Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 28, núm. 2, 2013. Pàg. 147–181. DOI: 10.2436/20.2002.01.50

Un curs accelerat d'acceleració còsmica

Joan Girbau

Recordo una nit, a l'altra banda del Pirineu, en «aquelles mountines que tan hautes sount», que sortí de la fosca una nena que captava amb veu de fada. Vaig demanar-li que me digués quelcom en la seva llengua pròpia i ella, tota admirada, signà el cel estrellat, i feu només així: «*Lis esteles*...».

Joan Maragall (1860–1911)

Resum: L'objectiu d'aquest article és presentar detalladament els models de Friedmann-Robertson-Walker amb constant cosmològica (dintre del marc de la relativitat general) per tal d'explicar l'expansió accelerada de l'univers. Es posa especial èmfasi en els procediments per a calcular els diversos paràmetres teòrics dels models a partir d'observacions de supernoves de tipus Ia.

Paraules clau: models cosmològics de Robertson-Walker, constant cosmològica, equacions de Friedmann, expansió accelerada de l'univers.

Classificació MSC2010: 83F05, 83C15.

1 Introducció

El Premi Nobel de Física del 2011 va ser concedit a Saul Perlmutter, Adam G. Riess i Brian P. Schmidt «per haver descobert l'expansió accelerada de l'univers mitjançant l'observació de supernoves distants».

Una supernova és una estrella que al final del seu cicle vital explota per collapse gravitatori i produeix una llum molt intensa que pot ser observada a grans distàncies. A la dècada dels 1990, dos equips independents, un d'ells liderat per Saul Perlmutter i l'altre encapçalat per Adam G. Riess i Brian P. Schmidt, van observar supernoves situades en galàxies molt distants (a més de sis mil milions d'anys llum) i van poder mesurar amb una certa fiabilitat les distàncies entre aquestes galàxies i la nostra ([11], [12] i [13]). Les seves observacions proven que l'univers s'expandeix acceleradament. La teoria física que explica aquest fet d'una manera més senzilla és la dels models cosmològics de Friedmann-Robertson-Walker amb constant cosmològica, dintre del marc de la relativitat general.

L'any 1905, Einstein va introduir la relativitat especial ([1] i [2]). Però el seu plantejament deixava la gravitació fora del camp d'estudi de la teoria. De fet, Einstein mateix va necessitar onze anys per a trobar la manera d'incloure-hi els fenòmens gravitatoris, i això va donar lloc a la relativitat general, presentada el 1916 [3]. Per arribar a aquesta fita va ser necessari, però, que Hermann Minkowski descobrís el 1908 [9] que les transformacions de Lorentz que són a la base de la relativitat especial són isometries de $\mathbb{R}^4$ respecte a un producte escalar que avui es coneix amb el seu nom. Aquest fet permetia interpretar tots els fenòmens de la relativitat especial des d'un punt de vista geomètric, a $\mathbb{R}^4$. Aprofitant aquest punt de vista, Einstein, que ja s'havia adonat que la força gravitatòria associada a la matèria no és un concepte físic intrínsec, sinó que és fruit d'una elecció particular dels sistemes de coordenades, va ser capaç de formular d'una manera precisa la teoria que explica el comportament dels camps gravitatoris. Va descobrir que un tal camp no fa altra cosa que deformar la mètrica de l'espaitemps, que deixa de ser la de Minkowski i passa a ser una determinada mètrica de Lorentz. L'equació (en derivades parcials) que relaciona la matèria que crea el camp gravitatori amb aquesta mètrica de Lorentz es coneix amb el nom d'equació d'Einstein de la gravitació (equació que substitueix la famosa llei de Newton dins el marc de la relativitat).

Un any després d'haver introduït la relativitat general, Einstein va publicar un article que obria la porta a la cosmologia moderna [4], en el qual presentava un univers esfèric (una esfera de tres dimensions, S^3), estàtic, que havia existit sempre i que sempre existiria. Però un tal univers era incompatible amb l'equació del camp gravitatori que ell mateix havia introduït un any abans. Perquè la relativitat general pogués incloure aquest univers estàtic, va haver de canviar la seva equació de gravitació, afegint-hi una constant, que va anomenar *constant cosmològica* i que va designar per Λ (l'equació de gravitació amb aquesta constant és l'equació (1) del present article).

Tanmateix, a la dècada dels anys 1920, les observacions astronòmiques de Hubble van establir sense cap mena de dubte que l'univers s'expansionava i, per tant, l'univers estàtic d'Einstein deixava de tenir sentit i, com a conseqüència, no calia considerar la constant cosmològica dintre de l'equació de gravitació. Però, recentment, la situació ha canviat amb el descobriment de l'expansió accelerada de l'univers, i la constant cosmològica torna a ser clau per a l'explicació d'aquesta nova realitat.

El present article està pensat com un curs accelerat de cosmologia relativista i té com a objectiu donar compte detallat de la teoria subjacent i de la manera com poden ser calculats els paràmetres cosmològics a través d'observacions astronòmiques. Si bé tot el seu contingut es pot trobar en articles recents i en llibres de text, la redacció que aquí s'ofereix presenta els conceptes des del començament i dóna demostracions detallades de les fórmules fonamentals, amb un llenguatge unificat.

La seva redacció pressuposa del lector uns certs coneixements bàsics de geometria riemanniana i de relativitat general. Els matemàtics que no coneguin gaire bé la relativitat general i es vulguin familiaritzar d'una manera ràpida amb aquesta teoria, poden acudir a [5] o [6], i si volen profunditzar una mica més en la matèria, [15] els pot ser de molta utilitat. Qui vulgui ampliar coneixements sobre cosmologia relativista pot acudir als textos bàsics [7], [10] o [14].

2 Models d'univers de Robertson-Walker

Dins el marc de la relativitat general, la física de qualsevol sistema que actua sota l'acció d'un camp gravitatori es representa sempre en una certa varietat de Lorentz $(V, \tilde{g})$, dotada d'un camp tensorial covariant T, d'ordre 2, simètric, que descriu la matèria responsable del camp gravitatori. Aquest tensor T, que s'anomena tensor d'impulsió-energia, està relacionat amb la mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ per les equacions (d'Einstein) següents:

$$\begin{cases} \operatorname{Ric}(\tilde{g}) - \dfrac{1}{2}R(\tilde{g})\tilde{g} + \dfrac{\Lambda}{c^2}\tilde{g} = \dfrac{8\pi G}{c^2}T \\ \operatorname{div}_{\tilde{g}} T = 0, \end{cases} \tag{1}$$

on $\operatorname{Ric}(\tilde{g})$ designa el tensor de Ricci de la mètrica $\tilde{g}$, $R(\tilde{g})$ designa la seva curvatura escalar, Λ és una certa constant anomenada constant cosmològica, G és la constant de gravitació de Newton i c la velocitat de la llum.

Observació. Les notacions referides a aquesta constant que es poden trobar a la literatura són una mica confuses. Si a l'equació (1) fem el canvi de constant $\Lambda = c^2\Lambda'$, el terme que conté Λ s'escriu $\Lambda'\tilde{g}$ (sense el denominador c^2). Alguns textos utilitzen la constant $c^2\Lambda$ en lloc de la Λ que s'utilitza aquí, i la designen també amb el símbol Λ. Segons la definició que es prengui, hi haurà, doncs, petites diferències (d'un factor c^2) en els termes de les fórmules que continguin la constant cosmològica. Com que la major part de literatura usa unitats per a les quals $c = 1$, aquestes diferències no es posen de manifest.

La massaenergia present a l'univers prové, d'una banda, de la massa de les diverses galàxies, i d'altra banda de l'energia de diversos tipus de radiació (microones de la famosa radiació còsmica de fons, tota mena de radiació lumínica, raigs X, raigs γ, etc.). Hauríem de dir aquí que l'energia de la radiació lumínica de la totalitat de galàxies és gairebé negligible en comparació amb l'energia de la radiació còsmica de fons, coneguda com a Cosmic Microwave Background (CMB), descoberta per Penzias i Wilson el 1965 i que procedeix del Big Bang. Al principi, l'univers era molt dens i molt calent. A aquelles temperatures tan altes, la matèria estava completament ionitzada i els electrons lliures, en un medi tan dens, feien que l'univers fos completament opac. Però un cos opac i molt calent produeix la coneguda radiació del cos negre. Quan l'univers es va anar expandint, es va anar refredant i, en arribar a temperatures inferiors als 3.000 K, els ions i els electrons lliures es van combinar per a formar àtoms neutres. Així, doncs, quan el nombre d'electrons lliures va disminuir d'una manera significativa i l'univers es va tornar «transparent», els fotons de la radiació del cos negre van poder circular lliurement, i això constitueix la radiació còsmica de fons.

El tensor d'impulsió-energia, T, de tots aquests constituents (matèria de les galàxies i radiació) se suposa descompost en dos:

$$T = T_m + T_{\mathrm{rad}},$$

on T_m és el que correspon a la massa de les galàxies i T_{rad} a la radiació, i se suposa que cada un d'ells, independentment, té divergència nul·la. Aquesta hipòtesi, des d'un punt de vista físic, s'ha d'interpretar en el sentit que la matèria i la radiació no interaccionen. També se suposa que cada un d'aquests dos tensors d'impulsió-energia correspon a un fluid perfecte. En el cas del primer tensor, el fluid s'ha de pensar format per galàxies (sent cada galàxia una partícula del fluid). D'aquesta manera, es renuncia a explicar els esdeveniments que tenen lloc a l'interior de cada galàxia, en concret.

Recordem ara que el tensor d'impulsió-energia d'un fluid perfecte és un camp tensorial dues vegades covariant i simètric sobre la varietat de Lorentz $(V, \tilde{g})$ que descriu la física del sistema considerat, que té la forma:

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\omega_u \otimes \omega_u + \frac{p}{c^2}\tilde{g}, \tag{2}$$

on ω_u designa la forma diferencial de grau 1 associada, a través de la mètrica $\tilde{g}$, al camp vectorial $\vec{u}$ de 4-velocitats del fluid, el qual compleix $\tilde{g}(\vec{u}, \vec{u}) = -c^2$. Les funcions ρ i p que apareixen a (2) s'anomenen, respectivament, densitat i pressió. Per tant, els tensors T_m i T_{rad} seran de la forma (2).

La varietat de Lorentz $(V, \tilde{g})$ que Robertson i Walker van proposar per a descriure el comportament de l'univers al llarg de tota la seva història és molt senzilla. V és un producte $V = M \times I$, on I és un cert interval obert de $\mathbb{R}$, (M, g) és una varietat de Riemann de dimensió 3, simplement connexa, de curvatura constant $k = +1, 0, -1$ (és a dir, M és una de les tres varietats següents: S^3, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{H}_3$), i la mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ sobre V és de la forma

$$\tilde{g} = -c^2\,dt^2 + a(t)^2\pi^*(g), \tag{3}$$

on π és la projecció canònica $M \times I \to M$, t és la coordenada canònica de $I \subset \mathbb{R}$ i $a(t)$ és una certa funció de t, positiva. Per a cada $p \in M$ la corba vertical $t \to \gamma_p(t) = (p, t)$ representa la vida de la galàxia corresponent a $p \in M$. Es pot comprovar que $\gamma_p(t)$ és geodèsica i que $\tilde{g}(d\gamma_p(t)/dt, d\gamma_p(t)/dt) = -c^2$, per tant, t és el temps propi d'aquesta galàxia. Fixeu-vos, doncs, que t és un temps propi comú a totes les galàxies (temps galàctic). En cada instant d'aquest temps, $t = t_0$, la subvarietat $M_{t_0} = M \times \{t_0\} \subset V$ representa l'espai (de tres dimensions) comú a totes les galàxies en aquell instant. Com que la varietat (M, g) es pren de curvatura constant, les subvarietats M_{t_0} també ho seran. Per tant, l'espai comú a totes les galàxies en cada instant de temps galàctic té curvatura constant. Les varietats de curvatura constant són les que admeten un major nombre d'isometries. Concretament, en el cas de dimensió n, les isometries d'una varietat de curvatura constant es poden parametritzar per $n(n+1)/2$ paràmetres independents. Si $n = 3$, es poden parametritzar per 6 paràmetres independents (com passa a $\mathbb{R}^3$). Una de les conseqüències d'això és, per exemple, que, elegida una base ortonormal de l'espai tangent en un punt i una altra base ortonormal de l'espai tangent en un altre punt, existeix una isometria de tota la varietat M_{t_0} que transforma una base en l'altra (com passa a $\mathbb{R}^3$). En una varietat de curvatura constant, podríem dir, doncs, que «tots els punts i totes les direccions en cada punt juguen el mateix paper». O bé: «no hi ha cap punt ni cap direcció privilegiats».

