

Mandelbrot i l'atzar

ROSARIO DELGADO, MARIA JOLIS I FREDERIC UTZET

Resum: En aquest article analitzem la contribució de Benoît Mandelbrot, considerat el pare de la geometria fractal, a diferents aplicacions de les matemàtiques en àmbits on intervé l'atzar, com ara la lingüística, la hidrologia, les finances o l'enginyeria del teletrànsit. En fer-ho, introduïm alguns conceptes i relacions bàsics del seu treball, desenvolupat al llarg de més de mig segle, que han passat a formar part del cos del coneixement científic general. Incidim principalment en la llei de potència, l'autosimilitud, la memòria llarga i les cues pesades. També presentem amb cert detall el moviment brownià fraccionari, que Mandelbrot va donar a conèixer a la comunitat científica en un famós article de 1968. El moviment brownià fraccionari és el procés estocàstic més simple que gaudeix de les propietats d'autosimilitud i de memòria llarga, cosa que el fa idoni com a model en moltes situacions.

Paraules clau: autosimilitud, memòria llarga, cues pesades, moviment brownià fraccionari, procés de Lévy, lleis de potència.

Classificació MSC2010: 01A60, 60G22, 60G51, 60K40, 91G99.

Benoît Mandelbrot va morir el 14 d'octubre de 2010, a l'edat de 85 anys; amb aquest motiu, la revista *SCM/Notícies* va publicar un obituari [8] amb una ponderada visió de la seva vida. Encara que Mandelbrot ha passat a la història com a pare de la *geometria fractal* i és conegut arreu pel conjunt que porta el seu nom, va treballar en un ampli ventall de problemes matemàtics aplicats. En aquest article ens centrarem en la part del seu treball relacionada amb les aplicacions de les matemàtiques en diferents àmbits on intervé l'atzar; aquesta és, potser, la part de la seva obra menys coneguda per la comunitat matemàtica en general, i és per això que ens ha semblat interessant fer-ne una presentació.

1 Mandelbrot i la lingüística

Encara que moltes espècies animals tenen un sistema (més o menys) rudimentari de comunicació, els éssers humans sembla que som els únics pel que fa a fer ús de la sintaxi i la referència simbòlica en el nostre llenguatge. Els estudis més



Benoît Mandelbrot.

recents sobre l'evolució del llenguatge expliquen per què la sintaxi és avantatjosa comparada amb els sistemes de comunicació consistents en senyals, com els dels animals, però no quin és el mecanisme que fa que es combinin els senyals del llenguatge humà de forma natural per a donar lloc a la sintaxi. Aquests estudis també han demostrat que si un sistema de comunicació maximitza l'eficàcia comunicativa alhora que redueix al mínim el cost de la comunicació, com sembla ser que fan molts dels llenguatges naturals humans, aleshores les freqüències dels senyals (paraules en el cas d'un llenguatge humà) d'aquest sistema es distribueixen segons una llei que s'anomena *llei de Zipf*.

La idea que l'estructura semàntica de qualsevol llenguatge humà natural és el resultat d'un equilibri entre el fet que les expressions siguin acurades, d'una banda, i que la comunicació resulti ser dinàmica, eficient, de l'altra, va ser suggerida en primer lloc pel lingüista i filòleg americà de la Universitat de Harvard George Kingsley Zipf (1902-1950), i més tard per Mandelbrot, que li va donar un nou enfocament en el context de la teoria de la informació de Shannon. Tornant a l'origen, Zipf veia la comunicació humana com una competició entre la persona que parla i la que escolta. Es va imaginar que qui parla vol dedicar el menor esforç possible a la codificació del missatge que ha de transmetre i ho fa amb el menor nombre possible de paraules, mentre que qui escolta el que vol és dedicar el menor esforç possible a la descodificació del missatge, i prefereix que cada significat es transmeti fent servir una paraula diferent. Segons Zipf, la distribució de paraules que veiem en un text és el resultat d'un compromís entre aquestes dues actituds oposades. Encara que actualment es pensa que el mecanisme que Zipf imaginava no és del tot realista, en vista del que es coneix sobre la formació del discurs en el llenguatge sí que s'accepta com a correcta la hipòtesi que les paraules d'una llengua natural formen part d'un sistema de comunicació eficient en algun sentit.

La concreció de la idea que aquest lingüista tenia sobre la distribució de les paraules d'un llenguatge natural és el que es coneix com a *llei de Zipf* en honor seu. A continuació l'expliquem.

La llei de Zipf

L'any 1949 Zipf ([33]) desenvolupà i estengué l'àmbit d'aplicació d'una relació empírica descoberta per primera vegada el 1916 per Jean-Baptiste Estoup (1868–1950), taquígraf francès ([6]), entre el rang d'una paraula en l'ordre de freqüències, i la freqüència en què apareix en un text suficientment llarg. Aquí entenem per *paraula* qualsevol agrupació de lletres entre dos espais en blanc que pot aparèixer en un text escrit. El *rang* d'una paraula, r , és el nombre de paraules, incloent-la a ella mateixa, que tenen almenys la mateixa freqüència d'ocurrència, $f(r)$. Així, la paraula més freqüent té rang $r = 1$, la segona més freqüent té rang $r = 2$, i així successivament. La llei de Zipf diu que el producte $r f(r)$ és aproximadament constant en el sentit següent:

$$\text{Llei de Zipf: } f(r) = C r^{-\theta} \quad \text{amb } C \text{ constant i } \theta \approx 1. \quad (1)$$

Com que les freqüències de les paraules acostumen a decréixer molt ràpidament, un gràfic on mostréssim aquestes freqüències presentaria la forma d'una L que s'apropa als eixos. Per tal de poder veure la forma descendent d'aquesta gràfica més clarament, les freqüències s'acostumen a dibuixar en un gràfic anomenat *log-log*, que és un gràfic de $\log f(r)$ respecte de $\log r$ (on \log denota el logaritme decimal). Fent aquesta transformació, si $x = \log(r)$ i $y = \log(f(r))$, podem reescriure la llei de Zipf com la recta

$$y = C' - \theta x, \quad \text{amb } C' = \log C. \quad (2)$$

Zipf explica aquesta relació en l'àmbit de la lingüística com a conseqüència del *principi general del mínim esforç*. Aplicant-lo s'obté un *equilibri de vocabulari* al qual la llengua arriba a la llarga com a resultat de dues forces oposades: la *unificació*, que tendeix a reduir el vocabulari aplicant el principi del mínim esforç des del punt de vista de la persona que parla, i la *diversificació*, relacionada amb la necessitat per part de l'oient de donar significació al discurs que sent.

Com a primer exemple, Zipf va fer servir l'*Ulisses* de James Joyce, el text complet en anglès del qual comprèn unes 260 000 paraules, que formen un diccionari d'aproximadament 30 000 paraules diferents. A [33], pàgina 24, trobem la taula parcial de freqüències de la pàgina següent (les paraules corresponents a cada rang les hem extret de [28], encara que les freqüències no es corresponen exactament amb les de [33]). En aquesta taula s'ha evitat deliberadament considerar els rangs inferiors a 10 per motius que comentarem més endavant.

