

De les equacions diferencials d'Abel al problema XVI de Hilbert

ARMENGOL GASULL I EMBID

Resum: L'estudi dels cicles límit dels sistemes polinomials d'equacions diferencials al pla ve motivat tant per la seva aparició en molts models matemàtics de la realitat com per la segona part del problema XVI de Hilbert. En aquest treball farem un breu recordatori d'aquest problema i veurem el paper important que fan les equacions diferencials d'Abel en aquest tema.

Paraules clau: òrbita periòdica, cicle límit, problema XVI de Hilbert, equació de Riccati, equació d'Abel.

Classificació MSC2010: 34C07, 34C25, 37C27.

1 Introducció

Les equacions diferencials (ED) polinomials al pla apareixen sovint com a models senzills de diversos fenòmens a la física, l'ecologia, la química, l'economia, la medicina... Vegem-ne uns quants exemples:

- Usant les lleis d'Ohm, Faraday i Kirchhoff es pot deduir que l'ED que modela l'estat d'un circuit RLC (resistència-bobina-condensador) és l'anomenada avui en dia equació de Van der Pol, estudiada per aquest matemàtic el 1927; vegeu [31, 48]. Aquesta equació en versió adimensionalitzada s'escriu $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$ o, equivalentment, com el sistema d'ED cúbiques al pla,

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - \mu(x^2 - 1)y,$$

on μ és un cert paràmetre positiu, x ens dóna la intensitat del circuit i y el seu voltatge.

- El model depredador-presa de Rosenzweig-MacArthur [41, 45] està donat pel sistema d'ED

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{mxy}{A+x}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -\delta y + y \frac{mxy}{A+x},$$

on tots els paràmetres són positius, i $x \geq 0$, $y \geq 0$ són les densitats de les dues poblacions, depredador i presa, respectivament. Introduint un nou temps s tal que $dt/ds = A+x$, el sistema es transforma en un sistema d'ED polinomial cúbic. De fet, en general, els models de dinàmica de poblacions anomenats de Kolmogorov s'escriuen

$$\dot{x} = xf(x, y), \quad \dot{y} = yg(x, y),$$

per a unes certes funcions f i g que tenen en compte la interrelació entre les dues poblacions descrites en cada model: depredador-presa, parasitisme, simbiosi, competència... i que sovint es prenen racionals.

- Un model, de nou adimensionalitzat, per a estudiar l'evolució de reaccions químiques és

$$\dot{x} = x^2y - x + b, \quad \dot{y} = -x^2y + a,$$

on a i b són paràmetres reals positius i x i y donen les concentracions dels reactants; vegeu [46].

De fet, es demostra que tots tres models es caracteritzen perquè quan el temps augmenta les solucions tendeixen a una òrbita periòdica (cicle límit) de l'ED. Aquesta solució ens indica com es comporta el circuit, o el model depredador-presa, o la reacció química. En tots tres casos, passat un cert estat transitori, el que observem és un comportament oscil·latori estable del model.

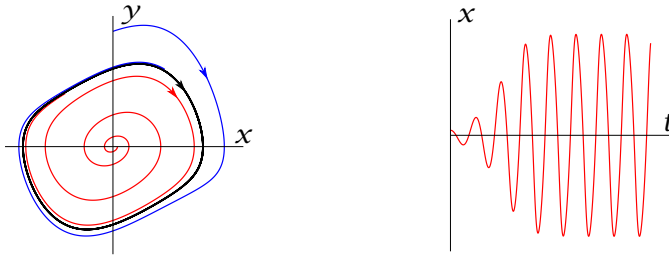


FIGURA 1: A l'esquerra, un cicle límit al pla (x, y) i dues òrbites que hi tendeixen. A la dreta, la primera coordenada $x = x(t)$ de l'òrbita que tendeix al cicle límit des del seu interior.

Recordem que, en general, donada una ED, $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, una solució no constant $\mathbf{x} = \phi(t)$ tal que $\phi(t+T) = \phi(t)$, per a un cert $T > 0$, s'anomena *òrbita periòdica* de l'ED. El mínim valor T que satisfà la propietat esmentada s'anomena *període* de l'òrbita periòdica. Si aquesta òrbita periòdica té un entorn obert a l'espai de fase dins del qual és l'única solució periòdica, aleshores s'anomena *cicle límit*.



D. Hilbert (1862–1943)



H. Poincaré (1854–1912)

Els exemples anteriors, i molts d'altres, mostren que les òrbites periòdiques en general i els cicles límit en particular són uns dels objectes interessants quan s'estudien ED. Això és encara més cert quan es tracta d'ED al pla, ja que en aquest cas el teorema de Poincaré-Bendixson ens assegura que no apareixen els anomenats atractors estranys i aleshores tots els comportaments límit són senzills. En concret, aquests comportaments són o bé punts crítics (comportaments estacionaris), o bé òrbites periòdiques (comportaments oscil·latoris), o bé els anomenats gràfics o policicles, que no tractarem en aquest treball. De fet, els comportaments límit corresponen a les solucions de les ED observables en els models reals.

De totes maneres, la motivació per a estudiar els cicles límit dels sistemes d'ED al pla no es restringeix a la seva aplicabilitat per a l'estudi de diversos models reals. Hilbert, en la seva famosa llista de problemes exposada al Congrés Internacional de Matemàtiques de l'any 1900, va dedicar la segona part del problema XVI als cicles límit. Aquesta segona part es podria resumir com:

Donada la família d'equacions diferencials a \mathbb{R}^2 ,

$$\dot{x} = P_n(x, y), \quad \dot{y} = Q_n(x, y), \quad (1)$$

on P_n i Q_n són polinomis arbitraris de grau menor o igual que n , esbrinar si hi ha una fita uniforme, $\mathcal{H}(n)$, per al nombre de cicles límit que pot tenir.

La primera part del seu problema XVI fa referència al nombre i la disposició de les components d'una corba algebraica plana; vegeu, per exemple, [49, 50].

La seva pregunta estava segurament motivada pels estudis previs d'Henri Poincaré. És interessant llegir el treball recent [27] en el qual s'explica la resposta de Poincaré de l'any 1908 a la llista de problemes de Hilbert.

La segona part del problema XVI és molt lluny de ser resolta. A finals del segle passat hi va haver un avenç molt significatiu. De manera independent, Écalle i Il'yashenko a [20, 33] van demostrar que cada camp concret de la forma (1) té un nombre finit de cicles límit. Amb motiu del centenari del problema XVI van sorgir diverses revisions sobre els avenços que s'havien fet; citem, per exemple, [34, 38] i vegeu també [28]. Igualment, val la pena remarcar que Smale,

en una llista de problemes per a aquest segle [47], va tornar a incloure la qüestió del nombre de cicles d'ED polinomials al pla. Atesa la dificultat esmentada per a abordar el cas general (1), va proposar dirigir tots els esforços a un cas particular d'ED polinomials al pla, les anomenades ED de Liénard,

$$\dot{x} = y - F_n(x), \quad \dot{y} = -x,$$

on F_n és un polinomi de grau n . Aquest problema també es resisteix a ser resolt. Últimament hi ha hagut petits però importants progressos en aquesta qüestió que mostren que és encara més difícil del que semblava; vegeu [19, 37]. De fet, en paraules de Smale mateix, els treballs [20, 33] encara no han estat digerits per la comunitat matemàtica.

Se sap molt poc sobre els nombres $\mathcal{H}(n)$. És ben conegut que les ED lineals autònomes no tenen cicles límit, tot i poder presentar continus d'òrbites periòdiques. Per tant, $\mathcal{H}(1) = 0$. No és difícil construir una ED quadràtica amb cicles límit. Per exemple, l'ED

$$\dot{x} = -y(2 + x + y) - (x^2 + y^2 - 1), \quad \dot{y} = x(2 + x + y)$$

té com a cicle límit el cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ i, per tant, $\mathcal{H}(2) \geq 1$. Potser cal remarcar aquí que, al contrari que en aquest exemple acadèmic, la major part dels cicles límit que apareixen a les ED no es poden trobar explícitament. Avui en dia se sap que $\mathcal{H}(2) \geq 4$ i es pensa que $\mathcal{H}(2)$ serà 4, però aquest problema, en aparença senzill, està resistint totes les aproximacions usades. De fet, ni tan sols se sap si $\mathcal{H}(2)$ existeix. De manera similar només se sap que $\mathcal{H}(3) \geq 11$ o que $\mathcal{H}(4) \geq 20$; vegeu [28].

