Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 27, núm. 2, 2012. Pàg. 161–175. DOI: 10.2436/20.2002.01.44

Fractalitat, determinisme i caos en el conjunt de Cantor

Àlex Haro

> Prediction is very difficult, especially about the future.
>
> **Niels Bohr**

Resum: Aquest escrit és una modesta introducció a la teoria del caos i als objectes fractals, amb el fil conductor del conjunt ternari de Cantor.

Paraules clau: fractals, sistemes dinàmics, caos.

Classificació MSC2010: 37-01, 37D45, 37E05, 28A80.

1 Introducció

Escriure un article original sobre fractals és certament una tasca difícil. Quan busquem la paraula *fractal* al cercador de Google trobem aproximadament 43 600 000 resultats (el dia 26 de setembre de 2011), que inclouen imatges fantàstiques, pàgines de diversos cursos de fractals donats arreu del món, entrades a la *Viquipèdia* i a la *Wikipedia* (amb articles en diversos idiomes), pel·lícules a YouTube i programes de generació i visualització de fractals. Així, doncs, no espero ser gens original, i només pretenc mostrar algunes de les relacions d'aquests objectes amb el que molts diuen que va ser la tercera gran teoria *física* del segle passat: la teoria del caos. En matemàtiques, aquesta teoria s'emmarca dins la teoria dels sistemes dinàmics, que estudia essencialment processos que evolucionen amb el temps. La teoria dels sistemes dinàmics té multitud d'aplicacions a la física, biologia, meteorologia, astronomia, economia, química, etc. Dos són els conceptes aparentment antagònics que han estat unificats per aquesta teoria: el determinisme i el caos. I un dels fils conductors és precisament la fractalitat.

No és necessari explicar que l'atenció que han rebut els fractals en les ciències aplicades, i fins i tot als mitjans de comunicació de masses, ha estat en bona mesura gràcies a la figura del matemàtic Benoît Mandelbrot (1924–2010), recentment desaparegut. Mandelbrot va saber crear i aplicar a problemes *reals* (i *complexos*) tot un cos de coneixement amb elements que havien estat creats per altres matemàtics per a problemes aparentment molt abstractes, però no per això menys importants.

Així, a final del segle XIX s'estaven reescrivint els fonaments del càlcul per fundar l'anàlisi moderna (definint rigorosament què són els números reals, estudiant la topologia de la recta real, desenvolupant la teoria de funcions), es va crear la teoria de conjunts (i l'aritmètica transfinita) i va néixer la teoria dels sistemes dinàmics (estudiant problemes de mecànica celeste). En aquella època es van construir funcions *patològiques* que eren contínues però no derivables en cap punt (i que es poden considerar els primers objectes fractals!), com la funció de Weierstrass l'any 1872. També es van construir conjunts autosemblants[1] i geomètricament complexos de números reals, amb propietats topològiques *estranyes* i a més no numerables, com el conjunt de Cantor l'any 1883. De fet, exemples de conjunts de Cantor ja van ser prèviament descoberts per H. J. S. Smith l'any 1875 en estudiar problemes d'integració de funcions discontínues. D'altra banda, Poincaré, al tercer volum dels seus *New methods of celestial mechanics* (1899), en el qual posava els fonaments de la teoria dels sistemes dinàmics, era incapaç de representar la complexa teranyina *homoclínica* produïda per les interseccions de corbes invariants asimptòtiques (les varietats estable i inestable) de punts d'equilibri. Les interseccions *homoclíniques* corresponen a trajectòries doblement asimptòtiques (en el futur i el passat) al corresponent punt d'equilibri, i en conjunt tenen el cardinal del continu! El mateix Poincaré relacionava aquesta complexitat amb la impossibilitat de representar les solucions del *problema de tres cossos* (i en problemes de dinàmica en general) amb sèries convergents.

La mirada atenta a la meva filla Laura aplicant la tècnica japonesa de *kumihino* per fer trenes m'inspira a descriure la intricada relació entre fractals, determinisme i caos com la de l'entrellaçament dels fils d'una trena triple. Això, i la lectura de l'excel·lent llibre de Yakov Pesin i Vaughn Climenhaga, *Lectures on fractal geometry and dynamical systems* [7]. Aquest escrit és només un manual per entrellaçar una trena triple al voltant del conjunt ternari de Cantor, considerat el primer exemple de fractal i, possiblement, el més conegut (en franca competició amb el conjunt de Mandelbrot). El lector actiu haurà de seguir pacientment les instruccions, amb l'ajuda de paper, bolígraf i la seva imaginació. És per aquest motiu que he omès les figures, habituals en els articles sobre aquest tema; és feina del lector reconstruir-les.

2 Fractalitat en el conjunt de Cantor

El terme *fractal* va ser inventat per Mandelbrot l'any 1975, al seu assaig *Les objets fractals* [4], per descriure objectes irregulars i fragmentats que mantenen

1 En comptes d'*autosemblant* i *autosemblança* també s'usen els termes *autosimilar* i *autosimilitud*.

aquestes propietats a totes les escales a què s'examinen. En cap moment va pretendre donar una definició matemàtica de *fractal*, i fins i tot es va preguntar si era necessària la definició d'un tal neologisme (que ara ja no ho és tant).

Els fractals són, doncs, objectes (aproximadament) autosemblants i geomètricament complexos. Que un objecte sigui autosemblant significa que està format per còpies més petites de si mateix. Així, en canviar d'escala repetidament observarem còpies de l'objecte fractal. Leibniz va considerar aquesta propietat, però va concloure que només podien ser autosemblants els punts, les rectes, els plans, etc., és a dir, objectes molt elementals.