Si fem l'anàlisi de la regressió lineal amb les dades (fent prèviament el logaritme), trobem que l'aproximació lineal entre $Y = \log(f(r))$ i $X = \log(r)$ és molt bona, cosa que mostra clarament el diagrama de dispersió de la figura 1, ja que el coeficient de determinació és $R = 0,9989$ i el coeficient de correlació (l'arrel quadrada de R amb signe negatiu, el mateix del pendent de la recta) és $r = -0,99944985$, molt proper a 1 en valor absolut. D'altra banda, la recta de regressió que es troba és $y = -1,0243x + 4,4687$, que ens dona comparant

amb (2) les estimacions $\theta = 1,0243$ i $C' = 4,4687$. Com que $C = 10^{C'}$, tenim que $C = 29\,423,884\,02$. Per tant, les dades de l'*Ulisses* de Joyce que mostrem a la taula segueixen el patró de la llei de Zipf

$$f(r) = C r^{-\theta} \quad \text{amb } \theta = 1,0243 \text{ (proper a 1) i } C = 29\,423,884\,02. \quad (3)$$

Paraula	Rang r	Freqüència $f(r)$	Producte $r f(r)$
's	10	2 653	26 530
is	20	1 311	26 220
what	30	926	27 780
one	40	717	28 680
so	50	556	27 800
has	100	265	26 500
wife	200	133	26 600
Ireland	300	84	25 200
nose	400	62	24 800
since	500	50	25 000
college	1 000	26	26 000
allow	2 000	12	24 000
fever	3 000	8	24 000
instruction	4 000	6	24 000
morn	5 000	5	25 000
builder	10 000	2	20 000
gauntlets	20 000	1	20 000
Zurich	29 899	1	29 899

Les lleis de potència i els fractals

La relació $f(r) = C r^{-\theta}$ que expressa la llei de Zipf és una de les anomenades *lleis de potència* (*power law* en anglès), ja que tenim dues quantitats, $f(r)$ i r , i una d'aquestes és proporcional a una potència de l'altra. Aquest tipus de lleis ja havien estat observades amb anterioritat a geofísica, per exemple, on la *llei Omori* (1895, [24]) descriu la distribució temporal del nombre de rèpliques d'un moviment sísmic de gran magnitud. D'altra banda, el sociòleg italià Vilfredo Pareto (1848-1923) va ser el primer a publicar un treball, el 1897 (vegeu [25]), on es justificava la presència de lleis de potència en economia. Pareto va fer servir una llei de potència (que porta el seu nom) per a descriure el repartiment de la riquesa entre els individus d'una societat, caracteritzat pel fet que una gran porció de la riquesa es troba en mans d'uns pocs. És la coneguda «regla 80-20», que vol dir que el 20% de la població controla el 80% de la riquesa. Si anomenem X la riquesa d'un individu en una determinada societat, aquesta variable aleatòria satisfarà, segons Pareto, la llei de potència següent:

$$P(X > x) = \begin{cases} C x^{-\alpha} & \text{si } x \geq x_{min} \\ 1 & \text{si } x < x_{min}, \end{cases} \quad (4)$$

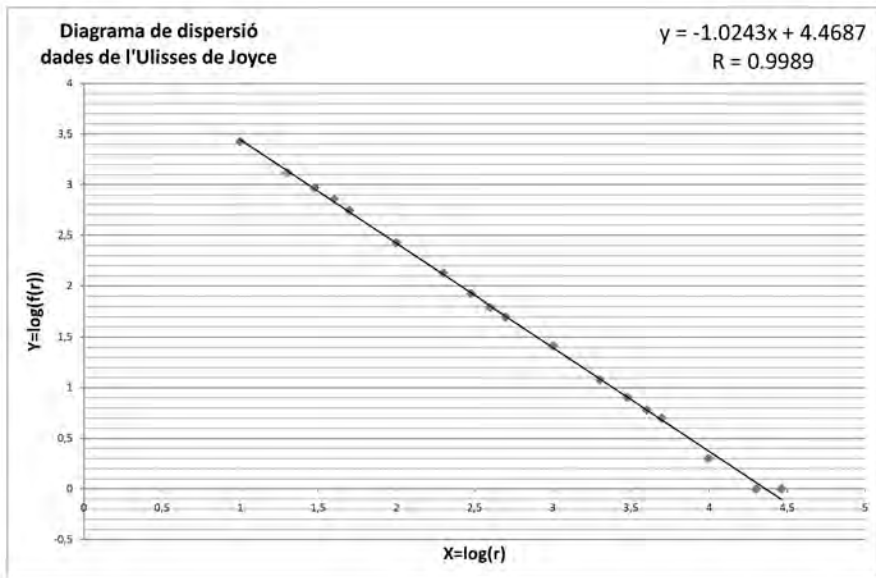


FIGURA 1: Regressió lineal amb les dades de l'Ulisses de Joyce.

on $x_{min} > 0$ és el menor valor possible de X , $C > 0$ és una constant i $\alpha > 0$ és un paràmetre. Llavors es diu que X segueix una llei (o distribució) de Pareto. Aquesta distribució no es limita a descriure la riquesa, sinó que apareix en moltes altres situacions en les quals es troba un «equilibri» entre el que és «petit» i el que és «gran», com veurem més endavant. De fet, la llei de Zipf es pot pensar com la versió discreta de la llei (contínua) de Pareto. Com que $\lim_{x \rightarrow 0^+} C x^{-\alpha} = +\infty$, la distribució s'ha de desviar de la forma de llei de potència a certa distància del 0, és a dir, per sota d'un cert valor, que és x_{min} . La constant C es determina imposant que la funció (4) sigui contínua. Per tant, $C x_{min}^{-\alpha} = 1$, d'on deduem que $C = x_{min}^{\alpha}$.

I encara un altre exemple: l'any 1913 el geògraf alemany Felix Auerbach (1856-1933) va mostrar al seu treball [1] que també les ciutats segueixen una llei de potència quan s'ordenen pel nombre d'habitants. Però la primera observació empírica d'una llei de potència en un sistema físic es remunta fins a la primera meitat del segle XIX. En efecte, Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), professor de física de la Universitat de Göttingen per recomanació de Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), empès per la seva insistència (la de Gauss), es va proposar d'estudiar la torsió dels fils de seda que es feien servir per a aguantar les bobines mòbils dels aparells elèctrics i magnètics. Weber va provar que aplicant una càrrega longitudinal als fils provocava una immediata extensió i un augment de longitud, seguida d'una immediata contracció quan la càrrega cessava, amb una disminució gradual de la longitud dels fils fins a arribar a la

longitud inicial. Les seqüeles de la pertorbació dels fils van disminuint amb el temps de manera hiperbòlica i no exponencial, com tots esperaven que passés, és a dir, ho fan seguint la funció $t^{-\gamma}$, que és una llei de potència. Aquest i altres exemples clàssics, així com alguns esbossos històrics, es poden trobar en el capítol 41 de [18].

Acabem de comentar que les *lleis de potència* apareixen en molts camps d'aplicació a més de la lingüística. També en el de la *geometria fractal*, de la qual Mandelbrot és considerat el precursor. I és que el concepte principal que apareix en aquesta nova geometria, el de *fractal*, també s'expressa en termes d'una llei de potència. Un *fractal* és, per definició, un conjunt tal que la seva dimensió de Hausdorff és estrictament més gran que la seva dimensió topològica.¹ Encara que els conjunts fractals es caracteritzen per la seva complicada geometria, hi ha un ordre en la seva estructura. La seva forma és complicada però si ens els mirem a diferents escales, encara que els detalls difereixen, sempre obtenim una imatge molt semblant. Quan tenim un objecte o conjunt tal que alguna propietat seva es preserva per canvi d'escala, es diu que l'objecte o conjunt és *autosimilar*,² o que és un *fractal*. Si un objecte és autosimilar o fractal, les seves parts s'assemblen al total quan fem una ampliació mitjançant un canvi d'escala adient.

Malgrat que el concepte de *fractal* va ser introduït per Mandelbrot, que ha passat a la història com el seu pare, ja havia estat intuït amb anterioritat per Lewis Fry Richardson (1881–1953), matemàtic, físic, meteoròleg, psicòleg i pacifista anglès, pioner en l'ús de les eines matemàtiques modernes en les prediccions climàtiques i en l'estudi de les causes de les guerres i en com prevenir-les. Si Y denota la longitud d'una secció de línia de costa irregular amb una determinada unitat de mesura, i canviem d'escala multiplicant la unitat de mesura per una constant a , el que afirmava Richardson és que la longitud expressada en la nova unitat és igual a Y multiplicada per una constant que depèn de a (però no de la unitat de mesura inicial), això és, que hi ha una llei de potència que relaciona la longitud després de fer el canvi d'escala d'unitat de mesura, amb la longitud abans de fer el canvi.

