x)$ per a punts inicials en $y = 0$ (esquerra), i en $\text{Fix}(R)$ (dreta). En negre es marquen els punts amb $\rho \in \mathbb{Q}$. Noteu que ara, tant a la dreta com a l'esquerra de $x = 1$, la funció ρ ja no és monòtona.

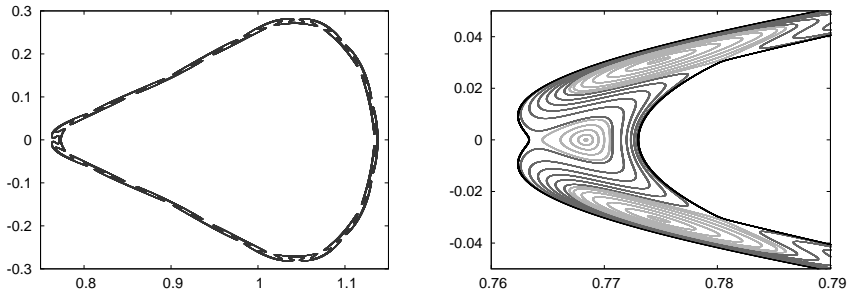


FIGURA 10: A l'esquerra es mostren un parell d'òrbites per a $c = 1.3499$, que estan en un domini on ρ passa per un màxim. Aquestes òrbites estan sobre corbes invariants, anomenades meandres. A la dreta se'n mostra una magnificació. Entre els diferents meandres en gris fosc, es poden veure dues corbes invariants ordinàries (dins i fora), i en negre, illes que pertanyen a dues cadenes d'illes diferents de número de rotació $4/13$.

Aquest tipus de corbes existeixen des de $c = 5/4$ fins a $c \approx 1.4123$. El seu número de rotació pren valors en l'interval $I = (\cos^{-1}(-1/4)/(2\pi) \approx 0.29022, \approx 0.32846)$. Estan relacionades amb la coexistència de dues illes diferents amb el mateix número de rotació. Per a qualsevol número racional $\rho \in I$ es repeteix el mateix fenomen, però en dominis extremament estrets si ρ té un denominador gran.

5 Les varietats invariants dels punts hiperbòlics i el seu paper en la creació de caos

A més de les corbes invariants d'una APM hi ha altres objectes invariants molt importants que tenen un paper clau en la dinàmica (el mateix val per a aplicacions més generals i fluxos en qualsevol dimensió). Es tracta de les *varietats invariants estable i inestable dels punts fixos hiperbòlics*, que es poden considerar una generalització de les rectes invariants mostrades al gràfic del centre de la figura 1. Un primer exemple es mostra en el gràfic de la dreta de la figura 3. Hem mencionat que en aquella figura les branques $W^{u,+}$ i $W^{s,-}$ (aquelles que comencen a la dreta de $x = -1$) semblen coincidents però que, de fet, no ho són. A la figura 11, esquerra, reproduïm aquestes varietats invariants per a $c = 0.2$ i a la imatge de la dreta mostrem una ampliació del retorn d'aquestes a un entorn del punt $(-1, 0)$, després d'haver girat en sentit horari al voltant de $(1, 0)$ en considerar iteracions per F_c (punts grisos) o en sentit antihorari iterant F_c^{-1} (punts negres). Veiem petites oscil·lacions de mida $\mathcal{O}(10^{-3})$. La figura 12 mostra varietats similars per a $c = 0.3$ i ara les oscil·lacions són deu vegades més grans, la qual cosa fa que fins i tot es puguin detectar en la representació de l'esquerra, molt a prop de $(-1, 0)$. Objectes similars apareixen si, en lloc de punts fixos, considerem òrbites periòdiques hiperbòliques.

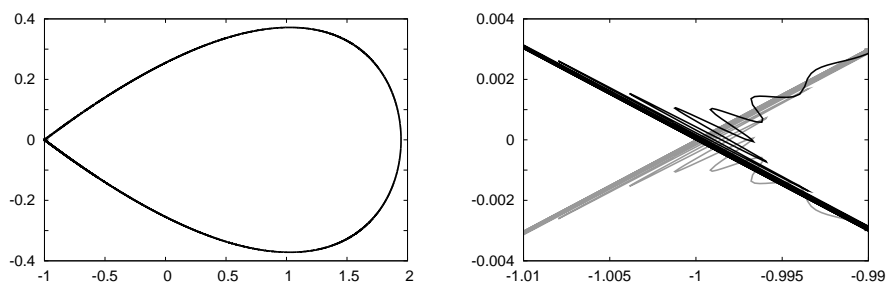


FIGURA 11: Varietats invariants inestable (en gris) i estable (en negre) del punt fix hiperbòlic per a $c = 0.2$. A la dreta es mostra una ampliació del gràfic de l'esquerra a prop del punt fix. Al gràfic de l'esquerra sembla que les varietats coincideixen. L'escissió és bastant petita.

Aquestes objectes es diuen invariants ja que es requereix que els punts en una d'aquestes corbes (W^u o W^s) s'apliquin a punts de la mateixa corba quan els iterem per F_c i per F_c^{-1} . Encara més, els punts de W^s tendeixen al punt fix hiperbòlic o a l'òrbita periòdica quan s'iteren per F_c i el mateix els succeeix als punts de W^u quan s'iteren per F_c^{-1} . La condició d'invariància també ens permet obtenir desenvolupaments locals d'aquestes varietats [27].

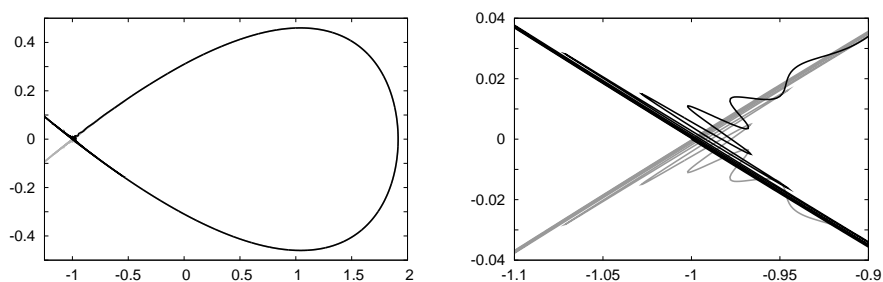


FIGURA 12: Similar a la figura 11, per a $c = 0.3$. En el gràfic de l'esquerra es comença a veure que les varietats són lleugerament diferents. L'escissió d'aquestes és petita.

Per què són rellevants? Aquestes varietats tenen una *intersecció transversal* quan creuen la recta $y = 0$ a la dreta, prop de $x = 2$. De fet, a causa de l'existència del reversor S , satisfan $W^s = S(W^u)$. Els punts on la varietat invariant estable i inestable d'un punt fix o periòdica hiperbòlic s'intersequen es coneixen per *punts homoclíncics*. Pot passar també, com veurem a la secció 6, que la varietat inestable d'un punt (fix o periòdica hiperbòlic) Z_1 intersequi la varietat estable

d'un altre punt (fix o periòdic hiperbòlic) Z_2 . En aquest cas, la intersecció és coneix per *punt heteroclínic*. És clar, a causa de la invariància, que si un punt és homoclínic (respectivament, heteroclínic), totes les *imatges i preimatges* per F també són punts homoclínics (respectivament, heteroclínics).