Pel que fa al cas general, el millor resultat conegut és el que afirma que $\mathcal{H}(n)$ creix com a mínim com $K n^2 \log(n)$ per a una certa $K > 0$. Aquest resultat va ser provat el 1995 a [9]. Vegeu també [38].

Atesa la dificultat d'aquest problema de Hilbert, el principal objectiu d'aquest treball serà localitzar quina és la família d'ED més senzilla per a la qual la qüestió del nombre de cicles límit no se sap resoldre i donar una panoràmica de quin és el coneixement actual sobre aquesta família. De fet, farem una excursió que començarà per les ED lineals, passarà per les ED de Riccati i acabarà en les ED d'Abel. Finalment, veurem que, de fet, les ED d'Abel estan fortament relacionades amb el problema de Hilbert, tancant d'alguna manera el cercle.

Aprofitarem aquest recorregut per a veure d'una manera senzilla perquè $\mathcal{H}(n)$ creix com a mínim quadràticament amb n .

2 De les equacions diferencials lineals a les equacions diferencials d'Abel

Què ha de fer un matemàtic davant d'un problema, com el de Hilbert, que sembla inabastable? Doncs, buscar el cas més senzill del problema que no se sàpiga resoldre i intentar trobar-hi la resposta.

És fàcil veure que les ED a \mathbb{R} no tenen solucions periòdiques i que, per tant, no tenen cicles límit. Ja hem vist que les ED a \mathbb{R}^2 sí que en tenen. I entre \mathbb{R} i \mathbb{R}^2 ? Les ED de la forma

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{2}$$

amb $x \in \mathbb{R}$, s'anomenen ED *no autònomes* i informalment es diu que «viuen a dimensió 1.5». Estudiem-les amb una mica de detall. Com que busquem ED amb solucions periòdiques, imposarem a més que f sigui T -periòdica en t . De fet, canviant d'escala el temps, podem suposar que $T = 2\pi$. Per a aquestes equacions no autònomes podem definir de manera similar les nocions d'òrbita periòdica i de cicle límit. L'única diferència és que en aquest cas totes les solucions periòdiques tenen període 2π .

Si anomenem $x = \phi(t, \rho)$ a la solució de (2) tal que $\phi(0, \rho) = \rho$, la funció $\Pi(\rho) := \phi(2\pi, \rho)$ juga un paper determinant per a conèixer el nombre d'òrbites periòdiques. Així, els punts fixos de $\Pi(\rho)$ corresponen a òrbites periòdiques de (2) i els seus punts fixos isolats són condicions inicials que donen lloc a cicles límit. Aquesta aplicació Π se sol anomenar *aplicació de Poincaré*; vegeu la figura 2.

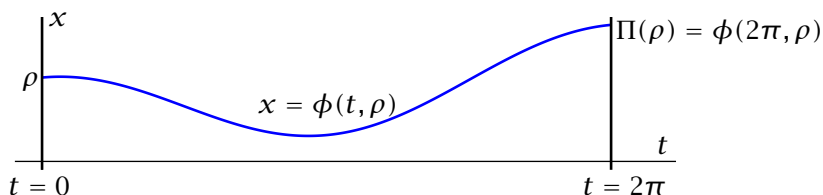


FIGURA 2: Aplicació de Poincaré.

En aquesta secció estudiarem el nombre de cicles límit de les ED no autònomes lineals, de Riccati i d'Abel.

2.1 Equacions diferencials lineals

Considerem ED lineals, $\dot{x} = a(t) + b(t)x$, amb a i b funcions derivables i 2π -periòdiques. Per exemple l'ED, $\dot{x} = 2 \sin(t) + \sin(t)x$ té totes les solucions periòdiques, però no té cicles límit. Això és degut al fet que les solucions que compleixen la condició inicial $x(0) = \rho$ són

$$x = \phi(t, \rho) = -2 + (2 + \rho)e^{1-\cos t},$$

i clarament totes són 2π -periòdiques. Observem que ara l'aplicació de Poincaré és $\Pi(\rho) \equiv \rho$. D'altra banda, l'ED $\dot{x} = 2 \sin(t) - x$ té un únic cicle límit. En aquest cas, les solucions que satisfan $x(0) = \rho$, són

$$x = \phi(t, \rho) = \sin t - \cos t + (1 + \rho)e^{-t}.$$

Aleshores, $\Pi(\rho) = \rho$ ens dona l'equació $-1 + (1 + \rho)e^{-2\pi} = \rho$, que té com a solució $\rho = -1$. Per tant, el cicle límit, que és únic, és $\phi(t, -1) = \sin t - \cos t$. En general, tenim el resultat següent:



J. Riccati (1676-1754)



D. Bernoulli (1700-1782)

LEMA 1. *Les ED lineals 2π -periòdiques tenen:*

- (i) *un continu de solucions periòdiques (centre); o bé*
- (ii) *cap solució periòdica; o bé*
- (iii) *una única solució periòdica (cicle límit).*

PROVA. La solució de $\dot{x} = a(t) + b(t)x$, que compleix $x(0) = \rho$ és:

$$x = \phi(t, \rho) = \left(\int_0^t a(s)e^{-B(s)} ds + \rho \right) e^{B(t)},$$

on $B(s) = \int_0^s b(w) dw$. Per tant, l'aplicació de Poincaré és

$$\Pi(\rho) = \phi(2\pi, \rho) = m + n\rho,$$

on

$$m = e^{B(2\pi)} \int_0^{2\pi} a(s)e^{-B(s)} ds, \quad n = e^{B(2\pi)}.$$

Les òrbites periòdiques corresponen als valors de ρ que són solució de l'equació $\Pi(\rho) = \rho$, que en el nostre cas és l'equació lineal $m + n\rho = \rho$. Aquesta equació té 0, 1 o un continu de solucions segons els valors de m i n . Això prova el resultat. \square

2.2 Equacions diferencials de Riccati

Les ED de Riccati periòdiques s'escriuen en la forma

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2, \quad (3)$$

on a , b i c són funcions derivables i 2π -periòdiques. Un fet no gaire conegut, però remarcable, és que l'estudi d'una ED de Riccati va ser una de les eines clau en el famós treball [5] de Daniel Bernoulli on va estudiar els efectes de la vacunació en el tractament de la verola i que es considera l'inici de l'epidemiologia. Més concretament, Bernoulli va considerar l'ED

$$\dot{x} = \left(\frac{n'(t)}{n(t)} - p \right) x + \frac{p}{m n(t)} x^2,$$

on $n(t)$ és el nombre de persones vives amb edat t , $x(t)$ és el nombre de persones propenses a contraure la verola a l'edat t , p és la probabilitat que un individu propens contragui la malaltia i $1/m$ la proporció dels qui moren per la verola; vegeu també [18]. De fet, avui en dia, les ED de Riccati també apareixen en treballs que estudien la velocitat de propagació de certes malalties infeccioses; vegeu, per exemple, [44].

És fàcil construir exemples d'ED de Riccati amb dos cicles límit. Així, l'ED

$$\dot{x} = 1 + \sin t + \cos t - \cos^2 t - (1 + 2 \sin t)x + x^2,$$

en té dos i són $x = \sin t$ i $x = 1 + \sin t$. Per a demostrar-ho, calculem les solucions de l'ED que satisfan $x(0) = \rho$. Arribem a

$$x = \phi(t, \rho) = \sin t + \frac{\rho}{\rho + (1 - \rho)e^t}.$$

Els cicles límit s'obtenen calculant les solucions de $\Pi(\rho) = \phi(2\pi, \rho) = \rho$. Aquesta equació és equivalent a $\rho = \rho(\rho + (1 - \rho)e^{2\pi})$, que té només dues solucions, $\rho = 0$ i $\rho = 1$. Aquests valors són les condicions inicials dels dos cicles límit donats.

Veurem, a continuació, una prova senzilla i ben coneguda que aquest és el màxim nombre de cicles límit que poden tenir en general.