No va ser fins a final del segle XIX i principi del XX que matemàtics com Cantor, Sierpinski o Koch van inventar (o descobrir?) objectes autosemblants però geomètricament complexos. Un fet remarcable és que, malgrat la seva aparent complexitat, aquests objectes fractals es poden generar amb regles molt senzilles, iterant recursivament un procediment. Aquests algorismes es poden, doncs, *programar* fàcilment a l'ordinador i es poden visualitzar els objectes fractals resultants a la pantalla. En definitiva, si abans hem lligat la popularització dels fractals a una persona, ho farem ara a un objecte: l'ordinador, un invent eminentment matemàtic.

A part d'aquests *fractals artificials* Mandelbrot, tot observant la natura, va adonar-se que hi ha també multitud d'objectes que no es poden descriure amb els elements típics de la geometria euclidiana: arbres i falgueres, línies de costa, sistemes pulmonars, distribució d'estrelles d'una galàxia, etc. I també va crear models matemàtics d'aquests objectes *fractals naturals*, en els quals evidentment l'autosemblança és aproximada i no es produeix a totes les escales.

Una vegada hom s'adona que hi ha objectes complexos, és natural buscar alguna mesura de la complexitat d'aquests, per poder classificar-los. De nou, Mandelbrot no va definir formalment el concepte de *dimensió fractal* al seu cèlebre *The fractal geometry of nature* [5], sinó que més aviat va utilitzar diverses nocions tal com havia fet a [4], que ja havien estat introduïdes per Hausdorff, Besicovitch, Minkowski i Kolmogorov, més de mig segle abans. La definició més estàndard i utilitzada en estudis teòrics és la donada per Hausdorff cap a l'any 1917, i que va ser a bastament estudiada per Besicovitch. En aquest sentit, el llibre de Kenneth Falconer *The geometry of fractals sets* [3] és un excel·lent complement matemàtic als treballs descriptius de Mandelbrot. La *dimensió de Hausdorff-Besicovitch* és molt complicada de calcular en les aplicacions, i el mateix Mandelbrot no en recomana l'ús. Per tant, sovint és substituïda per la *dimensió de recobriment* (o dimensió *box-counting*). Nosaltres només veurem aquí una definició de dimensió fractal feta a mida per als objectes autosemblants (i artificials!). Afortunadament, aquesta definició per als objectes autosemblants esdevé teorema si apliquem les definicions de dimensió abans mencionades.

2.1 El conjunt ternari de Cantor

Hi ha almenys dues maneres de definir el conjunt ternari de Cantor, que a partir d'ara anomenarem simplement *conjunt de Cantor* per abreujar.

En una carta a Dedekind l'any 1882, Cantor defineix l'homònim conjunt com

$$\mathcal{C} = \left\{ x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid \forall i \geq 1,\ a_i \in \{0,2\} \right\}. \tag{1}$$

Per tant, els elements del conjunt de Cantor són aquells nombres de l'interval $[0,1]$ que es poden escriure en base 3 (notació que utilitzarem en endavant) només usant 0 i 2 i sense usar 1: $x = 0'a_1a_2a_3\cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$, on els *trits* són 0 o 2. Aquí aprofitem que hi ha nombres que es poden representar de dues maneres. Per exemple, $\frac{1}{3} = 0'1 = 0'0\bar{2}$, de forma que $\frac{1}{3} \in \mathcal{C}$.

Una altra manera habitual de presentar aquest conjunt és generant-lo mitjançant l'eliminació repetida dels terços oberts centrals d'un conjunt de segments tancats, començant en el primer pas amb l'interval $[0,1]$ (per exemple), i continuant el procés *ad infinitum*. Per formalitzar aquesta idea, considerem les dues semblances w_1 i w_2 de raó $\frac{1}{3}$ de la recta real donades per

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x\ ,\ w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}. \tag{2}$$

Així, el conjunt de Cantor es defineix com

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n\,, \tag{3}$$

on $(K_n)_{n\geq 0}$ és una successió decreixent de compactes (conjunts tancats i fitats) definida recursivament des de $K_0 = [0,1]$ per

$$K_n = w_1(K_{n-1}) \cup w_2(K_{n-1}). \tag{4}$$

Observem que cada K_n és una unió disjunta d'intervals tancats:

$$\begin{aligned} K_n &= [0,1] \setminus \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \ \dot{\bigcup_{a_1,\ldots,a_{i-1}\in\{0,2\}}} \left]0'a_1\ldots a_{i-1}1,\ 0'a_1\ldots a_{i-1}2\right[= \\ &= \dot{\bigcup_{a_1,\ldots,a_n\in\{0,2\}}} \left[0'a_1\ldots a_n,\ 0'a_1\ldots(a_n+1)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

on a la primera línia expressem que en el pas n-èsim traiem 2^{n-1} intervals oberts de longitud 3^{-n}, que s'afegeixen als que hem eliminat en els passos anteriors, i a la segona línia indiquem els intervals que romanen.

En resum, obtenim que el conjunt de Cantor és:

$$\mathcal{C} = [0,1] \setminus \dot{\bigcup_{i\geq 1}} \ \dot{\bigcup_{a_1,\ldots,a_{i-1}\in\{0,2\}}} \left]0'a_1\ldots a_{i-1}1,\ 0'a_1\ldots a_{i-1}2\right[. \tag{6}$$

Un moment de reflexió ajudarà el lector a veure l'equivalència de (6) amb la primera definició (1).