Per a acabar de descriure el model hauríem d'afegir que el camp vectorial de V donat per $u = \partial/\partial t$ és el camp de velocitats dels tensors T_m i T_{rad}. Per tant, $\omega_u = -c^2\,dt$. Les funcions densitat i pressió d'aquests tensors seran designades per ρ_m, p_m, i per ρ_{rad} i p_{rad}. Tindrem, doncs, per exemple:

$$T_m = \frac{(-c^2)(-c^2)}{c^2}\left(\rho_m + \frac{p_m}{c^2}\right) dt\otimes dt + \frac{p_m}{c^2}\tilde{g} = (c^2\rho_m + p_m)\, dt\otimes dt + \frac{p_m}{c^2}\tilde{g}. \tag{4}$$

Per poder escriure la mètrica (3) de manera més explicita, ens convindria saber quina forma prenen les mètriques de S^3 i de $\mathbb{H}_3$ en coordenades polars geodèsiques.

3 Mètriques de S^2, S^3, H_2 i H_3 en coordenades polars geodèsiques

Per a fer més planera l'explicació, abans d'abordar el cas de dimensió 3 començarem per les mètriques de S^2 i de $\mathbb{H}_2$. Considerem l'esfera S^2 de $\mathbb{R}^3$ formada pels punts de coordenades (x_1, x_2, x_3) amb $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$. Parametritzem-la per la colatitud geogràfica φ i la longitud geogràfica λ de la manera següent:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi\cos\lambda \\ \sin\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Si designem per g el producte escalar usual de $\mathbb{R}^3$, un càlcul elemental mostra que

$$g(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\lambda) = \sum_{i=1}^{3}(\partial f_i/\partial\lambda)^2 = \sin^2\varphi.$$

Anàlogament,

$$g(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\varphi) = 0, \quad g(\partial\vec{f}/\partial\varphi, \partial\vec{f}/\partial\varphi) = 1.$$

Per tant, la mètrica de Riemann sobre S^2, en les coordenades (φ, λ) s'expressa

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sin^2\varphi \, d\lambda^2.$$

Aquestes coordenades són les coordenades polars geodèsiques d'origen al pol Nord, ja que la colatitud φ és la longitud geodèsica sobre qualsevol meridià. Recordeu que $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ i $0 \leq \varphi \leq \pi$. Observeu que aquestes coordenades són singulars quan $\varphi = 0$, perquè $\varphi = 0$ correspon al pol Nord per a qualsevol λ. A més, quan $\varphi = 0$, l'expressió anterior de la mètrica ds^2 esdevé singular (amb determinant de la matriu de coeficients nul). Tot això, però, si se sap i es té en compte, no resulta un inconvenient gaire greu.

El mateix que acabem de fer per a l'esfera S^2 ho volem tornar a repetir sobre l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}_2$. Ara bé, de l'espai hiperbòlic, n'hi ha molts models. El que millor s'adapta a la repetició dels càlculs anteriors és el model de l'hiperboloide que ara recordarem breument. Es considera el subconjunt $\mathbb{H}_2$ de $\mathbb{R}^3$ definit per

$$\mathbb{H}_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1,\ x_3 > 0\}.$$

O sigui, $\mathbb{H}_2$ és el full de dalt de l'hiperboloide de dos fulls definit per l'equació $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1$. S'agafa ara el producte escalar de Minkowski η de $\mathbb{R}^3$ donat per $\eta(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3$. La restricció d'aquest producte escalar a $\mathbb{H}_2$ converteix $\mathbb{H}_2$ en una varietat de Riemann de curvatura constant -1, que s'anomena model de l'hiperboloide del pla hiperbòlic. En aquest model es poden repetir d'una manera còmoda els càlculs que hem fet sobre l'esfera. Parametritzem l'hiperboloide per

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh\varphi \cos\lambda \\ \sinh\varphi \sin\lambda \\ \cosh\varphi \end{pmatrix}.$$

Es té:

$$\eta(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\lambda) = \sinh^2\varphi, \quad \eta(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\varphi) = 0, \quad \eta(\partial\vec{f}/\partial\varphi, \partial\vec{f}/\partial\varphi) = 1.$$

Per tant, la mètrica de Riemann sobre $\mathbb{H}^2$, en les coordenades (φ, λ), s'expressa

$$ds^2 = d\varphi^2 + \sinh^2\varphi \, d\lambda^2,$$

i aquestes coordenades són polars geodèsiques. Recordeu que aquí $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ i $0 \leq \varphi < +\infty$.

Repetim ara per a S^3 i $\mathbb{H}_3$ el que acabem de fer en dimensió 2. L'esfera S^3 de $\mathbb{R}^4$ està definida per $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Parametritzem-la de la manera següent:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\varphi \cos\lambda \\ \sin\psi \sin\varphi \sin\lambda \\ \sin\psi \cos\varphi \\ \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Aquí $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$. Repetint el que hem fet abans, tindrem:

$$\begin{array}{ll} g(\partial\vec{f}/\partial\psi, \partial\vec{f}/\partial\psi) = 1 & g(\partial\vec{f}/\partial\varphi, \partial\vec{f}/\partial\varphi) = \sin^2\psi \\ g(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\lambda) = \sin^2\psi\sin^2\varphi & g(\partial\vec{f}/\partial\varphi, \partial\vec{f}/\partial\psi) = 0 \\ g(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\psi) = 0 & g(\partial\vec{f}/\partial\lambda, \partial\vec{f}/\partial\varphi) = 0. \end{array}$$

Per tant, en aquestes coordenades, la mètrica s'expressa:

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\lambda^2), \tag{5}$$

que és la mètrica de S^3 en coordenades polars geodèsiques d'origen al pol Nord de S^3. Observeu que ψ és la distància geodèsica de qualsevol punt (ψ, φ, λ) al pol Nord. Justament per aquest fet resulta més intuïtiu designar per r la coordenada ψ. Per tant, escriurem la mètrica (5) de la manera següent:

$$ds^2 = dr^2 + \sin^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\lambda^2). \tag{6}$$

Tal com hem assenyalat abans (quan tractàvem de la mètrica de S^2), les coordenades polars geodèsiques deixen de ser «coordenades» en el punt corresponent a $r = 0$ (que és sempre el pol, independentment de φ i λ), en el qual l'expressió de ds^2 també resulta singular perquè el determinant de la matriu del seus coeficients s'anul·la.

Si volem fer el mateix amb l'espai hiperbòlic $\mathbb{H}_3$, haurem de considerar la parametrització de l'hiperboloide de $\mathbb{R}^4$ d'equació $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -1$, donada per

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh r \sin\varphi\cos\lambda \\ \sinh r\sin\varphi\sin\lambda \\ \sinh r\cos\varphi \\ \cosh r \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la restricció de la mètrica de Minkowski al full d'aquest hiperboloide donat per $x_4 > 0$ queda

$$ds^2 = dr^2 + \sinh^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\lambda^2). \tag{7}$$

Acabem recordant que la mètrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$ en coordenades polars geodèsiques (que en aquest cas es denominen esfèriques) s'expressa:

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\lambda^2). \tag{8}$$

4 Equacions d'Einstein dels models de Robertson-Walker

Estem ara en condicions d'escriure la mètrica (3) de Robertson-Walker d'una manera més explícita. Veiem-ho, per exemple, en el cas que la curvatura k de (M, g) sigui 1. Llavors, la mètrica g s'expressarà per (6) i la mètrica (3) tindrà la forma

$$\tilde{g} = -c^2\, dt^2 + a(t)^2(dr^2 + \sin^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\lambda^2)). \tag{9}$$

En els casos $k = 0$ i $k = -1$ obtindríem les expressions següents:

$$\tilde{g} = -c^2\,dt^2 + a(t)^2(dr^2 + r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\lambda^2)), \tag{10}$$

$$\tilde{g} = -c^2\,dt^2 + a(t)^2(dr^2 + \sinh^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\lambda^2)). \tag{11}$$

A vegades és útil englobar aquests tres casos en un de sol. Per a fer això només cal definir una funció, que anomenarem $\operatorname{sinn} r$, de la manera següent:

$$\operatorname{sinn} r = \begin{cases} \sin r & \text{si la curvartura } k \text{ de } M \text{ és } 1 \\ r & \text{si la curvartura } k \text{ de } M \text{ és } 0 \\ \sinh r & \text{si la curvartura } k \text{ de } M \text{ és } -1. \end{cases}$$

Amb aquesta notació podem escriure la mètrica $\tilde{g}$ de V d'una manera unificada:

$$\tilde{g} = c^2\,dt^2 + a(t)^2(dr^2 + \operatorname{sinn}^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\lambda^2)). \tag{12}$$

És costum designar per $t = t_0$ l'instant de temps galàctic corresponent a l'actualitat. En els models de curvatura $k \neq 0$, el valor de $a(t_0)$, que s'acostuma a designar per a_0, representa el radi de curvatura de l'espai actual, com veurem a continuació. L'espai actual és $M_{t_0} = M \times \{t_0\} \subset M \times I$, i la seva mètrica de Riemann és $a_0^2 g$. Suposem, per exemple, que la curvatura k val 1. Com que la mètrica g de M té curvatura 1, la mètrica $a_0^2 g$ tindrà curvatura $1/a_0^2$ i, per tant, radi de curvatura a_0. Això, que és general, es pot veure explícitament a partir de les expressions anteriors de les mètriques. Quan $k = 1$, per exemple, la mètrica $a_0^2 g$ és

$$a_0^2(dr^2 + \sin^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\lambda^2)).$$

Fent el canvi de variable $r' = a_0 r$, la mètrica anterior s'escriu

$$dr'^2 + a_0^2\sin^2(r'/a_0)(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\,d\lambda^2),$$

que és la mètrica de l'esfera de radi a_0 de $\mathbb{R}^4$ en coordenades polars geodèsiques.

Volem ara escriure les equacions d'Einstein (1) en el cas concret dels models de Robertson-Walker. Amb aquesta finalitat, el primer que haurem de fer és calcular el tensor de Ricci i la curvatura escalar de la mètrica de Lorentz corresponent. Aquests càlculs sempre són enutjosos i es poden fer d'una manera intel·ligent a partir de la definició (3) de la mètrica $\tilde{g}$ o bé (una altra opció gens menyspreable) a partir de la seva expressió explícita donada per (9), (10) o (11), fent servir qualsevol programa de càlcul formal. Nosaltres optarem per la primera via.

Abans, però, ens cal introduir algunes notacions. X, Y, Z indicaran sempre camps vectorials sobre M, i, al mateix temps, els camps vectorials sobre $V = M \times I$ als quals donen lloc. Designarem per $\tilde{\nabla}$ l'operador de diferenciació covariant sobre V corresponent a la mètrica $\tilde{g}$ i per ∇ l'operador de diferenciació covariant sobre M corresponent a g. En general, les lletres amb titlla designaran objectes de V mentre que les lletres sense titlla designaran objectes de M. Així, per exemple, $\widetilde{\mathrm{Ric}}$ designarà el tensor de Ricci de $\tilde{g}$, mentre que Ric designarà el tensor de Ricci de g. La proposició següent ens diu com és la derivada covariant $\tilde{\nabla}$.

Proposició 1. *Es compleix:*

$$\begin{aligned}
\tilde\nabla_{\partial/\partial t}\frac{\partial}{\partial t} &= 0\\
\tilde\nabla_{\partial/\partial t} X = \tilde\nabla_X\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\dot a}{a}X\\
\tilde\nabla_X Y = \nabla_X Y &+ \frac{a\dot a}{c^2}g(X,Y)\frac{\partial}{\partial t},
\end{aligned}$$

on $\dot a$ designa la derivada de a respecte a t.

La demostració de la proposició és elemental a partir de la fórmula de Riemann següent, que determina la derivada covariant $\tilde\nabla_A B$ de dos camps de V:

$$\begin{aligned}
2\tilde g(\tilde\nabla_A B, C) = A(\tilde g(B,C)) + B(\tilde g(C,A)) - C(\tilde g(A,B))\\
- \tilde g(A,[B,C]) + \tilde g(B,[C,A]) + \tilde g(C,[A,B]),
\end{aligned}$$

on A, B, C són camps vectorials sobre $V = M\times I$. Aplicant aquesta fórmula es calculen les derivades covariants de la proposició.

La proposició següent ens dóna el tensor de curvatura de $\tilde g$:

Proposició 2.

$$\begin{aligned}
\tilde R(X,Y)Z &= \left\{\frac{\dot a^2}{c^2a^2} + \frac{k}{a^2}\right\}(\tilde g(Z,Y)X - \tilde g(Z,X)Y)\\
\tilde R(X,\partial/\partial t)\partial/\partial t &= -\frac{\ddot a}{a}X\\
\tilde R(X,Y)\partial/\partial t &= 0\\
\tilde R(X,\partial/\partial t)Y &= -\frac{\ddot a}{c^2a}\tilde g(X,Y)\partial/\partial t.
\end{aligned}$$

En aquesta proposició, k indica la curvatura seccional constant de la varietat M, $k = 1, 0, -1$.