A mesura que s'incrementa c la manca de coincidència de W^u i W^s es fa més evident. La figura 13 mostra aquestes varietats per a $c = 0.77, 1.0$ i 1.5 .

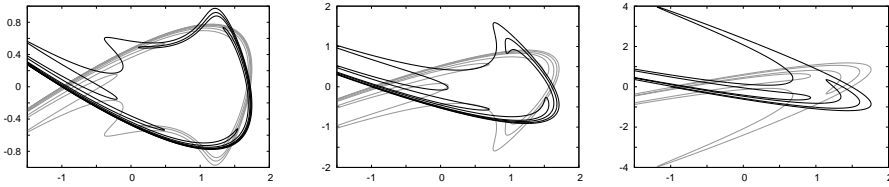


FIGURA 13: Similar a les figures 11 i 12 esquerra, però per a $c = 0.77, 1.0$ i 1.5 , d'esquerra a dreta. L'escissió de les varietats és clarament visible i creixent. Notem que, al mateix temps, el domini al voltant del punt fix el·líptic $(1, 0)$, que no queda recobert per les oscil·lacions de les varietats, es va fent més petit.

Una mesura de la manca de coincidència de les varietats estable i inestable és l'*angle d'escissió*, que es defineix com l'angle entre les dues varietats en un punt homoclínic donat. En el cas d'APM quadràtiques que considerem, podem mesurar l'angle en la *primera intersecció* de les varietats amb $y = 0$ a la dreta de $x = 1$, i veure com evoluciona en funció de c . Per fixar idees, denotem aquest angle per $\sigma(c)$. A la part superior de la figura 14 representem el valor de $\sigma(c)$ de maneres diferents. En el gràfic de l'esquerra, tot i que l'escissió és diferent de zero per a tot $c > 0$, veiem que únicament per a $c > 0.2$ comença a ser visible. Per tal de veure el que succeeix per a valors de c petits, en el gràfic de dalt a la dreta representem $\log(\sigma)$ contra $\log(c)$. Cal tenir en compte que, ja per a $c = 0.05$, el valor de $\sigma(c)$ és menor que 10^{-15} i, per tant, *negligible en qualsevol aplicació pràctica*.

Sigui $\lambda(c)$ el valor propi dominant del punt fix hiperbòlic que, per a F_c , és igual a $1 + c + \sqrt{2c + c^2}$. Un paràmetre essencial en l'estudi teòric del problema és $h(c) = \log(\lambda(c))$, ja que, usant representacions adequades de les varietats, és possible veure que l'escissió admet cotes superiors de la forma $\exp(-\eta/h)$, on η està relacionat amb la part imaginària de la singularitat de la separatriu del flux límit, com s'ha esmentat a la secció 3. Aquest tipus de resultat és cert per a *APM analítiques generals properes a l'aplicació identitat* [7, 8]. De fet, per al problema present es pot demostrar un resultat més precís. L'angle d'escissió té la forma

$$\sigma(c) = \frac{9}{2} \times 10^6 \pi^2 h(c)^{-8} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{h(c)}\right) \times \Omega(h), \quad (7)$$

on el terme $\Omega(h)$ s'anomena *factor corrector* i inclou l'efecte dels termes no dominants (és a dir, ni la part exponencialment petita ni les potències de $h(c)$). Típicament es demostra que aquest terme es pot acotar per una constant més un terme $\mathcal{O}(h(c))$.

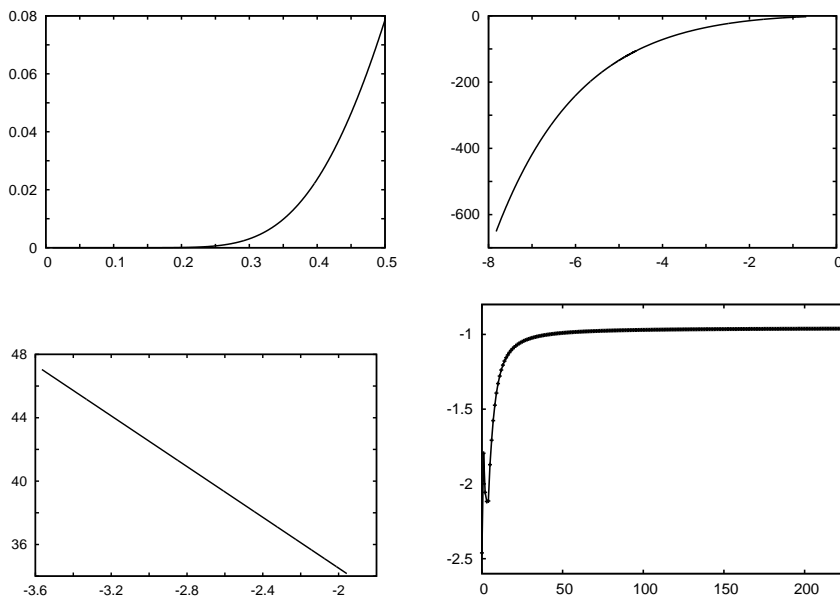


FIGURA 14: A dalt: Diferents representacions de l'angle d'escissió $\sigma(c)$ entre les varietats en la primera intersecció amb $y = 0$, $x > 1$. A l'esquerra: σ en funció de c , mostrant que σ sembla negligible per a $c < 0.2$. A la dreta: $\log(\sigma)$ en funció de $\log(c)$, que permet veure com és de petit $\sigma(c)$ quan c tendeix a zero. A baix a l'esquerra: $\log(\sigma) + 2\pi^2/\log(\lambda(c))$ com a funció de $\log(\log(\lambda(c)))$, mostrant una dependència gairebé lineal amb pendent -8 , d'acord amb la teoria. A baix a la dreta: els valors de $\log_{10}(\omega_{2m}(2\pi^2)^{2m}/(2m+6)!)$ en funció de m , per tal de donar una evidència del caràcter Gevrey de $\Omega(h)$.

El gràfic de baix a l'esquerra de la figura 14 il·lustra les propietats de (7). Aquí la variable de l'eix horitzontal és $\log(h(c))$ mentre que en l'eix vertical es representa $\log(\sigma(c)) + 2\pi^2/h(c)$. D'acord amb (7), el que es representa hauria de ser (si menyspreem el terme $\mathcal{O}(h)$ en la cota de $\Omega(h)$; vegeu el paràgraf següent) una recta amb pendent -8 , que concorda perfectament amb les dades. El fet que calculem valors bastant petits de $\sigma(c)$ no és pas un problema. El paquet PARI/GP [3] és útil per a aquests problemes senzills.