2.2 Les propietats del conjunt de Cantor

Considerarem en aquesta secció diverses categories de propietats del conjunt de Cantor.

2.2.1 Propietats topològiques Les propietats topològiques del conjunt ternari de Cantor es poden resumir dient que $\mathcal{C}$ és *un* conjunt de Cantor. Aquesta aparent obvietat vol dir que:

a) $\mathcal{C}$ és *compacte*: tota successió de punts de $\mathcal{C}$ té una subsuccessió parcial convergent a un punt de $\mathcal{C}$. Aquesta propietat és equivalent a afirmar que $\mathcal{C}$ és tancat (per pas al límit, és a dir, que les successions de punts de $\mathcal{C}$ que convergeixen ho fan a punts de $\mathcal{C}$) i fitat (un fet obvi).
b) $\mathcal{C}$ és *perfecte*: no té punts aïllats. Així, qualsevol punt del conjunt de Cantor es pot aproximar tant com vulguem per altres punts del conjunt de Cantor.
c) $\mathcal{C}$ és *totalment disconnex*: les seves components connexes són punts. A la recta real, això vol dir que el conjunt de Cantor no conté intervals oberts.

Un resultat de topologia afirma que qualsevol conjunt de Cantor és topològicament equivalent (*homeomorf*) al conjunt ternari de Cantor. És a dir, es pot establir una aplicació bijectiva, contínua i amb inversa contínua (un *homeomorfisme*) amb el conjunt ternari de Cantor.

2.2.2 Propietats mesurables Ens plantejem ara calcular la longitud del conjunt de Cantor. Per respondre a aquesta aparentment agosarada pregunta simplement hem de recordar que a cada pas n de la generació del conjunt de Cantor traiem 2^n intervals oberts de longitud 3^{-n}, i calcular $\sum_{n\geq 1} 2^{n-1}3^{-n} = 1$. Llavors:

d) $\mathcal{C}$ té longitud (mesura de Lebesgue) $\ell = 0$.

Per tant, des del punt de vista de la teoria de la mesura, el conjunt de Cantor és molt petit, de fet negligible. La probabilitat que en agafar un punt a l'atzar de l'interval $[0,1]$ estigui al conjunt de Cantor és 0.

2.2.3 Propietats transfinites Cantor va pensar en el seu conjunt en intentar construir un conjunt no numerable que tingués *menys elements* que $\mathbb{R}$. Però no se'n va sortir, perquè:

e) $\mathcal{C}$ no és numerable, i és equipotent a $\mathbb{R}$.

Aquest resultat es prova simplement passant les representacions ternàries dels punts del conjunt de Cantor a representacions binàries de punts de l'interval $[0,1]$, substituint els trits 2 per bits 1. Així, des del punt de vista conjuntista, el conjunt de Cantor és gran.

Els treballs de Cantor sobre *aritmètica transfinita* van ser menyspreats per algunes de les ments preclares de l'època, com Poincaré o Kronecker. El primer va arribar a dir que les idees de Cantor eren una greu malaltia que infectava la disciplina de les matemàtiques, i el segon li tenia una profunda animadversió personal. Curiosament (o no?), el conjunt de Cantor o altres conjunts similars apareixen sovint en l'estudi de sistemes dinàmics molt senzills, una àrea de la qual Poincaré fou el fundador!

2.2.4 Propietats geomètriques Una propietat interessant, i que està íntimament relacionada amb la «fractalitat» del conjunt de Cantor, és l'autosemblança. Observem que:

f) $\mathcal{C}$ està format per dues còpies de si mateix: $\mathcal{C} = w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C})$, on w_1 i w_2 són les semblances de raó $\frac{1}{3}$ definides a (2).
g) $\mathcal{C}$ és l'únic conjunt compacte que satisfà $\mathcal{C} = w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C})$!

Així, la propietat g) caracteritza el conjunt ternari de Cantor i ens proporciona una altra definició. Aquest punt de vista es pot generalitzar molt en definir els anomenats *atractors de sistemes iteratius de funcions*. Vegeu, per exemple, el llibre de Michael Barnsley *Fractals everywhere* [1].

L'autosemblaça ens dóna una altra demostració del fet que la longitud del conjunt de Cantor és 0. Si ℓ és la longitud, llavors $\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{1}{3}\ell$, i això només és possible si $\ell = 0$ (o $\ell = +\infty$, però ho descartem perquè $\ell \leq 1$).

2.2.5 Propietats fractals Per als conjunts autosemblants i no solapants (que definirem ara) podem mesurar un grau de complexitat, una dimensió fractal que anomenarem *dimensió de Moran*.

Sigui A un subconjunt de $\mathbb{R}^n$ tal que existeixen N semblances $w_1, \ldots, w_N$ de raons $r_1, \ldots, r_N$ (menors que 1) de manera que:

- A és la unió de les N còpies: $A = \bigcup_{i=1}^{N} w_i(A)$;
- no hi ha solapaments entre còpies: per a tot parell de còpies $i \neq j$ i per a tot conjunt obert U, $A \cap U \not\subset w_i(A) \cap w_j(A)$.