Indicació de la prova. Només cal aplicar la definició de tensor de curvatura:

$$\tilde R(A,B)C = \tilde\nabla_A\tilde\nabla_B C - \tilde\nabla_B\tilde\nabla_A C - \tilde\nabla_{[A,B]}C,$$

on A, B, C són camps vectorials de V, fer servir la proposició 1, i tenir en compte que, com que la varietat M té curvatura constant k, es compleix $R(X,Y)Z = k(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y)$. □

Una vegada coneixem el tensor de curvatura de $\tilde g$ podem passar a calcular el tensor de Ricci:

Proposició 3. *Es compleix:*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Ric}}(X,Y) &= \left\{\frac{\ddot a}{c^2a} + \frac{2\dot a^2}{c^2a^2} + \frac{2k}{a^2}\right\}\tilde g(X,Y)\\
\widetilde{\mathrm{Ric}}(\partial/\partial t,\ \partial/\partial t) &= -\frac{3\ddot a}{a}\\
\widetilde{\mathrm{Ric}}(X,\partial/\partial t) &= 0.
\end{aligned}$$

Indicació de la prova. Demostrem, per exemple, la primera identitat de la proposició. Recordem que, per la definició de tensor de Ricci, en qualsevol sistema de coordenades (x_α) es té

$$(\widetilde{\mathrm{Ric}})(\partial/\partial x_\alpha, \partial/\partial x_\beta) = \sum_{\lambda\mu} \tilde{g}^{\lambda\mu} \tilde{g}(\tilde{R}(\partial/\partial x_\lambda, \partial/\partial x_\beta)\partial/\partial x_\alpha, \partial/\partial x_\mu).$$

En qualsevol punt $(x_0, t_0) \in M \times I$ fixat, considerem tres vectors e_1, e_2, e_3 de $T_{(x_0,t_0)}(M \times \{t_0\})$ que siguin base ortonormal respecte a la mètrica $\tilde{g}$. En aquest punt es tindrà:

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} \tilde{g}(\tilde{R}(e_i, X)Y, e_i) - \tilde{g}\left(\tilde{R}\left(\frac{1}{c}\partial/\partial t, X\right) Y, \frac{1}{c}\partial/\partial t\right).$$

Aplicant aquí les fórmules de la proposició 2, es té

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(X, Y) = \left\{\frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{k}{a^2}\right\} \left(\sum_{i=1}^{3} \tilde{g}(X, Y)\tilde{g}(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{3} \tilde{g}(Y, e_i)\tilde{g}(X, e_i)\right) \\ - \tilde{g}\left(\tilde{\mathrm{R}}\left(\frac{1}{c}\partial/\partial t, X\right) Y, \frac{1}{c}\partial/\partial t\right).$$

El factor $\sum_i \tilde{g}(Y, e_i)\tilde{g}(X, e_i)$ de l'expressió anterior, tenint en compte que $X = \sum_{i=1}^{3} X^i e_i$, s'escriu:

$$\sum_i \tilde{g}(Y, e_i)\tilde{g}(X, e_i) = \sum_i X^i Y^i = \tilde{g}(X, Y).$$

Substituint això a l'expressió de $\widetilde{\mathrm{Ric}}(X, Y)$ i substituint també l'altre terme per l'expressió de la proposició 2, s'obté la igualtat volguda. □

A partir de les expressions del tensor de Ricci s'obté la curvatura escalar $\tilde{R}$ de $\tilde{g}$, donada per la proposició següent:

Proposició 4. *Es compleix:*

$$\tilde{R} = 6\left\{\frac{\dot{a}^2}{c^2 a^2} + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{c^2 a}\right\}.$$

Prova. Reprenent la notació emprada a la proposició anterior:

$$\tilde{R} = \sum_{i=1}^{3} \widetilde{\mathrm{Ric}}(e_i, e_i) - \widetilde{\mathrm{Ric}}\left(\frac{1}{c}\partial/\partial t, \frac{1}{c}\partial/\partial t\right),$$

i substituint aquí les expressions de la proposició 3 s'obté la igualtat desitjada. □

Ara que coneixem el tensor de Ricci i la curvatura escalar som capaços d'escriure les equacions (1) en el cas concret de la mètrica $\tilde{g}$. L'expressió

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(\partial/\partial t, \partial/\partial t) + \left(-\frac{1}{2}\tilde{R} + \frac{\Lambda}{c^2}\right)\tilde{g}(\partial/\partial t, \partial/\partial t) = \frac{8\pi G}{c^2}(T_m + T_{\mathrm{rad}})(\partial/\partial t, \partial/\partial t)$$

esdevé

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}(c^2\rho_m + c^2\rho_{rad}). \tag{13}$$

Tenint en compte que la massa i l'energia són equivalents i estan relacionades per la famosa fórmula $E = mc^2$, la densitat de massa multiplicada per c^2 serà la densitat d'energia. Per tant, el terme $c^2\rho_m + c^2\rho_{\mathrm{rad}}$ de la igualtat anterior a vegades s'escriu $\epsilon_m + \epsilon_{\mathrm{rad}}$, on la lletra ϵ sempre fa referència a la densitat d'energia. L'expressió

$$\widetilde{\mathrm{Ric}}(X, Y) + \left(-\frac{1}{2}\tilde{R} + \frac{\Lambda}{c^2}\right)\tilde{g}(X, Y) = \frac{8\pi G}{c^2}(T_m + T_{\mathrm{rad}})(X, Y)$$

esdevé

$$\left(-\frac{2\ddot{a}}{c^2 a} - \frac{\dot{a}^2}{c^2a^2} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{c^2}\right)\tilde{g}(X, Y) = \frac{8\pi G}{c^2}\frac{p_m + p_{\mathrm{rad}}}{c^2}\tilde{g}(X, Y).$$

Aquesta igualtat, multiplicada per $3c^2$, esdevé

$$-\frac{6\ddot{a}}{a} - \frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \frac{3kc^2}{a^2} + 3\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}3(p_m + p_{\mathrm{rad}}).$$

Sumant aquesta igualtat amb (13) obtindrem la igualtat següent, equivalent i més senzilla:

$$-\frac{6\ddot{a}}{a} + 2\Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}(3(p_m + p_{\mathrm{rad}}) + (\epsilon_m + \epsilon_{\mathrm{rad}})),$$

igualtat que dividida per 2 s'escriu:

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} + \Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}(3(p_m + p_{\mathrm{rad}}) + (\epsilon_m + \epsilon_{\mathrm{rad}})). \tag{14}$$

Per tenir totes les equacions que s'obtenen de (1) en el nostre cas, només ens falta escriure que la divergència de cada un dels tensors T_m i T_{rad} és nul·la. Com que tots dos tenen la mateixa forma, designem genèricament per T qualsevol dels dos. La proposició següent ens dóna l'expressió de la divergència de T.

Proposició 5. *Es compleix:*

$$c^2 \operatorname{div} T = \left\{\dot{\rho} + \frac{\dot{p}}{c^2} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial t} + \operatorname{grad} p.$$

Prova. Per a alleugerir la notació designarem per U el camp $\partial/\partial t$. Recordem que en qualsevol sistema de coordenades es té $(\operatorname{div} T)^\alpha = \sum_\beta \tilde\nabla_\beta T^{\alpha\beta}$, on els índexs α, β varien d'1 a 4 i $\tilde\nabla_\beta T^{\alpha\delta}$ indica la component (α, δ) del tensor $\tilde\nabla_{\partial/\partial x_\beta} T$. Amb aquestes notacions, com que $T^{\alpha\beta}$ està donat per

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{c^2}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta + \frac{p}{c^2}\tilde g^{\alpha\beta},$$

es té

$$c^2(\operatorname{div} T)^\alpha = c^2 \sum_\beta \tilde\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \sum_\beta \tilde\nabla_\beta \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \sum_\beta (\tilde\nabla_\beta U^\alpha) U^\beta$$
$$+ \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) \sum_\beta U^\alpha \tilde\nabla_\beta U^\beta + \sum_\beta (\tilde\nabla_\beta p)\tilde g^{\alpha\beta}.$$

Aquesta igualtat s'escriu, de manera intrínseca:

$$c^2 \operatorname{div} T = U\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) U + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\tilde\nabla_U U + \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)(\operatorname{div} U) U + \operatorname{grad} p. \quad (15)$$

En virtut de la proposició 1 es té $\tilde\nabla_U U = 0$. D'altra banda,

$$\operatorname{div} U = \sum_\alpha \tilde\nabla_\alpha U^\alpha = \sum_\alpha (\tilde\nabla_{\partial/\partial x_\alpha} U)^\alpha.$$

I si s'utilitza un sistema de coordenades adaptades al producte $M \times I$, la proposició 1 ens diu que $\operatorname{div} U = 3\dot a/a$. Substituint això a (15) s'obté l'expressió volguda. □

Multiplicant escalarment la identitat de la proposició 5 per $\partial/\partial t$ i tenint en compte que p només depèn del temps i que, per definició de gradient, $\tilde g(\partial/\partial t, \operatorname{grad} p) = \dot p$, si la divergència de T és nul·la, s'obté

$$0 = \tilde g(c^2 \operatorname{div} T, \partial/\partial t) = -c^2\left\{\dot\rho + \frac{\dot p}{c^2} + \frac{3\dot a}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\right\} + \dot p = 0.$$

Aquesta igualtat es pot escriure

$$\dot\rho + \frac{3\dot a}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0.$$

Multiplicant per c^2 i tenint en compte que $\rho c^2 = \epsilon$, es té

$$\dot\epsilon + \frac{3\dot a}{a}(\epsilon + p) = 0. \quad (16)$$

Això s'ha de complir, doncs, tant per al parell ϵ_m, p_m com per al parell ϵ_{rad}, p_{rad}.

Les equacions (13) i (14) s'anomenen de Friedmann, i (16) s'anomena equació de conservació.

5 Equacions d'estat

Disposem, doncs, de les dues equacions (13) i (14), de l'equació (16) per a la matèria i de l'equació (16) per a la radiació. En total, quatre equacions. I voldríem determinar les funcions $a(t)$, $p_m(t)$, $p_{\rm rad}(t)$, $\epsilon_m(t)$ i $\epsilon_{\rm rad}(t)$ a partir d'unes condicions inicials. Veiem que ens falten equacions. I encara ens en falten més si es té en compte que les que tenim no són independents. Per a resoldre el problema hem de saber que, en els fluids, la pressió i la densitat estan relacionades per una equació anomenada equació d'estat. És a dir, la pressió és una funció coneguda de la densitat. Però aquesta funció depèn del fluid i pot ser molt complicada. Recordeu que la pressió que intervé en el tensor d'impulsió-energia és la pressió (força per unitat de superfície) que la resta del fluid fa sobre cada petita regió del fluid a través de la superfície que la limita. Sortosament, la cosmologia tracta amb fluids molt diluïts, en els quals la pressió es pot expressar en funció de la densitat, aproximadament, d'una manera molt senzilla:

$$p = w\epsilon,$$

on w és una constant.

Si prescindim de la força gravitatòria que les galàxies fan les unes sobre les altres (recordem que en relativitat general les forces gravitatòries no existeixen com a tals, sinó que tenen només l'efecte de corbar l'espai), la pressió que qualsevol galàxia fa sobre una altra és pràcticament nul·la. Per tant, $p_m \simeq 0$ i el coeficient w de l'equació d'estat corresponent, w_m, també és pràcticament nul. D'altra banda, no és gaire difícil de provar que a un fluid fotònic (fotons que es mouen lliurement, a l'atzar, en totes direccions) se li ha d'assignar una pressió $p = (1/3)\epsilon$. És a dir, la w que correspon a la radiació és $w_{\rm rad} = 1/3$. Aquí no podem explicar aquest fet detalladament, però veurem ben aviat, amb un argument senzill, que la hipòtesi $w_{\rm rad} = 1/3$ és assenyada.