La llei de Zipf-Mandelbrot

A diferència del que hem observat a les dades de l'*Ulisses* de Joyce de la taula, resulta que en general les dades relatives a un llenguatge natural mostren típicament que el producte del rang per la freqüència, $rf(r)$, decreix a mesura que augmenta r (en comptes de mantenir-se constant). Per tant, l'equació (1) sembla que finalment no és un bon model per a aquests llenguatges, i és per

¹ La dimensió de Hausdorff (o de Hausdorff-Besicovitch) també s'anomena *dimensió fractal*. Per a la seva introducció es pot consultar [18], per exemple. Notem que tot conjunt amb dimensió de Hausdorff no entera és un fractal, però el recíproc no és cert; en canvi, la dimensió topològica sempre és un enter.

² En comptes d'*autosimilar* i *autosimilitud* també s'usen els termes *autosemblant* i *autosemblança*.

això que s'ha considerat una versió generalitzada:

$$f(r) = Cr^{-\theta} \quad \text{amb } C \text{ constant i } \theta > 1, \quad (5)$$

és a dir, que $r^\theta f(r)$ és aproximadament constant. Aquesta nova versió de la llei pot ser millor model matemàtic que la clàssica, ja que en considerar un exponent de r més gran que 1 al producte amb $f(r)$, es pot compensar el fet que $rf(r)$ disminueixi en augmentar r .

D'altra banda, potser ens hem deixat portar per l'optimisme amb l'exemple de l'*Ulisses*. De fet, si el model que hem trobat a (3) fos adequat per a tots els rangs, també ho seria per a $r = 1$, que correspon a la paraula *the*, la més utilitzada. Aquesta paraula, que deliberadament no hem inclòs a la taula de dades, té una freqüència real de 14 954, mentre que el model (3) li assignaria $f(1) = C1^{-\theta} = C = 29\,423,884\,02$, que és un valor molt més gran. Això ens fa pensar que la llei de Zipf *no* és adequada per als rangs petits a l'exemple, cosa que no succeeix només en aquest cas, sinó que és prou general. Com modificar, doncs, aquesta llei per tal de poder tenir un bon model també per als rangs petits?

Aquesta era una qüestió que es mantenia oberta quan Mandelbrot va començar l'any 1951 la seva recerca i el seu compromís de per vida amb l'estudi de les propietats dels conjunts que es mantenen invariants sota canvis d'escala, i de les seves implicacions geomètriques i físiques. Aquest començament es degué a un interès casual per la llei de Zipf, que va conèixer gràcies a la ressenya del llibre de Zipf [33] que va fer el matemàtic J. L. Walsh, com Mandelbrot mateix explica a l'epíleg de [18]. L'anècdota (que «sembla massa simbòlica per a ser veritat», en paraules del mateix Mandelbrot) és que va recuperar la ressenya de la paperera d'un matemàtic «pur» per llegir-la mentre viatjava al metro de París. Aquesta ressenya va influir en gran mesura la recerca inicial de Mandelbrot (vegeu el seu primer article [12], la seva tesi doctoral [13], i també [14]). Per a ell, treballar amb aquesta llei i generalitzar-la, contribuint al naixement de la lingüística matemàtica, va ser una feina fàcil i curta, i amb aquesta recerca va donar per acabat l'estudi de les freqüències de les paraules i la seva dedicació a la lingüística. I, tanmateix, les seqüeles d'aquesta primera investigació van perdurar, ja que el fet d'haver vist la utilitat de les lleis de potència en el camp de la lingüística el feren sensible a tractar de trobar regularitats anàlogues en altres camps, començant per l'economia. I va tenir molt d'èxit en aquest afany.

Mandelbrot va resoldre la qüestió plantejada gràcies a fer una interpretació de la comunicació humana en termes de la teoria de la informació de Shannon ([26]), i fent servir consideracions basades en aquesta teoria va trobar una expressió més ajustada i general de la llei de Zipf (que ara es coneix com a *llei de Zipf-Mandelbrot*). Va considerar que l'*esforç* de les paraules era el retard resultant de la seva transmissió com a seqüència de lletres o fonemes, separades per espais en blanc o pauses. En lloc de veure la persona que parla i la que escolta en oposició, com feia Zipf, en la visió de Mandelbrot el lèxic d'una llengua es considera com un punt d'equilibri entre la necessitat de maximitzar la informació que es transmet i la de minimitzar el cost cognitiu de reconèixer

les paraules. Assumint, doncs, que l'objectiu del llenguatge és permetre la transmissió de la més gran quantitat possible d'informació com sigui possible, amb el menor retard possible, va obtenir la relació següent entre la freqüència d'una paraula, $f(r)$, i el seu rang r :

$$\text{Llei de Zipf-Mandelbrot: } f(r) = C (r + V)^{-\theta}, \quad (6)$$

on V és un nou paràmetre que millora l'ajustament de la llei de Zipf per a les paraules més comunes, que tenen un valor de r petit, però no té gaire impacte en l'ajustament de la freqüència de paraules poc freqüents, que tenen valors de r grans. Per a les llengües més naturals, θ és més gran que la unitat. Què passa quan $\theta \leq 1$? En aquest cas, la sèrie $\sum_r C (r + V)^{-\theta}$ divergeix i, per tant, la llei només seria adequada com a model per a valors del rang no gaire grans (per a valors de r menors que un cert $r^* < +\infty$). Resulta que, a la pràctica, un valor $\theta < 1$ només es dona quan el vocabulari està limitat de manera artificial (per exemple, les paraules llatines que es troben en un text escrit en alguna llengua diferent del llatí). Naturalment, els valors de les constants C , V i θ s'han de determinar per a cada llenguatge o conjunt lèxic, de tal manera que el model sigui el més ajustat possible.

Si tornem a l'exemple de les paraules de l'*Ulisses* de Joyce, per a la paraula *the*, de rang 1, tenim que si agafem $V = 1,15$, la freqüència que ens dona la llei de Zipf-Mandelbrot (6) és

$$f(r = 1) = C (r + V)^{-\theta}|_{r=1} \approx 29\,423,884\,02 (1 + 1,15)^{-1,0243} = 13\,433,317\,69,$$

que ara sí que s'aproxima a la freqüència observada de 14 954, a diferència del que passava amb la llei de Zipf (1). Veiem, doncs, com la llei de Zipf-Mandelbrot millora la predicció de la freqüència per a una paraula amb un rang baix. I, tanmateix, si agafem una altra paraula amb un rang més gran, per exemple *college*, de rang $r = 1\,000$, la freqüència que li assigna el model (6) és

$$\begin{aligned} f(r = 1\,000) &= C (r + V)^{-\theta}|_{r=1\,000} \approx \\ &\approx 29\,423,884\,02 (1\,000 + 1,15)^{-1,0243} \approx 24,847\,84 \end{aligned}$$

quan la freqüència observada era 26, segons la taula, és a dir, que no afecta negativament el fet de tenir la constant V al model (6), respecte de la llei de Zipf (1).

Encara que no donarem els detalls de la manera com Mandelbrot va trobar la generalització de la llei de Zipf en el context de la teoria de la informació de Shannon, sí que veurem com es pot arribar a intuir aquesta fórmula en una situació senzilla, a partir d'un objecte autosimilar anomenat *arbre lexicogràfic* (vegeu el capítol 38 de [18]). Un arbre lexicogràfic és un objecte que, tal com el definirem, és autosimilar ja que si el canviem d'escala no canvia la seva forma. Això vol dir que si agafem una branca aïllada de l'arbre, la branca és com tot l'arbre a escala reduïda.