La primera propietat representa l'autosemblança (respecte a les contraccions $w_1, \ldots, w_N$), i es pot demostrar que caracteritza el compacte A. També es diu que A és l'atractor del sistema iteratiu de funcions $w_1, \ldots, w_N$. La segona propietat indica que, encara que les còpies poden tenir interseccions no buides, aquestes no poden tenir interior no buit (respecte al conjunt A). Llavors, per a aquest conjunt A es defineix la dimensió fractal $\dim_M A$ com l'únic nombre positiu d que satisfà l'*equació de Moran*

$$r_1^d + \cdots + r_N^d = 1\,. \tag{7}$$

Per exemple, el segment $I = [0,1]$ es pot escriure $I = w_1(I) \cup w_2(I)$, amb $w_1(x) = \frac{1}{2}x$ i $w_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, i llavors $\dim_M I = d$ satisfà l'equació $2 \cdot 2^{-d} = 1$, i s'obté com a resultat $d = 1$ (sort!). Observem que, en aquest exemple, $w_1(I) \cap w_2(I) = \{\frac{1}{2}\}$ té interior buit. Podríem haver escollit $w_1(x) = \frac{3}{4}x$ i $w_2(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x$, però en aquest cas les còpies de I se solapen, i l'equació de Moran no dóna òbviament el resultat correcte.

Per al conjunt ternari de Cantor l'equació de Moran és $2 \cdot 3^{-d} = 1$, de manera que:

h) $\mathcal{C}$, el conjunt ternari de Cantor, té $\dim_M \mathcal{C} = \frac{\log 2}{\log 3}$.

En aquest punt hem remarcat que $\frac{\log 2}{\log 3}$ és la dimensió del conjunt *ternari* de Cantor. Així, encara que construïm conjunts de Cantor escollint diverses còpies amb raons de semblança diferents a $\frac{1}{3}$, conjunts que tindran *les mateixes propietats topològiques, mesurables i transfinites que el conjunt ternari de Cantor* (i que animem el lector a construir!), s'obtindran en general conjunts amb dimensions *diferents* a $\frac{\log 2}{\log 3}$. La dimensió fractal ens permet d'alguna manera graduar la patologia d'aquests conjunts, per poder distingir-los.

Ja hem comentat que es poden definir dimensions fractals per a conjunts més generals. Moran, alumne de Hausdorff, va demostrar que la dimensió de Hausdorff-Besicovitch d'un conjunt autosemblant i no solapant és la solució de l'equació (7).

3 Determinisme en el conjunt de Cantor

La teoria dels sistemes dinàmics estudia processos evolutius, sistemes que evolucionen amb el temps. La identificació dels estats del sistema amb punts d'un espai de fase permet geometritzar i analitzar aquestes evolucions globalment. Les evolucions del sistema són *determinades* per una llei, per exemple una equació diferencial (si el temps és continu) o una aplicació (si el temps és discret). Aquí considerarem el segon cas.

Així, en principi podem considerar qualsevol conjunt X (l'espai de fase), i una aplicació $f: X \to X$, que ens diu quin serà l'estat del sistema en el proper instant, si l'estat present és $x \in X$. Per tant, donada una condició inicial $x_0 \in X$, la llei f *determina* l'evolució futura del sistema, en aquest cas la successió d'estats $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$.

Els algebristes dirien que el que estem considerant és una acció del semigrup $\mathbb{N}$ sobre el conjunt X, i que les evolucions són òrbites de l'acció. Però aquesta estructura és massa pobra i generalment es considera alguna estructura addicional sobre el conjunt X, com ara ser un obert de l'espai euclidià o una varietat diferenciable, un espai mètric o topològic, o un espai mesurable, i llavors es demana que f preservi aquesta estructura. En cada cas s'utilitzen eines i punts de vista diferents a l'hora d'estudiar un sistema, de manera que tenim dinàmica diferenciable, dinàmica topològica, teoria ergòdica, etc.

3.1 L'aplicació tenda

Considerem un sistema dinàmic discret sobre la recta real $\mathbb{R}$ generat per l'aplicació

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2} \\ 3(1-x), & \text{si } x \geq \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Aquesta és l'aplicació *tenda* que considerarem en aquest escrit. Un dibuix de la seva gràfica ens il·luminarà sobre el seu nom.

L'aplicació tenda defineix un sistema dinàmic irreversible, perquè com que és no invertible no podem endevinar el passat d'un estat donat, i només podem determinar-ne el futur. Hi ha dos estats en equilibri, independents del temps, que són els punts fixos $p_0 = 0$ i $p_1 = \frac{3}{4}$ (és a dir, $f(p_0) = p_0$ i $f(p_1) = p_1$).

Observem que tots els estats menors que 0 o més grans que 1 tenen un futur més aviat decadent, tendint cap a $-\infty$. Podem dir que estan a la conca d'atracció de $-\infty$. Així, la dinàmica interessant passa a l'interval $K_0 = [0, 1]$.

Un mirada més detallada ens fa notar que els punts que estan a l'interval $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ també s'escapen a $-\infty$, ja que en una primera iteració ja prenen valors més grans que 1. Així, doncs, la dinàmica interessant passa al conjunt compacte $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

Iterant el procés, observem que els punts de l'interval $[0, 1]$ que en n iteracions no surten d'aquest interval,

$$K_n = \left\{x \in [0,1] \mid \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ f^i(x) \in [0,1]\right\},$$

són precisament els punts dels conjunts compactes K_n definits a (5). Una manera de veure això es adonar-se que la funció f^n a l'interval $[0, 1]$ és lineal a trossos, i està composta per 2^n branques que alternativament tenen pendents 3^n i -3^n, amb forats que corresponen als conjunts d'escapament després de $1, 2, \ldots, n$ iteracions.