PROPOSICIÓ 2. *Les ED de Riccati 2π -periòdiques (3) tenen:*

- (i) *un continu de solucions periòdiques (centre); o bé*
- (ii) *cap solució periòdica; o bé*
- (iii) *una única solució periòdica (cicle límit); o bé*
- (iv) *dues solucions periòdiques (dos cicles límit).*

PROVA. Si l'equació no té cap solució periòdica, ja hem acabat. Suposem que en tingui una, $x = x_0(t)$. Aleshores, fent el canvi de variable

$$y = \frac{1}{x - x_0(t)},$$

l'ED (3) s'escriu

$$\dot{y} = -c(t) + (2c(t)x_0(t) + b(t))y,$$

que és una ED lineal i ja es pot resoldre explícitament. Calculant la seva solució i desfent el canvi que hem fet obtenim que la solució de (3) que compleix $x(0) = \rho$ s'escriu

$$x = \phi(t, \rho) = \frac{M(t) + N(t)\rho}{P(t) + Q(t)\rho}, \tag{4}$$

per a certes funcions M, N, P, Q que depenen de a, b, c i x_0 .

Per tant, l'aplicació de Poincaré és

$$\Pi(\rho) = \frac{M(2\pi) + N(2\pi)\rho}{P(2\pi) + Q(2\pi)\rho} = \frac{m + n\rho}{p + q\rho},$$



N. H. Abel (1802-1829). Bitllet i segell commemoratiu.

amb m , n , p i q nombres reals. Recordem que les òrbites periòdiques corresponen als valors de ρ que compleixen $\Pi(\rho) = \rho$, igualtat que en aquest cas s'escriu

$$\frac{m + n\rho}{p + q\rho} = \rho.$$

Aquesta equació té 0, 1, 2 o un continu de solucions, segons els valors dels paràmetres. Això prova la proposició. \square

Tot i que les ED de Riccati semblen totalment enteses, encara hi ha un problema amb referència a aquestes equacions que no està resolt: determinar, només a partir de a , b i c , quina de les quatre opcions de la proposició 2 es dóna. Això és senzill de fer quan es coneix alguna solució explícita, però no ho és en el cas general.

És interessant observar que l'aplicació de Poincaré per a les ED de Riccati és el que s'anomena una *homografia* o *transformació de Möbius*. Més endavant tornarem a aquest punt. El matemàtic alemany August Ferdinand Möbius (1790-1868) és conegut també per la famosa banda que porta el seu nom.

2.3 Equacions diferencials d'Abel

En aquesta subsecció considerarem les ED d'Abel,

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3, \quad (5)$$

amb a , b , c i d funcions derivables i 2π -periòdiques. Abans de començar a estudiar-les no podem deixar de comentar la importància del treball de l'eminent matemàtic noruec Niels Henrik Abel, fet a més en un període molt curt de temps. Un treball fàcilment accessible on s'expliquen moltes de les seves contribucions és [32]. Resumint, direm que alguns dels temes que va estudiar són: les sèries, les equacions funcionals i algebraiques, les equacions integrals i les integrals el·líptiques i hipere·líptiques. De fet, avui en dia hi ha més de 1.400 treballs a la base de dades MathSciNet amb el nom «Abel» al seu títol i més d'11.000 amb la paraula «abelian». Els resultats d'Abel sobre les ED de Riccati i sobre les equacions (5) es poden trobar a [1, cap. IV i V]. Més concretament, al capítol v, Abel va estudiar la integrabilitat de l'equació diferencial

$$(y + s(t)) \frac{dy}{dt} = -d(t) - c(t)y - b(t)y^2.$$

Quan $s(t) \equiv 0$, amb el canvi de variable $x = 1/y$, aquesta equació es transforma en (5) amb $a(t) \equiv 0$. En general, fent el canvi $x = 1/(y + s(t))$ arribem a un resultat similar. Sembla que va ser Kamke, en el seu famós llibre sobre integrabilitat, que va donar aquest nom a l'ED (5) quan presentava els resultats d'Abel (1881), Liouville (1886) i Appell (1889) sobre el tema (vegeu [7, 36]).

Com en el cas de Riccati, les ED d'Abel apareixen sovint en diversos àmbits de la ciència. Així, per exemple, en els treballs [4, 21, 29] s'apliquen a models d'ecologia, a teoria de control per a circuits elèctrics i a cosmologia.

En aquest punt ja no ha de sorprendre que hi hagi ED d'Abel amb tres cicles límit. Això és ben cert, però aquestes equacions ens tenen reservada una sorpresa:

TEOREMA 3 (LINS-NETO, [39]). *Donat qualsevol $k \in \mathbb{N}$ hi ha una ED d'Abel 2π -periòdica (5) que té com a mínim k cicles límit.*

Donarem les idees principals de la demostració d'aquest resultat i altres propietats de les ED d'Abel a la secció següent.

3 Alguns resultats sobre les equacions d'Abel

Dividirem aquesta secció en dues parts. A la primera, enunciarèm i provarem alguns resultats que donen fites superiors per al nombre de cicles límit per a les ED d'Abel (5), amb certes hipòtesis addicionals, i a la segona, ens centrarem en la prova del teorema 3.

3.1 Resultats que fiten el nombre de cicles límit per a una ED d'Abel

Una de les principals diferències entre les ED de Riccati o les lineals i les d'Abel és que, per a aquestes últimes, no se sap trobar explícitament ni el flux, ni l'aplicació de Poincaré associada, Π . Afortunadament, hi ha un resultat de Lloyd [40] que ens dóna una expressió força útil que relaciona Π' , Π'' i Π''' en el cas general.

PROPOSICIÓ 4 (LLOYD, [40]). *Considerem l'ED 2π -periòdica no autònoma (2), amb f de classe C^3 . Si Π és la seva aplicació de Poincaré associada, aleshores*

$$\begin{aligned} \Pi'(\rho) &= \exp\left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} f(s, \phi(t, \rho)) dt\right), \\ \Pi''(\rho) &= \Pi'(\rho) \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, \phi(t, \rho)) \exp\left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, \phi(s, \rho)) ds\right) dt \right], \\ \Pi'''(\rho) &= \Pi'(\rho) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\Pi''(\rho)}{\Pi'(\rho)}\right)^2 + \int_0^{2\pi} \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(t, \phi(t, \rho)) \right. \\ &\quad \left. \times \exp\left(2 \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, \phi(s, \rho)) ds\right) dt \right], \end{aligned}$$

on $\phi(t, \rho)$ és la solució de (2) que compleix $\phi(0, \rho) = \rho$.

PROVA. Com que $x = \phi(t, \rho)$ és la solució de (2), es compleix que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, \rho) = f(t, \phi(t, \rho)), \quad \phi(0, \rho) = \rho.$$

Derivant respecte a ρ i usant la regla de Schwarz, tenim que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi'(t, \rho) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, \phi(t, \rho)) \phi'(t, \rho),$$

on per simplicitat fem servir la notació

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \phi(t, \rho) = \phi'(t, \rho), \quad \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \phi(t, \rho) = \phi''(t, \rho) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} \phi(t, \rho) = \phi'''(t, \rho).$$

Per tant,

$$\phi'(t, \rho) = \exp \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial x} f(s, \phi(s, \rho)) ds \right), \quad (6)$$

i, a més,

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln(\phi'(t, \rho)) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, \phi(t, \rho)).$$

Derivant aquesta igualtat respecte a ρ i utilitzant altra vegada la regla de Schwarz, obtenim

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, \phi(t, \rho)) \phi'(t, \rho). \quad (7)$$

Integrant (7), arribem a

$$\frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} = \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s, \phi(s, \rho)) \phi'(s, \rho) ds.$$

Com que $\Pi(\rho) = \phi(2\pi, \rho)$, substituint $t = 2\pi$ a la fórmula anterior i usant (6), obtenim l'expressió de $\Pi'(\rho)$ donada a l'enunciat.

Fent una derivació més de (7) respecte a ρ , obtenim

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi'''(t, \rho) \phi'(t, \rho) - \phi''(t, \rho)^2}{\phi'(t, \rho)^2} \right) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(t, \phi(t, \rho)) \phi'(t, \rho)^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t, \phi(t, \rho)) \phi''(t, \rho) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(t, \phi(t, \rho)) \phi'(t, \rho)^2 + \frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} \right) \\ &= \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(t, \phi(t, \rho)) \phi'(t, \rho)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Per tant,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi'''(t, \rho) \phi'(t, \rho) - \phi''(t, \rho)^2}{\phi'(t, \rho)^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} \right)^2 \right) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(t, \phi(t, \rho)) \phi'(t, \rho)^2,$$

d'on deduïm que

$$\frac{\phi'''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\phi''(t, \rho)}{\phi'(t, \rho)} \right)^2 = \int_0^t \frac{\partial^3}{\partial x^3} f(s, \phi(s, \rho)) \phi'(s, \rho)^2 ds.$$

Substituint $t = 2\pi$ a la fórmula anterior i fent servir altra vegada (6), obtenim l'expressió de $\Pi'''(\rho)$ desitjada. \square

Aplicant la proposició 4 podem donar per a les ED d'Abel un resultat similar al lema 1 i a la proposició 2, afegint, però, una hipòtesi addicional. Aquest resultat va ser demostrat a [43], molt abans que la proposició anterior. Inclourem també la prova original i la compararem amb la basada en la proposició 4.