DEFINICIÓ 1. Partim d'un llenguatge format per paraules construïdes a partir d'un nombre $N > 1$ de lletres diferents. Definim un *arbre lexicogràfic* per a representar aquest llenguatge com un objecte que consta de $N + 1$ troncs, numerats de 0 fins a N , al nivell 1. El tronc 0 correspon a la «paraula» constituïda per un espai en blanc sol, i cadascun dels altres troncs corresponen a les N lletres. El tronc 0 queda tallat ja que té un espai en blanc. El altres troncs es ramifiquen cadascun en $N + 1$ branques al nivell 2, la primera de les quals queda tallada pel fet de tenir un espai en blanc, i les altres tornen a ramificar-se, i així successivament, augmentant el nombre de nivells sense aturar-nos. Quan una branca queda tallada perquè acaba en un espai en blanc, les lletres ordenades dels nusos d'aquesta branca (nivells previs) formen una paraula. El cas més simple d'arbre lexicogràfic correspon al fet que les N lletres apareixen al discurs de manera independent i amb la mateixa probabilitat, diguem s , mentre que l'espai en blanc també apareix de manera independent, amb probabilitat fixada $P_0 \in (0, 1)$. Llavors, $s = \frac{1-P_0}{N}$ i es compleix que $s \in (0, \frac{1}{N})$.

Si anomenem P la probabilitat que aparegui al discurs una paraula concreta de longitud k (és a dir, k lletres concretes seguides d'un espai en blanc, cosa que vol dir que la paraula acaba amb un blanc al nivell $k + 1$ de l'arbre lexicogràfic), i aquesta paraula té rang r , volem demostrar el següent:

PROPOSICIÓ 2. *Existeixen constants $0 < C_1 < C_2$ que només depenen de N i s , tals que*

$$C_1 (r + V)^{-\theta} < P \leq C_2 (r + V)^{-\theta}$$

amb $\theta = \frac{\log(1/s)}{\log N}$ (que és > 1) i $V = 1/(N - 1)$.

PROVA. Per la construcció de l'arbre lexicogràfic tenim que sigui quina sigui la paraula concreta de longitud k ,

$$P = s^k P_0.$$

D'altra banda, el rang d'aquesta paraula, r , ordenant les paraules per la freqüència amb què apareixen (o per la seva probabilitat), complirà aquestes desigualtats:

$$1 + N + N^2 + \dots + N^{k-1} < r \leq 1 + N + N^2 + \dots + N^{k-1} + N^k,$$

ja que serà estrictament més gran que el de totes les paraules més curtes (dels nivells 1 al k) i menor o igual que el màxim rang de les paraules del seu nivell, que és el nivell $k + 1$. Com que per a qualsevol ℓ , $1 + N + N^2 + \dots + N^{\ell-1} = \frac{N^\ell - 1}{N - 1}$, tenim que

$$\frac{N^k - 1}{N - 1} < r \leq \frac{N^{k+1} - 1}{N - 1},$$

i si fem servir la notació $V = 1/(N - 1)$, llavors

$$N^k - 1 < \frac{r}{V} \leq N^{k+1} - 1 \Leftrightarrow N^k < \frac{r + V}{V} \leq N^{k+1}, \quad (7)$$

i usant que a partir de $P = P_0 s^k$ podem aïllar

$$k = \frac{\log(P/P_0)}{\log s},$$

tenim que, prenent logaritmes,

$$(7) \Leftrightarrow \frac{\log(P/P_0)}{\log s} \log N < \log\left(\frac{r+V}{V}\right) \leq \left(\frac{\log(P/P_0)}{\log s} + 1\right) \log N. \quad (8)$$

Ara introduïm la notació $\theta = \frac{\log(1/s)}{\log N}$, i tenim que $\theta > 1$ ja que $s < 1/N$. Amb aquesta notació,

$$\begin{aligned} (8) &\Leftrightarrow -\frac{1}{\theta} \log\left(\frac{P}{P_0}\right) < \log\left(\frac{r+V}{V}\right) \leq -\frac{1}{\theta} \left(\log\left(\frac{P}{P_0}\right) + \log s\right) \\ &\Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right) < \log\left(\frac{r+V}{V}\right) \leq \log\left(\left(s \frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{1}{\theta}} < \frac{r+V}{V} \leq \left(s \frac{P}{P_0}\right)^{-\frac{1}{\theta}} \Leftrightarrow \frac{P}{P_0} > \left(\frac{r+V}{V}\right)^{-\theta} \geq s \frac{P}{P_0} \\ &\Leftrightarrow C_1 (r+V)^{-\theta} < P \leq C_2 (r+V)^{-\theta}, \end{aligned}$$

amb

$$C_1 = \frac{P_0}{V^{-\theta}} = \frac{P_0}{(N-1)^\theta} \quad \text{i} \quad C_2 = \frac{P_0}{s V^{-\theta}} = \frac{P_0}{s(N-1)^\theta},$$

constants positives que només depenen de N i s . □

NOTA. En el capítol 38 de [18] es comenta que el valor de $D = 1/\theta = \frac{\log N}{\log(1/s)}$ (< 1) és la dimensió fractal d'un conjunt de Cantor a l'interval $[0, 1]$, cosa que s'obté traient de l'interval tots els números que inclouen el dígit 0 en alguna posició diferent de la darrera xifra decimal. Notem que la prova anterior s'ha fet en una situació que ens ha portat a obtenir un valor de $D < 1$ (ja que $\theta > 1$). Ja hem comentat abans que aquest és el valor corresponent a les llengües més naturals, mentre que un valor $\theta < 1$ només es dona amb un vocabulari limitat artificialment.

Conseqüències

Com a conclusió podem dir que, dins el camp de la lingüística, les implicacions de les lleis de potència que hem presentat (lleis de Zipf i llei de Zipf-Mandelbrot) són molt importants, per exemple, per als professors i estudiants de llengües estrangeres, ja que de les lleis es dedueix que la necessitat per part dels estudiants de conèixer un gran volum de vocabulari és altament infreqüent, i, per tant, que és millor treballar amb materials docents bàsics que continguin un nombre limitat de vocabulari, i deixar que l'aprenentatge d'un vocabulari més avançat es faci de manera més gradual en el temps.

D'altra banda, aquestes lleis també van despertar un cert interès en altres àmbits. Com a model, són molt diferents del model gaussià: una llei de potència assigna probabilitats no nul·les als elements molt grans, mentre que la cua de tipus exponencial de la distribució gaussiana assigna probabilitats extremament petites (pràcticament zero) als elements que són molt més grans que la mitjana. Per exemple, la mida de les ciutats, que segueix una llei de potència com hem comentat, inclou la consideració de les *megaciutats*, que són diversos ordres de magnitud més grans que la mida mitjana de totes les ciutats. En canvi, la distribució gaussiana, que descriu, per exemple, l'alçada de les persones, no preveu (li assigna probabilitat pràcticament zero) el cas de persones amb una alçada de diverses vegades l'alçada mitjana de la població.

I ja més recentment, s'ha vist que la mida dels cràters de la Lluna o la magnitud dels moviments sísmics, per citar exemples del món físic, segueixen lleis de potència (vegeu [23]). Però també les noves tecnologies n'estan plenes; l'article [2] es dedica a explicar que les lleis de potència (que anomena genèricament *lleis de Zipf*, fent un abús del llenguatge), són les que governen moltes de les característiques d'Internet. Com s'explica en aquest article, encara que inicialment no ho semblava a causa de la seva gran variabilitat, de seguida es va veure que existeix un patró generalitzat quant a la mida dels elements que hi ha al web: hi ha molts elements petits però pocs que siguin molt grans (com és de familiar aquest patró!). Per exemple, pocs llocs estan formats per milions de pàgines, mentre que milions de llocs estan formats només per un grapat de pàgines. Pocs llocs contenen milions d'enllaços, mentre que molts llocs en tenen només un o dos. Milions d'usuaris acudeixen a uns pocs llocs seleccionats, prestant poca atenció als milers d'altres llocs, que sí que són visitats per un grup reduït d'usuaris. A [4] es troben dades relatives a aquest fenomen; la taula següent (taula 5 [4]) recull els deu llocs locals més populars entre usuaris de la Universitat de Boston (aquí «local» vol dir que els llocs visitats eren de servidors de la mateixa universitat, és a dir, acabaven en `bu.edu`).