Si substituïm p per $w\epsilon$ a l'equació (16) i dividim després tota l'equació per $\dot{a}$, ens quedarà:

$$\frac{\dot{\epsilon}}{\dot{a}} + \frac{3(1+w)\epsilon}{a} = 0.$$

Però $\dot{\epsilon}/\dot{a} = (d\epsilon/dt)(dt/da) = d\epsilon/da$. O sigui, que si considerem la densitat d'energia ϵ, no com una funció del temps, sinó com una funció de a, aquesta funció compleix l'equació diferencial

$$\frac{d\epsilon}{da} = -\frac{3(1+w)\epsilon}{a},$$

que s'integra d'una manera immediata i dóna $\epsilon = Ca^{-3(1+w)}$, on C és una constant d'integració. Si designem per a_0 el valor actual de $a(t)$ (per a t igual a l'instant actual t_0), i designem per ϵ_0 el valor actual de la densitat ϵ, substituint això a la solució trobada s'obté el valor de la constant d'integració $C = \epsilon_0 a_0^{3(1+w)}$. Per tant, tindrem:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w)}. \tag{17}$$

Com que $w_m = 0$ i $w_{\text{rad}} = 1/3$, resulta:

$$\epsilon_m = \epsilon_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad \epsilon_{\text{rad}} = \epsilon_{\text{rad},0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4. \tag{18}$$

Ara veurem que en un univers en expansió (en què a creix amb el temps) aquests resultats estan d'acord amb la intuïció. Imaginem que en un determinat volum V, a l'instant actual hi ha n galàxies. L'energia continguda en el volum V serà ne, on e és l'energia mitjana de les galàxies de la regió (com que energia i massa són equivalents, penseu, si voleu, en la massa de les galàxies de la regió). La densitat serà $\epsilon = ne/V$. Quan passi el temps i l'univers es dilati amb un factor 2, per posar un exemple, el volum V s'haurà multiplicat per 8, mentre que el nombre n de galàxies contingudes en aquest volum no haurà variat. Per tant, la densitat ϵ s'haurà dividit per 8. Observeu que això està d'acord amb el que hem obtingut: $\epsilon_m \propto a^{-3}$. Apliquem ara el mateix raonament a ϵ_{rad}. La radiació està formada per partícules que viatgen o bé a la velocitat de la llum (fotons), o bé a velocitats properes (altres partícules amb massa molt petita). Als fotons, se'ls assigna una energia $e = h\nu$, on ν és la freqüència i h, la constant de Plank. La freqüència es pot expressar en funció de la longitud d'ona, $\nu = c/\lambda$. Per tant, l'energia e de cada fotó és ch/λ. Si totes les longituds es multipliquen per 2, el volum es multiplicarà per 8, com abans, però l'energia de cada fotó es dividirà per 2. Per tant, ϵ quedarà dividit per 8 i per 2. O sigui, dividit per 16. Això està d'acord amb el que hem obtingut: $\epsilon_{\text{rad}} \propto a^{-4}$.

6 Història de la constant cosmològica

Quan Einstein va introduir la relativitat general el 1916 [3], l'equació que allà figurava per a relacionar el camp gravitarori i la mètrica de Lorentz que l'origina era l'equació (1) sense el terme de la constant cosmològica. Un any més tard, ell mateix es va veure obligat a introduir la constant cosmològica en el seu article sobre cosmologia [4]. En aquest treball, que és la base de tota la cosmologia fonamentada en la relativitat, concep l'univers en cada instant com una esfera de tres dimensions, S^3, ocupada per un fluid perfecte, les partícules del qual són les galàxies. Però ell s'imagina que l'univers és estàtic, perquè aleshores encara no se'n coneixia l'expansió. Aquest univers coincideix amb el model que hem explicat aquí, quan la funció $a(t)$ és constant i la curvatura k de (M, g) és igual a 1. Naturalment, ell prescindeix de la component de radiació del tensor d'impulsió-energia (el descobriment de la radiació còsmica de fons és del 1968). Com que suposa $a(t)$ constant, les derivades $\dot{a}$ i $\ddot{a}$ són nul·les. Com que $p_m = 0$, l'equació (14) esdevé

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2}\epsilon_m. \tag{19}$$

Com que el segon membre és positiu, la constant Λ ha de ser positiva. Això ens diu que és impossible un univers estàtic amb un valor nul de Λ. Per aquesta raó va introduir la constant cosmològica: per fer possible un univers estàtic, tal com ell creia que era. En aquest model, l'equació (13) (recordem que $k = 1$ i $\dot{a} = 0$) esdevé

$$\frac{3c^2}{a^2} - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^2}\epsilon_m.$$

Substituint aquí el valor de ϵ_m deduït de (19) ($\epsilon_m = (c^2/4\pi G)\Lambda$), s'obté

$$\frac{3c^2}{a^2} - \Lambda = 2\Lambda.$$

És a dir:

$$\Lambda = \frac{c^2}{a^2}. \tag{20}$$

Hem vist abans que a_0 no és altra cosa que el radi de l'univers actual. Amb aquesta interpretació, la fórmula (20) relaciona la constant cosmològica Λ del seu model amb el radi de l'univers (que ell imaginava esfèric).

Com que a la dècada dels anys 1920 es va començar a posar de manifest l'expansió de l'univers gràcies als treballs de Hubble, el model d'Einstein va quedar arraconat i la constant cosmològica també. Però a final del segle XX es van tenir evidències sòlides que l'expansió de l'univers es produeix de manera accelerada i això torna a fer necessària una constant cosmològica positiva. En efecte, si suposem que $\Lambda = 0$, l'equació (14) implica que $\ddot{a} < 0$, perquè el segon membre de la igualtat és positiu. Per tant, amb aquesta hipòtesi, l'expansió no es pot accelerar.

7 Fent volar la imaginació

Els físics, a diferència dels matemàtics, no es contenten amb usar una determinada constant en un model (malgrat que en coneguin la necessitat) si no li poden assignar un significat físic, encara que sigui agosarat. Mostrarem aquí quin significat es pot assignar a la constant cosmològica.

Suposem que l'univers conté un fluid perfecte, imaginari, amb una densitat d'energia ϵ_Λ i una pressió p_Λ donades per les expressions següents:

$$\epsilon_\Lambda = \frac{c^2}{8\pi G}\Lambda, \quad p_\Lambda = -\epsilon_\Lambda = -\frac{c^2}{8\pi G}\Lambda. \tag{21}$$

Suposem, doncs, que, a més del fluid de la massa de les galàxies, caracteritzat pel parell (ϵ_m, p_m), del fluid de radiació, caracteritzat pel parell $(\epsilon_{\text{rad}}, p_{\text{rad}})$, a l'univers hi ha també un fluid imaginari, caracteritzat pel parell $(\epsilon_\Lambda, p_\Lambda)$. Llavors, les equacions de Friedmann (13) i (14) amb aquest nou fluid, però sense constant cosmològica Λ, són les mateixes que les equacions (13) i (14) sense aquest fluid imaginari, però amb constant cosmològica. Comprovem-ho per a l'equació (13), per exemple. Escrivim (13) amb aquest fluid imaginari, però sense constant cosmològica:

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2}(\epsilon_m + \epsilon_{\text{rad}} + \epsilon_\Lambda).$$

Si substituïm aquí ϵ_Λ pel valor donat a (21), s'obté exactament l'equació (13). Anàlogament passa amb l'equació (14). A més, resulta que el parell $(\epsilon_\Lambda, p_\Lambda)$ compleix també l'equació corresponent (16):

$$\dot{\epsilon}_\Lambda + \frac{3\dot{a}}{a}(\epsilon_\Lambda + p_\Lambda) = 0,$$

perquè, per ser ϵ_Λ constant, la seva derivada és nul·la, i com que $p_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$, l'expressió entre parèntesi també és nul·la.

En resum, els físics substitueixen, a vegades, la constant cosmològica per un determinat fluid imaginari amb una densitat i una pressió donades per (21). La w corresponent a aquest fluid és, doncs, $w_\Lambda = -1$.

8 L'equació de Friedmann escrita d'una altra manera

D'acord amb la secció anterior, l'equació de Friedmann (13) es pot escriure, d'una manera equivalent:

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\epsilon_m + \epsilon_{\text{rad}} + \epsilon_\Lambda) - \frac{kc^2}{a^2}.$$

Designarem per H el quocient $\dot{a}/a$. Óbviament, H depèn del temps (perquè $\dot{a}$ i a en depenen). El valor de H a l'instant actual $t = t_0$, que designarem per H_0, és la famosa constant de Hubble de la qual parlarem més endavant (per aquest motiu hem designat amb la lletra H el quocient $\dot{a}/a$). Si designem per ϵ la suma $\epsilon_m + \epsilon_{\text{rad}} + \epsilon_\Lambda$, l'equació de Friedmann s'escriu

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{kc^2}{a^2}. \tag{22}$$

Fixem-nos que si el valor de ϵ fos igual a la densitat d'energia crítica, ϵ_c, definida per

$$\epsilon_c = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}, \tag{23}$$

la curvatura k del model hauria de ser nul·la. En efecte, substituint $\epsilon = \epsilon_c$ a (22), i fent $t = t_0$ s'obté $H_0^2 = H_0^2 - kc^2/a_0^2$, que implica $k = 0$. O sigui, que la densitat crítica definida per (23) és el valor de la densitat d'energia per al qual la curvatura del model ha de ser nul·la. Es defineixen les densitats relatives d'energia, Ω_m, Ω_{rad} i Ω_Λ, com els quocients

$$\Omega_m = \frac{\epsilon_m}{\epsilon_c}, \quad \Omega_{\text{rad}} = \frac{\epsilon_{\text{rad}}}{\epsilon_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\epsilon_\Lambda}{\epsilon_c},$$

i es defineix Ω com la suma

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_\Lambda.$$

Les densitats relatives són nombres sense dimensió (no tenen unitats), i en l'actualitat el seu ús està completament generalitzat. Dividint (22) per ϵ_c s'obté

$$\frac{8\pi G H^2}{3c^2 H_0^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\Omega - \frac{kc^2}{a^2}\frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2}.$$

Simplificant el factor $8\pi G/(3c^2)$, queda

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega - \frac{kc^2}{a^2 H_0^2}. \tag{24}$$

Fent aquí $t = t_0$, podem aïllar k i ens queda

$$k = \frac{a_0^2 H_0^2}{c^2}(\Omega_0 - 1). \tag{25}$$

Substituint aquest valor a (24) s'obté

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega + \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 (1 - \Omega_0). \tag{26}$$

Ara bé, a (17) hem obtingut l'expressió general de les diverses densitats d'energia en funció de a. En virtut d'aquella expressió:

$$\epsilon_m = \epsilon_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad \epsilon_{\text{rad}} = \epsilon_{\text{rad},0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4, \quad \epsilon_\Lambda = \epsilon_{\Lambda,0}.$$

Dividint aquestes expressions per la densitat crítica ϵ_c s'obté:

$$\Omega_m = \Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad \Omega_{\text{rad}} = \Omega_{\text{rad},0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4, \quad \Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda,0}.$$

Substituint això a (26) s'obté l'equació diferencial

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = H_0^2\left[\Omega_{\text{rad},0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + (1-\Omega_0)\left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_{\Lambda,0}\right].$$

Ara bé, més que el factor d'escala $a(t)$, el que ens interessa és la comparació entre $a(t)$ en un instant t i el factor actual a_0. Per tant, introduirem la variable $u(t) = a(t)/a(t_0)$ que descriu millor aquesta comparació. Amb aquesta nova variable $u(t)$, l'equació diferencial anterior esdevé

$$\dot u^2 = H_0^2(\Omega_{\text{rad},0}u^{-2} + \Omega_{m,0}\,u^{-1} + (1-\Omega_0) + \Omega_{\Lambda,0}\,u^2). \tag{27}$$

Aquesta equació no és altra cosa que (13) escrita de manera convenient (tal com tots els cosmologistes l'escriuen actualment). Com que $u = a/a_0$, en el moment actual $u = 1$. Quan a es fa petit (prop del Big Bang), u també es fa petit, i el terme dominant de l'equació anterior és el de radiació. Quan a es fa gran, el terme dominant és el terme de la constant cosmològica.

Per a poder integrar l'equació anterior, cal conèixer d'una manera aproximada el valor dels coeficients H_0, $\Omega_{\text{rad},0}$, $\Omega_{m,0}$ i Ω_Λ. El coneixement d'aquests valors a través d'observacions astronòmiques és la tasca més difícil i més important de la cosmologia actual. Si es coneixen aquests valors, es coneix la curvatura de l'espai, mitjançant (25) (si $\Omega_0 > 1$, la curvatura és positiva, si $\Omega_0 = 1$, és nulla, i si $\Omega_0 < 1$ és negativa). Dedicarem les pròximes seccions a explicar com es poden obtenir els valors dels coeficients de (27) mitjançant observacions astronòmiques.

9 Geodèsiques de vector tangent nul en els models de Robertson-Walker

En relativitat general, la vida de qualsevol fotó ve representada per una geodèsica de l'espaitemps de vector tangent de norma nul·la. Ens convé, doncs, saber com són aquestes geodèsiques en un model de Robertson-Walker, $V = M \times I$, amb la mètrica $\tilde{g}$ donada per (12).

Recordem que una corba parametritzada de V, de paràmetre s, $s \to x(s)$, és geodèsica si compleix $\tilde{\nabla}_{dx/ds}\, dx/ds = 0$, on dx/ds indica el vector tangent en el punt de paràmetre s. Resulta, doncs, que les geodèsiques són, per definició, corbes parametritzades, i si es fa un canvi de paràmetre, una geodèsica pot deixar de ser-ho. La proposició següent clarifica aquesta qüestió.