TEOREMA 5 (PLISS, [43]). *Les ED d'Abel (5), 2π -periòdiques i amb $d(t) > 0$, tenen:*

- (i) *cap solució periòdica, o bé*
- (ii) *1, 2 o 3 cicles límit.*

PROVA AMB LA FÓRMULA DE LLOYD. Seguint [24], utilitzarem la proposició 4. En primer lloc, observem que, per a l'ED d'Abel,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t, \phi(t, \rho)) = 6d(t) > 0.$$

Per tant, com que a més $\Pi'(\rho) > 0$, tenim que $\Pi'''(\rho) > 0$. Suposem ara, per arribar a contradicció, que l'ED tinguéssim com a mínim quatre òrbites periòdiques. Aleshores, l'anomenada *funció de desplaçament*, $\Delta(\rho) := \Pi(\rho) - \rho$, tindria com a mínim quatre zeros i estaria ben definida en un interval obert, \mathcal{I} , contenint-los tots. Aplicant tres cops el teorema de Rolle, conclouríem que Δ' , Δ'' i Δ''' tindrien com a mínim 3, 2 i 1 zero, respectivament, tots continguts al mateix interval \mathcal{I} . Com que $\Delta'''(\rho) = \Pi'''(\rho) > 0$, hem arribat a la contradicció desitjada. Per tant, l'ED tindrà com a màxim tres òrbites periòdiques, que en cas d'existir hauran de ser cicles límit, tal com volíem demostrar. \square

Donem a continuació la demostració de Pliss:

PROVA ORIGINAL DEL TEOREMA 5. Suposem, per tal d'arribar a contradicció, que l'ED d'Abel (5) té quatre solucions 2π -periòdiques, $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < x_4(t)$ i considerem la funció positiva

$$H(t) := \frac{(x_4(t) - x_1(t))(x_3(t) - x_2(t))}{(x_3(t) - x_1(t))(x_4(t) - x_2(t))}. \tag{8}$$

Aquesta funció, per a cada t , ens dóna la raó doble entre els quatre punts $x_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$. Calculant, s'obté que

$$\frac{d(\ln(H(t)))}{dt} = -d(t)(x_4(t) - x_3(t))(x_2(t) - x_1(t)) < 0. \tag{9}$$

D'altra banda,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d(\ln(H(t)))}{dt} dt = \ln(H(2\pi)) - \ln(H(0)) = 0,$$

ja que la funció H és 2π -periòdica, i s'arriba, per tant, a la contradicció buscada. Així, l'ED té com a màxim tres cicles límit com volíem demostrar. \square

Tot i que les dues proves que hem donat són en aparença diferents, vegem que, en essència, són la mateixa. Per a això necessitem recordar les anomenades *diferències dividides*, que són usades normalment per al càlcul efectiu de polinomis interpoladors.

Donada una funció $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i x_1, x_2, \dots, x_m nombres reals diferents, escrivim $g_j := g(x_j)$ i definim de manera recurrent,

$$g_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n} := \frac{g_{i_2, \dots, i_{n-1}, i_n} - g_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}}{x_{i_n} - x_{i_1}}, \quad \text{per a } n \leq m.$$

Aquestes diferències dividides compleixen

$$g_{i_1, i_2, \dots, i_n} = g_{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_n)},$$

on σ és qualsevol permutació. A més, quan g és de classe C^{n-1} ,

$$g_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n} = \frac{1}{(n-1)!} g^{(n-1)}(\xi), \quad (10)$$

on ξ és un nombre que pertany a l'interval format pels punts x_1, x_2, \dots, x_m ; vegeu [35]. Observeu que, quan $n = 2$, l'expressió (10) és precisament el teorema del valor mitjà.

Si considerem l'ED d'Abel

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3 := f(t, x)$$

i, seguint Pliss, en prenem quatre solucions, $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < x_4(t)$, tenim que

$$\begin{aligned} \frac{d(\ln(H(t)))}{dt} &= \frac{f(t, x_4(t)) - f(t, x_1(t))}{x_4(t) - x_1(t)} + \frac{f(t, x_3(t)) - f(t, x_2(t))}{x_3(t) - x_2(t)} \\ &\quad - \frac{f(t, x_3(t)) - f(t, x_1(t))}{x_3(t) - x_1(t)} - \frac{f(t, x_4(t)) - f(t, x_2(t))}{x_4(t) - x_2(t)}, \end{aligned}$$

on H està donada a (8). Fixem t i, per simplificar la notació, escrivim $x_j = x_j(t)$ i introduïm $g(x_j) = f(t, x_j(t))$. Aleshores, usant l'expressió anterior, la notació de diferències dividides i les seves propietats, tenim

$$\begin{aligned} \frac{d(\ln(H(t)))}{dt} &= g_{4,1} + g_{3,2} - g_{3,1} - g_{4,2} = (g_{4,1} - g_{2,4}) + (g_{3,2} - g_{1,3}) \\ &= g_{2,4,1}(x_1 - x_2) + g_{1,3,2}(x_2 - x_1) = (g_{1,2,4} - g_{3,1,2})(x_1 - x_2) \\ &= g_{3,1,2,4}(x_4 - x_3)(x_1 - x_2) = -\frac{1}{3!} g'''(\xi)(x_4 - x_3)(x_2 - x_1) \\ &= -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 f(t, \xi(t))}{\partial x^3} (x_4(t) - x_3(t))(x_2(t) - x_1(t)). \end{aligned}$$

En resum, el que hem vist és que el mètode proposat per Pliss funciona gràcies al fet que $\frac{d(\ln(H(t)))}{dt}$ no s'anulla, mentre que la prova basada en la fórmula de Lloyd ho fa perquè passa el mateix amb $\frac{\partial^3 f(t,x)}{\partial x^3}$. Ara bé, per a ED d'Abel, les dues condicions coincideixen. Encara que de manera implícita, aquesta comparació entre ambdós mètodes ja apareix a [13].

NOTA. Igual que passa amb els zeros dels polinomis, els cicles límit també tenen associada una noció de multiplicitat, que no és més que la multiplicitat del zero de la funció de desplaçament, $\Delta(\rho) = \Pi(\rho) - \rho$. Hi ha cicles límit de multiplicitat 1 (que s'anomenen hiperbòlics), cicles límit de multiplicitat 2, i així successivament. El teorema 5 també es podria enunciar dient que, quan $d(t) > 0$, la suma de les multiplicitats de tots els cicles límit de l'ED d'Abel és com a màxim 3. Aquest resultat és una conseqüència directa de la prova basada en la fórmula de Lloyd, però no s'obté de la demostració de Pliss.

NOTA. De les dues proves presentades, se'n dedueix que el teorema 5 també és cert quan $d(t)$ no canvia de signe i s'anulla només a punts aïllats. El cas $d(t) \leq 0$ es pot reduir al cas $d(t) \geq 0$, fent el canvi de temps $t \rightarrow 2\pi - t$.

Per a concloure aquesta secció, vegem quines conseqüències podem extreure quan apliquem els resultats obtinguts a les ED de Riccati.

Aplicant (9), com que $d(t) \equiv 0$, obtenim que $H(t)$ és constant. Per tant, donades quatre solucions qualssevol d'una ED de Riccati $x_1(t) < x_2(t) < x_3(t) < x_4(t)$, existeix una constant K tal que

$$\frac{(x_4(t) - x_1(t))(x_3(t) - x_2(t))}{(x_3(t) - x_1(t))(x_4(t) - x_2(t))} = K. \tag{11}$$

Aquest resultat clàssic implica que, si es coneixen tres solucions d'una ED de Riccati, qualsevol altra solució es pot obtenir a partir d'aquestes tres. De fet, la igualtat (11) va ser segurament la inspiració de Pliss per a provar el seu resultat.