Lloc	Rang r	Freqüència $f(r)$
cs-www.bu.edu	1	97 477
www.bu.edu	2	9 283
web.bu.edu	3	4 566
lobster.bu.edu	4	3 385
spiderman.bu.edu	5	2 184
gopher.bu.edu	6	1 513
conx.bu.edu	7	862
acs2.bu.edu	8	593
cng.bu.edu	9	333
miranda.bu.edu	10	330

Prenent logaritmes, fem l'anàlisi de la regressió lineal amb $Y = \log(f(r))$ i $X = \log(r)$, i veiem que la relació lineal és bona, amb el diagrama de dispersió que mostra la figura 2 i el coeficient de determinació, que és $R = 0,9785$ (el

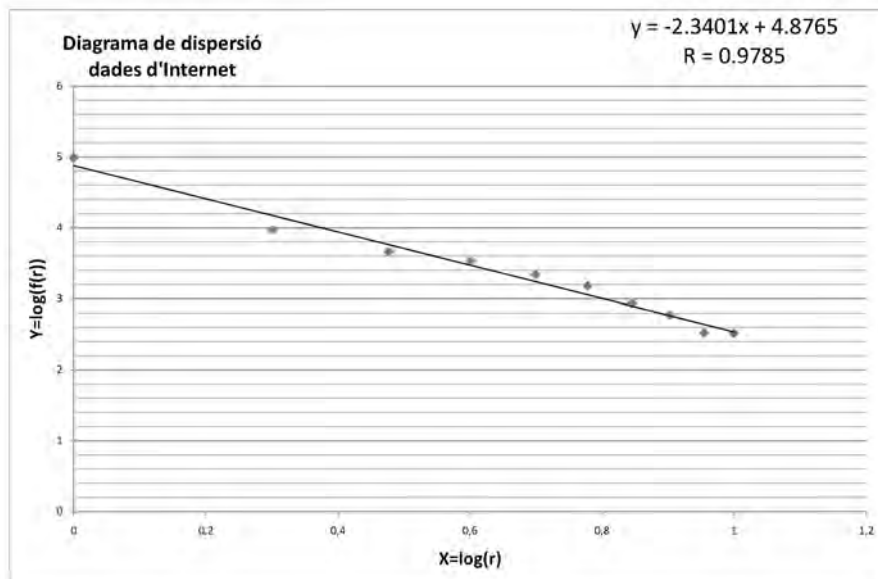


FIGURA 2: Regressió lineal amb les dades d'Internet.

coeficient de correlació és $r = -\sqrt{R} = -0,98919159$, molt proper a 1 en valor absolut). La recta de regressió que obtenim és $y = -2,3401x + 4,8765$. A partir de (2) trobem les estimacions $\theta = 2,3401$ i $C' = 4,8765$ (llavors, $C = 10^{C'} = 75\,248,873\,02$). Per tant, les dades d'Internet segueixen el patró de la llei de Zipf (5)

$$f(r) = Cr^{-\theta} \quad \text{amb} \quad \theta = 2,3401 > 1 \text{ i } C = 75\,248,873\,02.$$

Acabarem aquesta secció dient que a Internet, les lleis de potència no són l'excepció sinó la norma. El descobriment de l'omnipresència d'aquestes lleis al ciberespai ens ha portat a un coneixement més profund del fenomen d'Internet i, com a conseqüència, ha influït en la seva evolució. Precisament sobre això, en tornarem a parlar en la secció 4.

2 Mandelbrot i la hidrologia: el moviment brownià fraccionari

L'hidròleg britànic Harold Edwin Hurst (1880-1978) va estudiar les dades històriques de les crescudes anuals del riu Nil de l'any 622 al 1281. Va observar que els models clàssics de les sèries temporals no s'adaptaven bé a aquestes dades, ja que aquests models només són adequats en situacions que es caracteritzen per una *dependència a curt termini* o *memòria curta* en els temps, és a dir, fenòmens en els quals hi ha dependència en el temps, però en què aquesta dependència decreix ràpidament.

I, tanmateix, la dependència en el temps de les mesures analitzades per Hurst decreixia molt més lentament del que els models estàndards de les sèries temporals preveuen. El seu treball [7] va servir de base perquè Benoît Mandelbrot plantegés a la dècada dels anys seixanta ([16], [22]) fer servir un model alternatiu als de les sèries temporals per als nivells anuals de cabal del riu, que fos de *dependència a llarg termini* o *memòria llarga*: el procés estocàstic que va anomenar *moviment brownià fraccionari* (la paraula «fraccionari» fa referència al seu caràcter fractal). Aquest model es va proposar com a alternativa als models que es feien servir en aquell moment, que subestimaven la complicació de les fluctuacions hidrològiques i que suposaven que les precipitacions tenien natura aleatòria i seguien la distribució de probabilitat normal, amb les precipitacions d'anys successius considerades com a mútuament independents o amb memòria curta. *Independents* vol dir que les precipitacions durant un any no afecten les de l'any següent. *Amb memòria curta* vol dir que l'efecte que puguin tenir les precipitacions durant un any en els anys següents s'esmoreeix al cap de pocs anys.

Encara que el procés de moviment brownià fraccionari ja havia estat introduït per Andrei Nikolaievitx Kolmogorov (1903–1987) en l'article de l'any 1940 [9], no va ser fins que es va publicar el famós article de 1968 de Mandelbrot i Van Ness [21], que es van començar a investigar les propietats bàsiques d'aquest procés i es va fer èmfasi en la seva adequació com a model de diferents fenòmens naturals aleatoris que presenten «memòria llarga», com era el cas de les mesures hidrològiques de Hurst i com ho és també el trànsit d'informació a Internet, per exemple. El fenomen de la «memòria llarga» està íntimament relacionat amb el d'*autosimilitud*, com veurem en la secció 4. A [31] es pot trobar una bibliografia molt extensa sobre autosimilitud i «memòria llarga» que inclou tant treballs teòrics com aplicats.

L'autosimilitud

Per tal d'entendre el que buscaven Mandelbrot i Van Ness en definir el moviment brownià fraccionari, primer hem de donar algunes definicions relacionades amb l'autosimilitud quan les nostres observacions depenen de l'atzar. Quan el fenomen que estudiem mostra dependència del temps però també de l'atzar, els models matemàtics adequats són els processos estocàstics. Un procés estocàstic, o simplement procés, no és més que una família de variables aleatòries (que aquí suposarem sempre amb valors reals), definides en un mateix espai de probabilitat i indexades per un subconjunt de la recta real, que té la interpretació de temps. Una notació típica per a un procés és: $X. = \{X_t, t \in I\}$, amb $I \subset \mathbb{R}$. Si $I = [0, +\infty)$, també escrivim $X. = \{X_t, t \geq 0\}$.

En aquesta situació, seria massa optimista esperar observar una *autosimilitud* exacta, determinista, donada la naturalesa aleatòria del fenomen. De fet, quan observem el fenomen al llarg del temps, el que obtenim és una realització concreta del procés estocàstic (o *trajectòria*) i, a diferència del que succeeix amb els objectes fractals deterministes, en aquest cas no observarem en la

trajectòria una similitud exacta entre les parts i el tot, sinó que només tindrem una certa semblança en el seu gràfic (amb el canvi d'escala convenient). És per això que en aquest cas s'introdueix una versió més relaxada del que és l'*autosimilitud*: l'*autosimilitud en el sentit de les distribucions*.