En el cas de l'aplicació d'Hénon, en la formulació present, s'observa experimentalment que el terme $\Omega(h)$ es pot desenvolupar en potències de h^2 : $\Omega(h) = \sum_{m \geq 0} \omega_{2m} h^{2m}$. El terme constant i els primers termes del desenvolupament de $\Omega(h)$ poden ésser determinats numèricament (vegeu-ne els mètodes

a [10, 30]) de manera acurada (fins i tot amb milers de xifres correctes) i els primers dígit de ω_0 són 2.489 312 802 936 71. No obstant això, la sèrie que defineix $\Omega(h)$ és *divergent*, però ens proporciona una bona aproximació per a cada valor de h si es trunca la suma en el lloc correcte. Hi ha evidència numèrica que la sèrie és de *classe Gevrey-1*, és a dir, tot i ser divergent, la sèrie associada $\sum_{m \geq 0} \omega_m h^{2m} / (2m)!$ és convergent. El gràfic de sota a la dreta de la figura 14 mostra aquesta evidència. De la determinació numèrica de $\Omega(h)$ per a diferents valors de h es poden obtenir els coeficients ω_{2m} . A la figura representem $\log_{10}(\omega_{2m} (2\pi^2)^{2m} / (2m+6)!)$ en funció de m , que sembla que tendeix a una constant.

Aquest caràcter Gevrey també s'ha d'esperar en *la majoria de les construccions formals de fluxos* en les quals l'aplicació temps-1 aproxima una APM donada (o fins i tot una aplicació general) propera a la identitat.

Per explicar *la generació de caos* degut a l'existència de punts homoclínic transversals, tornem un moment a la figura 5. És clar que entre les illes de període 5 hi ha una òrbita periòdica hiperbòlica del mateix període. Substituint F_c per F_c^5 els punts de l'òrbita periòdica es converteixen en punts fixos. Si ens fixem en una de les illes, per exemple la que està més a l'esquerra, i en les varietats dels punts fixos del voltant, veiem que l'estructura és similar a la de l'espai de fase d'un *pèndol*, però ara les separatrïus *no coincideixen*: la varietat estable i la inestable s'intersequen transversalment en l'eix $y = 0$. Es pot veure que aquesta situació és topològicament equivalent al *patró de figura vuit* mostrat a l'esquerra de la figura 15 [35]. Es poden veure les petites oscil·lacions de les branques de W^u al voltant de W^s a prop de p i viceversa. Notem que el patró mostrat en la figura 15 no el trobarem en l'aplicació de Hénon, sinó en altres famílies, com *l'aplicació de Duffing conservativa* o alguna representació de *l'aplicació estàndard*.

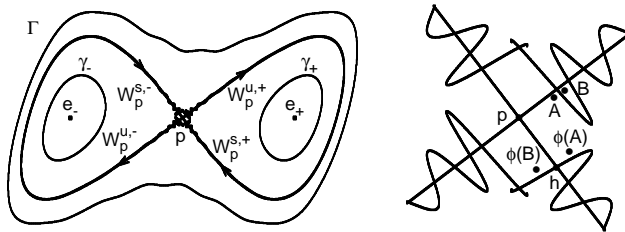


FIGURA 15: A l'esquerra: un punt fix hiperbòlic p de la mena que les seves varietats generen dues voltes (o una volta de la figura vuit). També es mostren dos punts fixos el·líptics, e_+ i e_- , juntament amb les corbes invariants al voltant d'aquests, γ_+ i γ_- , i una corba invariant externa Γ . A la dreta: detall del retorn dels punts A i B a un entorn de p , com $\Phi(A)$ i $\Phi(B)$, que permet entendre l'origen del caos. Vegeu el text per als detalls.

El gràfic de la dreta és una ampliació del de l'esquerra. Considerem dos punts com són A i B , propers a $W^{u,+}$ però *en costats diferents* de $W^{s,+}$. Poden estar tan propers com es vulgui. Després de diverses iteracions, diguem-ne m , i definint

$\Phi = F^m$, els punts retornen a prop de p com $\Phi(A)$ i $\Phi(B)$. Com que estan en costats diferents de $W^{s,+}$ els iterats successius del punt $\Phi(A)$ es mouran *cap a la dreta* i els de $\Phi(B)$ es mouran *cap a l'esquerra*. El sistema té *sensitivitat respecte les condicions inicials*. Aquest procés es repeteix cada vegada que els iterats del punt tornen a prop de p . De fet, donada una seqüència biinfinita de símbols ℓ (left) i r (right), de la forma $\{\dots, \ell, \ell, r, r, r, \ell, r, \ell, r, \dots\}$, es pot demostrar que hi ha punts que realitzen aquesta seqüència en els passatges successius a prop de p . És a dir, la dinàmica és *impredictible*. El sistema és *determinista* però mostra *dinàmica caòtica*.

6 El mecanisme de destrucció de corbes invariants i els conjunts de Cantor associats

Tal com s'ha comentat a la secció 4, si el número de rotació és massa proper a un racional (en sentit diofàntic) o si la condició twist és massa dèbil o si la pertorbació respecte d'una aplicació integrable és massa gran, la corba invariant *no existeix*. Aquestes propietats analítiques tenen alhora una *interpretació geomètrica*. Abans d'entrar en els detalls es proposa veure l'animació *movie2* a <http://www.maia.ub.es/dsg/QuadraticAPM>, que proporciona una evidència de la *destrucció de les corbes invariants* que envolten les illes de període 6, 5 i 4, quan c augmenta. Els punts en vermell de les imatges es troben sobre corbes invariants, mentre que els punts en verd tenen dinàmica caòtica. Notem que aquests últims estan *confinats* si hi ha una *corba invariant que els envolti*. Quan aquesta corba es destrueix els iterats dels punts *s'escapen*.

Per tal d'il·lustrar el mecanisme que comporta la *destrucció* de les corbes invariants, considerem la figura 16. S'ha generat per a $c = 0.63$ i mostra la part esquerra del conjunt de punts que tenen òrbites acotades. El cas de la figura 16 és similar al de la figura 5, però ara les illes principals són de període 6. En negre representem dues cadenes d'illes amb número de rotació $3/19$ i $4/25$. Considerem les òrbites periòdiques hiperbòliques associades, la de període $4/25$ és visible sobre l'eix de les x i els dos punts simètrics de l'òrbita hiperbòlica de número de rotació $3/19$ estan a prop de $x = -0.2$, fora de l'eix de les x . Les varietats d'aquestes òrbites periòdiques donen lloc a *connexions heteroclíniques*, de la manera com es descriu en la llegenda.

