Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 28, núm. 1, 2013. Pàg. 51–85. DOI: 10.2436/20.2002.01.47

Weierstrass i l'aproximació uniforme

Joan Cerdà

Resum: Presentem el teorema d'aproximació uniforme de funcions contínues per polinomis en el marc del punt de vista de Weierstrass sobre la construcció de l'anàlisi a partir de la representació de les funcions com a sumes de sèries de potències o de funcions analítiques, així com el seu esforç en la introducció de rigor amb el seu programa anomenat *aritmetització de l'anàlisi*, que estava en la base de les seves crítiques dels mètodes de Riemann. Descrivim també les demostracions més originals del teorema d'aproximació que van aparèixer després de la de Weierstrass, moltes de les quals degudes a alguns del seus estudiants o seguidors.

Paraules clau: Weierstrass, aproximació uniforme, sèries de potències, aritmetització de l'anàlisi.

Classificació MSC2010: 0A55.

1 Karl Weierstrass (1815, Ostenfelde – 1897, Berlín)

> Conegut com a pare de l'anàlisi moderna, Weierstrass obtingué tests per a la convergència de sèries i contribuí a la teoria de les funcions periòdiques, les funcions de variables reals, les funcions el·líptiques, les funcions abelianes, els productes infinits convergents i el càlcul de variacions. També obtingué avenços en la teoria de les formes bilineals i quadràtiques.
>
> **Enciclopèdia britànica**

Durant els seus estudis a l'Institut (Gymnasium) Catòlic de Paderborn, Weierstrass ja llegia regularment el *Journal de Crelle*[1] i va decidir dedicar-se a les

---

Aquest article es basa en la lliçó inaugural del curs acadèmic 2011–2012 de la Facultat de Matemàtiques de la Universitat de Barcelona, impartida per l'autor. Una primera versió d'aquest text va aparèixer a les Publicacions de la Universitat de Barcelona.

1 *Crelle* és el nom que s'ha donat al *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*.

matemàtiques. Però l'any 1834, quan tenia dinou anys, el seu pare, un inspector d'impostos de caràcter dominant el va enviar a estudiar dret i economia a la Universitat de Bonn.

Tanmateix, a Bonn, sense interès pels estudis, a més de passar el temps en diversions, va llegir la *Mécanique céleste* de Laplace i un treball de Jacobi sobre funcions el·líptiques, que aleshores estaven de moda. Per entendre les tècniques de les funcions el·líptiques, també llegia transcripcions de cursos de qui després seria el seu director, Christoph Gudermann, antic estudiant de Gauss.

Com a resultat, passats quatre anys, va deixar la universitat sense cap títol.

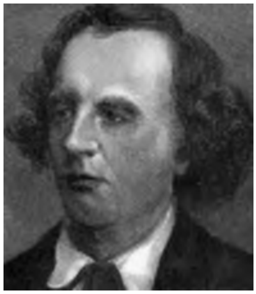
L'any 1839 va acceptar estudiar a l'Acadèmia Teològica i Filosòfica de Münster per ser professor de secundària. Una de les raons de la seva acceptació va ser que Gudermann n'era professor.

Weierstrass va assistir a les classes de Gudermann sobre funcions el·líptiques, funcions $x = \varphi(\alpha)$ que són inverses de les integrals el·líptiques,

$$\alpha = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{P(u)}}, \text{ on } P(u) = \sum_{k=0}^4 a_k u^k,$$

doblement periòdiques en ser esteses al pla complex. Aquestes funcions constituïren el tema del primer article de Weierstrass, un assaig escrit el 1840. El punt de partida va ser l'afirmació d'Abel que les funcions el·líptiques havien de ser quocients de sèries de potències convergents.

Ja professor de secundària, totalment aïllat d'altres matemàtics, sense mitjans ni ningú amb qui establir intercanvis i sense accés a biblioteques de matemàtiques, Weierstrass va treballar intensament en anàlisi durant catorze anys en tots els seus moments lliures, sense cap coneixement dels treballs de Cauchy relacionats amb el seu. Va desenvolupar la teoria de les funcions abelianes, que s'obtenen invertint les integrals abelianes


K. Weierstrass

$$\alpha = \int_0^x R\left(u, \sqrt{f(u)}\right) \mathrm{d}u,$$

on $R(u,v)$ és una funció racional i f una funció d'un tipus general que inclou els polinomis, exactament igual com les funcions el·líptiques s'obtenen de les integrals el·líptiques.

Així, el 1841, dos anys abans que Laurent, Weierstrass va establir a [48] l'anomenat desenvolupament de Laurent d'una funció i la integral de Cauchy en una corona circular, i a [47] va demostrar les desigualtats de Cauchy per als coeficients de les sèries de Laurent, així com el seu teorema sobre sèries dobles. Aquest article constitueix el punt de partida dels mètodes analítics de Weierstrass per a la teoria de funcions d'una o més variables, basats en les sèries de potències.

Fundat i editat per August Crelle l'any 1826 fins a la seva mort el 1855, és la primera revista important de matemàtiques fora de les actes d'acadèmia. Weierstrass i Kronecker en van ser els editors de 1881 a 1888.

L'article [49] de 1842, en què Weierstrass demostrava que un sistema d'equacions diferencials amb condicions inicials prefixades podia ser resolt per un sistema de sèries de potències convergents, completava aquest treball. Hi mostrava també com continuar analíticament fora del disc una sèrie de potències convergent en un disc.

Aquests treballs, escrits quan Weierstrass estava encara sota la influència de Gudermann, que el va encoratjar en els seus estudis, van romandre inèdits fins que el 1894 varen ser inclosos en els seus *Mathematische Werke*, vol. 1. Així, malgrat no tenir cap influència en el desenvolupament de les matemàtiques d'aquells anys, va establir els conceptes sobre els quals basaria la seva teoria de funcions de variable complexa a partir de 1857.

El gran esforç que li va suposar compatibilitzar les tasques docents al Gymnasium amb el treball intens en matemàtiques i els conflictes que va patir com a estudiant varen ser probablement la causa que, al voltant de 1850, Weierstrass comencés a patir migranyes molt severes i convulsions.

Weierstrass va sortir de l'anonimat quan el 1854 i el 1856 va publicar dos articles al *Journal de Crelle*, que més tard Hilbert (1862–1943) va considerar com els més grans resultats de l'anàlisi. El primer [44] tractava sobre funcions abelianes i el segon [45] contenia la versió completa de la seva teoria sobre integrals hiperel·líptiques,

$$\alpha_k = \sum_{j=0}^{p-1} \int_0^{x_j} \frac{y^k\,\mathrm{d}x}{\sqrt{P(y)}} \qquad (0 \leq k < p;\ \text{grau } P = 2p+1 \text{ o } 2p+2),$$

i resolia de manera original el problema de Jacobi sobre la inversió d'aquestes integrals.

Va rebre diverses ofertes i el 1856 va acceptar la de la Universitat de Berlín, on els seus cursos sobre aplicacions de les sèries i integrals de Fourier a la física matemàtica, una introducció a les funcions analítiques, funcions el·líptiques i aplicacions a problemes de geometria i mecànica van atraure estudiants de tot arreu.

A Berlín es va poder relacionar amb dos altres grans matemàtics: Ernst Eduard Kummer (1810–1893) i Leopold Kronecker (1823–1891). Entre tots tres van fer de la universitat el millor lloc del món on estudiar matemàtiques avançades.

En els cursos de 1859–1860 sobre introducció a l'anàlisi, va presentar els fonaments d'aquesta matèria per primera vegada. Però el 1861 la seva salut va tenir una forta davallada i va tardar dos anys a recuperar-se. Des de llavors va dictar els cursos assegut mentre un estudiant escrivia a la pissarra. Més endavant els atacs van ser substituïts per problemes respiratoris importants.

En el curs quadrimestral de 1863–1864 sobre teoria general de funcions analítiques, va iniciar la formulació de la teoria dels nombres reals, definits com a sumes de sèries convergents de nombres racionals.[2] Fins al 1890, Weierstrass va anar revisant i ampliant aquests cursos quadrimestrals.

2 En aquest curs va demostrar que els nombres complexos formaven l'única extensió algebraica

Veiem així com l'activitat de Weierstrass se centrava en dos temes: el seu programa per dotar el càlcul d'una fonamentació sòlida a partir d'un desenvolupament rigorós del sistema dels nombres reals, anomenat posteriorment *aritmetització de l'anàlisi*, i el seu treball sobre sèries de potències i funcions analítiques.

En una carta a Kovalevskaya del 1875 Weierstrass deia: «el que demano a un treball científic és unitat de mètode, el seguiment seqüencial d'un pla definit i l'elaboració apropiada dels detalls». Considerava bàsica l'atenció als detalls i, malgrat que preferia proves constructives, també en va donar d'existència no constructives.

No va ser el primer a voler tractar amb rigor el càlcul. Bolzano, ja el 1817, i Cauchy tenien definicions clares dels conceptes de *límit*, *suma de sèries*, *funció contínua*, *derivada*, etc. Però les seves definicions eren poc útils en les demostracions.

Per exemple, la definició de *límit* per a Cauchy era: «quan els valors atribuïts successivament a una variable s'acosten indefinidament a un valor fixat, de manera que arriben a diferir d'aquest tan poc com vulguem, aquest últim s'anomena *límit* dels altres». Basant-se en aquesta definició, en el seu *Cours d'analyse* de 1821, Cauchy va donar la famosa prova incorrecta del fet que havia de ser contínua tota funció límit puntual de funcions contínues.

La diferència entre les definicions de Bolzano i Cauchy i les de Weierstrass són ben significatives. Devem a Weierstrass la nostra definició ε-δ usual de *límit* i de *funció contínua*. El seu rigor, amb definicions precises dels conceptes bàsics en termes de desigualtats que permetien demostracions detallades, i el seu treball van fer que els matemàtics fossin més curosos amb les subtileses de l'anàlisi i afectaren definitivament l'evolució de les matemàtiques.

Però els seus mètodes i resultats no van ser fàcilment acceptats per tota la comunitat matemàtica. Els seus arguments subtils, que incloïen proves per contradicció i d'existència, varen ser motiu de controvèrsia. Weierstrass va adoptar la teoria de Cantor, usada per exemple per demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass sobre l'existència d'un punt d'acumulació per als subconjunts infinits acotats de $\mathbb{R}$. El 1877, Kronecker, amic molt proper de Weierstrass durant vint anys, renegant de l'infinit actual, va criticar obertament Weierstrass i Cantor davant dels estudiants, fet que va significar el seu distanciament definitiu.

Sobre el tema de les sèries, el mateix Weierstrass deia que el seu treball en anàlisi «no era res més que sèries de potències». A [4] s'inclou una visió general de l'obra de Weierstrass sobre funcions analítiques.

2 Weierstrass i Riemann

L'estudi de Weierstrass de les funcions el·líptiques i abelianes, guiat pel desig de completar el treball iniciat per Abel i Jacobi, que va motivar la seva teoria de funcions analítiques, es mantindria com a tema predilecte al llarg de la seva vida i com a *leitmotiv* de molts dels resultats que presentava en els cursos.

commutativa dels reals. El 1831 Gauss n'havia promès una demostració que mai va arribar a donar.

Bernhard Riemann (1826–1866), de personalitat molt tímida i amb gran temor per parlar en públic, des de molt jove va mostrar grans habilitats matemàtiques. Als dinou anys va iniciar estudis per a sacerdot com el seu pare, qui el mateix any li va permetre que estudiés matemàtiques i el va enviar a Göttingen, on va tenir Gauss de professor en un curs elemental.