DEFINICIÓ 3. Direm que el procés estocàstic $X. = \{X_t, t \geq 0\}$ és *autosimilar* (o *fractal*) d'índex $H \in (0, 1)$ si per a tota constant $a > 0$, el procés canviat d'escala $\{a^{-H} X_{at}, t \geq 0\}$ té les mateixes *distribucions en dimensió finita*³ que el procés original. Dit d'una altra manera, l'autosimilitud implica que un canvi a l'escala del temps que consisteix a multiplicar el temps t per una constant $a > 0$ és equivalent al canvi a l'escala de l'espai d'estats consistent a multiplicar l'estat del procés per a^H . Si $a > 1$ (el temps s'estira o dilata), s'aplica el factor de contracció a^{-H} per tal de fer que la magnitud X_{at} sigui comparable amb X_t . Si $a < 1$, es compleix just el contrari. Llavors, X_{at} té la mateixa distribució que $a^H X_t$, és a dir, tenim una *llei de potència* que relaciona X_{at} amb X_t .

El rang seqüencial

Com s'ha dit, la motivació original de Mandelbrot per a triar el moviment brownià fraccionari com a model per a certes mesures hidrològiques prové de resultats empírics analitzats per Hurst. Aquests resultats es referien a l'anomenat *rang seqüencial*, que definim a continuació en el context dels processos estocàstics.

DEFINICIÓ 4. Sigui $X. = \{X_t, t \geq 0\}$ un procés estocàstic. El seu *rang seqüencial* es defineix com

$$M(t, T) = \sup_{t \leq s \leq t+T} (X_s - X_t) - \inf_{t \leq s \leq t+T} (X_s - X_t),$$

per a qualssevol $t, T \geq 0$. Si el procés té trajectòries contínues, aleshores es poden substituir el suprem i l'ínfim pel màxim i el mínim, respectivament.

Hurst va observar que els enregistraments de cabal del Nil i altres rius, el preu del blat i altres sèries físiques tals com la pluja caiguda, temperatures i altres, compleixen que aquest rang seqüencial $M(t, T)$ es comporta (independentment de t) de manera proporcional a T^H amb $\frac{1}{2} < H < 1$. Més precisament:⁴

$$M(t, T) \text{ té la mateixa llei que } T^H M(0, 1). \quad (9)$$

³ Les distribucions en dimensió finita d'un procés estocàstic són les distribucions de tots els vectors aleatoris que es poden formar amb un nombre finit de les variables aleatòries que formen el procés.

⁴ En el cas de les mesures del cabal del riu Nil, el procés $X.$ que té aquesta propietat és el cabal del riu menys la seva mitjana, que es considera proporcional al temps.

Això va ser causa de gran sorpresa per als estadístics de l'època ja que els models més usats fins aleshores, tals com

$$X_t = \int_0^t Y_s ds,$$

on Y és un procés estacionari amb funció de covariància integrable, tenen un rang seqüencial asimptòticament proporcional a $T^{\frac{1}{2}}$.

Davant d'aquesta situació, Mandelbrot i Van Ness expliquen que l'objectiu del seu treball no és construir una teoria general per a modelitzar bé aquests fenòmens, sinó presentar algun model concret que permeti obtenir resultats d'interès pràctic, amb un mínim de dificultat matemàtica. Com que els processos gaussians són els més senzills en molts sentits (en particular, les distribucions en dimensió finita queden determinades coneixent només les funcions de mitjanes i de covariàncies), ells construeixen un procés gaussià que compleix (9), el qual anomenen *moviment brownià fraccionari*.

Si X és un procés gaussià, una manera d'aconseguir que $M(t, T)$ tingui el comportament observat per Hurst és imposar que X tingui *increments estacionaris*⁵ i sigui autosimilar d'índex H . Així, al moviment brownià fraccionari se li demanarà, precisament, que compleixi aquestes dues propietats. La novetat de l'article de Mandelbrot i Van Ness respecte del treball de Kolmogorov [9] citat anteriorment és que es dona una construcció explícita d'aquest procés i es demostren algunes de les seves propietats més importants, alhora que es justifica el seu ús com a model en el tipus de fenòmens que presenten autosimilitud i memòria llarga (de la qual donarem la definició precisa en la secció 4).

El moviment brownià fraccionari

A la definició del moviment brownià fraccionari donada per Mandelbrot i Van Ness apareixen integrals respecte del moviment brownià (estàndard) o procés de Wiener. Recordarem primer què és el moviment brownià estàndard.

DEFINICIÓ 5. Direm que un procés estocàstic amb valors reals $B = \{B_t, t \in \mathbb{R}\}$ és un *moviment brownià estàndard* si $B_0 = 0$, té increments independents i per a qualssevol $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $B_{t_1} - B_{t_2}$ té distribució normal amb mitjana 0 i variància $|t_1 - t_2|$.

Tot i que la memòria llarga es presenta quan l'índex d'autosimilitud H pertany a l'interval $(\frac{1}{2}, 1)$, es pot donar una definició del moviment brownià fraccionari d'índex d'autosimilitud H per a tot $H \in (0, 1)$.

DEFINICIÓ 6. Sigui $H \in (0, 1)$. El moviment brownià fraccionari d'índex H és el procés estocàstic $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ ⁶ definit de la manera següent:

⁵ Es diu que el procés estocàstic $X = \{X_t, t \geq 0\}$ té els increments estacionaris si $X_{t+h} - X_h$ té la mateixa distribució que $X_t - X_0$, $\forall t, h > 0$.

⁶ També es pot definir B_t^H per a $t < 0$, de manera semblant.

$$\begin{aligned}
 & \bullet B_0^H = 0 \\
 & \bullet B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^0 ((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) dB_s + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB_s \right) \quad \text{si } t > 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Ara hem d'aclarir què volen dir les integrals respecte del moviment brownià que apareixen a la definició que acabem de donar. Com que es pot demostrar que les trajectòries del moviment brownià, tot i ser contínues, són no diferenciables en tot punt i que ni tan sols són de variació acotada en els intervals finits, hem de justificar que aquestes integrals es poden definir.

La integral de funcions deterministes respecte del moviment brownià rep el nom d'*integral de Wiener*. Donarem aquí la idea de com es construeix. Si f és una funció simple de la forma

$$f = \sum_{i=1}^m c_i \mathbf{1}_{(s_i, t_i)}$$

on les c_i són constants arbitràries i $\mathbf{1}_{(s_i, t_i)}$ no és més que la funció indicatriu de l'interval (s_i, t_i) (és a dir, $\mathbf{1}_{(s_i, t_i)}(s) = 1$ si $s \in (s_i, t_i)$ i és nul·la en cas contrari), es defineix la integral de Wiener de f respecte de B de la manera natural com

$$I(f) = \sum_{i=1}^m c_i (B_{t_i} - B_{s_i}),$$

i també es denota per $\int_{-\infty}^{+\infty} f(s) dB_s$.

D'aquesta definició s'obté (a més del fet que la integral no depèn de la representació de f com a funció simple i que és un operador lineal) que $I(f)$ és una variable aleatòria gaussiana amb mitjana zero, i es compleix que la covariància entre dues d'aquestes integrals és:

$$E(I(f)I(g)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(s) ds. \quad (11)$$

Això ens diu que l'aplicació I és una isometria entre l'espai de les funcions simples, dotat del producte escalar de $L^2(\mathbb{R})$, i un subespai de $L^2(\Omega)$, l'espai de les variables aleatòries de quadrat integrable, dotat del producte escalar $\langle X, Y \rangle = E[XY]$. Si ara volem definir la integral per a una funció qualsevol $f \in L^2(\mathbb{R})$, el que farem és prendre una successió $\{f_n\}$ de funcions simples que convergeixin en $L^2(\mathbb{R})$ cap a f ; usant la propietat d'isometria i la completesa de $L^2(\Omega)$ es pot veure que les integrals de Wiener de les funcions f_n tenen un límit en $L^2(\Omega)$ i definirem, doncs,

$$I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n),$$

on el límit és en la norma de $L^2(\Omega)$ (es pot provar també fàcilment que el límit obtingut no depèn de la successió $\{f_n\}$ aproximadora i, per tant, acabem de donar una *bona definició*).