Aquestes connexions heteroclíniques són *obstruccions* per a l'existència de les corbes invariants que podrien separar les cadenes d'illes. En realitat, si considerem una corba formada per un tros de la varietat invariant des del punt periòdic hiperbòlic interior (el que té període 25) fins al punt heteroclínic, seguit del tros de la varietat invariant del punt periòdic hiperbòlic extern (el de període 19), des del punt heteroclínic fins al punt periòdic, les corbes invariants *hauran de creuar-la*. Això és *impossible a causa de la invariància*. De fet, es conclou que no poden existir corbes invariants amb número de rotació en l'interval $(3/19, 4/25)$. Així, el mecanisme geomètric responsable de la destrucció és l'existència de connexions heteroclíniques que obstrueixen les possibles corbes [21, 23].

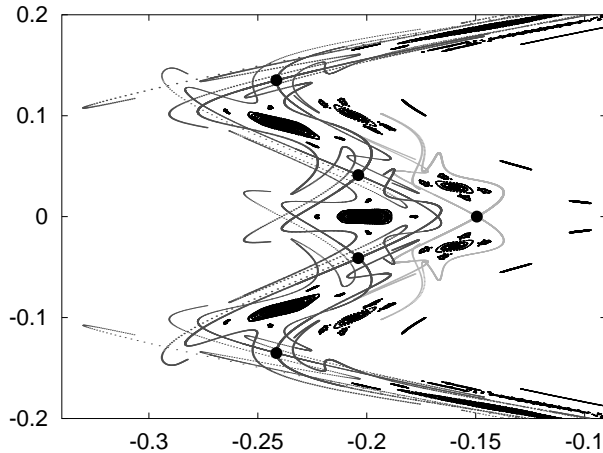


FIGURA 16: Una il·lustració del mecanisme de destrucció de corbes invariants per a $c = 0.63$. En negre: part de les dues cadenes d'illes de períodes 19 (la que interseca $y = 0$) i 25. En gris clar i en traç gruixut i prim es mostren les varietats estable i inestable, W_{25}^s i W_{25}^u , respectivament, d'una òrbita periòdica hiperbòlica de període 25. En gris fosc i traç gruixut i prim les varietats estable i inestable, W_{19}^s i W_{19}^u , respectivament, d'una òrbita periòdica hiperbòlica de període 19. Noteu que W_{25}^u i W_{19}^s (i, simètricament, W_{25}^s i W_{19}^u) tenen punts heteroclínic transversals. Això representa una obstrucció per a l'existència de les corbes invariants que podrien separar les cadenes d'illes. Vegeu els detalls en el text.

No és necessari que una connexió heteroclínica sigui transversal per impedir l'existència de corbes invariants. És suficient tenir *contacte tangencial*, és a dir, que les varietats estable i inestable relacionades siguin tangents. És bastant comú que, variant els paràmetres, dues varietats que estaven allunyades comencin a acostar-se fins que són tangents i, després, esdevinguin transversals, amb la qual cosa es creen punts homoclínics o heteroclínics. Algunes òrbites periòdiques es poden crear *prop de la tangència* i, en particular, poden ser de tipus el·líptic i donar lloc a illes periòdiques. De nou, el model per entendre el comportament prop de la tangència és l'aplicació d'Hénon. Un examen detallat del procés revela que, per a aplicacions analítiques, els punts homoclínics ja existien abans de la tangència, però pertanyien a l'*espai de fase complex*. Això comporta considerar l'aplicació d'Hénon (o d'altres aplicacions analítiques) no a \mathbb{R}^2 sinó a \mathbb{C}^2 . En el moment de tangència, aquests punts simplement *aterren als reals* [15].

Com es comentarà a la secció 8, per a $c \approx 0.6204$ ja no hi ha corbes invariants envoltant les illes de període 6. En particular, s'han destruït les corbes entre les illes de període 19 i 25 de la figura 16. Però només comencem a veure connexions heteroclíniques en la figura per a $c = 0.63$. Gràfics semblants per a $c = 0.625$ o $c = 0.628$, per exemple, no evidencien l'existència de punts heteroclínics. Les raons d'això són simples:

- a) La longitud d'arc de les varietats de la figura 16 és curta. Si es representen parts similars de les varietats per a $c = 0.628$, la varietat en traç gris clar gruixut no toca la de traç gris fosc i prim, ni la varietat en gris clar i prim no toca la representada en traç gris fosc gruixut (a causa de la simetria). Però parts més llargues de les varietats s'intersequen. En particular, hi ha arcs de la varietat invariant que s'escapen a l'infinit (per iteració de F_c per a W^u i de F_c^{-1} per a W^s).
- b) Entre les cadenes d'illes mostrades a la figura 16 hi ha moltes altres òrbites periòdiques hiperbòliques (de fet, una infinitat). Així és possible trobar una *cadena de connexions heteroclíniques* entre algunes d'aquestes òrbites, que proporciona l'obstrucció desitjada. Al seu torn això implica l'existència de connexions heteroclíniques entre les òrbites de períodes 19 i 25.

Sigui com sigui, hi ha objectes invariants amb número de rotació en l'interval mencionat prèviament. S'ha demostrat que aquests objectes estan *fora* de les varietats de l'òrbita periòdica hiperbòlica amb $\rho = 4/25$ i *dins* de les varietats de l'òrbita periòdica hiperbòlica amb $\rho = 3/19$. Les connexions heteroclíniques d'aquestes varietats creen *forats* que *hi impedeixen l'existència de punts de l'objecte invariant*. Com a conseqüència d'això, aquest objecte és un *conjunt de Cantor* [17, 18, 22] i està demostrat que té *mesura zero*.

Per tant, els punts amb dinàmica caòtica que estaven confinats quan la corba invariant encara existia, es poden escapar quan la corba ha estat destruïda i és substituïda per un conjunt de Cantor. No obstant això, si els forats d'aquest conjunt són relativament petits, serà necessari un *temps llarg* perquè els iterats trobin la manera d'escapar-se. Això es veurà en la secció 8.

7 Mesurant la quantitat de caos: exponents de Lyapunov i entropia

Per estudiar les propietats d'estabilitat lineal d'un punt fix o d'un punt en una òrbita periòdica de període k , que denotarem z^* , per una aplicació F , cal calcular simplement $DF(z^*)$ o $DF^k(z^*)$ i mirar els valors propis, tal com s'ha descrit a la secció 1. La qüestió és com procedir per a *òrbites generals*, com les que tenim en el cas de punts en corbes invariants o amb dinàmica caòtica.

La idea bàsica és fer servir la *mitjana de la taxa de creixement de la distància* entre els punts de l'òrbita i els d'una òrbita arbitràriament propera [5]. En general, podem considerar que l'aplicació F actua en una varietat Σ . Sigui $z \in \Sigma$ un punt inicial i ξ un vector en l'espai tangent a Σ en z : $T_z\Sigma$. A més, suposem que ξ té norma igual a 1. Aleshores calculem $DF^m(z)(\xi)$ i mirem la taxa de creixement del logaritme de la norma per tal de definir el número

$$\Lambda(z, \xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \log |DF^m(z)(\xi)|, \quad (8)$$

que es coneix per *l'exponent de Lyapunov* de z en la direcció de ξ . S'ha demostrat que el límit existeix per a gairebé tot $\xi \in T_z\Sigma$ i per a gairebé tot $z \in \Sigma$. El valor

màxim de $\Lambda(z, \xi)$ quan ξ varia en el fibrat tangent unitari a $T_z\Sigma$ es coneix per l'exponent de Lyapunov maximal del punt $x: \Lambda(z)$. Per a gairebé tot $\xi \in T_z\Sigma$ es té convergència cap a $\Lambda(z)$.