Vegem ara el que ens diu el resultat de Lloyd quan l'apliquem a les ED de Riccati. D'acord amb la proposició 4, obtenim que l'aplicació de Poincaré compleix

$$\Pi'''(\rho) = \frac{3}{2} \left(\frac{\Pi''(\rho)}{\Pi'(\rho)} \right)^2 \Pi'(\rho). \tag{12}$$

Aquesta equació diferencial, que per cert s'anomena ED de Kummer-Schwarz, és molt fàcil de resoldre i les seves solucions són precisament les homografies, trobant el resultat que apareix a la prova de la proposició 2.

Una de les propietats de les homografies és que preserven la raó doble. Recordem, a més, que fixat t , el flux d'una ED de Riccati, $\phi(t, \rho)$ donat a (4), és sempre una homografia. Ajuntant ambdues propietats obtenim de nou (11).

L'ED (12) també es pot escriure

$$S(\Pi)(\rho) := \frac{\Pi'''(\rho)}{\Pi'(\rho)} - \frac{3}{2} \left(\frac{\Pi''(\rho)}{\Pi'(\rho)} \right)^2 \equiv 0.$$

L'operador $S(\Pi)$ s'anomena la *derivada schwarziana* de Π i té un paper important tant en variable complexa [30] com en l'estudi dels sistemes dinàmics discrets reals unidimensionals [16] o en l'estudi dels cicles límit de certes ED no diferenciables [12]. Va ser introduït per Hermann Schwarz l'any 1869; vegeu [30, cap. 10].

De fet, és ben conegut que les úniques funcions meromorfs que tenen derivada schwarziana zero són les homografies [30], retrobant un cop més el resultat que caracteritza l'aplicació de Poincaré de les ED de Riccati.

3.2 Equacions d'Abel amb molts cicles límit

En aquesta secció donarem les idees principals per a provar el teorema 3 i, com a corollari seu, veurem que el teorema 5 no es pot estendre per a ED de tipus Abel, amb «grau» més gran que 3. Donarem també un resultat de [22], que ens mostra que per a ED de tipus Abel no és fàcil saber quan el nombre de cicles límit és fitat i quan no ho és. Finalment, seguint [14], enunciem un resultat que prova que el nombre de cicles límit per a ED no diferenciables no és acotat.

IDEA DE LA PROVA DEL TEOREMA 3. Prenem una ED de Riccati 2π -periòdica

$$\dot{x} = c(t)x^2. \quad (13)$$

Les seves solucions s'escriuen com

$$x = \phi_0(t, \rho) = \frac{\rho}{1 - \rho C(t)}, \quad \text{on } C(t) = \int_0^t c(s) ds.$$

Imposant que $C(2\pi) = 0$, obtenim que a prop de $\rho = 0$ l'ED té un continu de solucions periòdiques. De fet, si $\bar{C} := \max_{t \in [0, 2\pi]} |C(t)|$, per a $|\rho| < 1/\bar{C}$, les solucions de l'ED són 2π -periòdiques.

Per tal d'obtenir una nova ED d'Abel amb k cicles límit com a mínim, pertorbem (13) de la manera següent:

$$\dot{x} = c(t)x^2 + \varepsilon d(t)x^3,$$

on ε és un paràmetre petit. Aleshores, pel teorema de dependència diferenciable respecte de les condicions inicials, les solucions d'aquesta nova ED es poden expressar com

$$\phi(t, \rho, \varepsilon) = \phi_0(t, \rho) + \psi(t, \rho)\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Calculem $\psi(t, \rho) = \left. \frac{\partial \phi(t, \rho, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$. Per simplicitat, escrivim $\phi(t, \rho, \varepsilon) = \phi = \phi_0 + \psi\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, $c = c(t)$ i $d = d(t)$. Tenim

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_0 + \psi\varepsilon + O(\varepsilon^2)) &= c (\phi_0 + \psi\varepsilon + O(\varepsilon^2))^2 + \varepsilon d (\phi_0 + \psi\varepsilon + O(\varepsilon^2))^3 \\ &= c(\phi_0^2 + 2\phi_0\psi\varepsilon + O(\varepsilon^2)) + \varepsilon d(\phi_0^3 + O(\varepsilon)) \\ &= c\phi_0^2 + (2c\phi_0\psi + d\phi_0^3)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Per tant, $\psi' = 2c\phi_0\psi + d\phi_0^3$, on $\psi' = \partial\psi(t, \rho)/\partial t$. Com que ϕ_0 és solució de (13), aquesta ED s'escriu com $\psi' = 2\phi_0'\psi/\phi_0 + d\phi_0^3$ o, equivalentment, $(\psi/\phi_0^2)' = d\phi_0$. Resolent aquesta ED, tenim

$$\psi(t, \rho) = \phi_0(t, \rho)^2 \int_0^t d(s)\phi_0(s, \rho) ds = \phi_0(t, \rho)^2 \int_0^t \frac{\rho d(s)}{1 - \rho C(s)} ds.$$

Recordem que la solució que comença a ρ és un cicle límit de l'ED pertorbada si és una solució aïllada de $D(\rho, \varepsilon) := \phi(2\pi, \rho, \varepsilon) - \rho$. Aquesta equació s'escriu com

$$D(\rho, \varepsilon) = \varepsilon\rho^3 \int_0^{2\pi} \frac{d(t)}{1 - \rho C(t)} dt + O(\varepsilon^2) = 0.$$

La funció

$$M(\rho) := \int_0^{2\pi} \frac{d(t)}{1 - C(t)\rho} dt$$

es coneix com a *funció de Melnikov* o *funció de Pontryagin* associada al problema. Del teorema de la funció implícita aplicat a $D(\rho, \varepsilon)/\varepsilon$, se'n dedueix que els zeros simples no nuls de M donen lloc, per a ε prou petit i fixat, a zeros aïllats de la funció D . Més concretament, si $\rho = \bar{\rho}$ compleix $M(\bar{\rho}) = 0$ i $M'(\bar{\rho}) \neq 0$, aleshores existeix una funció diferenciable g tal que $g(0) = \bar{\rho}$, i per a ε prou petit $D(g(\varepsilon), \varepsilon) \equiv 0$.

En altres paraules, el que hem vist és que cadascun dels zeros simples i no nuls de $M(\rho)$ dona lloc a un cicle límit de la corresponent equació d'Abel per a ε prou petit. Per tant, hem reduït la prova del teorema a trobar funcions c i d tals que la corresponent funció M tingui com a mínim k zeros no nuls i simples.

Per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$, prenem $c(t) = \cos(t)$ i $d(t) = P(\sin t)$, on P és un polinomi de grau k a determinar. Aleshores, per a ρ prou petit,

$$\begin{aligned} M(\rho) &:= \int_0^{2\pi} \frac{P(\sin t)}{1 - \sin(t)\rho} dt = \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m P(\sin t) \sin^m t dt \\ &= \sum_{m=0}^k \left(\int_0^{2\pi} P(\sin t) \sin^m t dt \right) \rho^m + O(\rho^{k+1}) = N(\rho) + O(\rho^{k+1}), \end{aligned}$$

on N és un polinomi en ρ de grau k . No és difícil veure que, de fet, donat qualsevol polinomi de grau k , \bar{N} , existeix un polinomi \bar{P} tal que la seva funció de Melnikov associada \bar{M} compleix $\bar{M}(\rho) = \bar{N}(\rho) + O(\rho^{k+1})$. Aquesta llibertat per a fixar arbitràriament els primers $k + 1$ termes de la sèrie de Taylor de M a l'origen permet construir funcions amb k zeros no nuls i simples, com volíem demostrar. De fet, a [2, 23] es prova a més que $M(\rho)$ té com a màxim k zeros. \square

Un corollari del teorema anterior ens mostra que per a ED de tipus Abel, amb «grau» $n > 3$, el nombre de cicles límit no és acotat, encara que el coeficient de x^n sigui positiu. Per tant, el teorema 5 no es pot estendre per a cap $n > 3$.

TEOREMA 6. Donat $n \in \mathbb{N}$ amb $n > 3$, i qualsevol $k \in \mathbb{N}$, hi ha una ED de la forma

$$\dot{x} = a_0(t) + a_1(t)x + \cdots + a_{n-1}(t)x^{n-1} + a_n(t)x^n,$$

amb $a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, funcions 2π -periòdiques, i $a_n(t) > 0$ que té com a mínim k cicles límit.