En definitiva, el conjunt de punts que no s'escapen a $-\infty$ és el conjunt ternari de Cantor! Aquest conjunt és, doncs, invariant per al sistema, perquè $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$. De fet, és un conjunt repulsor, perquè qualsevol punt que no està a $\mathcal{C}$ acaba convergint, en iterar el sistema, cap a $-\infty$.

3.2 Dinàmica en el conjunt de Cantor

Una altra manera d'adonar-se de la invariància del conjunt de Cantor i d'extreure propietats d'aquest subsistema és acudint a les representacions ternàries dels nombres. Recordem que els elements del conjunt de Cantor són aquells que es poden representar en base 3 sense utilitzar 1. Veiem, doncs, com actua el nostre sistema dinàmic sobre les representacions ternàries d'aquests nombres:

- si $x \leq \frac{1}{3}$, llavors $x = 0'0a_2a_3\ldots$ i $f(x) = 0'a_2a_3\ldots$, així que f actua corrent la coma;
- si $x \geq \frac{2}{3}$, llavors $x = 0'2a_2a_3\ldots$ i $f(x) = 0'(2-a_2)(2-a_3)\ldots$, així que f actua complementant a 2 els dígits i corrent la coma.

Per tant, si la representació ternària de x no té 1, llavors la representació ternària de $f(x)$ tampoc en té. Aquest argument prova que $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$. Per provar que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, n'hi ha prou amb adonar-se que un punt del conjunt de Cantor, $x = 0'a_1a_2a_3\ldots$, té dues antiimatges al conjunt de Cantor, $0'0a_1a_2a_3\ldots$ i $0'2(2-a_1)(2-a_2)(2-a_3)\ldots$.

D'altra banda, si un nombre x no està al conjunt ternari de Cantor, llavors $x = 0'a_1\ldots a_{n-1}1\ldots$ per a uns certs $a_1,\ldots,a_{n-1} \in \{0,2\}$ (i amb la seqüència ulterior diferent de $\bar{0}$), llavors $f^n(x) = 1'\cdots > 1$ i els iterats convergiran a $-\infty$. Amb aquest nou argument per mostrar que $\mathcal{C}$ és un repulsor ens adonem que, donat un punt del conjunt de Cantor, els iterats del qual romanen fitats, hi ha punts tan a prop com vulguem d'aquest que pertanyen a la conca d'atracció de $-\infty$. Trobem, doncs, una primera traça de caos: la dependència sensible respecte a condicions inicials.

En l'apartat següent estudiarem el sistema dinàmic restringit al conjunt de Cantor, i provarem que aquest subsistema és caòtic.

4 Caos en el conjunt de Cantor

En arribar a aquest punt, hem d'explicar què entenem per un *sistema dinàmic caòtic*. Tres són els ingredients que el caracteritzen:

1) *dependència sensible respecte a condicions inicials*: tan a prop com vulguem d'una certa condició inicial, n'hi ha una altra que evoluciona de manera sensiblement diferent a *llarg termini*;
2) *densitat del conjunt d'òrbites periòdiques*: donada una condició inicial, n'hi ha una altra tan a prop com vulguem que dóna una evolució periòdica (encara que el període pot ser molt llarg);
3) *existència d'una òrbita densa*: hi ha una òrbita que passa tan a prop com vulguem de qualsevol punt de l'espai de fase.

Així, la dinàmica caòtica és una barreja d'impredictibilitat i dinàmica recurrent.

Una manera de demostrar que un sistema és caòtic és veure que és equivalent a un altre que sabem que ho és. Aquesta tautologia plana en la teoria dels sistemes dinàmics, en la qual moltes vegades per analitzar un sistema dinàmic concret es fan canvis de variable perquè les seves propietats siguin més senzilles d'analitzar. Bé, aquesta idea no és exclusiva d'aquesta teoria, sinó de les matemàtiques en general, on en molts àmbits s'intenten trobar *formes normals* dels objectes d'estudi, per tal de classificar-los.

En aquesta secció veurem un exemple paradigmàtic de sistema dinàmic caòtic, i després veurem que l'aplicació tenda sobre el conjunt de Cantor és equivalent a aquest sistema dinàmic. Començarem donant una definició formal de *sistema dinàmic caòtic*.

4.1 Sistemes dinàmics caòtics

Per fer demostracions, òbviament, necessitem definicions rigoroses dels conceptes introduïts. La definició de *sistema dinàmic caòtic* requereix una mètrica per poder mesurar distàncies entre evolucions.

Sigui, doncs, un espai de fase X, amb una mètrica d per mesurar distàncies entre punts $x, y \in X$, $d(x, y)$. Sigui $f: X \to X$ una aplicació contínua en aquest espai mètric, generadora d'un sistema dinàmic discret. El sistema dinàmic és caòtic si, i només si:

1) Existeix $\delta > 0$ tal que, per a tot $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, existeixen $y \in X$ i $n > 0$ tals que $d(x, y) \leq \varepsilon$ però $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.
2) Per a tot $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, existeixen $y \in X$ i $n > 0$ tals que $d(x, y) \leq \varepsilon$ i $f^n(y) = y$.
3) Existeix $x_* \in X$ tal que, per a tot $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, existeix $n > 0$ tal que $d(f^n(x_*), x) \leq \varepsilon$.

La propietat 1) correspon a la dependència sensible respecte a condicions inicials; la 2), a la densitat d'òrbites periòdiques, i la 3), a l'existència d'una òrbita densa (també referida com a *transitivitat topològica)*.