Però Göttingen no era encara el millor lloc per fer matemàtiques i el 1847 Riemann passà a la Universitat de Berlín per estudiar amb Steiner, Jacobi, Dirichlet i Eisenstein. Dirichlet va ser qui més influència va exercir sobre ell. Elaborava les seves idees sobre bases intuïtives, per extreure'n anàlisis lògiques molt fines, i evitava els càlculs llargs tant com li era possible. Riemann va adoptar aquests mètodes i va ser a Berlín on va elaborar la seva teoria general de variables complexes en la qual basaria el seu treball més important.

El 1849 va tornar a Göttingen, on l'any 1851 va presentar la tesi, supervisat per Gauss, en què estudiava les funcions de variable complexa i, en particular, les que anomenem *superfícies de Riemann*. En la tesi usava el principi de Dirichlet, que aprengué del mateix Dirichlet a Berlín.

El 1853 Gauss li demanà que preparés una *Habilitationsschrift*. Ho va fer durant un any, treballant sobre la representabilitat de funcions per sèries trigonomètriques, i hi inclogué el seu estudi sobre la integral. Per a l'habilitació havia de parlar d'un tema i en va preparar tres, dels quals Gauss en triaria un. Dos tractaven d'electricitat i un de geometria, que va triar Gauss. La seva presentació, l'any 1854, va ser rebuda pels assistents amb gran entusiasme.

El 1855 Dirichlet va succeir Gauss en la càtedra de Göttingen i Riemann la va ocupar el 1859 quan va morir Dirichlet. El mateix any, a proposta de Weierstrass, Kummer i Borchardt, tres matemàtics de Berlín, Riemann va ser elegit membre de l'Acadèmia. Va ser en el seu ingrés quan va presentar la famosa hipòtesi de Riemann.

L'any 1866 Riemann va morir tuberculós en la localitat italiana de Selasca, on tractava de lluitar contra la malaltia que contragué tot just després del seu matrimoni, l'any 1862.

El 1856 Weierstrass no va poder demostrar que tota funció abeliana era quocient de dues sumes de sèries de potències: «Aquí trobem un problema que, pel que jo sé, encara no s'ha estudiat de manera general, però que tanmateix és de particular importància en la teoria de funcions».

En lloc d'això, el 1857 Riemann va publicar un nou tractament de les integrals abelianes en el darrer article [36] d'una sèrie de quatre en el volum 54 del *Journal de Crelle*, en els quals incloïa un resum del seu punt de vista geomètric en la teoria de funcions de variable complexa contingut en la tesi. En aquest, per tractar funcions multivaluades i les seves integrals, introduïa la idea de representar les branques d'una funció per mitjà d'una superfície recobrint de manera múltiple el pla.

Riemann considerava el treball de Weierstrass un cas particular del seu i mencionava els «bonics resultats» continguts en l'article de 1856, la continuació del qual podria mostrar «el molt que coincidien els seus resultats i mètodes». En vista de l'article de Riemann, Weierstrass retirà la continuació del seu treball presentada a l'Acadèmia de Berlín, que ja estava en premsa. La continuació promesa del seu treball no apareixeria mai.

La teoria de Riemann sobre funcions complexes va ser una referència per als cursos i per al treball de Weierstrass. Com a rèplica als resultats de Riemann, durant vint anys es va dedicar a un estudi profund de les funcions analítiques que hauria de procurar les bases de la teoria de les funcions el·líptiques i abelianes.

Personalment Weierstrass i Riemann es comprenien perfectament. Weierstrass deia que «havia estimat Riemann com un germà» i diverses vegades va dir que era una «ànima càndida».

Pel que fa a les matemàtiques, hi hagué una gran influència mútua, però els seus mètodes eren molt diferents. Riemann no dubtava a usar resultats d'altres i Weierstrass usualment només els admetia després d'una reelaboració minuciosa.

Riemann va basar la teoria de les funcions analítiques en l'estudi de les funcions harmòniques,[3] funcions amb valors en la frontera prefixats que minimitzen la integral de Dirichlet,

$$D(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x,$$

i va denominar *principi de Dirichlet* aquest fet variacional. Aquest principi va dominar el pensament matemàtic a mitjan segle XIX i va ser la font de descobriments importants.

Observem que si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ és una solució del problema de Dirichlet $\triangle u = 0$ sobre Ω i $u = f$ sobre $\partial\Omega$, per a tota $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ s'obté $0 = -\int_\Omega \varphi \triangle u = \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u$ integrant per parts; per tant,

$$D(u) \le \int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 = \int_\Omega |\nabla(u+\varphi)|^2 = D(u+\varphi)$$

i u és un minimitzador de la integral de Dirichlet.

Inversament, si u minimitza $D(u)$, entre les funcions $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ tals que $u = f$ sobre $\partial\Omega$, de

$$\int_\Omega |\nabla(u+t\varphi)|^2 \ge \int_\Omega |\nabla u|^2 \Leftrightarrow t^2 \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 - 2t \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u \ge 0$$

s'obté

$$\int_\Omega \varphi \triangle u = -\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u = 0 \qquad (\varphi \in C_c^\infty(\Omega)),$$

que equival a $\triangle u = 0$.

3 En l'anàlisi de Fourier, les funcions sobre el cercle són descrites pels seus harmònics. De manera anàloga, les funcions sobre l'esfera es descriuen en termes de polinomis amb laplacià nul i varen ser denominats *polinomis harmònics* per Thomson (Lord Kelvin) i Peter Tait en el seu *Treatise of natural phylosophy* (1879). En els inicis del segle XX, l'adjectiu *harmònic* es va aplicar també a totes les funcions que satisfeien l'equació de Laplace.

Weierstrass va veure poc fiable l'existència del minimitzador u i Riemann acceptava que les seves demostracions eren incompletes, però cregué en l'existència d'un mínim per a les seves integrals de Dirichlet. Des del treball de Gauss sobre el potencial newtonià i de Dirichlet sobre potencials electrostàtics, sobre la base d'arguments físics, l'existència de minimitzadors era generalment acceptada.

Després de la mort de Riemann el 1866, Weierstrass va atacar sovint els seus mètodes. El 1870 va presentar a la Reial Acadèmia de Ciències [46] una crítica famosa al principi de Dirichlet. Es tractava de l'exemple d'una variable

$$D(\varphi) = \int_{-1}^{1} x^2 \varphi'(x)^2 \, \mathrm{d}x$$

sobre $\mathcal{A} = \{\varphi \in C^1[-1,1];\ \varphi(-1) = a,\ \varphi(1) = b\}$, amb $a \neq b$, tal que $\inf_{\varphi\in\mathcal{A}} D(\varphi) = 0$, ja que $D(\varphi_n)$ es fa arbitràriament petita si

$$\varphi_n(x) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\frac{\arctan(nx)}{\arctan n}.$$

Però $D(\varphi) > 0$ si $\varphi \in \mathcal{A}$, ja que $D(\varphi) = 0$ implicaria $\varphi' = 0$ i $\varphi = C$ constant, en contradicció amb $a \neq b$.

Per tant, tal com s'estava entenent, el principi de Dirichlet era inacceptable i així quedava qüestionada una de les bases fonamentals de la teoria de funcions de Riemann i el seu mètode va ser abandonat per molts matemàtics, que tractaren de trobar noves demostracions dels seus resultats.[4]

Weierstrass també va observar que aparentment Riemann entenia que sempre hi havia prolongació analítica al llarg de camins que evitaven els punts crítics, i va notar que això no sempre és possible considerant la sèrie lacunar $\sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a^n}$, on a és enter imparell i $0 < b < 1$ tals que $ab > 1 + 3\pi/2$. En aquest cas, el cercle $|z| = 1$ és frontera natural.

En efecte, el radi de convergència de la sèrie és 1 i la part real de la suma (funció contínua periòdica) sobre $z = e^{i\vartheta}$ és

$$f(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \vartheta), \tag{1}$$

la famosa funció contínua patològica sense derivada a cap punt, descoberta per Weierstrass el 1862 (publicada el 1872), que rebatia la creença general de l'època que les funcions contínues havien de ser diferenciables, excepte en punts excepcionals.

4 L'any 1899 Hilbert va establir la validesa del principi de Dirichlet sota fortes condicions sobre el domini Ω i la classe $\mathcal{A}$ de funcions admissibles i va predir que s'arribaria a una solució definitiva debilitant el conjunt de condicions. Zaremba i Nikodym ho van aconseguir el 1933. A [29], hi ha una descripió detallada sobre la història del principi de Dirichlet.

Actualment es pot usar el mètode de Riemann per provar el seu teorema de representació conforme. Vegeu p. ex. [7].

Weierstrass va observar que el 1861 Riemann aparentment havia suggerit sense demostració que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \tag{2}$$

n'era un exemple, però malauradament la demostració de Riemann no s'havia publicat, i hi ha dificultats per comprovar que té aquesta propietat (de no ser diferenciable en cap punt). De fet, molt més tard, l'any 1916, Hardy va provar que la funció de Riemann era derivable en els múltiples racionals de π, on la forma reduïda del nombre racional era p/q amb p i q enters imparells.

Malgrat les seves crítiques, Weierstrass creia fermament en la validesa dels resultats de Riemann. Demanà a Hermann Schwarz que intentés provar els teoremes d'existència sense recórrer al principi de Dirichlet, cosa que aquest aconseguí el 1869–1870.

Molts dels resultats de Weierstrass van estar motivats per la crítica als mètodes de Riemann i a les seves «fantasies geomètriques». Va triar la via de les sèries de potències per la seva convicció que calia construir la teoria de les funcions analítiques sobre *veritats algebraiques* senzilles.

En comparar la seva construcció amb les de Cauchy i Riemann, que es basaven en les equacions diferencials de Cauchy-Riemann, Weierstrass indica que, de fet, «per provar la possibilitat de la prolongació analítica, Riemann va haver de recórrer a les sèries de potències, fet que no apareix en les seves obres completes, però que va incloure en els seus cursos».

A [33] i [34] Poincaré defineix Weierstrass com un lògic, que ho redueix tot a la consideració de sèries i transformacions analítiques, i diu que podem llegir els seus treballs sense trobar-hi una sola imatge; mentre que Riemann és un intuïtiu usant la geometria i cada un dels seus descobriments és una imatge que no es pot oblidar quan s'ha entès el seu significat.

Això és una simplificació excessiva, com assenyala Hadamard, que no comparteix l'opinió de Poincaré i diu a [15] que sempre cal la intuïció inicial. Observa que, de fet, hi ha *una* imatge en l'important treball en què Weierstrass presenta el seu càlcul de variacions. Hadamard observa que, després d'un pas inicial, una ullada sobre la imatge permet reconstruir tots els passos lògics de la demostració. També observa que, d'altra banda, els elements geomètrics no tenen cap paper en la intuïció que apareix en el treball de Riemann sobre els nombres primers.

Weierstrass va publicar poc, probablement pel seu sentit crític i també per la precarietat de la seva salut, i gran part del seu treball, presentat en les seves lliçons, es va conèixer molt més tard per les notes dels cursos i les publicacions dels seus estudiants.

Va decidir supervisar la publicació de les seves *Obres completes*, en set volums. Els dos primers aparegueren el 1894 i el 1895. Els altres cinc es publicaren entre 1903 i 1927, després de la seva mort per pneumònia l'any 1897. Va passar els seus tres últims anys confinat en una cadira de rodes.

3 Convergència uniforme

> [...] il y avait tout un type de raisonnements qui se ressembaient tous et qu'on retrouvait partout; ils étaint parfaitement rigourx eux, mais ils étaient longs. Un jour on a imaginé le mot d'uniformité de la convergence et ce mot seul les a rendus inutiles [...]
>
> **Poincaré, Science et Méthode [33]**

La convergència (puntual) de successions de funcions es va utilitzar de manera més o menys conscient des dels inicis del càlcul infinitesimal i, com hem vist, la continuïtat d'una funció va ser clarament definida per Bolzano i Cauchy. Aquest darrer no reconegué la continuïtat uniforme i el 1821 cregué haver demostrat la continuïtat dels límits de successions i de les sumes de sèries de funcions contínues.