Per obtenir una estimació de $\Lambda(z)$ s'han de reescalar els vectors $DF^m(z)(\xi)$ (altrament la norma podria créixer massa) i usar diferents estratègies per tal de poder confiar en l'estimació [31, 16]. Per a òrbites en una corba invariant amb ρ irracional (aquestes òrbites són denses) el valor de $\Lambda(z)$ és zero, mentre que les òrbites amb dinàmica caòtica donen, genèricament, valors positius de $\Lambda(z)$. Hi ha òrbites caòtiques que donen $\Lambda(z) = 0$, però són bastant excepcionals [9].

Tornant a l'APM quadràtica F_c , hem calculat l'exponent de Lyapunov maximal per a molts valors de c i una xarxa fina de punts. Una separació típica en les coordenades x i y en la xarxa és 0.0005. En molts dels casos primer calculem un transitori de 10^6 iterats abans de començar a calcular $\Lambda(z)$. D'aquesta manera detectem molts dels punts que s'escapen. S'ha utilitzat també un valor de $m = 10^6$ a (8) per obtenir una estimació de $\Lambda(z)$. Si el valor obtingut és menor que 2×10^{-5} , l'òrbita de z és considerada regular. Altrament, és considerada caòtica. En aquest últim cas, continuem fent iteracions addicionals (fins a un total de 10^8 i en alguns casos fins a 10^{10}) per comprovar si podem considerar el caos confinat o si l'òrbita de z finalment s'escapa. Alguns resultats s'il·lustren en la secció 8.

Una indicació global de les propietats regulars o caòtiques del sistema ens la dona l'entropia mètrica $h_m(F)$. Hi ha diverses maneres equivalents de definir-la, però la més simple d'implementar és la integral de l'exponent de Lyapunov en el conjunt d'òrbites acotades; vegeu [16]. Ens diu com és de caòtica l'aplicació globalment.

8 Canvis en la mesura del conjunt de punts que no s'escapen

El gràfic de la mesura $\mu(c)$ del conjunt d'òrbites acotades en funció de c per l'aplicació F_c , donada per (4), és bastant instructiu. Cal destacar que hi ha molts altres models conservatius més generals (p. ex. sistemes hamiltonians amb 2 o 3 graus de llibertat, com el problema restringit de tres cossos, o ones viatgeres d'algunes EDP, com el sistema de Michelson [32, 6]) que tenen moltes característiques en comú amb les que usem per a il·lustrar el cas de l'aplicació d'Hénon conservativa.

A més, per a APM en una varietat 2D, cada vegada que es produeix una tangència homoclínica (és a dir, per a algun punt fix o òrbita periòdica, W^u i W^s tenen tangència) un estudi local prop de la tangència proporciona aplicacions similars a la d'Hénon amb propietats globals semblants, tal com s'ha esmentat a la secció 6.

A la figura 17 es representa la mesura $\mu(c)$ del conjunt d'òrbites acotades en funció de c , i una ampliació d'aquesta figura. Noteu els decreixements bruscos de la mesura per a alguns valors de c . De dreta a esquerra, es pot veure un primer decreixement prop de $c = 1.5$. Per a aquest valor del paràmetre el punt el·líptic té valors propis $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$ i és (dèbilment) inestable. No existeixen

corbes invariants que l'envolten. L'àrea petita confinada per a $c = 1.5$ és deguda a l'existència d'illes diminutes de període 3. A continuació veiem una seqüència de canvis bruscos de $\mu(c)$ que corresponen a la destrucció de totes les corbes invariants que envolten les illes de períodes 4, 5, 6, etc.

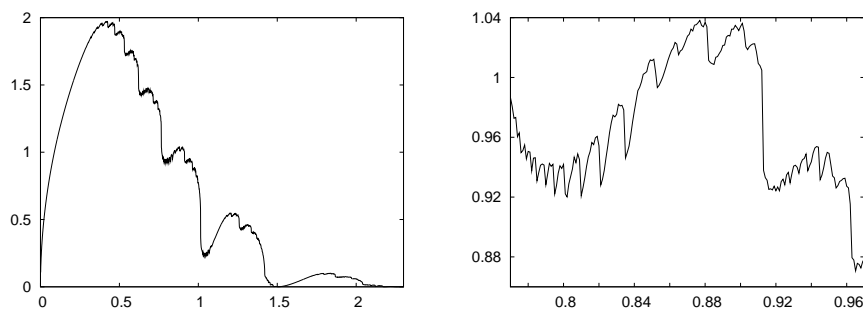


FIGURA 17: A l'esquerra: mesura $\mu(c)$ del conjunt de punts confinats en funció de c . A la dreta: una ampliació en el rang $c \in [0.77, 0.97]$ per donar evidència de les propietats d'autosimilitud d'aquesta mesura.

L'ampliació que es mostra a la dreta de la figura 17 dóna una forta evidència del que passa a les illes de període més alt i il·lustra les propietats d'autosimilitud de $\mu(c)$. Per exemple, el gran salt a prop de $c = 0.91$ es correspon al trencament de les corbes invariants que envolten les illes de número de rotació $2/9$ (compareu-ho amb el domini superior gris fosc de la figura 7), mentre que el salt que s'observa poc després de $c = 0.96$ correspon al trencament de les corbes invariants que envolten les illes de número de rotació $3/13$. No és difícil identificar tots els salts que es veuen en aquestes gràfiques. Com que hi ha salts de $\mu(c)$ per a cada petit canvi de c , es té una evidència que és una funció totalment discontinua.

Es proposa fer un cop d'ull a la *movie3* que trobareu a <http://www.maia.ub.es/dsg/QuadraticAPM> per veure els canvis no només de la mesura, sinó també de la forma del conjunt d'òrbites acotades.

Entre els punts amb òrbita acotada n'hi ha, no obstant això, alguns que mostren un comportament caòtic. L'exponent de Lyapunov ens permet detectar-los. Una qüestió natural és, per tant, saber com varia la mesura d'aquest conjunt respecte al valor de c . Aquesta variació s'il·lustra en la figura 18. El gràfic mostra un canvi bastant brusco en el comportament. Calia esperar això atesa la infinitud de cadenes d'illes en el sistema (n'hi ha per a cada $\rho \in \mathbb{Q} \cap (0, 1/2]$). Cada cadena d'illes té una òrbita periòdica hiperbòlica associada que genera una certa quantitat de caos, el qual està confinat fins que les corbes invariants que envolten aquestes òrbites caòtiques es destrueixen. Tot i que els càlculs que s'il·lustren en la figura 18 han estat realitzats amb un pas de 10^{-3} en c , una exploració detallada de les dades ens permet detectar alguns centenars de pics.