PROPOSICIÓ 6. *Sigui $s \to x(s)$ una geodèsica. Sigui $s = s(\xi)$ un canvi de paràmetre. Es compleix*

$$\tilde{\nabla}_{\frac{dx}{d\xi}} \frac{dx}{d\xi} = f(\xi)\frac{dx}{d\xi}, \quad amb\ f(\xi) = \left(\frac{ds}{d\xi}\right)^{-1} \frac{d^2 s}{d\xi^2}.$$

PROVA. En virtut de les propietats de la derivada covariant, tindrem

$$\tilde{\nabla}_{\frac{dx}{d\xi}} \frac{dx}{d\xi} = \tilde{\nabla}_{\frac{dx}{d\xi}} \left(\frac{ds}{d\xi}\frac{dx}{ds}\right) = \frac{d^2 s}{d\xi^2}\frac{dx}{ds} + \frac{ds}{d\xi}\tilde{\nabla}_{\frac{dx}{d\xi}}\frac{dx}{ds}. \tag{28}$$

Ara bé, l'últim terme és nul perquè

$$\tilde{\nabla}_{\frac{dx}{d\xi}} \frac{dx}{ds} = \tilde{\nabla}_{\frac{ds}{d\xi}\frac{dx}{ds}} \frac{dx}{ds} = \frac{ds}{d\xi}\tilde{\nabla}_{\frac{dx}{ds}}\frac{dx}{ds} = 0.$$

D'altra banda,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\xi}\frac{d\xi}{ds} = \frac{dx}{d\xi}\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^{-1}.$$

Substituint tot això a (28) s'obté l'expressió desitjada. □

Una corba parametritzada, $\xi \to x(\xi)$, que compleixi la condició $\tilde{\nabla}_{dx/d\xi} dx/d\xi = f(\xi)\, dx/d\xi$, on $f(\xi)$ és una certa funció del paràmetre ξ, s'anomena *pregeodèsica*, i no és altra cosa que una geodèsica parametritzada d'una altra manera (amb un paràmetre no geodèsic).

Tenint això present, estudiarem les geodèsiques dels models de Robertson-Walker que tenen vector tangent de norma nul·la en tot punt. Considerem corbes de $V = M \times I$ que en coordenades polars geodèsiques de M són de la forma

$$x(t) = (r(t), \varphi_v, \lambda_v, t), \tag{29}$$

on $r(t)$ és una certa funció de t, φ_v és un cert valor constant de φ i λ_v un cert valor constant de λ. Imposem que una tal corba tingui vector tangent de norma nul·la. El vector tangent serà

$$\dot{x} = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t},$$

i $\tilde{g}(\dot{x}, \dot{x}) = a^2\dot{r}^2 - c^2$. Per tant, la condició de norma nul·la de $\dot{x}$ s'escriurà

$$\dot{r}(t) = \pm\frac{c}{a(t)}. \tag{30}$$

Calculem ara $\tilde{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x}$. Tindrem:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x} = \tilde{\nabla}_{\dot{x}}\left(\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}\right) = \ddot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}\tilde{\nabla}_{\dot{x}}\frac{\partial}{\partial r} + \tilde{\nabla}_{\dot{x}}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Substituint aquí $\dot{x}$ per la seva expressió i, tenint en compte les propietats de la derivada covariant, aquesta igualtat s'escriu

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x} = \ddot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}^2\tilde{\nabla}_{\partial/\partial r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}\tilde{\nabla}_{\partial/\partial t}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}\tilde{\nabla}_{\partial/\partial r}\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\nabla}_{\partial/\partial t}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Per a calcular les derivades covariants que figuren aquí, hem d'aplicar la proposició 1 (amb els X, Y d'allà, tots dos iguals a $\partial/\partial r$). Quan fem això, hem de tenir en compte que la corba de M donada per $r \to (r, \varphi_v, \lambda_v)$ és geodèsica de M i que a M el seu vector tangent té norma 1 (en ser la distància geodèsica). Ens quedarà, finalment,

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x} = \left(\ddot{r} + 2\dot{r}\frac{\dot{a}}{a}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \dot{r}^2\frac{a\dot{a}}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{31}$$

Si suposem que el vector tangent $\dot{x}$ té norma nul·la, es complirà (30); per tant, $\dot{r} = \pm c/a$. Substituïm això a l'expressió anterior. Prenem, per a fixar les idees, un dels dos signes de c/a, per exemple el + (ens quedaria una cosa similar amb el $-$). Si $\dot{r} = c/a$, tindrem $\ddot{r} = -c\dot{a}/a^2$. Substituint a (31) ens queda:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x} = \frac{c\dot{a}}{a^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\dot{a}}{a}\left(\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\dot{a}}{a}\dot{x}.$$

Veiem, doncs, que $x(t)$ és pregeodèsica. En resum, si imposem la condició que la corba (29) tingui vector tangent de norma nul·la, automàticament aquesta corba ja és una geodèsica (amb un paràmetre no geodèsic, cosa que no té cap importància).

Ens podria semblar que les corbes de la forma (29) que compleixen (30) són un cas particular de geodèsiques de vector tangent de norma nul·la. Però ara veurem que totes les geodèsiques de vector tangent de norma nul·la es poden expressar així.

Hauríem de començar recordant que el sistema de coordenades polars geodèsiques de M que hem utilitzat, (r, φ, λ), té una singularitat quan $r = 0$ que convé tenir present. Per tant, a vegades cal no oblidar de quina manera geomètrica s'assignen a cada punt de M les seves coordenades (r, φ, λ). Recordem-ho. Si $p \in M$ és el punt que correspon a $r = 0$ (el pol de les coordenades polars geodèsiques), sigui S^2_p l'esfera de l'espai tangent $T_p(M)$ formada pels vectors $v \in T_p(M)$ de norma 1 (respecte a la mètrica g). Prenent les coordenades habituals (φ = colatitud i λ = longitud) sobre S^2_p, cada $v \in S^2_p$ quedarà determinat per les seves coordenades (φ_v, λ_v). Llavors, el punt de M que té coordenades $(r, \varphi_v, \lambda_v)$ és el situat sobre la geodèsica que surt de p i té vector tangent v en aquest punt, i que està a una distància r de p sobre aquesta geodèsica.

Sigui P un punt qualsevol de $V = M \times I$ que es projecti sobre el pol $p \in M$ de les coordenades polars geodèsiques per la projecció $\pi\colon M \times I \to M$. El punt P serà de la forma $P = (p, t_P)$. Veurem que tota geodèsica de vector tangent nul que surti de P es de la forma (29). Sabem que tota geodèsica queda determinada pel punt d'on surt i pel vector tangent en aquell punt. Sigui, doncs, w un vector qualsevol de $T_P(V)$ de norma nul·la. Basta, doncs, trobar una geodèsica de la forma (29) que surti de P amb vector tangent w. Aquest w serà de la forma $w = v' + x(\partial/\partial t)_P$ amb $v' \in T_p(M)$ i $x \in \mathbb{R}$. Com que no ens importa la parametrització de la geodèsica, dividim el vector w per un escalar positiu fins a aconseguir que la segona component x sigui 1. Per tant, suposem, ja d'entrada, que el w que ens han donat és $w = v' + (\partial/\partial t)_P$. Imposem ara que aquest vector tingui norma nul·la: $-c^2 + a(t_P)^2 g(v', v') = 0$. D'aquí obtenim

$$g(v', v') = \frac{c^2}{a(t_P)^2}, \quad ||v'|| = \frac{c}{a(t_P)}.$$

Sigui v el vector unitari de $T_p(M)$ que té la mateixa direcció que v'. És a dir, $v = v'/||v'|| = (a(t_P)/c)v'$. Siguin φ_v i λ_v la colatitud i la longitud corresponents a aquest vector unitari. Veurem que la corba

$$x(t) = (r(t), \varphi_v, \lambda_v, t),$$

que se suposa que compleix (30), surt de P amb vector tangent el w donat. En efecte, el seu vector tangent en qualsevol punt és $\dot{r}\partial/\partial r + \partial t$. Però el punt P correspon a $r = 0$ i $t = t_P$. Quan $r = 0$ es té $\partial/\partial r = v$, per construcció. Com que $\dot{r} = \pm c/a$ i com que hem suposat que la geodèsica «surt» de P, la $r(t)$ haurà de créixer. Per tant, haurem d'agafar el signe positiu: $\dot{r} = c/a$. Tindrem, doncs (quan $r = 0$ i $t = t_P$):

$$\dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{a(t_P)}v + \frac{\partial}{\partial t} = \frac{c}{a(t_P)}\frac{a(t_P)}{c}v' + \frac{\partial}{\partial t} = w.$$

Com que el pol p de les coordenades polars de M pot ser qualsevol punt, queda clar que tota geodèsica de vector tangent nul es pot posar sempre en la forma (29).

10 Distàncies als estels i candeles estàndard

La tercera llei de Kepler que relaciona la distància mitjana d'un planeta al Sol amb el seu període permet calcular totes les distàncies dels planetes al Sol si se'n coneix una. La distància de Venus a la Terra, quan aquest planeta està en conjunció amb el nostre (i, per tant, molt a prop nostre), es pot calcular trigonomètricament mitjançant un triangle que tingui dos vèrtexs en punts de la Terra molt separats i el tercer al centre de Venus. Una vegada coneguda aquesta distància, la tercera llei de Kepler permet conèixer totes les distàncies del sistema solar.

Això s'usa per a calcular les distàncies a estels pròxims pel mètode de la paral·laxi, que consisteix a prendre un triangle amb un vèrtex en una determinada posició de la Terra en la seva òrbita entorn del Sol, un altre vèrtex en la posició de la Terra diametralment oposada i el tercer vèrtex a l'estrella de la qual es vol calcular la distància. En aquest triangle es coneixen un costat (el diàmetre de l'òrbita de la Terra) i dos angles. Aquest mètode va ser usat per primera vegada per Bessel l'any 1838 i va permetre mesurar la distància a què es troba l'estrella 61 de la constel·lació del Cigne (aproximadament, 11,4 anys llum).

Un avenç important en el mesurament de distàncies d'estels va ser el descobriment que va fer Henrietta Swan Leavitt el 1908 (publicat el 1912) sobre un tipus d'estrelles anomenades *variables cefeides*. La lluminositat d'aquest tipus d'estrelles varia regularment en un període de dies (entre quatre i vint dies). Henrietta Leavitt va estudiar centenars d'estels pertanyents a una classe especial de variables cefeides anomenades variables cefeides clàssiques. Coneixent les seves distàncies pel mètode de la paral·laxi, en va calcular les magnituds absolutes (energia que en rebríem si estiguessin situades a una distància de nosaltres de 10 parsecs, o, equivalentment, de 32,6 anys llum) i va veure que hi havia una determinada gràfica que relacionava el període de l'estrella amb la seva magnitud absoluta. Dit d'una altra manera: la magnitud absoluta era una funció coneguda (experimentalment) del període. Aquest descobriment és molt important perquè permet conèixer l'energia que emet una variable cefeida clàssica, encara que sigui molt llunyana, a través de l'observació del seu període.

Una estrella de la qual es pot conèixer a priori la lluminositat (és a dir, l'energia que emet), independentment d'allà on sigui situada, s'anomena una *candela estàndard* (les variables cefeides clàssiques ho són). Aquest tipus d'estrelles permeten calcular les distàncies que ens separen d'algunes galàxies. Si dintre d'una determinada galàxia es descobreix, per exemple, una estrella variable cefeida, comparant la lluminositat aparent (l'energia que nosaltres en rebem) amb la seva lluminositat absoluta (energia que emet) es pot saber la distància de l'estrella a nosaltres, i, aproximadament, la distància a nosaltres de la galàxia que conté aquest estel. Per aquest mètode, Hubble, a la dècada dels anys 1920, va poder calcular les distàncies que ens separen de moltes galàxies. Però per a galàxies llunyanes aquest mètode no funciona perquè, com més lluny són, més difícil resulta observar en el seu interior una variable cefeida.

Cap al final del segle XX es va descobrir un altre tipus de *candela estàndard*: el de les supernoves de tipus Ia. Aquestes estrelles no són gaire freqüents i sorgeixen ocasionalment en els sistemes binaris quan una de les dues estrelles és una nana blanca de poca massa, al final de la seva vida, i explota per col·lapse gravitatori i produeix una llum molt intensa. Aquesta lluminositat passa per un màxim i després va disminuint i en el termini d'alguns mesos es fa imperceptible. Resulta, però, que existeix una gràfica que relaciona els dies transcorreguts des de l'explosió inicial amb la magnitud absoluta de l'estrella. Les supernoves de tipus Ia són, doncs, candeles estàndard, però infinitament més lluminoses que les variables cefeides clàssiques. Això permet calcular distàncies de galàxies molt més allunyades. El Premi Nobel de Física del 2011, tal com hem dit abans, va ser atorgat a Saul Perlmutter, Adam Ries i Brian Schmidt, directors de dos equips de recerca diferents (el de Perlmutter d'un cantó, i el de Ries i Schmidt d'un altre) que van observar supernoves en galàxies molt llunyanes i van aportar evidència sobre el fet que l'univers s'expandeix acceleradament.