Dirichlet va analitzar la demostració de Cauchy i hi va trobar un error,[5] i Joseph Fourier i Niels Henrik Abel en van donar contraexemples en el context de les sèries de Fourier. Abel llavors va demostrar que la suma d'una sèrie de potències era contínua amb un argument que usava la continuïtat uniforme en aquest cas particular.

El concepte de *convergència uniforme* segurament apareix per primer cop en un article de Gudermann de 1838 sobre funcions el·líptiques, en què va usar la frase «convergència de manera uniforme» quan el «modus de convergència» és independent de les variables, s'hi va referir com un «fet remarcable», però no en va donar una definició formal ni la va utilitzar en les demostracions.

Aquesta convergència va ser considerada independentment per Seidel (en una crítica a Cauchy, referint-se, sense una definició explícita, a la convergència lenta com la falta de convergència uniforme) i Stokes (el 1849, parlant de convergència infinitament lenta, sense cap referència a Cauchy), però sense impacte significatiu.

Va ser Weierstrass, en un treball de Münster de 1841, publicat el 1894, qui va utilitzar amb precisió aquesta convergència, que va denominar amb el seu nom actual.

G. H. Hardy [16] va comparar les definicions de Weierstrass, Stokes i Seidel i va observar: «Weierstrass' discovery was the earliest, and he alone fully realized its far-reaching importance as one of the fundamental ideas of analysis».

Sota la influència de Weierstrass i Riemann, al final del segle XIX, l'aplicació sistemàtica de la convergència uniforme va ser desenvolupada per autors com Hankel i Paul du Bois-Reymond d'Alemanya, i Dini i Arzelà d'Itàlia.

Així, Ulisse Dini va provar el resultat ben conegut que estableix que si una successió creixent de funcions contínues és puntualment convergent a una funció contínua en un interval tancat, la convergència és uniforme.

---

5 Dirichlet també va trobar insuficient la definició d'*integral de funcions contínues* deguda a Cauchy i va definir la noció de *continuïtat uniforme*.

Com hem vist, Weierstrass mostrava amb l'exemple (1) que el límit uniforme de funcions diferenciables podia no ser diferenciable.

També ho entenia així Riemann amb l'exemple (2).[6] El teorema d'aproximació de Weierstrass, al qual ens dedicarem immediatament, estableix de fet un recíproc: tota funció contínua és límit uniforme de funcions diferenciables, i fins i tot de polinomis.

A [18] M. Kline recull com l'any 1893 Hermite deia en una carta a Stieltjes: «Je recule de terreur et d'aversion devant ce mal déplorable que constituent les fonctions continues sans dérivées», i aquesta era una opinió compartida per molts.

En el mateix sentit, Poincaré diu a [33] i repeteix a [35], referint-se a l'ensenyament de les matemàtiques:

> La logique parfois engendre des monstres. Depuis un demi-siècle on a vu surgir une foule de fonctions bizarres qui semblent s'efforcer de ressembler aussi peu que possible aux honnêtes fonctions qui servent à quelque chose. Plus de continuité, ou bien de la continuité, mais pas de dérivées, etc. Bien plus, au point de vue logique, ce sont ces fonctions étranges qui sont les plus générales, celles qu'on rencontre sans les avoir cherchées n'apparaissent plus que comme un cas particulier. Il ne leur reste qu'un tout petit coin.
>
> Autrefois, quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui, on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères, et on n'en tirera jamais que cela.

Ara ja estem familiaritzats amb funcions no diferenciables i sabem que són necessàries per entendre objectes com fractals, moviments brownians, ondetes (*wavelets*), caos, etc., però aquests exemples van sacsejar la comunitat matemàtica del segle XIX.

4 1885: el teorema d'aproximació de Weierstrass

Cal veure l'article [50] de 1885, que consta de dues parts, dins el programa de Weierstrass de representar les funcions per sèries de potències. Hi va demostrar, quan ja tenia setanta anys, el teorema 1.

L'interès d'aquest teorema va ser apreciat immediatament i un any després se'n va incloure una traducció [51], també en dues parts, en el *Journal de Liouville*.[7]

---

6 Al voltant de 1830 Bolzano també va construir geomètricament una funció contínua no diferenciable en cap punt, però va cometre l'error habitual de creure que el límit puntual de funcions contínues és continu. Ell només afirmava que la seva funció era no diferenciable en un conjunt dens de punts, però de fet no ho era en cap punt.

7 *Journal de Liouville* era el nom que es donava al *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* francès, fundat per Liouville el 1836, el més antic després del *Journal de Crelle* alemany, fundat deu anys abans.

Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle;

PAR M. K. WEIERSTRASS.

Traduit par M. LÉONCE LAUGEL.

Soit $f(x)$ une fonction uniforme réelle et continue pour toute valeur réelle de la variable x et dont la valeur absolue ait une limite supérieure finie; on sait qu'elle satisfait à l'équation suivante, dans laquelle u désigne une deuxième variable réelle et k une grandeur positive indépendante de x et de u,

$$(1) \qquad \lim_{k=0} \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Le théorème qu'exprime cette équation est susceptible d'être aisément généralisé.

Soit une fonction quelconque $\psi(x)$ de même nature que $f(x)$, qui, ne changeant pas de signe, satisfasse à l'équation $\psi(-x) = \psi(x)$ et, en outre, à la condition suivante :

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

conserve une valeur finie, qui sera désignée par ω. Si l'on pose

$$(2) \qquad \mathrm{F}(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

Teorema 1. *Si $f \in C[a,b]$ és una funció real contínua i $\varepsilon > 0$, llavors $|f-p| \le \varepsilon$, per a algun polinomi p.*

Molts dels millors matemàtics van estar fortament interessats en aquest resultat i en van donar noves demostracions i aplicacions. Entre ells trobem Runge, Lerch i Mittag-Leffler, estudiants de Weierstrass, i molts d'altres, com Picard, Fejér, Landau, De la Vallée Poussin, Phragmén, Lebesgue, Volterra, Borel i Bernstein (*cf.* p. ex. [32]).

En la descripció de l'article de Weierstrass i de diverses de les demostracions que se succeïren, sense perdre generalitat, si convé podem suposar que $[a,b] = [0,1]$, $f(0) = f(1) = 0$ i $|f| \le 1$.

En efecte, per canviar el domini notem que si $P_n(t) \to f(\alpha t + a)$ ($\alpha = b - a$) uniformement sobre $[0,1]$, $Q_n(x) = P_n((x-a)/\alpha) \to f(x)$ uniformement sobre $[a,b]$. Per obtenir $f(0) = f(1) = 0$, canviant $f(x)$ per $f(x) - \alpha x - \beta$ ($\beta = f(0)$ i $\alpha = -f(0) - f(1)$), tenim $P_n(x) \to f(x) - \alpha x - \beta \Rightarrow P_n(x) + \alpha x + \beta \to f(x)$. Dividint f per una cota superior M de $|f|$, de $P_n \to f/M$ amb $|f/M| \le 1$, obtenim $MP_n \to f$.

Els elements bàsics del teorema 1 es troben en la primera part de [50], en els seus teoremes (A), (B) i (C). Aquesta part s'inicia amb la consideració de la funció

$$F(x,t) = \frac{1}{t\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-(\frac{u-x}{t})^2}\, \mathrm{d}u,$$

similar a la solució de l'equació de la calor $\partial_t F(x,t) = \partial_x^2 F(x,t)$ amb $t > 0$ i valors inicials $F(x,0) = f(x)$, donada per Fourier i Poisson.

La demostració es fa en dues etapes: primer es prova que $F(x,t) \to f(x)$ uniformement sobre cada interval de $\mathbb{R}$, si $t \downarrow 0$, i després que, per a $t > 0$ fixat, $F(\cdot,t)$ és una funció entera aproximable per polinomis usant les sumes parcials del desenvolupament de Laurent.

Teorema (A). *Sigui f una funció contínua acotada sobre $\mathbb{R}$. Aleshores hi ha moltes maneres de triar una família de funcions enteres $F(x,t)$, amb $t > 0$ un paràmetre real, tal que $\lim_{t\to 0} F(x,t) = f(x)$ per a cada $x \in \mathbb{R}$.*

A més, la convergència és uniforme sobre cada interval $[x_1, x_2]$.

De fet, Weierstrass considera la convolució

$$F(x,t) = \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x}{t}\right) \mathrm{d}u$$

on ψ és una funció general que satisfà

a) ψ és similar a f (acotada i contínua),

b) $\psi \ge 0$ i $\psi(-x) = \psi(x)$,

c) la integral impròpia $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, \mathrm{d}x$ és convergent (Weierstrass divideix per $\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, \mathrm{d}x$, i podem suposar $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, \mathrm{d}x = 1$).

En un primer pas, pel criteri de Cauchy, demostra que per a cada x les integrals $\int_{-a}^{b} f(u)\psi(\frac{u-x}{t})\,\mathrm{d}u$ són convergents si $a, b \to \infty$ usant la propietat de la mitjana de les integrals i les propietats de ψ:

$$\begin{aligned}\Delta &:= \frac{1}{t}\int_{-b_1}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{t}\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{t}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{t}\right)\mathrm{d}u = \\ &= \frac{1}{t}\int_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{t}\right)\mathrm{d}u - \frac{1}{t}\int_{-a_2}^{b_2} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{t}\right)\mathrm{d}u = \\ &= f(\xi_1)\int_{(a_1+x)/t}^{(b_1+x)/t} \psi(v)\,\mathrm{d}v + f(\xi_2)\int_{(a_2-x)/t}^{(b_2-x)/t} \psi(v)\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

i, suposant $|f| \le M$,

$$|\Delta| \le M\int_{(a_1+x)/t}^{(b_1+x)/t} \psi(v)\,\mathrm{d}v + M\int_{(a_2-x)/t}^{(b_2-x)/t} \psi(v)\,\mathrm{d}v \to 0,$$

si $b_1 > a_1 \to \infty$ i $b_2 > a_2 \to \infty$.

A continuació, com fem actualment amb els nuclis de sumabilitat, descompon F:

$$\begin{aligned}F(x,t) &= \frac{1}{t}\left\{\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x+\delta}^{+\infty} + \int_{x-\delta}^{x} + \int_{x}^{x+\delta}\right\} f(u)\psi\left(\frac{u-x}{t}\right)\mathrm{d}u = \\ &= \big(f(\xi_1) + f(\xi_2)\big)\int_{\frac{\delta}{t}}^{\infty} \psi(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\delta}{t}} [f(x-tu) + f(x+tu)]\psi(u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

i $F(x,t) - f(x)$ és igual a

$$\begin{aligned}&\big(f(\xi_1) - f(x)\big)\int_{\frac{\delta}{t}}^{\infty} \psi(u)\,\mathrm{d}u + \big(f(\xi_2) - f(x)\big)\int_{\frac{\delta}{t}}^{\infty} \psi(u)\,\mathrm{d}u + \\ &\qquad + \int_0^{\frac{\delta}{t}} [f(x-tu) + f(x+tu) - 2f(x)]\psi(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Prenent valors absoluts i usant la continuïtat uniforme de f sobre cada interval $[x_1, x_2]$, resulta que l'última integral està acotada per a tot $\varepsilon > 0$ si δ és petit, sempre que $t \le t_0$ per a un $t_0 > 0$. A més, els dos primers termes estan majorats per $\int_{\delta/t}^{\infty} \psi(u)\,\mathrm{d}u$, que també es fa menor que ε si $t \downarrow 0$, qualsevol que sigui δ.

Weierstrass feia notar explícitament que la convergència és uniforme sobre $[x_1, x_2]$.