4.2 Un model de caos: el *shift* de Bernoulli

Hem vist que podem codificar els punts del conjunt de Cantor mitjançant les seves representacions ternàries, i que l'aplicació tenda essencialment el que fa és eliminar-ne termes. Així, podem extreure informació de la dinàmica del sistema estudiant com es comporta sobre les seqüències de símbols (de trits, en aquest cas, que només poden prendre dos valors: 0 i 2).

Una abstracció d'aquesta idea és considerar com a espai de fase l'espai de successions de dos símbols, 1 i 2. Aquest és:

$$\Sigma_2 = \prod_{i \in \mathbb{N}_*} \{1, 2\} = \left\{ \mathbf{s} = s_1 s_2 \ldots \mid \forall i \geq 1,\ s_i \in \{1, 2\} \right\}.$$

Ens referirem a Σ_2 com a l'*espai d'adreces* o d'itineraris de dos símbols. Una paraula de longitud n és simplement una seqüència finita $s_1 \ldots s_n$.

El *shift de Bernoulli* és un sistema dinàmic discret sobre Σ_2 generat per l'aplicació $\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$ definida per

$$\sigma(s_1 s_2 s_3 \ldots) = s_2 s_3 s_4 \ldots .$$

És a dir, per a $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, tenim $\left(\sigma(\mathbf{s})\right)_i = s_{i+1}$. Així, simplement consisteix a eliminar el símbol inicial.

Òbviament, aquestes definicions i la resta de la secció poden ser generalitzades a espais d'adreces de més símbols. Hi ha una àrea de dinàmica simbòlica que analitza aquests tipus de sistemes dinàmics.

4.2.1 Topologia de l'espai d'adreces Per estudiar les propietats topològiques del *shift*, s'ha d'introduir una topologia sobre l'espai de fase Σ_2. Aquesta és la topologia producte induïda per la topologia discreta en cada factor $\{1, 2\}$. Afortunadament, aquesta topologia és donada per una mètrica ben senzilla. Així, la distància entre adreces $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \Sigma_2$,

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathbf{s} = \mathbf{t}\,, \\ 2^{-n}, & \text{si } \mathbf{s} \neq \mathbf{t} \text{ i } n = \min\{i \geq 1 \mid s_i \neq t_i\} - 1\,, \end{cases}$$

ens permet definir conceptes com *entorn d'un punt*, *límit*, *continuïtat*, etc.

Aquesta mètrica ens visualitza la idea intuïtiva que dues adreces estan a prop (a distància 2^{-n}) si coincideixen en els primers símbols (n), i com més a prop estiguin més símbols coincidiran. Així, donada una adreça $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, i $n \geq 1$, el conjunt d'adreces que comencen per la paraula $s_1 s_2 \ldots s_n$ és el *cilindre*

$$C_{s_1 s_2 \ldots s_n} = \left\{\mathbf{t} \in \Sigma_2 \mid t_1 = s_1, \ldots t_n = s_n\right\},$$

o la *bola tancada* de centre $\mathbf{s}$ i radi 2^{-n},

$$\bar{B}(\mathbf{s}, 2^{-n}) = \left\{\mathbf{t} \in \Sigma_2 \mid d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq 2^{-n}\right\},$$

o la *bola oberta* de centre $\mathbf{s}$ i radi $2^{-(n-1)}$,

$$\bar{B}(\mathbf{s}, 2^{-n}) = \left\{\mathbf{t} \in \Sigma_2 \mid d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) < 2^{-(n-1)}\right\}.$$

Observem, doncs, que un cilindre $C_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ és un conjunt obert i tancat al mateix temps, un fet inusual en les topologies usuals. Per a cada $\mathbf{s}$, els cilindres $C_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ amb $n \geq 1$ formen una base d'entorns de $\mathbf{s}$.

El concepte de *límit* es pot traduir de la manera següent: direm que la successió d'itineraris $\mathbf{s}_k$ convergeix a $\mathbf{s}$ si, i només si, per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeix un k_0 tal que per a tot $k \geq k_0, \mathbf{s}_k \in C_{s_1 s_2 \ldots s_n}$ (és a dir, els primers n elements de $\mathbf{s}_k$ i $\mathbf{s}$ coincideixen).

Més endavant veurem que Σ_2 és un conjunt de Cantor, i explicitarem un homeomorfisme amb $\mathcal{C}$. El lector es pot aventurar a provar directament que Σ_2 és compacte, perfecte i totalment disconnex.

4.2.2 Demostració de la caoticitat del *shift* de Bernoulli El *shift* de Bernoulli preserva l'estructura topològica de Σ_2, és a dir, és una aplicació contínua. De fet,

$$d(\sigma(s), \sigma(t)) \leq 2d(s, t)\,,$$

i llavors l'aplicació σ és Lipschitz: la distància entre imatges està controlada pel doble de la distància entre punts. És més, si $d(s, t) < 1$, llavors $d(\sigma(s), \sigma(t)) = 2d(s, t)$, que ens dóna una idea de l'*expansivitat* d'aquesta aplicació.

Ja podem demostrar que el *shift* de Bernoulli és caòtic:

1) Sigui $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ una adreça. Per a $\varepsilon > 0$, prenem n de manera que $2^{-n} \leq \varepsilon$. Llavors, una adreça $\mathbf{t} \in \Sigma_2$ que comença per $s_1 s_2 \ldots s_n$ però $t_{n+1} \neq s_{n+1}$ satisfà $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \varepsilon$ i $d\big(\sigma^n(\mathbf{s}), \sigma^n(\mathbf{t})\big) = 1$.