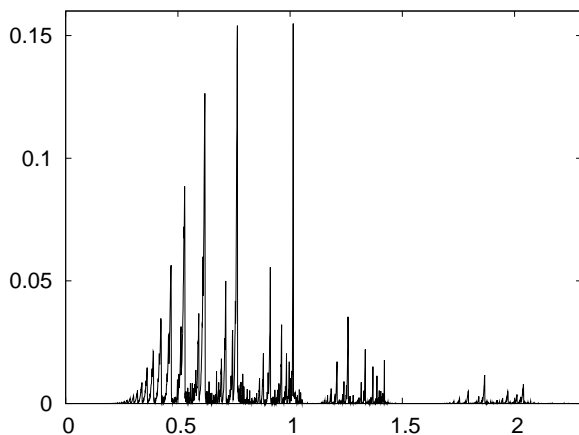


FIGURA 18: Mesura del conjunt de punts confinats amb dinàmica caòtica en funció de c .

A la figura 19 se'n mostren tres ampliacions. Es corresponen amb el que passa després del trencament de les corbes invariants que envolten les illes de període 6, 5 i 4, respectivament. Per ara, no considerem els petits salts d'aquestes corbes, només una mena de mitjana. El gràfic de l'esquerra és conseqüència del canvi de mida de la zona caòtica creada pels punts homoclínic associats a l'òrbita periòdica hiperbòlica de període 6. Però aquesta òrbita neix per a $c = 0.5$. Així doncs, per què costa tant veure que la mida d'aquesta zona és rellevant? La resposta és similar a la discussió de la secció 5 sobre el canvi de la mida de l'angle d'escissió $\sigma(c)$ en funció de c . En aquest sentit, també ens referim a la figura 14, especialment al gràfic de dalt a l'esquerra.

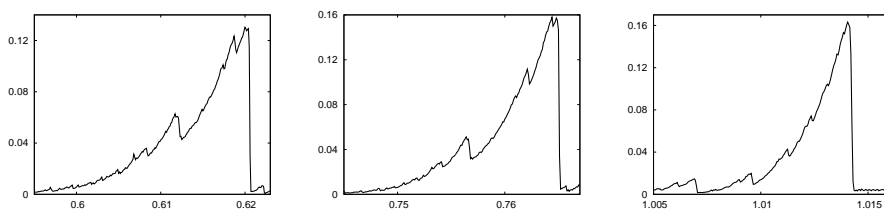


FIGURA 19: Ampliació de la figura 18 corresponent al trencament de les corbes invariants que envolten les illes de període 6 (esquerra), període 5 (centre) i període 4 (dreta).

Allí ens vam adonar que el canvi en c des del començament de l'existència d'un angle d'escissió no nul fins que aquest comença a ser visible era, com a mínim, igual a 0.2. A la figura 19, esquerra, la situació és similar. Tot i que

l'escissió de les varietats de les òrbites de període 6 comença a $c = 0.5$, només per a valors de c propers a 0.6 es torna visible. En els gràfics del centre i de la dreta de la figura 19 la situació és bastant similar. Volem destacar únicament que l'òrbita periòdica hiperbòlica de període 5 s'ha creat en $c = 1 - \cos(2\pi/5) \approx 0.690983$ i que la de període 4 s'ha creat en $c = 1$. Així, en aquests dos casos l'evolució de l'escissió respecte de c és més ràpida.

El salt que es veu en el gràfic de l'esquerra poc després de $c = 0.61$ es correspon exactament amb el mateix tipus de fenomen, però causat per l'òrbita periòdica de número de rotació $\rho = 3/19$. La mesura de la zona caòtica associada a aquesta òrbita periòdica s'ha d'afegir, d'alguna manera, a la zona caòtica més gran deguda a l'òrbita de període 6.

En el domini on es fa evident l'existència de caos es poden trobar illes diminutes. Una prova d'aquest fet usant arguments analítics i geomètrics es pot trobar a [33].

Un altre punt que volem il·lustrar és *com n'és de ràpid*, en funció de c , l'escapament dels punts d'una zona caòtica quan les corbes invariants que l'envolten s'han trencat. Sigui $c_{p/q}$ el *valor crític* per al qual es produeix el trencament de les corbes invariants envoltant les illes de número de rotació $\rho = p/q$. Aleshores, quan $c > c_{p/q}$, els punts de la zona caòtica associada es poden escapar. Però és clar que si $\Delta c = c - c_{p/q}$ és petit, els forats en els conjunts de Cantor que envolten la zona caòtica són *estrets* i serà necessari, per terme mitjà, un *nombre gran d'iterats* per tal que es produeixi l'escapament.

La figura 20 mostra exemples en aquest sentit. Els valors crítics aproximats per a les òrbites periòdiques de la figura són $c_{1/6} \approx 0.6204$, $c_{1/5} \approx 0.7649$ i $c_{1/4} \approx 1.0141$. Analitzem, per exemple, el gràfic de l'esquerra. Per a un valor com $c = 0.625$, la fracció de punts que romanen després de 10^5 iterats és relativament gran enfront d'aquells que ho fan després de 10^6 iterats. De fet, d'acord amb la figura, un 8 % més gran (corba en gris clar). Si ens fixem en aquells que romanen després de 10^6 iterats i els comparem amb aquells que ho fan després de 10^7 iterats, l'excés és de l'1 % aproximadament (corba grisa). Finalment, la mesura dels punts que romanen després de 10^7 iterats en comparació amb aquells que romanen després de 10^8 iterats és quasi negligible (corba negra). Això vol dir que una gran part dels punts en *òrbites caòtiques no confinades* s'escapen després de 10^6 iterats i n'hi ha molt pocs que requereixen més de 10^8 iterats per fer-ho.

Els valors canvien quan estudiem diversos valors de c . Per a un valor com $c = 0.63$ la majoria de punts ja s'escapen per 10^5 iterats, mentre que per a $c = 0.621$ gairebé no hi ha punts que s'escapin abans de 10^7 iterats i la majoria requereixen 10^8 iterats o més.

Si tornem a la figura 17 o 18, veurem que els salts són instantanis: o bé existeixen corbes invariants circumdants i no hi ha possibilitat d'escapament o bé no n'existeixen i tots els punts de la zona caòtica relacionada s'escapen. Notem, però, que les simulacions es duen a terme amb un nombre finit d'iteracions (que, com s'ha dit, varia entre 10^8 i 10^{10} iterats, depenent de la figura). Els resultats per a diferents períodes mostrats en els gràfics del centre i de

l'esquerra de la figura 20 són bastant similars. El mateix comportament s'ha d'esperar en la majoria de casos.