TEOREMA (B). *Si f és com en el teorema (A) i $\varepsilon > 0$, llavors hi ha moltes maneres de triar un polinomi G tal que $|f(x) - G(x)| \le \varepsilon$ per a tot $x \in [x_1, x_2]$.*

En la demostració observa que per a moltes funcions ψ, com en el cas del nucli de la calor $W(x) = (1/\pi)e^{-x^2}$ (que actualment anomenem *nucli de Gauss-Weierstrass*), cada $F(\cdot, t)$ és entera i, fixat t tal que $|F(x,t) - G_N(x)| \le \varepsilon$ sobre $[x_1, x_2]$, es té

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n.$$

Així, donat $\varepsilon > 0$, algun dels polinomis $G_N(x) = \sum_{n=0}^{N} A_n x^n$ satisfà

$$|F(x,t) - G_N(x)| \le \varepsilon \qquad (x \in [x_1, x_2]).$$

O sigui, $|f - G_N| \le 2\varepsilon$.

Així ja s'ha aconseguit l'aproximació, però Weierstrass vol obtenir una representació de f en suma de sèrie de potències i encara demostra un tercer teorema:

Teorema (C). *Si $f(x)$ és com abans, es pot «representar» de moltes maneres com [la suma d'] una sèrie de polinomis que és uniformement convergent sobre cada interval i absolutament convergent per a cada x.*

La prova és fàcil. Escriu $\varepsilon = \sum \varepsilon_n$, aproxima f com en el teorema (B) amb polinomis de Taylor G_n de manera que $|f - G_n| < \varepsilon_n$ sobre $[-a_n, a_n]$, amb $a_n \uparrow \infty$. Finalment la sèrie telescòpica $G_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(G_{n+1} - G_n)$ satisfà les condicions del teorema.

Si el que es té és una funció f contínua sobre $[a, b]$, com Weierstrass observa en la segona part de l'article, f es pot estendre a tot $\mathbb{R}$ definint $f(x) = f(a)$ si $x < a$ i $f(x) = f(b)$ si $x > b$. La successió $\{G_n\}$ de polinomis tendeix a f uniformement sobre $[a, b]$.

En aquesta segona part, malgrat que Du Bois-Reymond havia construït una funció contínua amb sèrie de Fourier no convergent cap a la funció en un conjunt dens de punts, per mètodes de variable complexa Weierstrass prova que tota funció contínua periòdica és límit uniforme de polinomis trigonomètrics:

Teorema 2. *Siguin $f \in C_p(\mathbb{R})$, una funció contínua 2π-periòdica sobre $\mathbb{R}$, i $\varepsilon > 0$. Aleshores hi ha polinomis trigonomètrics T tals que $|f - T| \le \varepsilon$ sobre $\mathbb{R}$.*

La demostració és com segueix: si $\psi(z) = (1/\pi)e^{-z^2}$ (o similar), per a cada $t > 0$,

$$F_t(z) = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{u-z}{t}\right) \mathrm{d}u$$

és entera i periòdica, de manera que

$$G_t(z) = F_t\left(\frac{\log z}{i}\right)$$

és una funció analítica univalent ben definida sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, amb valors reals sobre $\mathbb{R}$, i té una sèrie de Laurent $G_t(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{t,k} z^n$, que sobre el cercle unitat $z = e^{ix}$ dóna

$$F_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{t,k} e^{ikx},$$

amb convergència uniforme.

Amb un argument dels dos ε es completa la demostració: donat $t > 0$ petit i si N és gran,

$$|f(x) - F_t(x)| \le \varepsilon, \quad |F_t(x) - \sum_{k=-N}^{+N} c_{t,k} e^{ikx}| \le \varepsilon \qquad (\forall\, x).$$

De fet, $\sum_{k=-N}^{+N} c_{t,k} e^{ikx}$ es pot suposar real, ja que

$$|F_t(x) - \Re \sum_{k=-N}^{+N} c_{t,k} e^{ikx}| \le |F_t(x) - \sum_{k=-N}^{+N} c_{t,k} e^{ikx}|.$$

Amb aquest resultat, Weierstrass va observar que quedava justificada la solució de Fourier de l'equació de la calor per a un anell prim amb una temperatura inicial contínua donada, ja que els seus polinomis trigonomètrics també satisfeien l'equació de la calor.

5 1891: Picard i l'aproximació a partir de l'equació de Poisson

Émile Picard (1856–1941) l'any 1891 va donar a [31] una prova com la de Weierstrass, però canviant el nucli de la calor pel de Poisson, usat per resoldre el problema de Dirichlet corresponent a la distribució estacionària de la temperatura $u(r,\vartheta)$ sobre el disc $D = \{(r,\vartheta);\, 0 \le r < 1\}$, per a una funció contínua periòdica $f(\vartheta) = u(r,\vartheta)$ representant la temperatura sobre la frontera.

Si $z = x + iy = re^{i\vartheta} \in D$, la solució és donada per la funció

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - t) + r^2}\, \mathrm{d}t = \Re \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t)\, \mathrm{d}t,$$

que és harmònica perquè és la part real d'una funció holomorfa. O sigui, $\triangle u(x,y) = 0$.

D'altra banda, si $0 < r < 1$, la sumació d'una sèrie geomètrica dóna

$$\frac{1}{2\pi}\, \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\vartheta - t) + r^2} = P_r(\vartheta - t)$$

amb

$$P_r(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{iks}.$$

Picard va ser un estudiant brillant a qui no li agradaven les matemàtiques. Però en acabar la secundària va quedar fascinat amb la lectura d'un llibre d'àlgebra.
Va tenir l'oportunitat de visitar Pasteur, qui li va parlar de la ciència pura. Llavors va decidir triar l'École Normale Supérieure en lloc de l'École Polytechnique, que en principi l'hauria preparat per ser enginyer.
Va ser estudiant de Darboux i director de Bernstein, Hadamard, Julia, Painlevé i A. Weil, entre molts d'altres. Va contribuir a la teoria de funcions i a les equacions diferencials, usant mètodes d'aproximacions successives per demostrar l'existència de solucions, i va estendre propietats de l'equació de Laplace a equacions el·líptiques més generals.
En el seu famós *Traité d'analyse* en tres volums publicat entre 1891 i 1896, seguit per molts estudiants per la claredat de la seva exposició, es presentaven exemples específics abans de la teoria general. Hi va incloure diverses demostracions del teorema de Weierstrass, però sense donar referències clares del seu origen. És la que es presenta, per exemple, a [43].
Hadamard escrivia el 1941: «Una característica destacada de la personalitat científica de Picard era la perfecció com a professor, un dels més meravellosos, si no el més meravellós, que mai he conegut.»

La família de funcions periòdiques $\{P_r\}_{0<r<1}$, anomenada *nucli de Poisson*, satisfà

a) $P_r \geq 0$,
b) $P_r(-s) = P_r(s)$,
c) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)\,\mathrm{d}s = 1$ i
d) $\sup_{0<\delta\leq|t|\leq\pi} P_r(t) \leq P_r(\delta) \to 0$ si $\delta \downarrow 0$.

Aleshores, com en el cas del nucli de Weierstrass,

$$u(re^{i\vartheta}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)P_r(\vartheta - t)\,\mathrm{d}t \to f(\vartheta)$$

uniformement, per a $r \uparrow 1$.

S'observa que, donat $0 < r < 1$,

$$u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik(\vartheta-t)}f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k r^{|k|}e^{ik\vartheta}$$

amb

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t,$$

on la darrera sèrie és uniformement convergent, pel criteri M de Weierstrass.

Una funció contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $|f| \leq 1$ i $f(0) = f(1) = 0$, s'estén per zero a $[-\pi,\pi]$ i es periodítza. Llavors, si $\varepsilon > 0$, existeix $0 < r < 1$ tal que

$$\sup_{-\pi\leq\vartheta\leq\pi} |f(\vartheta) - u(re^{i\vartheta})| \leq \varepsilon.$$

Però

$$\sum_{|k|\geq N}^{\infty} |c_k r^{|k|} e^{ik\vartheta}| \leq \sum_{|k|\geq N}^{\infty} r^{|k|} = 2\frac{r^N}{1-r}$$

i es pot triar N tal que $2r^N/(1-r) < \varepsilon$.

Sumant les desigualtats,

$$\sup_{-\pi\leq\vartheta\leq\pi} |f(\vartheta) - \sum_{|k|<N} c_k r^{|k|} e^{ik\vartheta}| \leq \sup_{-\pi\leq\vartheta\leq\pi} |f(\vartheta) - u(re^{i\vartheta})| + 2\frac{r^N}{1-r} \leq 2\varepsilon.$$

Així s'obté un polinomi trigonomètric $Q(\vartheta)$ que aproxima uniformement f, i Q és aproximat per un polinomi de Taylor.[8]

Al final del seu article, Picard observa que el mateix mètode proporciona el teorema d'aproximació en diverses variables. També diu que la seva demostració es basa en una desigualtat de H. Schwarz; de fet, a [42] gairebé es troba la demostració.

Quan els *Mathematische Werke* de Weierstrass van ser reimpresos el 1903, s'hi va incloure la mateixa observació referent a diverses variables. Hi ha raons per suposar que Weierstrass va dirigir l'edició, necessàriament abans de 1897.

6 1898: Lebesgue i l'aproximació per poligonals

Noves demostracions del teorema de Weierstrass es van basar en una primera aproximació de la funció contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ per una funció poligonal g sobre uns nodes $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = 1$,

$$g(x) = g_1(x) + [g_2(x) - g_1(x)]\chi(x-x_1) + [g_3(x) - g_2(x)]\chi(x-x_2) + \cdots + \\ + [g_m(x) - g_{m-1}(x)]\chi(x - x_{m-1}) \quad (3)$$

amb $\chi(x) = 1$ si $x \geq 0$ i $= 0$ si $x < 0$, i on g_j és la línia que connecta $(x_{j-1}, f(x_{j-1}))$ amb $(x_j, f(x_j))$,

$$g_j(x) = f(x_{j-1}) + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}[f(x_j) - f(x_{j-1})]. \quad (4)$$

---

8 En lloc d'aquesta última aproximació per polinomis de Taylor, similar a la donada per Weierstrass, l'any 1918, seguint una idea de Bernstein, De la Vallée Poussin va donar un nou mètode d'aproximació, més directe:

Si $f \in C[-1,1]$ amb $f(-1) = f(1)$, la funció parella

$$g(\vartheta) = f(\cos\vartheta) \qquad (|\vartheta| \leq \pi)$$

s'aproxima per un polinomi trigonomètric 2π-periòdic t, $|g - t| \leq \varepsilon$, que es descompon en part parella i imparella, $t = t_e + t_o$ $(t_e(\vartheta) = (t(\vartheta) + t(-\vartheta))/2 = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos(km))$. Si g és parella, resulta $|g - t_e| \leq \varepsilon$.

Cada $\cos(k\vartheta)$ és un polinomi de grau k de $\cos\vartheta$, $\cos(k\vartheta) = T_k(\cos\vartheta)$ (T_k és un polinomi de Txebixev), i $p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x)$ satisfà $|f - p| \leq \varepsilon$.

El matemàtic francès Henri L. Lebesgue (1875, Beauvais – 1941, París), amb els precedents dels treballs d'Émile Borel i Camille Jordan, el 1901 va presentar la seva integral que generalitzava la de Riemann en el famós article dels *Comptes Rendus* titulat «Sur une généralisation de l'intégrale définie» i que va desenvolupar en la seva tesi *Intégrale, longeur, aire*, presentada l'any 1902 a la Facultat de Ciències de París i publicada en els *Annali di Matematica* de Milà.
Lebesgue faria importants aportacions en altres àrees, com en topologia, teoria del potencial, càlcul de variacions, teoria de conjunts i teoria de la dimensió, i deixaria de centrar-se en la seva teoria general de la integral que havia iniciat, probablement a causa de la poca estima que tenia per les ganeralitzacions. Se li atribueix el comentari «Reduïdes a teories generals, les matemàtiques serien unes formes boniques sense contingut que moririen aviat».
Malgrat això, l'impacte de la seva integral va ser immediat, i les seves aplicacions desmentirien els seus temors. Seria usada amb èxit en anàlisi harmònica i en la teoria dels espais de Hilbert, base de la mecànica quàntica, i en la introducció d'espais com els de Sobolev.