11 Distàncies en els models de Robertson-Walker

Quan ens diuen que una certa galàxia A és a 3.000 milions d'anys llum, què ens estan dient? Ens estan parlant de la distància entre A i la nostra galàxia en el moment actual, o bé ens estan dient que la llum que ara ens arriba d'ella fa 3.000 milions d'anys que va ser emesa per A? Malgrat les inevitables imprecisions del llenguatge corrent quan s'aplica a qüestions científiques, en aquest cas tothom s'inclinaria per la segona interpretació. Però és molt important saber que cap de les magnituds que acabem de considerar (distància actual o temps transcorregut entre l'emissió de la llum i la recepció) es pot mesurar directament a partir de dades observades, i que el seu càlcul depèn del model d'univers que s'utilitzi i dels valors dels seus paràmetres: H_0, $\Omega_{m,0}$, Ω_Λ, etc. Una variació en aquests paràmetres fa canviar el valor d'aquelles magnituds.

Definim ara el que es coneix amb el nom de *distància lumínica*, que té l'avantatge que es pot calcular només a partir de dades observades. Sigui L l'energia total de la llum que emet una determinada estrella per unitat de temps (d'això se'n diu lluminositat de l'estrella). Sigui f l'energia que arriba a nosaltres de la llum d'aquella estrella per unitat de temps i unitat de superfície (flux d'energia per unitat de temps). La distància lumínica d_L entre l'estrella i nosaltres es defineix com

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{32}$$

Si l'estrella que observem és una candela estàndard, la seva lluminositat L serà coneguda, i el flux de la llum que en rebem el podem mesurar. Per tant, coneixerem d_L a partir de dades observables. En principi, la magnitud d_L definida per (32) no és cap distància, però té les dimensions d'una distància, i si l'univers fos estàtic (no s'expansionés) i euclidià, llavors d_L seria la veritable distància entre l'estrella i nosaltres.

Més endavant trobarem una expressió teòrica de d_L en un model de Robertson-Walker en funció del corriment cap al vermell (*redshift*) i dels paràmetres del model: H_0, $\Omega_{m,0}$, Ω_Λ, etc. Una tal expressió serà cabdal en l'estimació d'aquests paràmetres a partir de dades observables. Però abans ens cal obtenir altres fórmules relatives a les distàncies de les galàxies.

Començarem introduint algunes notacions. Sigui A una determinada galàxia que vindrà representada per un punt de M. O sigui, $A \in M$. La vida d'aquesta galàxia será la corba $t \to A(t) = (A, t) \in M \times I = V$. Designarem per P el punt de M que correspon a la nostra galàxia (usem la lletra P perquè sovint agafarem aquest punt com a pol de les coordenades polars geodèsiques de M). Així, doncs, $P(t)$ serà la nostra galàxia a l'instant t. Designarem per M_t l'espai comú a totes les galàxies a l'instant t, $M_t = M \times \{t\} \subset V$. Designarem per $D(A)$ la distància geodèsica, a M, entre A i la nostra galàxia P. Desginarem per $d_t(A)$ la distància, a M_t, entre $A(t)$ i la nostra galàxia (que és $P(t)$). Com que l'instant actual es representa sempre per t_0, $d_0(A)$ indicarà la distància entre A i nosaltres a l'instant actual (a M_0). Com que la mètrica de M_t és $a(t)^2 g$, on g és la mètrica de M, queda clar que

$$d_t(A) = a(t)D(A), \tag{33}$$

i, per tant,

$$\frac{d_0(A)}{d_t(A)} = \frac{a_0}{a(t)} = \frac{1}{u(t)}. \tag{34}$$

Recordeu que la funció $u(t) = a(t)/a_0$ va ser introduïda a la secció 8. En relació amb la distància $d_t(A)$, la proposició següent resulta útil:

PROPOSICIÓ 7. *Suposem que la galàxia A ha emès un raig de llum a l'instant $t = t_e$ (el subíndex e indica «emissió») i que nosaltres veiem aquest raig de llum ara ($t = t_0$). Llavors la distància actual de la galàxia A a la nostra, $d_0(A)$, és*

$$d_0(A) = ca_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = cH_0^{-1} \int_{u_e}^{1} \left(\Omega_{\mathrm{rad},0} + \Omega_{m,0} u + (1 - \Omega_0)u^2 + \Omega_{\Lambda,0} u^4\right)^{-\frac{1}{2}} du,$$

on u_e és el valor de u en el moment d'emissió del raig. D'altra banda, l'interval de temps galàctic transcorregut entre l'emissió i la recepció del raig és

$$t_0 - t_e = \int_{u_e}^{1} \frac{du}{\dot{u}} = H_0^{-1} \int_{u_e}^{1} \left(\Omega_{\mathrm{rad},0} u^{-2} + \Omega_{m,0} u^{-1} + (1 - \Omega_0) + \Omega_{\Lambda,0} u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du.$$

PROVA. La vida del raig de llum és una geodèsica de vector tangent de norma nul·la, que hem vist que es pot representar en la forma (29):

$$x(t) = (r(t), \varphi_v, \lambda_v, t), \quad \text{amb} \quad \dot{r}(t) = -\frac{c}{a(t)}.$$

Hem pres el signe negatiu en l'expressió de $\dot{r}$ perquè suposem que la nostra galàxia és el pol de les coordenades polars geodèsiques ($r = 0$) i que la geodèsica surt de A i «arriba» a nosaltres (r disminueix). A la varietat M, sigui r_A la coordenada r corresponent a la galàxia A. La distància (a la varietat M) entre A i el pol (que som nosaltres) serà

$$D(A) = \int_0^{r_A} dr = \int_{t_0}^{t_e} \dot{r}(t)\, dt = -c \int_{t_0}^{t_e} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \tag{35}$$

Per tant, la distància actual serà

$$d_0(A) = a_0 D(A) = c a_0 \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Fem ara el canvi de variable $u = a/a_0$. Tindrem $dt = (dt/du)\, du = du/\dot{u}$. Per tant,

$$c a_0 \frac{dt}{a(t)} = c a_0 \frac{\dot{u}^{-1}\, du}{a_0 u} = c u^{-1} \dot{u}^{-1}\, du.$$

I substituint aquí $\dot{u}$ pel valor trobat a (27) s'obté l'expressió volguda (s'ha de tenir en compte, també, que com que $u = a/a_0$, el valor actual de u, és $u_0 = 1$).

La demostració de l'expressió de $t_0 - t_e$ és similar:

$$t_0 - t_e = \int_{t_e}^{t_0} dt.$$

Però $dt = \dot{u}^{-1}\, du$, i basta substituir $\dot{u}$ pel valor trobat a (27) per a obtenir l'expressió desitjada. □

Observem que si coneguéssim el valor dels paràmetres cosmològics H_0, $\Omega_{\text{rad},0}$, $\Omega_{m,0}$ i $\Omega_{\Lambda,0}$ i el valor u_e (valor de u en el moment de l'emissió del raig de llum), la proposició 7 ens permetria calcular tant la distància a què es troba actualment la galàxia A que ha emès el raig, com el temps que ha trigat la seva llum a arribar a nosaltres. Però, com es coneix el valor u_e de u en el moment de l'emissió? Veurem que això està relacionat amb el corriment cap al vermell (*redschift*), el qual es pot determinar experimentalment (secció 12).

El corriment cap al vermell (*redschift*) d'un raig de llum monocromàtica (o sigui, d'una única longitud d'ona λ), que s'ha emès a l'instant t_e i que rebem ara ($t = t_0$), es defineix així:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e},$$

on λ_e és la longitud d'ona que tenia el raig de llum quan va ser emès i λ_0 és la longitud actual. De seguida veurem que

$$u_e = \frac{1}{1+z}, \tag{36}$$

de manera que si coneguéssim el corriment cap al vermell del raig de llum que ens arriba de l'estel, coneixeríem també u_e.

Suposem que des de la galàxia A s'emet un raig de llum a l'instant $t = t_e$ i que al cap de poca estona se n'emet un altre a l'instant $t = t'_e$. Suposem que nosaltres rebem el primer raig a l'instant $t = t_0$ i el segon raig a l'instant $t = t'_0$. Com que la fórmula (35) és certa sempre que el límit inferior de la integral de l'últim membre sigui l'instant d'emissió d'un raig des de la galàxia A i el límit superior sigui l'instant de recepció d'aquest raig per nosaltres, tindrem:

$$D(A) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c\int_{t'_e}^{t'_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

De l'última igualtat es dedueix

$$\int_{t_e}^{t'_e} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t'_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t'_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t'_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Per tant:

$$\int_{t_e}^{t'_e} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t'_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Si l'interval entre t_e i t'_e se suposa molt petit, així com l'interval entre t_0 i t'_0, la igualtat anterior s'escriu $\Delta t_e/a(t_e) = \Delta t_0/a(t_0)$, on $\Delta t_e = t'_e - t_e$ i $\Delta t_0 = t'_0 - t_0$. Per tant:

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a_0}{a_e} = \frac{1}{u_e}. \tag{37}$$

Això és vàlid per a qualsevol interval petit de temps, Δt_e. Pensem ara en l'emissió d'un raig de llum monocromàtica de longitud d'ona λ_e. Com que la longitud d'ona és el producte de c (la velocitat de la llum) pel període T (que és un interval de temps petit), la relació anterior ens donarà

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{cT_0}{cT_e} = \frac{1}{u_e}. \tag{38}$$

Tenint en compte que $z = \lambda_0/\lambda_e - 1$, la igualtat anterior equival a (36).

La proposició següent estableix una fórmula per a la distància lumínica $d_L(A)$ similar a la que hem obtingut a la proposició 7 per a la distància $d_0(A)$.

PROPOSICIÓ 8. *Considerem una estrella individual A situada dintre d'una determinada galàxia. Suposem que des de A s'ha emès un raig de llum a l'instant $t = t_e$, raig que nosaltres rebem ara ($t = t_0$). Si la curvatura de l'univers és nul·la (és a dir, si $\Omega_0 = 1$), la distància lumínica entre A i nosaltres és*

$$d_L(A) = cH_0^{-1}u_e^{-1}\int_{u_e}^{1} \left(\Omega_{\mathrm{rad},0} + \Omega_{m,0}u + \Omega_{\Lambda,0}u^4\right)^{-\frac{1}{2}} du. \tag{39}$$

I si la curvatura és diferent de zero (o sigui, si $\Omega_0 \neq 1$), llavors

$$d_L(A) = cH_0^{-1}|1-\Omega_0|^{-\frac{1}{2}}u_e^{-1}\operatorname{sinn}\left\{|1-\Omega_0|^{\frac{1}{2}}\int_{u_e}^{1}\left(\Omega_{\mathrm{rad},0} + \Omega_{m,0}u + (1-\Omega_0)u^2 + \Omega_{\Lambda,0}u^4\right)^{-\frac{1}{2}} du\right\}. \tag{40}$$

PROVA. Per fer l'argument més fàcil, suposarem que des de l'estrella A s'emeten n fotons simultàniament a l'instant $t = t_e$, cada un d'ells de freqüència ν_e (i que aquests fotons s'han emès uniformement en totes direccions), que a l'instant $t = t_e + \Delta t_e$ se n'emeten uns altres n amb les mateixes condicions, que a l'instant $t = t_e + 2\Delta t_e$ se n'emeten uns altres n, i així successivament. Si L designa l'energia total de la llum emesa per l'estrella per unitat de temps, l'energia emesa entre t_e i $t_e + \Delta t_e$ serà, d'una banda, $L\Delta t_e$. Però, com que cada fotó té energia $h\nu_e$, d'altra banda aquesta mateixa energia serà $nh\nu_e$. O sigui,

$$L\Delta t_e = nh\nu_e. \tag{41}$$

Dels fotons emesos per A a l'instant t_e nosaltres en rebem ara alguns (a l'instant t_0). Diem «alguns», perquè els fotons han sortit de A en totes direccions, i nosaltres només rebem els que s'han emès en direcció a nosaltres. Tots els fotons emesos per A a l'instant t_e estaran ara escampats sobre la superfície de $M_0 = M \times \{t_0\}$ formada per tots els punts de M_0 situats a distància $d_0(A)$ de (A, t_0) (una espècie d'esfera). Sigui S l'àrea d'aquesta superfície. El flux f d'energia per unitat de temps que nosaltres rebem de l'estrella A és

$$f = \frac{nh\nu_0}{S\Delta t_0}. \tag{42}$$

Els fotons de A s'han emès a glopades: n a la primera glopada; al cap d'un temps Δt_e, uns altres n, etc. Aquestes glopades estan separades per intervals de temps Δt_e. Però, tal com hem vist abans, nosaltres rebem els fotons separats per intervals de temps Δt_0, de manera que la relació entre Δt_e i Δt_0 és (37).