IDEA DE LA PROVA. Seguint la demostració del teorema 3, sabem que, donat qualsevol $k \in \mathbb{N}$, hi ha una ED d'Abel de la forma

$$\dot{x} = \cos(t)x^2 + \varepsilon P(\sin(t))x^3,$$

amb P un polinomi de grau k , i $\varepsilon > 0$ prou petit, que té com a mínim k cicles límit. Aquests cicles límit són hiperbòlics, ja que corresponen a zeros simples de l'aplicació de desplaçament Δ associada a l'ED. Per tant, el seu nombre es manté per a petites pertorbacions de l'ED. Així, si prenem la nova ED

$$\dot{x} = \cos(t)x^2 + \varepsilon P(\sin(t))x^3 + \delta x^n,$$

amb $\delta > 0$ prou petit, aquesta també té com a mínim k cicles límit i $a_n(t) \equiv \delta > 0$, com volíem demostrar. \square

El resultat següent de [22], que es pot provar de manera similar als teoremes 3 i 5, ens mostra com d'endimoniades poden ser les ED similars a les ED d'Abel. La part (i) també està provada a [42].

TEOREMA 7. Considerem les ED d'Abel generalitzades i 2π -periòdiques

$$\dot{x} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Si $n \geq 3$ és senar, aquestes equacions tenen com a màxim 3 cicles límit.
- (ii) Si $n \geq 4$ és parell, per a tot $k \in \mathbb{N}$, hi ha una ED d'aquest tipus que té com a mínim k cicles límit.

Per a acabar aquesta secció, enunciem un resultat de [14] per a ED no diferenciables que sorprèn quan el comparem amb el corresponent per a ED lineals donat a la secció 2.1.

TEOREMA 8. Donat qualsevol $k \in \mathbb{N}$, hi ha una ED de la forma

$$\dot{x} = a(t) + b(t)|x|,$$

amb a i b polinomis trigonomètrics 2π -periòdics, que té com a mínim k cicles límit.

4 Una relació entre les equacions d'Abel i el problema XVI de Hilbert

Per a ED d'Abel 2π -periòdiques, es pot plantejar un problema similar al de Hilbert:

Donada la família d'equacions diferencials d'Abel

$$\dot{x} = bx + c_n(t)x^2 + d_m(t)x^3, \quad (14)$$

on $b \in \mathbb{R}$ i c_n i d_m són polinomis trigonomètrics 2π -periòdics i homogenis de graus n i m , respectivament, esbrinar si hi ha una fita, $\mathcal{A}(n, m)$, per al nombre de cicles límit que pot tenir.

L'existència de $\mathcal{A}(n, m)$ ja no és un problema senzill d'abordar. Per exemple, a [10] es demostra que, en un context similar i substituint \mathbb{R} per \mathbb{C} , aquesta fita no existeix.

Demostrem el resultat següent, que es dedueix dels treballs de Cherkas [8] i Lins-Neto [39]. Vegeu també [15].

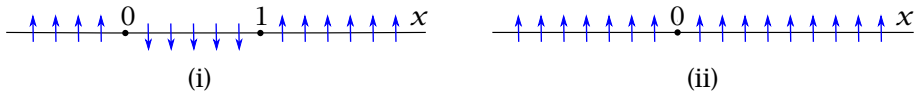
TEOREMA 9. *Es compleix que $\mathcal{H}(2) \leq 2\mathcal{A}(3, 6)$.*

PROVA. En primer lloc, recordem, seguint [15], les propietats següents de les òrbites periòdiques d'una ED quadràtica:

- Envoltan un únic punt crític.
- El punt crític ha de ser un focus o un centre.
- Només dos punts crítics poden estar simultàniament envoltats per òrbites periòdiques.
- Les òrbites periòdiques són convexes.

Com que les proves d'aquestes quatre propietats són bastant similars, no les demostrarem totes. De fet, les quatre acaben essent essencialment conseqüència d'estudiar el camp vectorial $X = (P, Q)$ associat a l'ED quadràtica $(\dot{x}, \dot{y}) = (P(x, y), Q(x, y))$ sobre les rectes que passen pels punts crítics de l'ED.

Demostrem la primera propietat. Si l'ED només té un punt crític, no hi ha res a dir. Si en té com a mínim dos, no és restrictiu suposar que un d'ells és l'origen i que un altre és, per exemple, el punt $(1, 0)$. Aleshores, $\dot{y}|_{y=0} = Q(x, 0) = ax(x - 1)$. Si $a = 0$, llavors la recta $y = 0$ és invariant pel flux de l'ED i, per tant, cap òrbita periòdica pot envoltar l'origen. Si $a \neq 0$, el signe de $ax(x - 1)$ ens dóna el sentit de tall de les òrbites que passen pel punt $(x, 0)$. Com que per a $x \in (0, 1)$, aquest signe és contrari al cas que $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, això impossibilita que una òrbita periòdica pugui encerclar els dos punts alhora; vegeu, per al cas $a > 0$, la figura 3(i).

FIGURA 3: Camp vectorial sobre $y = 0$.

Demostrem ara la segona propietat. Com abans, no és restrictiu suposar que el punt crític envoltat per una òrbita periòdica sigui l'origen. Suposem que la diferencial del camp X a l'origen té un valor propi real λ , incloent també el cas $\lambda = 0$. Fent un gir, si és necessari, podem suposar també que $(0, 1)$ és la direcció pròpia associada al valor propi λ . Aleshores, $Q(x, y) = \lambda y + ax^2 + bxy + cy^2$. Per tant, $\dot{y}|_{y=0} = Q(x, 0) = ax^2$; vegeu, per al cas $a > 0$, la figura (3)(ii). Argumentant de manera similar al cas anterior tenim que cap cicle límit pot envoltar l'origen. Per tant, tots els valors propis de la diferencial de X al $(0, 0)$ són complexos o, en altres paraules, l'origen és un focus o un centre, com volíem demostrar.

Per tant, si una ED quadràtica té cicles límit, podem suposar que cadascun envolta un únic punt crític, que ha de ser de tipus focus ja que el cas que sigui un centre es pot descartar per l'analicitat del sistema. Mitjançant un canvi afí, aquesta ED quadràtica es pot escriure

$$x' = P(x, y) = -y + bx + P_2(x, y), \quad y' = Q(x, y) = x + by + Q_2(x, y),$$

on la prima denota derivada respecte al temps, t , i P_2 i Q_2 són polinomis homogenis quadràtics. En coordenades polars, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, aquesta ED s'escriu com

$$r' = br + f(\theta)r^2, \quad \theta' = 1 + g(\theta)r,$$

on f i g són els polinomis homogenis cúbics

$$f(\theta) = P_2(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta + Q_2(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta,$$

$$g(\theta) = Q_2(\cos \theta, \sin \theta) \cos \theta - P_2(\cos \theta, \sin \theta) \sin \theta.$$

Si introduïm la nova variable ρ , donada per la transformació de Cherkas $\rho = r/(1 + g(\theta)r)$, tenim

$$\rho' = \frac{1}{(1 + g(\theta)r)^2} r' - \frac{g'(\theta)r^2}{(1 + g(\theta)r)^2} \theta' = \frac{br + f(\theta)r^2}{(1 + g(\theta)r)^2} - \frac{g'(\theta)r^2}{1 + g(\theta)r}.$$

Recordem que els cicles límit són convexos. Per tant, podem assegurar que $1 + g(\theta)r > 0$ sobre aquests cicles, i la transformació està ben definida en un obert que conté tots els cicles límit que envolten l'origen. Com que $r = \rho/(1 - g(\theta)\rho)$ i $1/(1 + g(\theta)r) = 1 - g(\theta)\rho$, arribem a

$$\rho' = (1 - g(\theta)\rho)^2 \left(b \frac{\rho}{1 - g(\theta)\rho} + f(\theta) \frac{\rho^2}{(1 - g(\theta)\rho)^2} \right) - \frac{g'(\theta)\rho^2}{1 - g(\theta)\rho}.$$

Finalment,

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{d\rho}{d\theta} = (1 - g(\theta)\rho)\rho' = b\rho(1 - g(\theta)\rho)^2 + f(\theta)\rho^2(1 - g(\theta)\rho) - g'(\theta)\rho^2 \\ &= b\rho + (f(\theta) - 2bg(\theta) - g'(\theta))\rho^2 + g(\theta)(bg(\theta) - f(\theta))\rho^3, \end{aligned}$$

que és una ED d'Abel de la forma (14), amb c_n i d_m polinomis trigonomètrics homogenis de graus 3 i 6, respectivament.