Si denotem $x^+ = \max(x,0) = (|x|+x)/2$ i $g_1(x) = cx + c_0$, també es pot representar g per

$$g(x) = cx + c_0 + c_1(x-x_1)^+ + \cdots + c_{m-1}(x-x_{m-1})^+,$$

o, si tenim present que $(x-x_j)^+ = (|x-x_j| + x - x_j)/2$, per

$$g(x) = ax + b_0 + b_1|x-x_1| + \cdots + b_{m-1}|x-x_{m-1}|. \tag{5}$$

Així va procedir Lebesgue en el que va ser el seu primer article [25], escrit quan tenia vint-i-tres anys, amb una de les demostracions més elegants del teorema 1, usant l'aproximació poligonal g escrita com a (5).

Va observar que en tenia prou amb una aproximació de $|x|$ per un polinomi p, ja que si

$$\big||x| - p(x)\big| \le \varepsilon \qquad (|x| \le 1),$$

llavors

$$\big||x-x_k| - p(x-x_k)\big| \le \varepsilon \qquad (x \in [0,1] \cap [x_k - 1, x_k + 1];\ k = 1, \dots, m-1)$$

i en resulta fàcilment una aproximació de g per polinomis.

Per obtenir $p(x)$, Lebesgue escrigué

$$|x| = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{1-z},$$

amb $z = 1 - x^2$, i així, usant la fórmula del binomi,

$$\sqrt{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} C^n_{1/2}(-z)^n,$$

on
$$C_{1/2}^n = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}.$$
Usant la fórmula de Stirling comprovava que el radi de convergència era 1 i que per a $|z| = 1$ es tenia la convergència adequada.

El punt delicat de la prova de Lebesgue estava en la discussió sobre la convergència de la sèrie de $\sqrt{1-z}$ en $|z| = 1$. Una manera senzilla de salvar aquesta dificultat consisteix a usar que $(1-\delta z)^{1/2} \to (1-z)^{1/2}$ uniformement si $\delta \uparrow 1$, i és fàcil aproximar $(1-\delta z)^{1/2}$ $(0 < \delta < 1)$ per polinomis, ja que
$$(1-\delta z)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta^n z^n$$
uniformement a $|z| < \delta^{-1}$, i $\delta^{-1} > 1$.

Però probablement la manera més enginyosa d'aproximar $|x|$ sobre $[-1,1]$ per polinomis és la de 1949 de N. Bourbaki [5], que va definir recursivament una successió de polinomis p_n a partir de $p_0 = 0$ i llavors
$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n^2(t)).$$
De $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} - p_n(t))\right)$ s'obté per inducció que $0 \le p_n(t) \le \sqrt{t}$, i $\{p_n\}$ és creixent sobre $[0,1]$. Pel teorema de Dini ja esmentat, $p_n \to h$ uniformement amb $h \ge 0$ tal que
$$h(t) = h(t) - \frac{1}{2}(t - h^2(t)),$$
o sigui, $h(t) = \sqrt{t}$. Aleshores, $q_n(x) = p_n(x^2) \to |x|$ uniformement sobre $[-1,1]$.

De fet, aquesta aproximació de $|x|$ és el que fa falta per provar el teorema de Stone-Weierstrass, una extensió important del teorema de Weierstrass. Vegeu p. ex. [5], [10] o la primera edició de [30].

Sobre les proves de Weierstrass i Picard, i les de Fejér i Landau que veurem a continuació, en una carta de 1908 a Landau, Lebesgue observava que totes s'havien de considerar en un context general de convolucions amb successions de nuclis no negatius que aproximen la identitat, una observació que Lebesgue va elaborar a [26].

Cal dir també que, ja l'any 1892, en l'article en txec [27], que va passar desapercebut, M. Lerch demostrava el teorema 1 a partir de l'aproximació de la funció poligonal g per una sèrie de Fourier de cosinus,
$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) \qquad \left(A_n = 2\int_0^1 g(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t\right),$$
basant-se en el mètode de Dirichlet de 1829 sobre les sèries de Fourier
$$f \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x)),$$

escrivint les sumes de Fourier com a integrals,

$$\begin{aligned}\sigma_N(f,x) &= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \big(A_n \cos(2\pi n x) + B_n \sin(2\pi n x)\big) = \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} f(t) D_N(x-t)\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

on

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi n t). \tag{6}$$

Com havia provat Heine el 1870 ([17]), $\sigma_N(f,x) \to f(x)$ uniformement si f és contínua monòtona a trossos o si és diferenciable a trossos, com és el cas de g.

Aquesta és la demostració continguda a [9].

L'any 1897 V. Volterra (1856–1927) va donar una prova similar del teorema 2.

7 1901: el fenomen de Runge

Per tractar d'obtenir una prova directa del teorema 1, és natural substituir ingènuament les aproximacions poligonals de la nostra funció contínua f per una interpolació dels valors de $(x_j, f(x_j))$ per polinomis de grau creixent, quan el nombre de nodes x_j també va creixent.

Però Runge, en un estudi dels errors en la interpolació poligonal per aproximar certes funcions, va descobrir un fet numèric important que mostra que en augmentar els graus no sempre es millora la precisió, en un fenomen similar al de Gibbs en sèries de Fourier.

Runge va observar que si la funció

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$$

és interpolada a $n+1$ nodes equidistants x_i entre -1 i 1,

$$x_j = -1 + (j-1)\frac{2}{n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

per un polinomi p_n de grau $\le n$, a la vora de l'interval la interpolació resultant oscil·la produïnt un error que tendeix cap a infinit en créixer el grau dels polinomis; o sigui

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\max_{-1\le x\le 1} |f(x) - p_n(x)| \Big) = \infty.$$

Carl Runge (1856, Bremen – 1927, Göttingen), que va passar l'adolescència a l'Havana, el 1876 va entrar a la Universitat de Munic per estudiar literatura i filosofia. Es va fer molt amic de Max Planck i tots dos anaren a Berlín el 1877. Després d'assistir a les classes de Weierstrass, Runge es va decidir per les matemàtiques pures.
A Berlín va presentar la tesi el 1880 sobre geometria diferencial amb Weierstrass, que, de fet, no el va dirigir. El tema l'havia tret de discussions amb altres estudiants, però Runge es va considerar sempre deixeble de Weierstrass.
Habilitat per ser professor de Gymnasium durant 1880–1881, va tornar a Berlín i es va integrar en el grup de Kronecker, en què va treballar sobre la solució numèrica d'equacions algebraiques amb arrels expressables en sèries racionals dels coeficients. En la tesi d'habilitació a Berlín, l'any 1883, va trobar un mètode numèric que incloïa els de Newton, Bernoulli i Gräffe com a casos especials. A Berlín va seguir treballant en àlgebra i teoria de funcions en el grup de Kronecker.
El 1886, professor a Hannover, influenciat per Emil du Bois-Reymond, germà gran de Paul du Bois-Reymond i un dels professors de Berlín amb més anomenada, Runge va passar de les matemàtiques pures a l'estudi de l'espectre d'elements diferents de l'hidrogen. El 1887 es va casar amb la filla d'Emil.
A Hannover l'any 1901 va escriure l'article [40] sobre el fenomen de Runge i el 1904 va ser nomenat professor de matemàtiques aplicades a Göttingen, on va treballar en mètodes numèrics i gràfics, i en la solució numèrica d'equacions diferencials.

Es pot plantejar efectuar interpolacions amb nodes distribuïts més densament cap a les vores, ja que llavors l'oscil·lació disminueix. Així, en el cas $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, triant-los

$$-1 < x_n < \cdots < x_1 < 1, \qquad (x_k = \cos((2k-1)\pi/2n)), \tag{7}$$

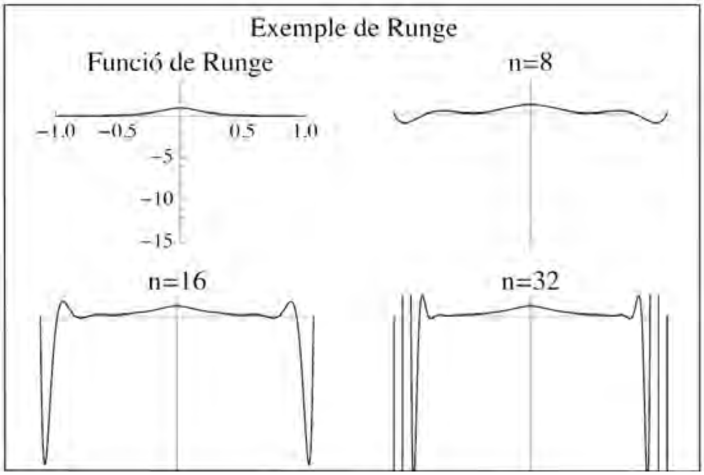
zeros dels polinomis de Txebixev, el màxim error es minimitza i sempre disminueix en créixer el grau del polinomi.

Però el 1914, tretze anys més tard, Faber [11] demostraria que, qualsevol que sigui la matriu triangular infinita de nodes que es fixi,

$$-1 \le x_{n,n} < \cdots < x_{0,n} \le 1,$$

sempre hi ha una funció contínua tal que la corresponent successió de polinomis interpoladors p_n de grau n ($p_n(x_{nj}) = f(x_{nj})$) és divergent.

Finalment, el 1916 Fejér [14] demostraria que el teorema 1 es podia obtenir amb un esquema d'interpolació tipus Hermite a partir dels nodes (7) i prenent com a polinomis interpoladors els polinomis H_n de grau $\le 2n-1$ que satisfan $H(x_k) = f(x_k)$ i $H'_k(x_k) = 0$.



Cal assenyalar que un altre teorema ben conegut de Runge de 1885 [38] està molt relacionat amb el teorema 1. Si K és un compacte de $\mathbb{C}$, f una funció holomorfa en un entorn de K i A qualsevol conjunt que contingui com a mínim un punt de cada «forat de K» (cada component acotada de $\mathbb{C}\setminus K$), aquest teorema assegura l'existència de $r_k \to f$ uniformement sobre K, on les r_k són funcions racionals amb singularitats situades en A.

En particular, si $\mathbb{C} \setminus K$ és connex, cada r_k és una funció racional sense pols, o sigui, un polinomi.

El mateix any de la demostració del teorema 1 per Weierstrass, a [39] Runge també va demostrar que tota funció poligonal g amb la representació (3), $g(x) = g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1}[g_{j+1}(x) - g_j(x)]\chi(x - x_j)$, admet l'aproximació uniforme per funcions racionals següent:

Donat $\delta > 0$, la successió de funcions creixents

$$\psi_n(x) = 1 - \frac{1}{1 + (1 + x)^{2n}}$$

tendeix decreixent cap a 0 sobre $[-1, 0)$ i creixent cap a 1 sobre $(0, 1]$. Pel teorema de Dini, és uniformement convergent cap a χ sobre $\{\delta \le |x| \le 1\}$.

Cada funció lineal $g_{j+1} - g_j$ s'anul·la a x_j i és fàcil comprovar que

$$[g_{j+1}(x) - g_j(x)]\psi_n(x - x_j) \to [g_{j+1}(x) - g_j(x)]\chi(x - x_j)$$

uniformement sobre $[0, 1]$ si $n \to \infty$. Per tant,

$$R_n(x) = g_1(x) + \sum_{j=1}^{m-1} [g_{j+1}(x) - g_j(x)]\psi_n(x - x_j)$$

són funcions racionals tals que $R_n \to f$ uniformement sobre $[0, 1]$.