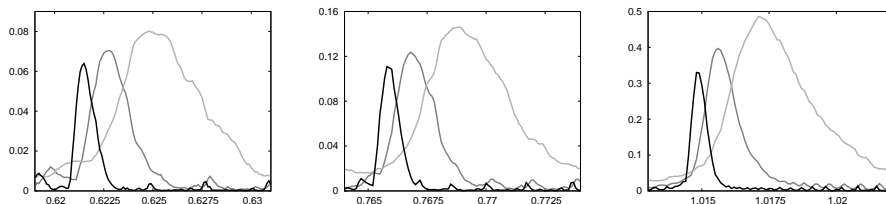


FIGURA 20: D'esquerra a dreta es mostren els resultats relatius a l'escapament de punts després de la destrucció de les corbes que confinen al voltant de les illes de períodes 6, 5 i 4, respectivament. Si M_n denota el conjunt de punts amb dinàmica caòtica que no s'han escapat després de n iterats, les corbes en gris clar, gris i negre mostren l'excés relatiu $M_{10^5}/M_{10^6} - 1$, $M_{10^6}/M_{10^7} - 1$ i $M_{10^7}/M_{10^8} - 1$, respectivament.

9 Alguns problemes oberts

El que sabem actualment sobre la dinàmica d'APM quadràtiques, i també sobre APM més generals, permet una comprensió bastant completa dels diferents tipus de comportament, els mecanismes geomètrics i les estimacions analítiques.

Tot i això encara hi ha alguns problemes clàssics que *romanen oberts*. A continuació en mencionem alguns, els quals són *lluny de ser elementals* i han resistit diversos intents fins ara.

- a) Les APM quadràtiques són un cas especial de les anomenades *aplicacions de Cremona*. Aquestes són aplicacions polinomials en qualsevol dimensió: $z \rightarrow T(z) \in \mathbb{R}^m$, on totes les components de T són polinomials amb grau maximal n . Suposem que el jacobí de T és constant: $\det(DT(z)) = a$, per a tot $z \in \mathbb{R}^m$, amb $a \neq 0$ un número real. No és restrictiu suposar que $a = 1$, altrament componem T amb una aplicació lineal adequada. L'anomenada *conjectura jacobiana* planteja la qüestió següent: és cert que l'aplicació inversa T^{-1} és també una aplicació polinomial? El grau de T^{-1} no ha de ser necessàriament el mateix que el grau de T .

Sabem que, per a aplicacions de Cremona quadràtiques, la resposta és sí, i la inversa també és quadràtica. Això és conseqüència del format de l'equació (4) i de l'existència del reversor S per a APM quadràtiques, que implica que la inversa de F_c és conjugada de F_c .

Aquesta conjectura ha estat demostrada per a grau 2 i hi ha resultats que redueixen el problema a demostrar-la en qualsevol dimensió per a aplicacions polinomials de grau 3. Hi ha altres resultats que fan referència a alguns casos especials, però el problema general resta obert.

- b) Hem vist que les òrbites periòdiques tenen un paper destacat en l'organització de la dinàmica d'APM quadràtiques i el mateix és cert per a APM generals.

Una antiga conjectura deguda a *Poincaré* és: considereu el conjunt d'òrbites acotades d'una APM. És cert que les òrbites periòdiques són denses en aquest conjunt?

- c) En les seccions 7 i 8 hem parlat de la mesura del conjunt de punts amb exponent de Lyapunov positiu i també de l'entropia mètrica, com a la integral de l'exponent de Lyapunov maximal. Tot i l'evidència numèrica hi ha una qüestió bàsica que resta oberta, que és coneguda amb el nom de *conjectura d'entropia mètrica positiva*. És l'entropia mètrica d'una APM no integrable estrictament positiva?

Una qüestió equivalent pot ser expressada de la manera següent. Considereu la varietat invariant estable o la inestable d'un punt fix o periòdic z^* . És la mesura de Lebesgue de la clausura d'aquesta varietat estrictament positiva?

- d) En la secció 4 s'han fet alguns comentaris sobre els nombres diofàntics i les propietats *òptimes* de la proporció àuria g . Les (C, τ) -DC es poden expressar com $|qy - p| > C/q^{\tau-1}$ per a qualsevol $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$, $q \neq 0$.

Passem a *dimensió superior*. Siguin $n > 1$ i $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$. Diem que el vector ω satisfà una (C, τ) -DC si $|\sum_{i=1}^n \omega_i k_i - k_0| > C/(||k||_2)^{\tau-1}$, per a qualsevol $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, on $||k||_2$ és la norma euclidiana, que suposem positiva, i per a tot $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Per a $n > 1$ donat, quin és el vector *òptim*, en el mateix sentit que hem usat per a g ?

Un altre problema bastant general apareix en les perspectives de la secció següent.

10 Perspectives i conclusions

Les aplicacions quadràtiques que preserven l'àrea, tot i ser la primera extensió del cas lineal a ser considerada, mostren una *dinàmica extremament rica*.

Les eines analítiques, geomètriques i topològiques ens permeten tenir una *bona comprensió de la dinàmica* i trobar explicacions per a (quasi) tots els fets numèricament observats.

Alguns aspectes requereixen encara una combinació d'eines analítiques i numèriques, com ara la predicció de quan es trencaran les diferents corbes invariants o bé la predicció de propietats estadístiques globals.

A més, l'estudi del cas quadràtic pot ser considerat un *paradigma* que es pot usar per descriure les propietats d'APM més generals.

Una pregunta clau és què succeeix quan *augmentem la dimensió*. Les *aplicacions simplèctiques* són generalitzacions naturals d'APM en varietats de dimensió parell (diguem dimensió $2n$). Suposem que usem coordenades locals $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ i considerem la 2-forma

$\omega = dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2 + \dots + dx_n \wedge dy_n$. Una aplicació simplèctica és una transformació que preserva ω . És clar que si $n = 1$ la forma no és res més que l'element d'àrea. Aquestes transformacions apareixen de manera natural com a aplicacions de Poincaré en sistemes hamiltonians amb $n + 1$ graus de llibertat.

Què es pot dir de la dinàmica de les aplicacions simplèctiques? Hi ha diversos resultats parcials, com ara l'existència de tors invariants n -dimensionals (que generalitzen les corbes invariants que trobem en APM). Resultats semblants han estat demostrats per als sistemes hamiltonians propers a un sistema integrable, un tema estudiat per la *teoria KAM* (vegeu, per exemple, [2]). L'últim problema obert dels mencionats abans està relacionat amb les propietats del tor invariant *més persistent*. Però, fins i tot per al cas $n = 2$, encara no es disposa d'una bona descripció de les propietats globals de la dinàmica. Això podria ser un bon tema d'investigació per als propers anys.

Agraïments

La recerca de l'autor ha estat finançada al llarg dels anys per subvencions europees, espanyoles i catalanes. L'autor agraeix profundament la contribució de múltiples col·laboradors a l'hora de clarificar diversos temes. En particular, N. Miguel i A. Vieiro, amb qui col·labora en la mateixa àrea d'estudi. S'han usat les facilitats computacionals del Grup de Sistemes Dinàmics de la Universitat de Barcelona per a les il·lustracions numèriques presentades en aquestes notes. Es vol agrair també el treball eficient de J. Timoneda com a administrador del clúster.