   De fet, si escollim $\mathbf{t} \in C_{s_1 \ldots s_n}$ de manera que $t_i \neq s_i$ per a tot $i > n$, llavors per a tot $i \geq n$, és $d\big(\sigma^i(s), \sigma^i(t)\big) = 1$.
2) Sigui $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ una adreça. Per a $\varepsilon > 0$, prenem n de manera que $2^{-n} \leq \varepsilon$. Llavors, l'adreça $\mathbf{t} \in \Sigma$ que comença per $s_1 s_2 \ldots s_n$ i repeteix aquesta paraula periòdicament, satisfà $d(\mathbf{s}, \mathbf{t}) \leq \varepsilon$ i $\sigma^n(\mathbf{t}) = \mathbf{t}$.
3) Considerem un itinerari $\mathbf{s}$ amb les propietats següents: els $2 = 1 \cdot 2^1$ primers símbols són els dos símbols 1 i 2; els $8 = 2 \cdot 2^2$ símbols següents són les quatre parelles diferents que es poden formar amb els símbols 1 i 2; els $24 = 3 \cdot 2^3$ símbols següents són les vuit ternes diferents que es poden formar amb els símbols 1 i 2, etc. Llavors, aquest itinerari «viatger» passa tan a prop com vulguem de qualsevol adreça.

Hom pot pensar que la construcció que hem fet és prou artificial i abstracta. I és veritat. Però la seva importància és que la demostració que un sistema dinàmic és caòtic (o que conté un subsistema caòtic) es pot reduir moltes vegades a l'estudi d'aquest sistema o similars. Aquests sistemes dinàmics simbòlics capten d'alguna manera l'essència del caos. En la secció següent veurem un exemple elemental d'aquesta idea.

4.3 Dinàmica caòtica sobre el conjunt de Cantor

En aquesta secció veurem que la dinàmica de l'aplicació tenda restringida al conjunt de Cantor és caòtica, i de fet és conjugada (mitjançant un canvi de variable explícit) al *shift* de Bernoulli. Per fer això, haurem d'assignar adreces als punts del conjunt de Cantor.

Donada una adreça $\mathbf{s} \in \Sigma_2$, li associem una successió decreixent d'intervals tancats

$$I_{s_1 \ldots s_n} = \Big[0'(2s_1 - 2)(2s_2 - 2)\ldots(2s_n - 2),\ 0'(2s_1 - 2)(2s_2 - 2)\ldots(2s_n - 1)\Big],$$

en la qual simplement estem traduint 1 per 0 i 2 per 2 per obtenir les representacions ternàries dels extrems dels intervals. Com que la longitud de cada interval és 3^{-n}, llavors la intersecció d'aquests intervals encaixats és un únic punt del conjunt de Cantor, que denotem $c_{\mathbf{s}}$:

$$\bigcap_{n \geq 1} I_{s_1 \ldots s_n} = \{c_{\mathbf{s}}\}.$$

D'aquesta manera, definim una *aplicació de localització*, $h\colon \Sigma_2 \to \mathcal{C}$, que donada una adreça $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ ens posiciona el punt $h(\mathbf{s}) = c_{\mathbf{s}}$ en el conjunt de Cantor. Aquesta aplicació és en el nostre cas bijectiva, perquè a cada punt del conjunt de Cantor li correspon una única adreça. Aquesta és una nova manifestació del fet que el conjunt de Cantor és totalment disconnex. Òbviament, per als cilindres d'adreces tenim $h(C_{s_1\ldots s_n}) = I_{s_1\ldots s_n}$. Per tant, l'aplicació h és contínua, i la inversa també ho és.

Considerem ara l'aplicació tenda restringida al conjunt de Cantor. En la secció 3.2 hem vist com actua aquesta aplicació sobre les representacions ternàries dels elements del conjunt de Cantor, que essencialment són itineraris (amb símbols diferents). Traduint les representacions ternàries al nostre alfabet, el nostre sistema dinàmic és $\tau = h^{-1} \circ f \circ h\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$, i és donat per

$$\big(\tau(\mathbf{s})\big)_i = \begin{cases} s_{i+1}, & \text{si } s_1 = 1\,, \\ 2, & \text{si } s_1 = 2 \text{ i } s_{i+1} = 1\,, \\ 1, & \text{si } s_1 = 2 \text{ i } s_{i+1} = 2\,. \end{cases}$$

L'aplicació τ no és ben bé el *shift* de Bernoulli, però se li assembla molt. En fer un nou canvi de variable amb l'homeomorfisme $g\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$, definit per

$$\big(g(\mathbf{s})\big)_i = \begin{cases} s_1, & \text{si } i = 1\,, \\ 1, & \text{si } i > 1 \text{ i } s_{i-1} = s_i\,, \\ 2 & \text{si } i > 1 \text{ i } s_{i-1} \neq s_i\,, \end{cases}$$

llavors obtenim el veritable *shift* de Bernoulli: $\sigma = g \circ \tau \circ g^{-1}$.

En definitiva, l'aplicació tenda sobre el conjunt de Cantor és topològicament conjugada al *shift* de Bernoulli, que sabem que és un sistema dinàmic caòtic. Això queda resumit en el diagrama commutatiu següent (on h i g són homeomorfismes), que espero que sigui la delícia dels lectors més algebristes:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "f"'] & \Sigma_2 \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tau"'] & \Sigma_2 \arrow[d, "\sigma"'] \\ \mathcal{C} & \Sigma_2 \arrow[l, "h"'] \arrow[r, "g"] & \Sigma_2 \end{tikzcd}$$

Amb aquest diagrama acabem les instruccions per completar la trena fractal-determinística-caòtica del conjunt ternari de Cantor.