Curiosament, Runge no va veure que com a aplicació podia deduir fàcilment l'aproximació per polinomis, com va observar Phragmén el 1886, quan tenia vint-i-tres anys, segons una nota a peu de pàgina de l'article [28] de 1900 de Mittag-Leffler.

8 1902: Fejér i l'aproximació per mitjanes de sumes de Fourier

Fejér va trobar una nova prova en dos passos del teorema 1, com en el cas de la prova de Weierstrass: (A) la funció contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, que suposem tal que $f(0) = f(1) = 0$ i periodització, s'aproxima per les mitjanes de les seves sumes de Fourier, i (B) les sumes de Fourier, òbviament funcions enteres, s'aproximen per polinomis de Taylor.

El pas principal (A) és el teorema de Fejér que, en el cas de la sèrie de Fourier de la funció f, diu que les mitjanes

$$\sigma_N(f,x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_n(f,x)$$

de les sumes de Fourier,

$$s_N(f,x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\bigl(A_n\cos(2\pi nx) + B_n\sin(2\pi nx)\bigr),$$

tendeixen uniformement a f.

Com hem recordat, escrivint

$$s_N(f,x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)D_N(x-t)\,\mathrm{d}t$$

amb D_N com a (6),

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N}\cos(2\pi nt),$$

Dirichlet havia demostrat que $s_N(f,x) \to f(x)$ si f és monòtona a trossos. Però, com veurem, el 1873 Paul du Bois-Reymond va presentar el seu contraexemple de funció contínua sense aquesta propietat.

Era ben sabut que en prendre mitjanes se suavitzaven les oscil·lacions de les successions i Fejér va observar que

$$\sigma_N(f,x) = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)\Bigl[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} D_n(x-t)\Bigr]\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t$$

i els nuclis integrals F_N són polinomis trigonomètrics tals que

1. $F_N \geq 0$,
2. $F_N(-t) = F_N(t)$,
3. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} F_N(t)\,\mathrm{d}t = 1$ i
4. $\lim_{N\to\infty} \max_{\delta \leq t \leq 1/2} F_N(t) = 0$ si $0 < \delta < 1/2$,

propietats típiques de les aproximacions de la identitat que, com en el cas dels nuclis de Weierstrass, proporcionen la convergència uniforme de la successió $\int_0^1 f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t$ cap a $f(x)$ si $N \to \infty$, i les funcions $\int_0^1 f(t)F_N(x-t)\,\mathrm{d}t$ són també polinomis trigonomètrics.

A Lipót Fejér (1880, Pécs – 1959, Budapest), aleshores Leopold Weiss, les coses no li anaven bé a secundària i el seu pare el va treure un temps de l'escola per donar-li classes particulars. La seva actitud amb les matemàtiques va canviar radicalment en tenir un professor nou.
Va entrar a la Politècnica de Budapest el 1897, però va passar el curs 1899–1900 a Berlín, on les discussions amb Hermann Schwarz el portaren a provar el *teorema de Fejér* amb només disset anys, publicat en l'article [12] «Sur les fonctions bornées et intégrables» a l'Acadèmia de Ciències de París.
A Berlín va canviar el seu nom jueu Leopold Weiss pel de Lipót Fejér en reinvindicació de la seva cultura hongaresa. Després d'això, Schwarz va deixar de parlar-li.
La seva tesi de 1902, presentada a la Universitat de Budapest amb el seu teorema, contenia a més la demostració del teorema 1 i altres aplicacions importants, incloses també en el seu article [13] de 1903, com són el fet que si la sèrie de Fourier d'una funció convergeix en un punt de continuïtat de la funció, la suma és el valor de la funció en el punt, i que la integral de Poisson dóna la solució vàlida del problema de Dirichlet en el cercle.
D'aquesta manera, Fejér recuperava per a les sèries de Fourier el seu paper fonamental en l'anàlisi que havien perdut a causa dels exemples patològics que s'havien presentat en l'anàlisi real.
Malgrat la reputació que Fejér havia guanyat, era relativament desconegut a Hongria. L'any 1905 Henri Poincaré va anar a Budapest per rebre el primer premi Bolyai. En la seva rebuda a l'estació va demanar on era Fejér. Davant de la resposta «Qui és Fejér?» va replicar que era el matemàtic hongarès més gran i un dels més grans matemàtics del món. Després d'això, Fejér va ser nomenat catedràtic a Kolozsvár Hungary (actualment Cluj, a Romania).

La demostració anterior, similar a la de Lerch, és la que s'inclou a [1].

Com ja hem comentat, el 1916 Fejér va donar a [14] una altra demostració del teorema 1 per interpolació.

9 1908: Landau presenta una demostració senzilla

El 1908, Landau, nét matemàtic de Weierstrass (Frobenius va ser el seu director), va presentar a [24] la demostració més simple i elemental del teorema 1. Es tracta d'una demostració directa i en un sol pas que s'inclou en llibres de text com el Rudin [37] i [30]. En aquesta demostració, simplificant, es pot suposar $f(0) = f(1) = 0$, que f s'estén per zero a tota la recta real, i que $|f| \leq 1$.

Es consideren sobre $[-1, 1]$ els polinomis positius i parells

$$Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n,$$

amb $c_n = 1/\int_{-1}^{1}(1 - x^2)^n \, dx$, de manera que $\int_{-1}^{1} Q_n = 1$.

Edmund Landau (1877–1938) era un alemany d'origen jueu que va treballar en anàlisi complexa i en teoria de nombres (va escriure el primer tractament sistemàtic de la teoria analítica de nombres, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*). Va donar classes a la Universitat de Berlín de 1899 fins a 1909 i va ser catedràtic de la Universitat de Göttingen des de 1909, i també va donar classes a la Universitat Hebraica de Jerusalem.

S'observa primer que $c_n < \sqrt{n}$ fent ús de la desigualtat de Bernoulli $(1+h)^n \geq 1 + nh$ amb $h \geq -1$, que s'obté comprovant que per a $h > -1$ la derivada de $F(h) = (1+h)^n - 1 - nh$ és positiva i que $F(0) = 0$. En particular, $(1-x^2)^n \geq 1 - nx^2$ sobre $(0,1)$ i es fa una estimació de $1/c_n$ per

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n \, \mathrm{d}x \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}} (1-nx^2)\, \mathrm{d}x > 1/\sqrt{n}.$$

Si cada Q_n s'estén per zero a una funció sobre la recta, se satisfan:

a) $Q_n \geq 0$,

b) $\int_{-\infty}^{\infty} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

c) si $0 < \delta \leq |x| \leq 1$, llavors $Q_n(x) < \sqrt{n}(1-x^2)^n \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n$, de manera que $Q_n(x) \to 0$ quan $n \to \infty$, uniformement si $|x| \geq \delta$, per a cada $\delta > 0$.

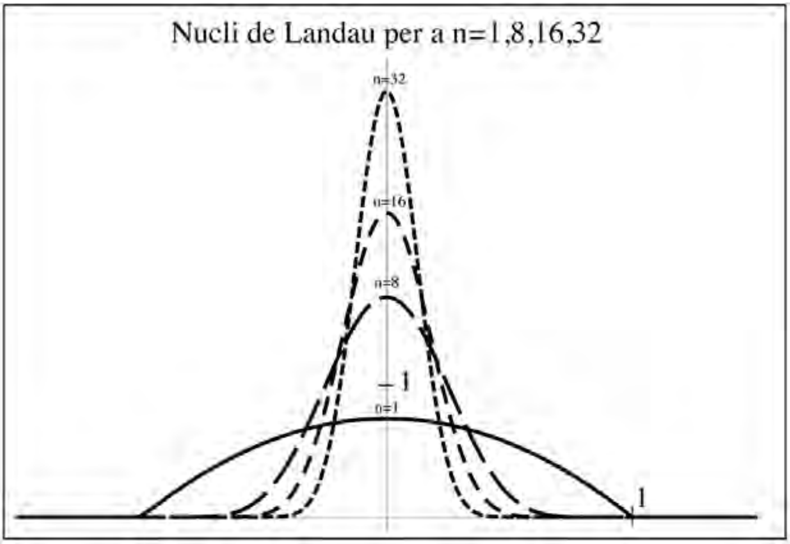
O sigui, tornem a estar en el marc de les aproximacions de la identitat. Ara tenim, a més, que les funcions

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)Q_n(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)Q_n(x-t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

són polinomis sobre $[0,1]$, ja que $x - t \in [-1,1]$ si $x \in [0,1]$ quan $0 \leq t \leq 1$.

La prova ara és l'habitual, usant la continuïtat uniforme de f, de manera que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x-y| \leq \delta$. Per a $0 \leq x \leq 1$,

$$P_n(x) - f(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)Q_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} f(x)Q_n(t)\,\mathrm{d}t.$$



Usant que $|f| \le 1$ i les propietats a)–c) de Q_n, amb la descomposició $\int_{-1}^{1}$ en $\int_{-\delta}^{\delta} + \left(\int_{\delta}^{1} + \int_{-1}^{-\delta}\right)$, obtenim que

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &\le \int_{-1}^{1} |f(x-t) - f(x)| Q_n(t)\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\,\mathrm{d}t + 4 \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\,\mathrm{d}t \le \\ &\le \varepsilon + 4\sqrt{n}(1-\delta^2)^n. \end{aligned}$$

Observem que el segon membre es fa menor que 2ε en augmentar n, i que $\sup_{0\le x\le 1} |P_n(x) - f(x)| \le 2\varepsilon$, $(n \ge N)$.

També el 1908, Charles de la Vallée Poussin (que simultàniament amb Hadamard havia demostrat el teorema dels nombres primers l'any 1896) va provar el teorema 2 d'aproximació d'una funció f 2π-periòdica per polinomis trigonomètrics utilitzant integrals, anàlogues periòdiques de les de Landau,

$$c_n \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos^{2n}\Big(\frac{x-t}{2}\Big)\,\mathrm{d}t.$$

10 1911: el mètode probabilístic de Bernstein

Usant mètodes probabilístics, Bernstein va trobar una demostració molt interessant del teorema 1, continguda a [2]. Essencialment fa el següent:

El matemàtic ucraïnès Sergei Bernstein (1880, Odessa – 1968, Moscou), en la seva tesi de 1904 a la Sorbona, havia resolt el dinovè problema de Hilbert referent a l'analiticitat dels minimitzadors d'un funcional d'energia, mostrant que les solucions C^3 d'equacions el·líptiques no lineals de dues variables són analítiques (un problema finalment completament resolt amb reducció de les condicions de diferenciabilitat per Ennio De Giorgi [1956–1957] i John Nash [1957–1958]).

Bernstein també va treballar en teoria constructiva de funcions i en fonamentació matemàtica de la genètica, i en probabilitats, amb un text molt notable de 1911 titulat «La teoria de probabilitats».

El 1908, De la Vallée Poussin havia proposat el problema de la possible aproximació d'una funció poligonal per un polinomi de grau n amb error menor que $1/n$, i l'Acadèmia Belga de Ciències va oferir un premi per la seva solució.

Bernstein va donar-ne una solució completa molt original utilitzant mètodes probabilístics l'any 1911, va introduir els anomenats *polinomis de Bernstein* i va presentar una demostració constructiva del teorema 1.

Sobre aquest tema va defensar el 1913 la seva segona tesi *Sobre la millor aproximació de funcions contínues per polinomis de grau prefixat* a Rússia, on els títols estrangers no eren acceptats per optar a llocs acadèmics.