Substituïm ara a (42) el valor de n obtingut a (41):

$$f = \frac{L}{S}\frac{\nu_0}{\nu_e}\frac{\Delta t_e}{\Delta t_0}.$$

Tenint present (37) i (38), això s'escriu

$$f = \frac{L}{S}u_e^2.$$

La distància lumínica donada per (32) s'escriurà, doncs,

$$d_L(A) = \left(\frac{L}{4\pi f}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{S}{4\pi u_e^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

Calcularem ara l'àrea S que figura a (43). En virtut de (12), la mètrica de M_0 és

$$g_0 = a_0^2(dr^2 + \operatorname{sinn}^2 r(d\varphi^2 + \sin^2\varphi\, d\lambda^2)).$$

Suposem que hem agafat les coordenades de manera que el pol de les coordenades polars geodèsiques sigui A. Com que r és la distància geodèsica a M, la superfície de M_0 formada pels punts que són a distància $d_0(A)$ de A està donada per $r = d_0(A)/a_0$. L'element d'àrea d'aquesta superfície és

$$d\sigma = a_0^2 \operatorname{sinn}^2\left(\frac{d_0(A)}{a_0}\right) \sin\varphi \, d\varphi \, d\lambda \tag{44}$$

(recordeu que l'element de volum d'una varietat de Riemann és $\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \ldots dx_n$). Integrant (44) quan φ varia entre 0 i π i λ varia entre 0 i 2π s'obté

$$S = 4\pi a_0^2 \operatorname{sinn}^2\left(\frac{d_0(A)}{a_0}\right).$$

Substituint aquest valor a (43) s'obté

$$d_L(A) = a_0 \operatorname{sinn}\left(\frac{d_0(A)}{a_0}\right)\frac{1}{u_e}. \tag{45}$$

En el cas que la curvatura k de M sigui nul·la, això dóna

$$d_L(A) = d_0(A) u_e^{-1}. \tag{46}$$

Treballarem una mica més la fórmula (45) en el cas que la curvatura k de M sigui $\neq 0$ (és a dir, $k = 1$ o $k = -1$). Prenent valors absoluts als dos membres de (25) s'obté

$$\frac{a_0^2 H_0^2}{c^2}|1 - \Omega_0| = 1.$$

D'aquí aïllem a_0,

$$a_0 = cH_0^{-1}|1 - \Omega_0|^{-\frac{1}{2}}.$$

Substituint això a (45) s'obté

$$d_L(A) = cH_0^{-1}|1 - \Omega_0|^{-\frac{1}{2}} u_e^{-1} \operatorname{sinn}\left(|1 - \Omega_0|^{\frac{1}{2}} c^{-1} H_0\, d_0(A)\right). \tag{47}$$

Substituint a (46) i (47) el valor de $d_0(A)$ donat per la proposició 7 s'obtenen les dues expressions de l'enunciat de la proposició. □

12 Espectroscòpia estel·lar i corriment cap al vermell

El nostre propòsit final és l'elaboració d'una estratègia per a mesurar els paràmetres cosmològics mitjançant observacions astronòmiques. Però abans d'encarar aquest objectiu haurem de dir quatre paraules sobre els espectres dels estels i el corriment cap al vermell.

Considerem un focus lluminós potent situat en el focus F d'una lent (vegeu la figura 1). Els raigs que surten d'aquesta lent (que són paral·lels), els fem travessar un element químic vaporitzat (hidrogen, heli, sodi, etc.), de manera que la temperatura d'aquest vapor sigui bastant inferior a la del focus lluminós.

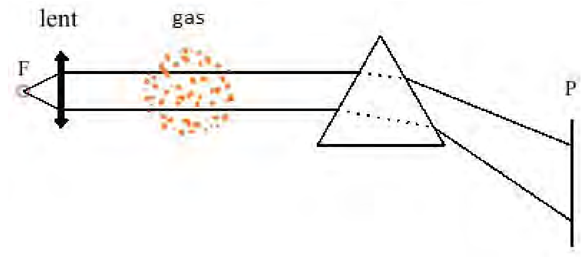

FIGURA 1

FIGURA 2

Després fem incidir els raigs sobre un prisma o una xarxa de difracció i posteriorment els projectem en una pantalla o en una placa fotogràfica P. La imatge que s'obté s'anomena espectre d'absorció de l'element químic vaporitzat. A la figura 2 mostrem l'espectre d'absorció de l'hidrogen, que és el més senzill de tots.

Com que la temperatura de l'element vaporitzat és inferior a la dels raigs que el travessen, els àtoms d'aquest gas absorbeixen energia del feix lluminós i alguns dels seus electrons (que abans estaven en el seu estat fonamental), passen a un estat excitat i per a fer aquest salt cada un d'ells absorbeix l'energia E que necessita, i l'absorbeix d'un fotó del feix de llum incident, fotó que tindrà una freqüència $\nu = E/h$, on h és la constant de Plank. Per aquesta causa, a l'espectre resultant hi apareixen unes ratlles fosques corresponents a les freqüències característiques de l'àtom de l'element químic considerat. Cada element químic té un espectre únic: unes ratlles característiques que són com una espècie d'empremta dactilar de l'element. Ara bé, no sempre apareixen a l'espectre totes les ratlles possibles de l'element. El nombre de ratlles que apareixen i la seva intensitat depenen de la diferència de temperatures entre la font lluminosa i l'element vaporitzat.

Paral·lelament als espectres d'absorció hi ha uns altres espectres (duals) que s'anomenen d'emissió i que es produeixen per un procediment similar que ara no descriurem. Aquests espectres corresponen al cas que alguns electrons passen d'un estat excitat a un altre estat d'energia menor, emetent un fotó de la freqüència corresponent a l'energia que els sobra per passar de l'estat excitat a l'altre de menys energia.

Si fem passar un raig de llum provinent d'una estrella per un prisma o una xarxa de difracció, gairebé sempre observarem un espectre d'absorció. La raó és que el gas que envolta l'estrella està a una temperatura menor que la de la superfície, i la llum que es crea a la superfície de l'estrella travessa aquest gas, com a l'experiment que acabem de descriure. L'espectre de les estrelles s'ha classificat des de fa temps en vuit tipus que es designen per lletres de l'alfabet, en un ordre endimoniat: O, B, A, F, G, K, M. El tipus O (el primer) correspon a estrelles d'alta temperatura (més de 33.000 K), mentre que el tipus M (l'últim) correspon a estrelles de molt baixa temperatura (menys de 2.600 K). Els espectres més senzills corresponen al tipus O, amb molt poques línies, mentre que els més complexos són els del tipus M. Les ratlles espectrals de l'hidrogen i de l'heli són presents en gairebé tots els tipus, llevat dels últims. A mesura que la temperatura de l'estrella va baixant, van apareixent ratlles espectrals de més elements: Ca, Na, C, Fe, Ni, etc. En aquesta classificació, el Sol correspon al tipus G (temperatura entre 5.500 i 6.000 K).

Hem dit que els espectres de les estrelles són «gairebé sempre» d'absorció. L'adverbi gairebé fa referència al fet que en els espectres corresponents a estrelles de temperatures més elevades apareixen també algunes vegades ratlles espectrals d'emissió.

Parlem ara del corriment cap al vermell. A la secció 11 hem definit el corriment cap al vermell d'un raig de llum monocromàtica com el quocient $z = (\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e$, on λ_e era la longitud d'ona del raig de llum en el moment de l'emissió i λ_0 la longitud d'ona del mateix raig, observada en el moment actual. Ara bé, la llum procedent de les estrelles no és mai monocromàtica, sinó que és la superposició d'una gran quantitat de fotons amb diferents longituds d'ona. Si fem passar un raig de llum procedent d'una estrella per un prisma o per una xarxa de difracció es produirà un espectre d'un dels tipus que acabem de descriure, i si observem en aquest espectre les ratlles d'un determinat element que hi sigui present (hidrogen, heli…) i les comparem amb les ratlles de l'espectre del mateix element obtingudes en un laboratori aquí a la Terra, veurem que presenten el mateix aspecte, però estan desplaçades cap a la dreta o a l'esquerra (usualment cap a les freqüències del vermell).

De totes les ratlles de l'espectre de l'element escollit, elegim-ne una (la que es vegi millor a la placa fotogràfica) i a partir d'ella calculem el corriment cap al vermell per la fórmula anterior, prenent com λ_0 la longitud d'ona observada en l'espectre del raig de llum procedent de l'estrella, i prenent com λ_e la longitud d'ona de la mateixa ratlla espectral de l'element químic, mesurada en un laboratori de la Terra. La raó per la qual podem identificar la longitud d'ona λ_e en el moment de l'emissió (milions d'anys enrere) amb la longitud d'ona mesurada ara en un laboratori terrestre rau en el fet que les longituds d'ona de les ratlles espectrals estan associades a energies de salts entre dues capes orbitals de l'àtom de la substància química que es considera, i aquestes energies no canvien amb el temps si es mesuren en una referència en repòs respecte als àtoms que es consideren.

En resum, podem conèixer el corriment cap al vermell de la llum d'una determinada estrella analitzant l'espectre dels raigs de llum que en procedeixen.

13 Determinació dels paràmetres cosmològics a partir d'observacions astronòmiques

En aquesta secció donarem una estratègia per a determinar els paràmetres cosmològics mitjançant observacions astronòmiques.

La proposició 8 ens dóna la distància lumínica d'una determinada estrella dintre d'una certa galàxia, d_L, en funció del corriment cap al vermell, z, i dels paràmetres cosmològics H_0, $\Omega_{\mathrm{rad},0}$, $\Omega_{m,0}$ i $\Omega_{\Lambda,0}$. És a dir:

$$d_L = F(z, H_0, \Omega_{\mathrm{rad},0}, \Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0}) \tag{48}$$

(tingueu en compte que la magnitud u_e que figura al segon membre de les expressions de la proposició 8 està relacionada amb el corriment cap al vermell, z, a través de (36)). Però, tant el corriment cap al vermell, z, com la distància lumínica d_L d'una candela estàndard són magnituds que es poden mesurar directament a través de l'observació. L'estratègia de determinar els paràmetres cosmològics és, doncs, fàcil: fer moltes observacions de supernoves, mesurar directament la z i la d_L de cada supernova, i tractar d'adaptar els paràmetres cosmològics de la fórmula (48) de manera que es minimitzin els errors.

Cal tenir en compte, però, que la teoria de models cosmològics que hem presentat ignora els moviments particulars de cada galàxia i suposa que totes elles segueixen corbes de l'espaitemps de la forma $t \to (A, t)$. Això fa que totes les fórmules s'hagin d'interpretar, no com expressions exactes, sinó com expressions que només es compleixen des d'un punt de vista estadístic. Així, doncs, per a determinar els paràmetres cosmològics d'una manera fiable pel mètode descrit calen moltes observacions i, si és possible, per a valors elevats del corriment cap al vermell, z. Però localitzar supernoves del tipus Ia en galàxies molt distants no és pas una feina fàcil. De fet, l'equip de recerca de Saul Perlmutter (Supernova Cosmology Project) en va poder observar 42, mentre que l'equip d'Adam G. Riess i Brian P. Schmidt (High-z Supernova Search Team) va treballar només amb 16 supernoves. Són molt poques per a determinar tants paràmetres cosmològics.