5 Més enllà d'un simple model

En seguir les instruccions, el lector s'haurà adonat de l'enorme quantitat de variants que podem fer.

Una primera variant és considerar una aplicació tenda no simètrica, variant els pendents dels costats (sempre que el vèrtex sobresurti per sobre del quadrat unitat). Aquest sistema dinàmic també té un repulsor cantorià, la dimensió fractal del qual dependrà dels pendents escollits (i que es pot calcular resolent l'equació de Moran (7) corresponent).

En analitzar la caoticitat d'aquest sistema, ja veiem que no podem utilitzar les representacions ternàries dels nombres reals, que tan bé s'adapten al conjunt ternari de Cantor. De fet, aquestes ens han complicat alguns dels arguments que hem utilitzat anteriorment. S'ha de fer un canvi de perspectiva.

Seguint amb l'exemple de la tenda simètrica (amb pendents 3 i −3), i esperant que el lector realitzi les generalitzacions corresponents, observem que aquesta té dues inverses, donades per

$$w_1(x) = \frac{1}{3}x \ , \ w_2(x) = 1 - \frac{1}{3} \, . \tag{8}$$

El conjunt de Cantor és l'únic conjunt compacte de la recta real tal que

$$\mathcal{C} = w_1(\mathcal{C}) \cup w_2(\mathcal{C}) \, .$$

Emfasitzem aquí que hem canviat w_2 respecte a (2), i que aquesta elecció s'adapta molt bé a l'anàlisi de l'aplicació tenda, com veurem més endavant. Podem definir una aplicació de localització $h\colon \Sigma_2 \to \mathcal{C}$, que donada una adreça $\mathbf{s} \in \Sigma_2$ ens posiciona el punt del conjunt de Cantor $h(\mathbf{s}) = c_{\mathbf{s}}$ tal que

$$\{c_{\mathbf{s}}\} = \bigcap_{n\geq 1} w_{s_1} \circ \cdots \circ w_{s_n}(\mathcal{C}) \, .$$

(Observem que tenim una successió decreixent de compactes, on els diàmetres tendeixen a zero quan n tendeix a infinit perquè les aplicacions w_1 i w_2 són *contractives.*) En aquesta definició també podem canviar $\mathcal{C}$ per l'interval $[0,1]$, i llavors $I_{s_1 \ldots s_n} = w_{s_1} \circ \cdots \circ w_{s_n}([0,1])$ és un interval de longitud 3^{-n}. Fins aquí la construcció és independent de les semblances que hem considerat a l'hora de caracteritzar el conjunt de Cantor. Així que tenim diferents sistemes d'adreçar punts. Però el sistema que hem considerat aquí permet una conjugació directa amb el *shift* de Bernoulli.

Una última observació relativa als exemples que hem considerat és que les semblances contractives w_1 i w_2, inverses de l'aplicació tenda, defineixen un *sistema iteratiu de funcions.* Així, sobre el conjunt dels subconjunts compactes i no buits de $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}(\mathbb{R})$, el sistema iteratiu de funcions indueix una aplicació $W\colon \mathcal{H}(\mathbb{R}) \to \mathcal{H}(\mathbb{R})$ definida per $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A)$. Resulta que, una vegada introduïda una distància entre compactes (la distància de Hausdorff), aquesta aplicació és contractiva [1]. Com a corol·lari, hi ha un únic compacte que sigui fix per aquesta aplicació, que en aquest cas és el conjunt ternari de Cantor, $\mathcal{C} = W(\mathcal{C})$, i a més és atractor per aquesta aplicació: per a qualsevol compacte $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty} W^n(A) = \mathcal{C}$. En definitiva, l'atractor del sistema iteratiu de funcions és el repulsor del sistema invers!

El lector encara no satisfet amb aquestes generalitzacions, pot pensar a considerar aplicacions lineals a trossos (i expansives), sistemes iteratius de funcions en dimensió superior (aquí trobarà el triangle de Sierpinski, l'esponja de Menger i la falguera de Barnsley, per exemple), als atractors dels quals se'ls poden posar dinàmiques caòtiques (advertim que les aplicacions de localització no tenen per què ser bijectives)..., i així anar trenant *ad infinitum.*

Agraïments

Agraeixo a la Societat Catalana de Matemàtiques, i especialment a la doctora Núria Fagella, la invitació a participar en el Butlletí.

Referències

[1] Barnsley, M. *Fractals everywhere*. Boston, Mass.: Academic Press. 1988.

[2] Binimelis, M. I. *Una nueva manera de ver el mundo: La geometría fractal*. Barcelona: RBA, 2010.

[3] Falconer, K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986. (Cambridge Tracts in Mathematics, 85)

[4] Mandelbrot, B. B. *Les objets fractals: Forme, hasard et dimension*. París: Flammarion, 1975. (Nouvelle Bibliothèque Scientifique)

[5] Mandelbrot, B. B. *The fractal geometry of nature*. *Schriftenreihe für den Referenten* [Series for the Referee]. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman, 1982.

[6] Martín, M.-Á.; Morán, M.; Reyes, M. *Iniciación al caos: sistemas dinámicos*. Madrid: Síntesis, 1995.

[7] Pesin, Y.; Climenhaga, V. *Lectures on fractal geometry and dynamical systems*. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2009. (Student Mathematical Library, 52)

Departament de Matemàtica Aplicada i Anàlisi
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona
alex@maia.ub.es