La integral estesa a $L^2(\mathbb{R})$ continua satisfent la relació d'isometria (11) i té esperança nul·la. A més, $I(f)$, com que és límit en mitjana quadràtica de variables aleatòries gaussianes, també és gaussiana.

Per veure que les integrals que apareixen a (10) tenen sentit com a integrals de Wiener s'ha de comprovar que, fixat $t > 0$, les funcions

$$\begin{aligned} f_1(s) &= ((t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}) \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(s), \\ f_2(s) &= (t-s)^{H-1/2} \mathbf{1}_{(0, t)}(s), \end{aligned}$$

pertanyen a $L^2(\mathbb{R})$. Quant a f_2 , això és a causa que l'exponent $2(H - \frac{1}{2}) = 2H - 1 > -1$ per a tot $H > 0$. Per a veure la integrabilitat de f_1^2 , només cal que estudiem el seu comportament quan $s \rightarrow -\infty$ (el comportament en 0 és anàleg al de f_2^2 en t). És fàcil comprovar que

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{(t-s)^{H-1/2} - (-s)^{H-1/2}}{(-s)^{H-3/2}} = (H-1/2)t.$$

Això implica que $f_1^2(s)$ es comporta en $-\infty$ com $(-s)^{2H-3}$, que és una funció integrable ja que $2H - 3 < -1$ per a tot $H < 1$.

Així, ja hem vist que les integrals de la definició del moviment brownià fraccionari tenen sentit com a integrals de Wiener. De tota manera, l'objectiu és construir un procés gaussià que tingui increments estacionaris i que sigui autosimilar, cosa que no és del tot evident. Veurem això tot seguit, però abans fem una observació: si $H = \frac{1}{2}$, per la definició de la integral de Wiener, tenim que $B_t^{1/2} = B_t$, és a dir, el moviment brownià estàndard (per a $t \geq 0$) no és més que un cas particular del moviment brownià fraccionari.

Propietats del moviment brownià fraccionari

Donat que B^H és gaussià i amb esperança nul·la (per la seva definició com a suma de dues integrals de Wiener), per a provar que té increments estacionaris només cal veure que la variància d'un increment $B_{t_2}^H - B_{t_1}^H$ només depèn de $t_2 - t_1$ (estem suposant implícitament que $t_2 > t_1 \geq 0$). Per (10), tenim que

$$\begin{aligned} B_{t_2}^H - B_{t_1}^H &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left(\int_{-\infty}^{t_1} \left((t_2 - s)^{H-\frac{1}{2}} - (t_1 - s)^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \right) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((t_2 - s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (t_1 - s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dB_s, \end{aligned}$$

on estem usant la notació x_+ per a la part positiva de x , és a dir $x_+ = \max\{x, 0\}$. Com que $E(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H) = 0$, tenim que $\text{Var}(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H) = E((B_{t_2}^H - B_{t_1}^H)^2)$ i aplicant

(11) s'obté que

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H) &= \left(\frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left((t_2 - s)_+^{H-\frac{1}{2}} - (t_1 - s)_+^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds = \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \right)^2 \left(\int_{-\infty}^{t_1} \left((t_2 - s)^{H-\frac{1}{2}} - (t_1 - s)^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{2H-1} ds \right). \end{aligned}$$

La segona integral de l'expressió anterior és immediata i dóna $\frac{1}{2H}(t_2 - t_1)^{2H}$. Fent a la primera integral successivament els canvis de variable $u = t_1 - s$ i $u = (t_2 - t_1)r$ arribem a

$$\begin{aligned} \text{Var}(B_{t_2}^H - B_{t_1}^H) &= \left(\frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \right)^2 \left(\int_0^{+\infty} \left((1+r)^{H-\frac{1}{2}} - r^{H-\frac{1}{2}} \right)^2 dr + \frac{1}{2H} \right) (t_2 - t_1)^{2H} = \\ &= C_H (t_2 - t_1)^{2H}, \end{aligned}$$

on estem anomenant C_H la constant multiplicativa que acompanya $(t_2 - t_1)^{2H}$. Un cop vist que B^H té increments estacionaris i l'expressió de la variància d'aquests increments, podem trobar fàcilment la funció de covariàncies del procés:

$$\begin{aligned} E(B_t^H B_s^H) &= \frac{1}{2} E\left((B_t^H)^2 + (B_s^H)^2 - (B_t^H - B_s^H)^2 \right) = \\ &= \frac{C_H}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}). \end{aligned} \quad (12)$$

A partir d'aquesta expressió és fàcil comprovar que B^H és autosimilar d'índex H . Hem de veure que, per a tota constant $a > 0$, els processos $\{B_t^H, t \geq 0\}$ i $\{a^{-H}B_{at}^H, t \geq 0\}$ tenen les mateixes distribucions en dimensió finita, però com que tots dos són processos gaussians amb esperança nul·la, només cal comprovar que tenen la mateixa funció de covariàncies, és a dir que

$$E\left((a^{-H}B_{as}^H) (a^{-H}B_{at}^H) \right) = E(B_s^H B_t^H).$$

I això és clar, per (12).

Com s'ha dit abans, en l'article [21] s'estudien algunes propietats importants del moviment brownià fraccionari. Aquí ens centrarem en les propietats de regularitat de les seves trajectòries. Aquestes trajectòries són contínues (més precisament, existeix una versió del procés amb trajectòries contínues) i no diferenciables.

La continuïtat es prova usant el resultat següent, conegut com a *criteri de continuïtat de Kolmogorov*.

TEOREMA 7. *Sigui $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un procés estocàstic amb valors reals. Suposem que per a qualsevol $T > 0$ existeixen constants positives α i K i una altra constant $\beta > 1$ tals que*

$$E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq K |t - s|^\beta,$$

per a tots $s, t \in [0, T]$. Aleshores existeix una versió contínua de X , és a dir, existeix un altre procés estocàstic $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t, t \geq 0\}$ tal que

- \tilde{X} té trajectòries contínues;
- per a qualsevol $t \geq 0$ se satisfà que $P\{\tilde{X}_t = X_t\} = 1$.

En el cas del moviment brownià fraccionari tenim que

$$E(|B_t^H - B_s^H|^2) = \text{Var}(B_t^H - B_s^H) = C_H |t - s|^{2H},$$

i l'exponent $2H$ és més gran que 1 només si $H > 1/2$. Ara bé, si Y és una variable aleatòria gaussiana amb esperança 0 i variància σ^2 , podem expressar l'esperança de qualsevol potència de $|Y|$ en funció de σ . Més concretament, per a tot $\alpha > 0$ existeix una constant C_α tal que

$$E(|Y|^\alpha) = C_\alpha \sigma^\alpha.$$

Aplicant aquesta propietat a $Y = B_t^H - B_s^H$ tindrem que, per a tot $\alpha > 0$,

$$E(|B_t^H - B_s^H|^\alpha) = C_\alpha C_H^{\alpha/2} |t - s|^{\alpha H} = K |t - s|^{\alpha H}$$

i si $\alpha > \frac{1}{H}$ l'exponent $\beta = \alpha H$ ja és més gran que 1. Per tant B^H té una versió amb trajectòries contínues.