Bernstein va dir: «L'exemple del problema de la millor aproximació de la funció $|x|$, proposat per De la Vallée-Poussin, reafirma, de nou, el fet que una qüestió específica ben proposada duu a teories de significació molt més generals».

Per a cada $x \in [0,1]$, es tria una successió $\{X_n\}$ de variables aleatòries de Bernoulli amb paràmetre x (corresponen a llançaments d'una moneda amb probabilitat x per a *cara* i $1-x$ per a *creu*), de manera que $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ té una distribució binomial,

$$P\{S_n = k\} = C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

ja que es tenen C_n^k maneres d'obtenir k cares i $n-k$ creus en n proves independents.

S'observa que el valor mitjà (o *esperança*) de $S_n = \sum_{k=0}^n k\chi_{\{S_n=k\}}$ és

$$E(S_n) = \int S_n \, \mathrm{d}P = \sum_{k=0}^{n} kP\{S_n = k\} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

La llei dèbil dels grans nombres estableix que, en probabilitat, les mitjanes S_n/n tendeixen a x. Més precisament, per a cada $\delta > 0$,

$$P\left\{ \left| \frac{S_n}{n} - x \right| \geq \delta \right\} \leq \frac{x(1-x)}{\delta^2 n}.$$

Per a la nostra funció contínua $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $|f| \le 1$, la mitjana de la composició

$$f(S_n/n) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\chi_{\{S_n=k\}}$$

és

$$B_n(f,x) = E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P\{S_n = k\} = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

D'aquests polinomis, els polinomis de Bernstein associats a f, Bernstein va demostrar que aproximen f de la manera següent:

Primer s'observa que

$$|f(x) - B_n(f,x)| = |E(f(x)) - E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right)| \le \int |f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)|\,\mathrm{d}P = I + J$$

amb

$$I = \int_{\{|S_n/n-x|\le\delta\}} |f(x) - f(S_n/n)|\,\mathrm{d}P \le 2\varepsilon,$$

si es tria $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$ sempre que $|x-y| \le \delta$ i, per la llei dèbil dels grans nombres,

$$J = \int_{\{|S_n/n-x|>\delta\}} |f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)|\,\mathrm{d}P \le 2P\left(\{|\frac{S_n}{n} - x| > \delta\}\right) \le 2\frac{x(1-x)}{\delta^2 n}.$$

Conseqüentment,

$$\sup_{0\le x\le 1} |f(x) - B_n(f,x)| \le 2\varepsilon + 2\frac{1}{\delta^2 n} \le 4\varepsilon$$

per a tot $n \ge N$ si N és gran.

A [41] trobareu més detalls, així com la demostració de la llei dèbil dels grans nombres de Bernoulli.

Actualment demostrem fàcilment la convergència uniforme $\lim_n B_n f = f$ sense fer referència a les probabilitats (vegeu [6]), però va ser el mètode probabilístic de Bernstein el que va permetre el descobriment dels polinomis $B_n f$.

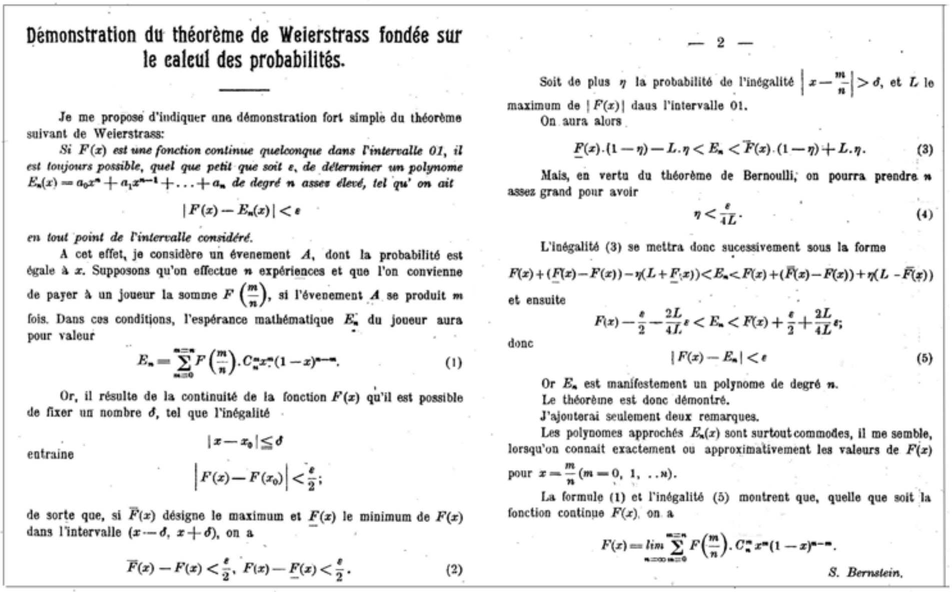
Observació. Per construir una successió $\{X_n\}$ de variables aleatòries de Bernoulli independents amb paràmetre x es pot procedir de la manera següent:

Primer es dota $\Omega = \{1,0\}$ de la probabilitat P tal que $P(1) = x$ i $P(0) = 1-x$.

Després es considera sobre

$$\Omega^{\mathbf{N}} = \{1,0\} \times \{1,0\} \times \{1,0\} \times \{1,0\} \times \cdots$$

la família $\mathcal{E}$ de totes les unions finites de conjunts $\pi_n^{-1}(j)$ ($j = 0,1$; $n = 1,2,3,\dots$), amb $\pi_n(j_1, j_2, \dots) = j_n$, i la funció additiva de conjunt $Q\colon \mathcal{E} \to [0,1]$ tal que $Q(\pi_n^{-1}(j)) = x$ si $j = 1$. Aquesta funció de conjunt s'estén de manera natural a una probabilitat sobre la σ-àlgebra generada per $\mathcal{E}$. Només cal definir $X_n(j_1, j_2, \dots) = j_n$.



Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.

Je me propose d'indiquer une démonstration fort simple du théorème suivant de Weierstrass:

Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque dans l'intervalle 01, il est toujours possible, quel que petit que soit ε, de déterminer un polynome $E_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ de degré n assez élevé, tel qu' on ait

$$|F(x) - E_n(x)| < \varepsilon$$

en tout point de l'intervalle considéré.

A cet effet, je considère un évenement A, dont la probabilité est égale à x. Supposons qu'on effectue n expériences et que l'on convienne de payer à un joueur la somme $F\left(\frac{m}{n}\right)$, si l'évenement A se produit m fois. Dans ces conditions, l'espérance mathématique E_n du joueur aura pour valeur

$$E_n = \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right).C_n^m x^m (1-x)^{n-m}. \qquad (1)$$

Or, il résulte de la continuité de la fonction $F(x)$ qu'il est possible de fixer un nombre δ, tel que l'inégalité

$$|x - x_0| \leq \delta$$

entraine

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2};$$

de sorte que, si $\overline{F}(x)$ désigne le maximum et $\underline{F}(x)$ le minimum de $F(x)$ dans l'intervalle $(x - \delta,\ x + \delta)$, on a

$$\overline{F}(x) - F(x) < \frac{\varepsilon}{2},\ F(x) - \underline{F}(x) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

— 2 —

Soit de plus η la probabilité de l'inégalité $\left|x - \frac{m}{n}\right| > \delta$, et L le maximum de $|F(x)|$ daus l'intervalle 01.

On aura alors

$$\underline{F}(x).(1-\eta) - L.\eta < E_n < \overline{F}(x).(1-\eta) + L.\eta. \qquad (3)$$

Mais, en vertu du théorème de Bernoulli, on pourra prendre n assez grand pour avoir

$$\eta < \frac{\varepsilon}{4L}. \qquad (4)$$

L'inégalité (3) se mettra donc sucessivement sous la forme

$$F(x) + (\underline{F}(x) - F(x)) - \eta(L + \underline{F}(x)) < E_n < F(x) + (\overline{F}(x) - F(x)) + \eta(L - \overline{F}(x))$$

et ensuite

$$F(x) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{2L}{4L}\varepsilon < E_n < F(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2L}{4L}\varepsilon;$$

donc

$$|F(x) - E_n| < \varepsilon \qquad (5)$$

Or E_n est manifestement un polynome de degré n.

Le théorème est donc démontré.

J'ajouterai seulement deux remarques.

Les polynomes approchés $E_n(x)$ sont surtout commodes, il me semble, lorsqu'on connait exactement ou approximativement les valeurs de $F(x)$ pour $x = \frac{m}{n}$ $(m = 0, 1, \ldots n)$.

La formule (1) et l'inégalité (5) montrent que, quelle que soit la fonction continue $F(x)$, on a

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \sum_{m=0}^{m=n} F\left(\frac{m}{n}\right).C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

S. Bernstein.

11 Els estudiants de Weierstrass

> La seva major influència es va notar a través dels seus estudiants (entre aquests, Sofya Kovalevskaya), molts dels quals esdevingueren matemàtics creatius.
>
> **Enciclopèdia britànica**

A més de ser un dels analistes líders del segle XIX, Weierstrass ha estat considerat el millor mestre per a estudiants avançats.

Com a conseqüència d'aquest fet, va tenir nombrosos estudiants formals i informals.

Mittag-Leffler explica que, quan amb una beca per estudiar a l'estranger, el 1873 va arribar a París, Hermite el va rebre amb les paraules «Vous avez fait erreur, Monsieur, vous auriez du suivre les cours de Weierstrass a Berlin». Mittag-Leffler va seguir el consell d'Hermite i se'n va anar a Berlín.

Weierstrass apareix en el Mathematics Genealogy Project com a director de quaranta-dos estudiants (en negreta, els que esmentem en aquestes pàgines):

L. Fuchs (1858), **L. Königsberger** (1860), **H. Schwarz** (1864), E. Lampe (1864), W. Thomé (1865), T. Berner (1865), W. Biermann (1865), N. Bugaev (U. Estatal de Moscou, 1866), F. Müller (1867), **G. Cantor** (1867), K. Schwering (1869), **G. Frobenius** (1870), L. Kiepert (1870), E. Netto (1870), H. Bruns (1871), W. Killing (1872), **S. Kovalevskaya** (U. Göttingen, 1874), L. Stickelberger (1874), K. Winterberg (Berlín, 1874), F. Schottky (1875), G. Hettner (1877), A. Schönflies (1877), H. von Mangoldt (1878), P. Hoyer (1879), F. Schur (1879), E. Wiltheiss (1879) A. Wernicke (1879), A. Wendt (1880), **C. Runge** (1880), F. Rudio (1880), A. Piltz (1881), J. Knoblauch (1882), R. von Lilienthal (1882), H. Stahl (1882), T. Adrian (1882), K. Weltzien (1882), M. Blasendorff (1883), Richard Müller (U. Leipzig, 1883), E. Kötter (1884), Reinhold Müller (1884), **M. Lerch** (1885), W. Howe (1887).

Mittag-Leffler

Du Bois-Reymond

Com Mittag-Leffler, Paul du Bois-Reymond, el matemàtic més citat del segle XIX, malgrat que va presentar la tesi *De aequilibrio fluidorum* el 1859 supervisat per Kummer, també s'ha de considerar de l'escola de Weierstrass.

No el podem incloure en el seu grup —de fet, tenia males relacions amb Schwarz— però va compartir amb Weierstrass interessos matemàtics similars i la mateixa preocupació pel rigor.

Va ser Du Bois-Reymond el 1875 el primer a publicar una funció patològica no derivable com la de Weierstrass.