Per tant, el nombre màxim de cicles límit envoltant l'origen és $\mathcal{A}(3, 6)$. Aplicant el mateix resultat a l'altre punt crític que pot ser envoltat simultàniament per cicles límit, obtenim el resultat desitjat. \square

NOTA. De fet, s'ha demostrat que si una ED quadràtica té cicles límit que envolten dos focus diferents, aleshores al voltant d'un d'ells el màxim nombre de cicles límit és 1; vegeu [51]. Per tant, es compleix que $\mathcal{H}(2) \leq 1 + \mathcal{A}(3, 6)$.

La mateixa idea usada per a provar el teorema 9 es pot utilitzar també per a estudiar, mitjançant ED d'Abel, el nombre de cicles límit de certes famílies d'ED polinomials al pla; vegeu, per exemple, [6, 17, 24, 25]. Les ED d'Abel han resultat també útils per a estudiar la presència de continus d'òrbites periòdiques (vegeu, per exemple, [3, 11]) o per a estudiar la integrabilitat de les ED (vegeu [26]).

5 Fites inferiors per a $\mathcal{H}(n)$

Per a concloure el treball donarem una prova senzilla del fet que $\mathcal{H}(n)$ creix almenys quadràticament amb n . Està basada en una de les idees clau per a demostrar la millor fita inferior ja esmentada per a $\mathcal{H}(n)$ utilitzada a [9].

PROPOSICIÓ 10. *Existeix una successió de valors n_k que tendeix cap a infinit i una constant $K > 0$ tals que $\mathcal{H}(n_k) > Kn_k^2$.*

PROVA. La construcció de les ED que donen lloc a la fita inferior es basa en un procés recurrent. Sigui $X_0 = (P_0, Q_0)$ un camp polinomial donat, de grau n_0 i amb $c_0 > 0$ cicles límit. Com que el nombre de cicles límit és finit, tots estan continguts en un cert compacte. Per tant, podem fer una translació de manera que el nou camp, que per simplicitat seguim anomenant X_0 , té tots els seus cicles límit continguts al primer quadrant. Construïm a continuació un nou camp a partir de la transformació

$$x = u^2, \quad y = v^2.$$

Observem que aquesta transformació no és un canvi de variables, ja que no és bijectiva. L'equació diferencial $\dot{x} = P_0(x, y)$, $\dot{y} = Q_0(x, y)$ s'escriu en aquestes variables com

$$\dot{u} = \frac{P_0(u^2, v^2)}{2u}, \quad \dot{v} = \frac{Q_0(u^2, v^2)}{2v}.$$

Introduint un nou temps s , definit com $dt/ds = 2uv$, obtenim que l'ED anterior es transforma en

$$u' = v P_0(u^2, v^2), \quad v' = u Q_0(u^2, v^2). \tag{15}$$

Atès que cada punt del primer quadrant (x, y) té quatre antiimatges $(\pm\sqrt{x}, \pm\sqrt{y})$, el nou sistema té a cada quadrant una còpia difeomòrfica del quadrant positiu del camp X_0 . Per tant, el nou camp, al qual anomenem X_1 , té grau $n_1 = 2n_0 + 1$ i com a mínim el seu nombre de cicles límit és $c_1 = 4c_0$. Repetim aquest procés començant amb X_1 i així obtenim una successió de camps X_k amb graus n_k i nombre mínim de cicles límit c_k , de manera que

$$n_{k+1} = 2n_k + 1, \quad c_{k+1} = 4c_k;$$

vegeu la figura 4.

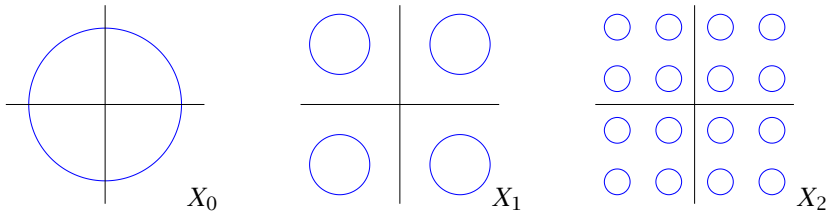


FIGURA 4: Dos passos del procés, començant amb el camp X_0 amb un únic cicle límit. Els camps X_1 i X_2 tenen quatre i setze cicles límit, respectivament.

Les dues equacions en diferències anteriors són lineals i es poden resoldre exactament. Obtenim

$$n_k = 2^k(n_0 + 1) - 1, \quad c_k = 4^k c_0. \quad (16)$$

Per tant, com que

$$2^k = \frac{n_k + 1}{n_0 + 1} \quad \text{i} \quad 4^k = \frac{c_k}{c_0},$$

tenim que

$$\frac{c_k}{c_0} = \left(\frac{n_k + 1}{n_0 + 1} \right)^2 > \frac{1}{(n_0 + 1)^2} n_k^2.$$

En conseqüència,

$$\mathcal{H}(n) > \frac{c_0}{(n_0 + 1)^2} n^2 \quad \text{per a} \quad n = 2^k(n_0 + 1) - 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

com volíem demostrar. □

Observem que la mateixa prova de la proposició ja fa pensar que la constant K pot ser escollida de moltes maneres. Per exemple, com a camp X_0 podem triar l'exemple trivial de camp cúbic que apareix a molts llibres, i que en coordenades polars s'escriu

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

És clar que només té un cicle límit, $r = 1$. Aleshores, $c_0 = 1$ i $n_0 = 3$. Per tant, $K = 1/16$ i $n_k = 2^{k+2} - 1$. D'altra banda, si triem el sistema quadràtic que permet veure que $\mathcal{H}(2) \geq 4$, s'obté $c_0 = 4$ i $n_0 = 2$. Usant aquesta llavor, resulta $K = 4/9$ i $n_k = 2^k 3 - 1$. Se sap que $\mathcal{H}(3) \geq 11$, $\mathcal{H}(4) \geq 20$, $\mathcal{H}(5) \geq 28$, $\mathcal{H}(6) \geq 35$; vegeu [28]. Fent servir els camps respectius com a llavors, s'obtenen valors de K iguals a $11/16$, $4/5$, $7/9$ i $5/7$, respectivament. La millor K obtinguda per aquest mètode i amb aquestes llavors és $4/5$.

La prova que $\mathcal{H}(n) \geq K n^2 \log(n)$ donada a [9] té també en compte els cicles límit que poden sorgir en un entorn dels eixos $uv = 0$ quan es fa el procés descrit a la prova de la proposició anterior. De fet, es pot veure fàcilment que l'ED (15) presenta diversos centres sobre els eixos. Els nous cicles límit apareixen fent una petita pertorbació de (15) abans de continuar el procés. Aquesta pertorbació fa que algunes de les òrbites periòdiques dels centres es transformin en cicles límit per a l'ED pertorbada. A més, si la pertorbació és prou petita, es pot assegurar que cap dels cicles límit que hi havia a cada un dels quatre quadrants desapareix. D'aquesta manera, els autors de [9] obtenen, en lloc de (16), que

$$n_{k+1} = 2n_k + 1, \quad c_{k+1} \geq 4c_k + m_k$$

per a una certa successió $m_k > 0$. L'estudi d'aquesta nova recurrència dóna lloc a un creixement per a c_k del tipus $Kn^2 \log(n)$ quan $n = n_k$.

Agraïments

L'autor té el suport del projecte MICIIN/FEDER número MTM2008-03437 i del projecte número 2009SGR410 de la Generalitat de Catalunya.

Referències

- [1] ABEL, N. H. «Sur l'équation différentielle $dy + (p + qy + ry^2) dx = 0$, où p , q et r sont des fonctions de x seul». (Capítol IV). «Sur l'équation différentielle $(y + s) dy + (p + qy + ry^2) dx = 0$ ». (Capítol V). A: SYLOW, L.; LIE, S. (ed). *Œuvres complètes de Niels Henrik Abel*. Tom II. Christiania: Imprimerie de Grøndahl & Son, 1881.
- [2] ÁLVAREZ, M. J.; GASULL, A.; YU, J. «Lower bounds for the number of limit cycles of trigonometric Abel equations». *J. Math. Anal. Appl.*, 342 (1) (2008), 682-693.
- [3] ALWASH, M. A. M.; LLOYD, N. G. «Nonautonomous equations related to polynomial two-dimensional systems». *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 105 (1987), 129-152.
- [4] BENARDETE, D. M.; NOONBURG, V. W.; POLLINA, B. «Qualitative tools for studying periodic solutions and bifurcations as applied to the periodically harvested logistic equation». *Amer. Math. Monthly*, 115 (3) (2008), 202-219.