De totes maneres, hi ha evidències que el valor de $\Omega_{\mathrm{rad},0}$ és molt petit en comparació amb $\Omega_{m,0}$ i $\Omega_{\Lambda,0}$. Per tant, en una primera aproximació es pot suposar $\Omega_{\mathrm{rad},0} = 0$. D'altra banda, per a determinar la constant de Hubble H_0 no calen observacions de galàxies tan llunyanes, i des de la dècada del 1920 s'han anat fent diverses determinacions, cada vegada més acurades. El valor que actualment s'atribueix a aquesta constant és de 71 km per segon cada megaparsec ($H = \dot{a}/a$ és una velocitat d'allunyament en funció de la distància). Però velocitat (espai dividit per temps) dividit per espai, queda temps^{-1}. O sigui:

$$H_0 = 71 \text{ km}/(\text{seg.Mpc}) = (1 \text{ Mpc són } 30{,}857 \times 10^{18} \text{ km}) = 7{,}2562 \times 10^{-11} \text{ anys}^{-1}.$$

Amb tot això, a la fórmula (48) només queden dos paràmetres per determinar: $\Omega_{m,0}$ i $\Omega_{\Lambda,0}$. El valor mitjà d'aquests paràmetres, obtingut a través de supernoves distants, és:

$$\Omega_{m,0} = 0{,}65, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 1{,}2.$$

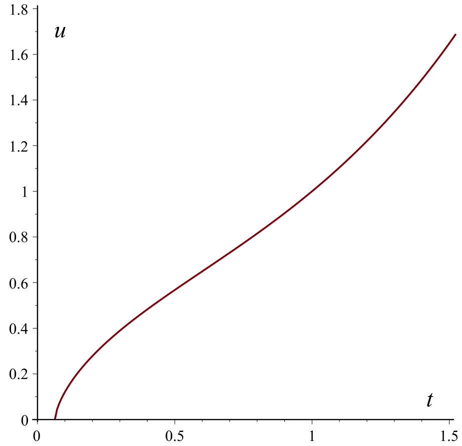

FIGURA 3

Com que $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1$, la fórmula (25) ens diu que la curvatura de l'espai és positiva. La mateixa fórmula (25), tenint en compte que $k = 1$, ens permet calcular el radi de curvatura actual, a_0, de l'univers:

$$a_0 = cH_0^{-1}(\Omega_0 - 1)^{-\frac{1}{2}} \simeq 15 \times 10^9 \text{ anys llum.}$$

L'equació diferencial (27), amb els valors anteriors dels paràmetres, ens donarà l'evolució amb el temps de $u(t) = a(t)/a_0$. Per a representar aquesta funció, prendrem com a origen de temps galàctic l'instant $t = t_0 - H_0^{-1}$ i com a unitat de temps H_0^{-1}. Amb aquest origen i aquesta unitat de temps, l'instant actual és $t_0 - (t_0 - H_0^{-1}) = H_0^{-1} = 1$. Com que per definició de u es té $u(1) = a_0/a_0 = 1$, la condició inicial de l'equació diferencial (27) serà $u(1) = 1$.

La figura 3 mostra la solució $u(t)$ amb aquesta condició inicial obtinguda amb Maple per mètodes numèrics. El Big Bang correspondrà al valor de t, $t = t_B$, per al qual $a(t_B) = 0$. El càlcul amb Maple dóna $t_B = 0,063$. O sigui, que el temps transcorregut des del Big Bang fins ara és 1 − 0,063 = 0,937 (en unitats de H_0^{-1}). Això correspon a $12{,}9 \times 10^9$ anys.

Ens interessen molt els punts d'inflexió (si n'hi ha) de $u(t)$. En virtut de (27), aquests punts corresponen a l'anul·lació de la derivada de la funció

$$f(u) = H_0(\Omega_{\text{rad},0}u^{-2} + \Omega_{m,0}u^{-1} + (1 - \Omega_0) + \Omega_{\Lambda,0}u^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En el nostre cas, hi ha un punt d'inflexió que correspon a $t = 0{,}647$. La distància en temps des del moment de la inflexió fins ara és 1 − 0,647 = 0,353 (en unitats de H_0^{-1}). Això correspon a $4{,}9 \times 10^9$ anys. En resum, l'univers es va dilatar desacceleradament des del Big Bang fins a fa uns cinc mil milions d'anys. A partir d'aquell moment, la dilatació es va començar a accelerar, i aquesta acceleració anirà augmentant.

Explicarem ara com a partir dels valors de $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ i $\Omega_{\text{rad},0}$ es pot saber d'una manera immediata (qualssevol que siguin aquests valors i només amb una simple suma) si l'expansió de l'univers en el moment actual és accelerada o desaccelerada. Es defineix el paràmetre desacceleració, q_0, de la manera següent:

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2}.$$

Si $q_0 > 0$, llavors $\ddot{a}_0 < 0$ i l'expansió és desaccelerada. Vegem ara com es calcula d'una manera immediata aquest paràmetre. Seguint la filosofia de pensar la constant cosmològica com si estigués originada per un fluid de densitat ϵ_Λ i pressió p_Λ, l'equació (14) es pot escriure així:

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{c^2}\sum_i (3p_i + \epsilon_i),$$

on la suma del segon membre es refereix als fluids que intervenen (radiació, massa de la matèria i constant cosmològica). Cada un d'aquests fluids tindrà una equació d'estat $p_i = w_i \epsilon_i$. Per tant, l'equació anterior s'escriu

$$-\frac{3\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{c^2}\sum_i (3w_i + 1)\epsilon_i.$$

Dividim ara l'equació per H_0^2. Quedarà:

$$-\frac{\ddot{a}}{H_0^2 a} = \frac{1}{2}\frac{8\pi G}{3c^2 H_0^2}\sum_i (3w_i + 1)\epsilon_i.$$

Però el factor $8\pi G/(3c^2 H_0^2)$ del segon membre és justament $1/\epsilon_c$, on ϵ_c és la densitat crítica donada per (23). Per tant, això s'escriu

$$-\frac{\ddot{a}}{H_0^2 a} = \frac{1}{2}\sum_i (3w_i + 1)\Omega_i.$$

Tenint en compte que $w_m = 0$, $w_{\text{rad}} = 1/3$ i $w_\Lambda = -1$, la igualtat anterior, per a $t = t_0$, s'escriu

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_{m,0} + \Omega_{\text{rad},0} - \Omega_{\Lambda,0}. \tag{49}$$

En el nostre cas, $q_0 = 0{,}65/2 - 1{,}2 = -0{,}875$. Per tant, en el moment actual l'expansió s'accelera.

14 Cuinant les dades observades

Ja hem dit abans que els valors dels paràmetres cosmològics que acabem de donar es basen en relativament poques observacions de supernoves de tipus Ia. Per tant, estan subjectes a errors bastant grans. Els intervals de confiança usuals del parell de dades $(\Omega_{m,0}, \Omega_{\Lambda,0})$ estan limitats per el·lipses força grans en el pla d'aquestes dues variables (el·lipses de centre el parell de valors que hem donat).

A banda dels equips que es dediquen a observar supernoves, hi ha una gran quantitat de físics teòrics que contemplen aquesta qüestió des d'altres angles: estudi aprofundit de la radiació còsmica de fons (Cosmic Microwave Background, CMB) i de les oscil·lacions acústiques bariòniques (Baryonic Acoustic Oscillations, BAO). El 2008 va aparèixer un article [8], que ha tingut molta repercussió, signat per setanta investigadors del Supernova Cosmology Project (entre aquests investigadors hi havia P. Ruiz La Puente, del Departament d'Astronomia de la Universitat de Barcelona) en què, ajuntant tots els resultats dels equips de CMB, de BAO i de supernoves, proposaven els valors següents dels paràmetres cosmològics:

$$\Omega_{m,0} = 0{,}285, \quad \Omega_{\Lambda,0} = 0{,}724.$$

El paràmetre $\Omega_{\mathrm{rad},0}$, altres autors l'han situat entorn de $8{,}4 \times 10^{-5}$. Aquests valors, malgrat que difereixen bastant dels que hem donat abans, que només tenien en compte les supernoves, sí que estan dintre de l'el·lipse de confiança del 68,3 % d'aquestes últimes (tingueu en compte que com més baix és el límit de confiança més petita és també la regió de confiança. És més petita la regió corresponent al 68,3 % (entre $-\sigma$ i σ) que la que correspon al 95,4 % (entre -4σ i 4σ)).

Com que la suma $\Omega_0 = \Omega_{\mathrm{rad},0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$ (per als valors que acabem de donar) és 1,009 (pràcticament, 1), es tracta d'un model que és gairebé de curvatura nul·la, amb paràmetre de desacceleració actual $q_0 = 0{,}285/2 - 0{,}724 \simeq -0{,}58$.

La gràfica de $u(t)$ corresponent a aquestes noves dades no difereix gaire de la de la figura 3. El Big Bang se situaria, segons les noves dades, a una distància de nosaltres de $13{,}5 \times 10^9$ anys, i el punt d'inflexió (pas de desaccelerat a accelerat) a $5{,}7 \times 10^9$ anys.

15 Matèria fosca i energia fosca

Les dades anteriors, arrodonides, són aproximadament $\Omega_{m,0} = 0{,}3$, $\Omega_\Lambda = 0{,}7$. O sigui, que la densitat de massaenergia corresponent al fluid «responsable» hipotèticament de la constant cosmològica és un 70 % de la densitat total de massaenergia, mentre que la densitat de massaenergia de la matèria correspon a un 30 %. Com que el fluid responsable de la constant cosmològica no es pot veure, els físics parlen d'*energia fosca* quan es refereixen a la massaenergia d'aquest fluid. Des d'aquest punt de vista, l'energia fosca és aproximadament el 70 % de l'energia de l'univers. Ara bé, l'altre 30 % (el que correspon al valor $\Omega_{m,0} = 0{,}3$) també és problemàtic. Però abans de parlar d'això, hauríem d'explicar què és la matèria bariònica i la no bariònica.

Un barió es defineix com una partícula composta per tres quarks. Els protons i els neutrons, responsables de la major part de massa dels àtoms, són exemples de barions. En canvi, els electrons no són barions (són leptons) i la seva massa és molt petita. Quan els físics parlen de *massa bariònica* es refereixen a la massa formada per barions (la massa dels ions, dels àtoms i, per tant, de les molècules).

Actualment es creu que la densitat $\Omega_{m,0}$ estaria composta per densitat de massa bariònica, $\Omega_{\mathrm{bar},0}$, i densitat de massa de naturalesa desconeguda (massa fosca, que no veiem), $\Omega_{\mathrm{dark},0}$, amb els valors estimats següents: $\Omega_{\mathrm{bar},0} \simeq 0{,}04$, $\Omega_{\mathrm{dark},0} \simeq 0{,}26$. En resum, de tota la massaenergia de l'univers, un 4 % correspondria a la massa habitual (estrelles, planetes, etc.), un 26 % a massa que no es pot veure, entre la qual els físics compten la que correspon al que anomenen WIMP (Weakly Interacting Massive Particles) i un 70 % a l'energia fosca corresponent a la constant cosmològica.

16 Punts febles de la teoria

Acabarem l'article esmentant alguns punts dèbils de tot aquest muntatge. En primer lloc, molts autors han expressat dubtes sobre el comportament de les candeles estàndard a tanta distància. Com sabem que les supernoves de tipus Ia es comportaven fa cinc mil milions d'anys (en unes condicions molt diferents de les actuals) tal com es comporten ara? Tingueu en compte que hem fonamentat la mesura de distàncies en aquest comportament en galàxies pròximes. D'altra banda, si la major part de la densitat de massa que intervé en $\Omega_{m,0}$ no correspon a la massa habitual d'estrelles i planetes, sinó a una massa de naturalesa gens coneguda, és assenyat atribuir a aquest fluid perfecte una pressió nul·la (com si es tractés de «dust», que diuen en anglès)? Sí que sembla intuïtiu atribuir pressió nul·la a un fluid compost per galàxies. Però, això continua sent natural per a la massa fosca? Tingueu en compte que aquest fet ha estat crucial per a establir (18), que ha jugat un paper important en tots els càlculs posteriors. Una assignació d'un valor diferent de zero a w_m faria variar significativament les conclusions.

Referències

[1] Einstein, A. «Zur Elektrodynamik bewegter Körper». *Annalen der Physik*, 322 (10) (1905), 891–921.

[2] Einstein, A. «Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?». *Annalen der Physik*, 323 (13) (1905), 639–641.

[3] Einstein, A. «Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie». *Annalen der Physik*, 354 (7) (1916), 769–822.

[4] Einstein, A. «Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie». *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.* (1917), 142–152.

[5] Girbau, J. «Relatividad: un curso acelerado». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 2 (2) (1999), 237–262.

[6] GIRBAU, J.; BRUNA, L. *Stability by linearization of Einstein's field equation*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2010. (Progress in Mathematical Physics; 58)

[7] HOYNG, P. *Relativistic Astrophysics and Cosmology*. Berlín-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.

[8] KOWALSKI, M. [*et al.*]. «Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets». *The Astrophysical Journal*, 686 (2008), 749–778. Supernova Cosmology Project Collaboration. [Disponible a http://arxiv.org/pdf/0804.4142v1.pdf]

[9] MINKOWSKI, H. «Raum und Zeit». *Physikalische Zeitschrift*, 10 (1909), 104–111. Conferència donada a la vuitantena reunió de científics naturals i metges alemanys, a Colònia, el 21 de setembre de 1808.

[10] NARLIKAR, J. V. *An Introduction to Cosmology*. 3a ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[11] PERLMUTTER, S. [*et al.*]. «Measurement of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae». *The Astrophysical Journal*, 517 (2) (1999), 565–586.

[12] RIESS, A. G. [*et al.*]. «Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant». *The Astronomical Journal*, 116 (3) (1998), 1009–1038.

[13] RIESS, A. G. [*et al.*]. «Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and contraints on dark energy evolution». *The Astrophysical Journal*, 607 (2004), 665–687.

[14] RYDEN, B. *Introduction to Cosmology*. San Francisco, CA: Addison Wesley, 2003.

[15] SCHUTZ, B. F. *A first course in general relativity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
EDIFICI C, FACULTAT DE CIÈNCIES
08193 BELLATERRA (BARCELONA)
girbau@mat.uab.cat