Ell mateix, el 1873, intentant estendre el resultat de 1820 de Dirichlet sobre la convergència de les sèries de Fourier de funcions contínues monòtones a trossos al cas de les funcions contínues arbitràries, va veure que això no era possible i va obtenir el famós exemple de funció contínua amb sèrie de Fourier no convergent en un conjunt dens de punts, publicat en l'article [3]. Es tractava d'una funció fortament oscil·lant, del tipus

$$f(t) = A(t)\sin(\omega(t)) \qquad \text{(per a certes } A(t) \to 0 \text{ i } \omega(t) \to 0).$$

Mereix una menció especial l'estudiant més destacat de Weierstrass, Sofya Kovalevskaya (Moscou, 1850 – Estocolm, 1891), o Sonya,[9] com li agradava de ser anomenada, la jove que a Sant Petersburg es va unir al cercle de la *intelligentsia* russa, on s'incloïa Fiodor Dostoievski.

Després dels estudis secundaris, Sonya volia seguir estudis matemàtics a la universitat, però les universitats russes estaven tancades a les dones. Per això va arreglar un matrimoni fictici l'any 1868 amb Vladimir Kovalevski, un jove paleontòleg, per poder viatjar a l'estranger. En arribar a Heidelberg va trobar que les dones tampoc es podien matricular a la universitat, però van permetre que assistís a classe com a oient. Immediatament, Königsberger, un antic estudiant de Weierstrass, va descobrir les seves habilitats matemàtiques.

9 A [8] es troba una ressenya molt completa del treball de Kovalevskaya.

El 1870 Sonya va decidir continuar els estudis amb Weierstrass, però aquest va rebre la prohibició de permetre que Sonya assistís a les seves classes. Weierstrass, després d'avaluar les solucions a una llista de problemes que va proposar a Sonya i atenent les seves demandes, va acceptar donar-li classes particulars dues vegades per setmana.

El 1874, Kovalevskaya ja tenia tres articles: sobre solucions analítiques d'equacions en derivades parcials (sens dubte el més important, amb el resultat conegut com a *teorema de Cauchy-Kovalevskaya* i l'únic que va ser publicat llavors, al *Journal de Crelle* [20]); sobre la reducció d'integrals abelianes a integrals el·líptiques més simples (mostrava el seu coneixement de la teoria de Weierstrass i després va ser inclòs en l'article d'*Acta* de 1884 [21]), i sobre els anells de Saturn (article que no apareix mencionat en les cartes que rebé de Weierstrass com a estudiant, publicades a [22]).

Amb aquests treballs, que van formar la seva tesi, fortament recomanada per Weierstrass, Sonya va obtenir el 1874 el doctorat per la liberal Universitat de Göttingen. Però, malgrat les recomanacions de Weierstrass, no va poder aconseguir un lloc a la universitat i va tornar a Rússia.

A Sant Petersburg la millor feina que li oferien era la de mestra d'aritmètica en una escola femenina i durant sis anys va abandonar la recerca matemàtica. Es va dedicar a fer de reportera teatral i a escriure com a periodista de ciència i tecnologia, i va optar per activitats socials frívoles. Weierstrass es va assabentar per Txebixev del comportament de Sonya i li va escriure sense obtenir resposta.

Però el 1878 Sonya va consultar Weierstrass sobre un tema tècnic i entre ells es va iniciar un intercanvi de cartes intens. L'any 1880 la van persuadir de presentar un article en un congrés de Sant Petersburg, on Mittag-Leffler va quedar tan impressionat que, després d'intentar durant tres anys obtenir una plaça per a ella, va convèncer la Universitat d'Estocolm que l'acceptés com a *private docent*.

S. Kovalevskaya

K. Weierstrass

Finalment, després de guanyar el Prix Bordin de l'Acadèmia Francesa de Ciències per la seva *Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe* publicada a [23], ara com a vídua respectable (el 1883 Vladimir es va suïcidar), l'any 1889 va obtenir una càtedra permanent a Estocolm.

S'atribueix a Kovalevskaya haver dit «tot el meu treball s'ha fet precisament en l'esperit de Weierstrass».

Per la seva banda, Weierstrass li escrivia «mai no he trobat ningú que m'aportés una comprensió tan gran dels elevats objectius de la ciència i tan agradable coincidència amb les meves intencions i principis bàsics com vostè».

Intercanviaren cent seixanta cartes entre 1871 i 1890. Weierstrass va cremar tristament les d'ella en morir Sonya. Les cartes d'ell s'han conservat a l'Institut Mittag-Leffler.

La seva amistat, basada en la interacció científica, va ser objecte de rumors i d'unes insinuacions sobre els assoliments matemàtics de Sonya que afectaren fortament Weierstrass.

La vasta correspondència amb ella i amb Mittag-Leffler, H. Schwarz, Paul du Bois-Reymond, Königsberger, Riemann i Fuchs conté fonamentalment problemes, però també ha ajudat a conèixer el pensament i la vida de Weierstrass.

Referències

[1] Apostol, T. M. *Mathematical analysis.* 2a ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1974. [Traducció castellana: Barcelona: Reverté, 1976]

[2] Bernstein, S. «Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités». *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 13 (1912–1913), 1–2.

[3] Bois-Reymond, P. du. «Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln». *Abh. Akad. München*, 12 (1876), 1–103.

[4] Bottazzini, U. «"Algebric truths" *vs* "geometric fantasies": Weirstrass' response to Riemann». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Beijing, 2002).* Vol. 3. Pequín: Higher Education Press, 2002, 923–934.

[5] Bourbaki, N. *Topologie générale (Livre III, Chapitre X).* París: Hermann, 1949.

[6] Cerdà, J. *Linear functional analysis.* Providence, R. I.: American Mathematical Society; Madrid: Real Sociedad Matemática Española, 2010. (Grad. Stud. Math.; 116)

[7] Conway, J. B. *Functions of one complex variable.* 2a ed. Nova York: Springer, 1978.

[8] Cooke, R. *The mathematics of Sonya Kowalevskaya.* Nova York: Springer, 1984.

[9] Courant, R.; John, F. *Introduction to calculus and analysis.* Vol. I. Nova York: Wiley, 1965. [Traducció castellana: Mèxic: Limusa-Wiley, 1971]

[10] Dieudonné, J. *Foundations of modern analysis.* Nova York: Academic Press, 1969.

[11] Faber, G. «Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen». *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 23 (1914), 190–210.

[12] FEJÉR, L. «Sur les fonctions bornées et intégrables». *C. Rendus Hebdomadaries des Séances de l'Académie des Sciences [París]*, 131 (1900), 984–987.

[13] FEJÉR, L. «Untersuchungen über Fouriersche Reihen». *Math. Ann.*, 58 (1903), 51–69.

[14] FEJÉR, L. «Ueber Interpolation». *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* (1916), 66–91.

[15] HADAMARD, J. *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1945. [Traducció castellana: Madrid: Espasa-Calpe, 1947]

[16] HARDY, G. H. «Sir George Stokes and the concept of uniform convergence». *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 19 (1918), 148–156.

[17] HEINE, E. «Über trigonometrische Reihen». *J. Reine Angew. Math.*, 71 (1870), 353–365.

[18] KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford: Oxford University Press, 1972. [Traducció castellana: Madrid: Alianza Editorial, 1972]

[19] KOLMOGOROV, A. N.; FOMIN, S. V. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. [Traduït al castellà del rus. Moscou: Mir, 1972]

[20] KOVALEVSKAYA, S. «Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen». *J. Reine Angew. Math.*, 80 (1875), 1–32.

[21] KOVALEVSKAYA, S. «Über die Reduction einer bestimmten Klasse abel'scher Integrale dritten Ranges auf elliptische Integrale». *Acta Math.*, 4 (1884), 51–74.

[22] KOVALEVSKAYA, S. «Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe». *Astronomische Nachrichten*, 111 (1885), 37–48.

[23] KOVALEVSKAYA, S. «Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe». *Acta Math.*, 14 (1890), 81–93.

[24] LANDAU, E. «Über die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion». *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 25 (1908), 337–345.

[25] LEBESGUE, H. «Sur l'approximation des fonctions». *Bull. Sci. Math.*, 22 (1898), 278–287.

[26] LEBESGUE, H. «Sur les intégrales singulières». *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.*, 1 (1909), 25–117.

[27] LERCH, M. «About the main theorem of the theory of generating functions». *Rozpravy České Akademie*, 33 (1892), 681–685. [En txec]

[28] MITTAG-LEFFLER, G. «Sur la représentation analytique des functions d'une variable réelle». *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 14 (1900), 217–224.

[29] MONNA, A. F. *Dirichlet's principle: A mathematical comedy of errors and its influence on the development of analysis*. Utrecht: Oosthoek, Scheltema & Holkema, 1975.

[30] ORTEGA, J. M. *Introducció a l'anàlisis matemàtica.* 2a ed. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 2002.

[31] PICARD, É. «Sur la représentation approchée des fonctions». *C. Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences [París]*, 112 (1891), 183–186.

[32] PINKUS, A. «Weierstrass and approximation theory». *J. Approx. Theory*, 107 (2000), 1–66.

[33] POINCARÉ, H. *Science et méthode.* París: Ernest Flammarion, 1920. [Traducció castellana: Madrid: Espasa-Calpe, 1944]

[34] POINCARÉ, H. *La valeur de la science.* París: Ernest Flammarion, 1911. [Traducció castellana: Madrid: Espasa-Calpe, 1974]

[35] POINCARÉ, H. «La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement». *Enseign. Math.*, 11 (1899), 157–162.

[36] RIEMANN, B. «Theorie der Abel'schen Funktionen». *J. Reine Angew. Math.*, 54 (1857), 115–155.

[37] RUDIN, W. *Principles of mathematical analysis.* 3a ed. Nova York: McGraw-Hill, 1976.

[38] RUNGE, C. «Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen». *Acta Math.*, 6 (1885), 229–244.

[39] RUNGE, C. «Über die Darstellung willkürlicher Funktionen». *Acta Math.*, 7 (1885–1886), 387–392.

[40] RUNGE, C. «Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten». *Z. Math. Phys.*, 46 (1901), 224–243.

[41] SANZ-SOLÉ, M. *Probabilitats.* Barcelona: Edicions Universitat de Barcelona, 1999.

[42] SCHWARZ, H. «Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$». *J. Reine Angew. Math.*, 74 (1871), 218–253.

[43] SEELEY, R. *An introduction to Fourier series and integrals.* Nova York: Benjamin, 1966 (reimpressió a: Mineola, N. Y.: Dover Publications, 2006). [Traducció castellana: Barcelona: Reverté, 1970]

[44] WEIERSTRASS, K. «Zur Theorie der abel'schen Funktionen». *J. Reine Angew. Math.*, 47 (1854), 289–306.

[45] WEIERSTRASS, K. «Theorie der abel'schen Funktionen». *J. Reine Angew. Math.*, 52 (1856), 285–380.

[46] WEIERSTRASS, K. «Über das sogenannte Dirichletsche Princip». Llegit en una reunió de la Königliche Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 14 de juliol de 1870.

[47] WEIERSTRASS, K. «Darstellung einer analytischen Funktion einer complexen Veränderlichen, deren absoluter Betrag zwischen zwei gegebenen Grenzen liegt». Escrit el 1841. *Math. Werke.* Vol. 1. Berlín: Mayer & Müller, 1894, 51–66.

[48] Weierstrass, K. «Zur Theorie der Potenzreihen». Escrit el 1841. *Math. Werke*. Vol. 1. Berlín: Mayer & Müller, 1894, 67–74.

[49] Weierstrass, K. «Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen». Escrit el 1842. *Math. Werke*. Vol. 1. Berlín: Mayer & MÏler, 1894, 75–85.

[50] Weierstrass, K. «Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen». *Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin* (1885), 633–639 i 789–805.

[51] Weierstrass, K. «Sur la possibilité d'une représentation analytique des fonctions dites arbitraires d'une variable réelle». *J. Mat. Pure et Appl. (Journal de Liouville)*, 2 (1886), 105–113 i 115–138. [Una traducció de [50]]

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
08007 Barcelona
jcerda@ub.edu