Referències

- [1] ARNOLD, V. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Moscou: Éditions Mir, 1976. [Traduït del rus per Djilali Embarek]
- [2] ARNOLD, V. I.; AVEZ, A. *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*. París: Gauthier-Villars, 1967. (Monographies Internationales de Mathématiques Modernes; 9)
- [3] BATUT, C.; BELABAS, K.; BERNARDI, D.; COHEN, H.; OLIVIER, M. *Users' guide to PARI/GP*. <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>.
- [4] BROER, H.; ROUSSARIE, R.; SIMÓ, C. «Invariant circles in the Bogdanov-Takens bifurcation for diffeomorphisms». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 16 (6) (1996), 1147-1172.
- [5] CINCOTTA, P. M.; GIORDANO, C. M.; SIMÓ, C. «Phase space structure of multi-dimensional systems by means of the mean exponential growth factor of nearby orbits». *Phys. D*, 182 (3-4) (2003), 151-178.
- [6] DUMORTIER, F.; IBÁÑEZ, S.; KOKUBU, H.; SIMÓ, C. «About the unfolding of a Hopf-zero singularity». *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 33 (10) (2013), 4435-4471.
- [7] FONTICH, E.; SIMÓ, C. «Invariant manifolds for near identity differentiable maps and splitting of separatrices». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10 (2) (1990), 319-346.

- [8] FONTICH, E.; SIMÓ, C. «The splitting of separatrices for analytic diffeomorphisms». *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10 (2) (1990), 295-318.
- [9] GARRIDO, L.; SIMÓ, C. «Some ideas about strange attractors». A: *Dynamical systems and chaos*. Berlín; Nova York: Springer, 1983, 1-28. (Lecture Notes in Phys.; 179)
- [10] GELFREICH, V.; SIMÓ, C. «High-precision computations of divergent asymptotic series and homoclinic phenomena». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10 (2-3) (2008), 511-536.
- [11] GÓMEZ, G.; MONDELO, J. M.; SIMÓ, C. «A collocation method for the numerical Fourier analysis of quasi-periodic functions. I. Numerical tests and examples». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14 (1) (2010), 41-74.
- [12] GÓMEZ, G.; MONDELO, J. M.; SIMÓ, C. «A collocation method for the numerical Fourier analysis of quasi-periodic functions. II. Analytical error estimates». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 14 (1) (2010), 75-109.
- [13] HÉNON, M. «Numerical study of quadratic area-preserving mappings». *Quart. Appl. Math.*, 27 (1969), 291-312.
- [14] HÉNON, M. «A two-dimensional mapping with a strange attractor». *Comm. Math. Phys.*, 50 (1) (1976), 69-77.
- [15] LAZUTKIN, V. F.; SIMÓ, C. «Homoclinic orbits in the complex domain». *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 7 (2) (1997), 253-274.
- [16] LEDRAPPIER, F.; SHUB, M.; SIMÓ, C.; WILKINSON, A. «Random versus deterministic exponents in a rich family of diffeomorphisms». *J. Statist. Phys.*, 113 (1-2) (2003), 85-149.
- [17] MATHER, J. N. «Minimal measures». *Comment. Math. Helv.*, 64 (3) (1989), 375-394.
- [18] MATHER, J. N. «Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems». *Math. Z.*, 207 (2) (1991), 169-207.
- [19] MIGUEL, N.; SIMÓ, C.; VIEIRO, A. «From the Hénon conservative map to the Chirikov standard map for large parameter values». *Regul. Chaotic Dyn.*, 18 (5) (2013), 469-489.
- [20] NEĪSHTADT, A. I. «The separation of motions in systems with rapidly rotating phase». *J. Appl. Math. Mech.*, 48 (2) (1984), 133-139 (1985). [Traduït del rus de *Prikl. Mat. Mekh.*, 48 (2) (1984), 197-204]
- [21] OLVERA, A.; SIMÓ, C. «An obstruction method for the destruction of invariant curves». *Phys. D*, 26 (1-3) (1987), 181-192.
- [22] OLVERA, A.; SIMÓ, C. «The dynamics near invariant Cantorian sets of perturbed twist maps». A: VELARDE, M. G. (ed). *Synergetics, order and chaos*. Teaneck, Nova Jersey: World Sci. Publ., 1988, 698-705.
- [23] OLVERA, A.; SIMÓ, C. «Elliptic non-Birkhoff periodic orbits in the twist maps». *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 3 (1) (1993), 165-185.

- [24] SÁNCHEZ, J.; NET, M.; SIMÓ, C. «Computation of invariant tori by Newton-Krylov methods in large-scale dissipative systems». *Phys. D*, 239 (3-4) (2010), 123-133.
- [25] SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. *Lectures on celestial mechanics*. Nova York-Heidelberg: Springer-Verlag, 1971. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 187)
- [26] SIMÓ, C. «An overall view on conservative maps of the plane». A: ALSINA, C. *et al.* (ed). *European Conference on Iteration Theory*. Teaneck, Nova Jersey: World Sci. Publ., 1989, 56-73.
- [27] SIMÓ, C. «Analytical and numerical computation of invariant manifolds». A: BENEST, D.; FROESCHLÉ, C. (ed). *Modern methods in celestial mechanics*. Gif-sur-Yvette: Editions Frontières, 1990, 285-330.
- [28] SIMÓ, C. «Averaging under fast quasiperiodic forcing». A: *Hamiltonian mechanics*. Nova York: Plenum, 1994, 13-34. (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys.; 331)
- [29] SIMÓ, C. «Invariant curves of analytic perturbed nontwist area preserving maps». *Regul. Chaotic Dyn.*, 3 (3) (1998), 180-195.
- [30] SIMÓ, C. «Analytical and numerical detection of exponentially small phenomena». A: *Proceedings of the conference, Equadiff '99*. Singapur: World Scientific, 2000, 967-976.
- [31] SIMÓ, C. «Global dynamics and fast indicators». A. *Global analysis of dynamical systems*. Bristol: Inst. Phys., 2001, 373-389.
- [32] SIMÓ, C. «Some properties of the global behaviour of conservative low-dimensional systems». A: *Foundations of computational mathematics*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009, 162-189. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; 363)
- [33] SIMÓ, C.; TRESCHEV, D. «Stability islands in the vicinity of separatrices of near-integrable symplectic maps». *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 10 (2-3) (2008), 681-698.
- [34] SIMÓ, C.; VIEIRO, A. «Resonant zones, inner and outer splittings in generic and low order resonances of area preserving maps». *Nonlinearity*, 22 (5) (2009), 1191-1245.
- [35] SIMÓ, C.; VIEIRO, A. «Dynamics in chaotic zones of area preserving maps: close to separatrix and global instability zones». *Phys. D*, 240 (8) (2011), 732-753.