- [5] BERNOULLI, D. «Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir». *Mem. Math. Phys. Acad. Roy. Sci.* [París] (1760), 1-45.
- [6] CARBONELL, M.; LLIBRE, J. «Limit cycles of a class of polynomial systems». *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 109 (1-2) (1988), 187-199.
- [7] CHEB-TERRAB, E. S.; ROCHE, A. D. «Abel ODEs: Equivalence and integrable classes». *Comput. Phys. Comm.*, 130 (2000), 204-231.
- [8] ČERKAS, L. A. «The number of limit cycles of a certain second order autonomous system». (Russian). *Differencial'nye Uravnenija*, 12 (5) (1976), 944-946, 960. [Traducció anglesa: *Differential Equations*, 12 (5) (1976), 666-668 (1977)]
- [9] CHRISTOPHER, C. J.; LLOYD, N. G. «Polynomial systems: a lower bound for the Hilbert numbers». *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 450 (1938) (1995), 219-224.
- [10] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «Periodic orbits in complex Abel equations». *J. Differential Equations*, 232 (1) (2007), 314-328.
- [11] CIMA, A.; GASULL, A.; MAÑOSAS, F. «A simple solution of some composition conjectures for Abel equations». *J. Math. Anal. Appl.*, 398 (2) (2013), 477-486.
- [12] COLL, B.; GASULL, A.; PROHENS, R. «Limit cycles for nonsmooth differential equations via Schwarzian derivative». *J. Differential Equations*, 132 (2) (1996), 203-221.
- [13] COLL, B.; GASULL, A.; PROHENS, R. «Differential equations defined by the sum of two quasi-homogeneous vector fields». *Canad. J. Math.*, 49 (2) (1997), 212-231.
- [14] COLL, B.; GASULL, A.; PROHENS, R. «Simple non-autonomous differential equations with many limit cycles». *Comm. Appl. Nonlinear Anal.*, 15 (1) (2008), 29-34.
- [15] COPPEL, W. A. «A survey of quadratic systems». *J. Differential Equations*, 2 (1966), 293-304.
- [16] DE MELO, W. «Bifurcation of unimodal maps». *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 4 (2) (2003), 413-424 (2004).
- [17] DEVLIN, J.; LLOYD, N. G.; PEARSON, J. M. «Cubic systems and Abel equations». *J. Differential Equations*, 147 (2) (1998), 435-454.
- [18] DREYER, N.; GABRIEL, J.-P. «Daniel Bernouilli et la varirole». *Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences*, 39 (2010), 1-13.
- [19] DUMORTIER, F.; PANAZZOLO, D.; ROUSSARIE, R. «More limit cycles than expected in Liénard equations». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 135 (6) (2007), 1895-1904.
- [20] ÉCALLE, J. *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*. París: Hermann, 1992. (Actualités Mathématiques)

- [21] FOSSAS, E.; OLM, J. M.; SIRA-RAMÍREZ, H. «Iterative approximation of limit cycles for a class of Abel equations». *Phys. D*, 237 (23) (2008), 3159–3164.
- [22] GASULL, A.; GUILLAMON, A. «Limit cycles for generalized Abel equations». *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 16 (12) (2006), 3737–3745.
- [23] GASULL, A.; LI, C.; TORREGROSA, J. «A new Chebyshev family with applications to Abel equations». *J. Differential Equations*, 252 (2) (2012), 1635–1641.
- [24] GASULL, A.; LLIBRE, J. «Limit cycles for a class of Abel equations». *SIAM J. Math. Anal.*, 21 (5) (1990), 1235–1244.
- [25] GASULL, A.; PROHENS, R.; TORREGROSA, J. «Limit cycles for rigid cubic systems». *J. Math. Anal. Appl.*, 303 (2) (2005), 391–404.
- [26] GINÉ, J.; LLIBRE, J. «Darboux integrability and limit cycles for a class of polynomial differential systems». A: *Differential equations with symbolic computation*. Basilea: Birkhäuser, 2005, 55–65. (Trends Math.)
- [27] GRAY, J. «Poincaré replies to Hilbert: on the future of mathematics ca. 1908». *Math. Intelligencer*, 34 (3) (2012), 15–29.
- [28] HAN, M.; LI, C.; LI, J. «Limit cycles of planar polynomial vector fields». *Scholarpedia*, 5 (8) (2010), 9648, revisió #91431.
- [29] HARKO, T.; MAK, M. K. «Relativistic dissipative cosmological models and Abel differential equation». *Comput. Math. Appl.*, 46 (5–6) (2003), 849–853.
- [30] HILLE, E. *Ordinary differential equations in the complex domain*. Reimpresió del 1976 original. Mineola, NY: Dover Publications, Inc., 1997.
- [31] HIRSCH, M. W.; SMALE, S. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Madrid: Alianza Universidad, 1983. [Traducció de: *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Nova York; Londres: Academic Press, 1974. (Pure and Applied Mathematics; 60)]
- [32] HOUZEL, C. «The work of Niels Henrik Abel». A: *The legacy of Niels Henrik Abel*. Berlín: Springer, 2004, 21–177.
- [33] IL'YASHENKO, YU. S. «Finiteness theorems for limit cycles». (Rus). *Uspekhi Mat. Nauk*, 45 (1990), no. 2(272), 143–200, 240. [Traducció anglesa: *Russian Math. Surveys*, 45 (2) (1990), 129–203]
- [34] IL'YASHENKO, YU. «Centennial history of Hilbert's 16th problem». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 39 (3) (2002), 301–354.
- [35] ISAACSON, E.; KELLER, H. B. *Analysis of numerical methods*. Nova York; Londres; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [36] KAMKE, E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., 1959. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Reihe; 18)
- [37] LI, C.; LLIBRE, J. «Uniqueness of limit cycles for Liénard differential equations of degree four». *J. Differential Equations*, 252 (4) (2012), 3142–3162.
- [38] LI, J. «Hilbert's 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields». *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13 (1) (2003), 47–106.

- [39] LINS NETO, A. «On the number of solutions of the equation $dx/dt = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j$, $0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$ ». *Invent. Math.*, 59 (1) (1980), 67–76.
- [40] LLOYD, N. G. «A note on the number of limit cycles in certain two-dimensional systems». *J. London Math. Soc. (2)*, 20 (2) (1979), 277–286.
- [41] MURRAY, J. D. *Mathematical biology. I. An introduction*. 3a ed. Nova York: Springer-Verlag, 2002. (Interdisciplinary Applied Mathematics; 17)
- [42] PANOV, A. A. «On the number of periodic solutions of polynomial differential equations». (Rus). *Mat. Zametki*, 64 (5) (1998), 720–727. [Traducció a l'anglès: *Math. Notes*, 64 (5–6) (1998), 622–628 (1999)]
- [43] PLISS, V. A. *Nonlocal problems of the theory of oscillations*. Nova York; Londres: Academic Press, 1966. [Traduït del rus per Scripta Technica, Inc. H. Herman, ed.]
- [44] POLLICOTT, M.; WANG, H.; WEISS, H. «Extracting the time-dependent transmission rate from infection data via solution of an inverse ODE problem». *J. Biol. Dyn.*, 6 (2) (2012), 509–523.
- [45] ROSENZWEIG, M. L.; MACARTHUR, R. H. «Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions». *Amer. Natur.*, 97 (895) (1963), 209–223.
- [46] SCHNAKENBERG, J. «Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour.» *J. Theoret. Biol.*, 81 (3) (1979), 389–400.
- [47] SMALE, S. «Mathematical problems for the next century». (Espanyol). *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 3 (3) (2000), 413–434. [Traducció de: *Math. Intelligencer*, 20 (2) (1998), 7–15 per M. J. Alcón]
- [48] VAN DER POL, B. «On relaxation-oscillations». *The London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. & J. of Sci.*, 2 (7) (1927), 978–992.
- [49] VIRO, O. «From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry». *Jpn. J. Math.*, 3 (2) (2008), 185–214.
- [50] WILSON, G. «Hilbert's sixteenth problem». *Topology*, 17 (1) (1978), 53–73.
- [51] ZHANG, P. «On the distribution and number of limit cycles for quadratic systems with two foci». *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 3 (2) (2002), 437–463.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
 UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
 EDIFICI C, FACULTAT DE CIÈNCIES
 08193 BELLATERRA (BARCELONA)
 gasull@mat.uab.cat