Com hem comentat abans, les trajectòries del moviment brownià fraccionari són no diferenciables. En aquest sentit, Mandelbrot i Van Ness provaren el resultat següent.

PROPOSICIÓ 8. (Vegeu la proposició 4.2 de [21].) Per a tot $t \geq 0$ es compleix que, amb probabilitat 1,

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \left| \frac{B_{t+h}^H - B_t^H}{h} \right| = +\infty.$$

(També es té el resultat anàleg prenent el límit superior per l'esquerra.)

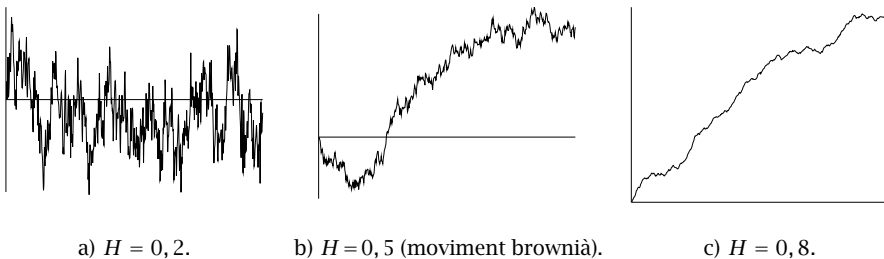


FIGURA 3: Trajectòries del moviment brownià fraccionari amb diferents valors de H .

No farem aquí la prova d'aquesta proposició però sí que en donarem una justificació intuïtiva. Si considerem el quocient incremental

$$\frac{B_{t+h}^H - B_t^H}{h},$$

la seva variància és igual a h^{2H-2} , que tendeix a infinit quan h tendeix a zero (ja que $0 < H < 1$). Això impedeix que el quocient incremental pugui tenir un límit finit en mitjana quadràtica.

La no-diferenciabilitat de les trajectòries implica que són molt irregulars, encara que contínues. El grau d'irregularitat disminueix a mesura que H augmenta, com es pot veure a la figura 3.

El moviment brownià fraccionari i l'anàlisi estocàstica

El moviment brownià fraccionari és el procés estocàstic més senzill que gaudeix de les propietats d'autosimilitud i memòria llarga, cosa que el fa idoni com a model en moltes aplicacions. D'altra banda, en l'anàlisi estocàstica clàssica, el moviment brownià estàndard és la base per a obtenir molts altres processos, com per exemple els processos de difusió, que poden ser construïts com a solucions d'equacions diferencials estocàstiques. A aquestes equacions se'ls dona sentit com a equacions integrals en què apareixen integrals de processos estocàstics respecte del moviment brownià. Això requereix la construcció d'aquesta mena d'integrals i l'anàleg a la fórmula del canvi de variables, l'anomenada *fórmula d'Itô*.

Sembla natural seguir les mateixes idees per tal de construir nous processos estocàstics que puguin ser adequats com a models, usant com a integrador el moviment brownià fraccionari. Aquest interès per l'anàlisi estocàstica respecte del moviment brownià fraccionari va començar els darrers anys de la dècada dels noranta i principis dels dos mil. El problema és interessant com a repte matemàtic, ja que el càlcul clàssic utilitza com a integradors processos que són semimartingales, i es va demostrar ben aviat que el moviment brownià fraccionari només és semimartingala en el cas $H = 1/2$, és a dir, en el cas que sigui un moviment brownià estàndard. L'anàlisi estocàstica respecte del moviment brownià fraccionari és actualment una àrea de recerca molt activa.

3 Mandelbrot i les finances

Mandelbrot va fer una contribució important a la modelització matemàtica de les dades financeres i econòmiques, refutant el paradigma estadístic habitual que diu que aquesta mena de dades —potser després d'alguna transformació— són gaussianes. Aquesta suposició té molts avantatges teòrics i pràctics: el món gaussià és molt més senzill que altres possibles alternatives: per exemple, en un vector aleatori gaussià, la incorrelació (absència de relació lineal) entre les components equival al fet que aquestes siguin independents, o l'esperança condicionada es pot calcular senzillament mitjançant una projecció lineal sobre

un subespai. Diferents investigadors ja havien assenyalat que moltes dades reals no encaixaven en un model gaussià, però Mandelbrot, en un celebrat article de 1963 (vegeu [15], també reproduït a [19]) va aprofundir molt més en aquest fet, i va proposar models alternatius. En posteriors articles va anar polint les idees inicials, i posteriorment va desenvolupar també una aproximació fractal a les dades financeres. Nosaltres, però, ens centrarem en els aspectes probabilístics i estadístics del seu treball.

Tal com veurem, una de les característiques importants dels models proposats per Mandelbrot és que posen de manifest que les finances són molt més perilloses del que els gestors de fons d'inversions o altres professionals del tema diuen; que les grans caigudes de la borsa no són coses atípiques i extraordinàries, sinó que cal esperar-ne molt sovint. Actualment ja estem tan acostumats als daltabaixos de les borses, i tanta gent ha perdut tants diners, que això no ens diu res de nou, però als anys setanta i vuitanta del segle passat les afirmacions de Mandelbrot sonaven com un pessimista clam al desert. La llunyana crisi de l'any 1929 estava superada, i molts anys de bonança i creixement econòmic feien mirar la borsa amb optimisme; tot semblava sota control. Evidentment, la crisi de 1987, la fallida el 1998 de Long Term Capital Management (l'empresa assessorada pels premis Nobel Merton i Scholes) i la brutal crisi del 2008 —que encara patim, i que no sabem com acabarà— van, en certa mesura, confirmar les profecies funestes de Mandelbrot.

Tot i que Mandelbrot gairebé comparava la seva contribució a les finances amb el pas de la cosmologia de Ptolomeu a la de Galileu i Kepler, i que les seves propostes han estat desenvolupades i molt estudiades teòricament, la praxi financera continua ancorada bàsicament en models gaussians, que, tal com hem comentat, són molt més senzills d'implementar; l'alternativa de Mandelbrot no és, de fet, un únic model, sinó un ampli ventall d'idees i models, amb un grau de sofisticació matemàtica molt més elevat, amb nombrosos paràmetres per estimar; això, evidentment, no és fàcil de fer arribar als professionals de les finances. D'altra banda, aquests models encareixen els preus dels productes financers, ja que cal preveure un comportament de la borsa amb possibilitats de caigudes o pujades més fortes; llavors, tant si les coses van bé com si van malament, quin banc, intermediari o venedor de productes financers vol vendre més car que els altres?

Analitzant les dades

L'origen de les idees de Mandelbrot està en el seu estudi de dades financeres i econòmiques, amb una gran intel·ligència i la ment molt oberta. Explicava que, durant la Segona Guerra Mundial, el seu pare, d'origen jueu, havia estat presoner en un camp de concentració alemany; un dia un escamot va aconseguir alliberar un grup de presoners (el seu pare entre ells), els quals van fugir tots en grup per un camí, excepte el seu pare que va seguir un altre camí tot sol; tot el grup va morir, mentre que el seu pare es va salvar; aquesta independència de criteri, l'actitud d'analitzar la situació per si mateix, i no seguir el grup, va

ser —deia Mandelbrot— el seu model de comportament en totes les facetes de la seva vida. Mandelbrot comenta que va analitzar i tornar a analitzar incomptables sèries temporals; en particular, una de les que va analitzar primer i amb més insistència va ser la dels preus del cotó, dels quals tenia dades diàries de diferents mercats des del segle XIX, i que més endavant comentarem. De moment, nosaltres refarem part del seu estudi utilitzant les dades de tancament diari de l'IBEX 35. Aquest índex fou creat el 14 de gener de 1992 i és un dels grans indicadors de l'economia espanyola; es tracta d'un índex ponderat per capital borsari de les trenta-cinc empreses amb més liquiditat que cotitzen a les borses espanyoles.

A la figura 4 a) hi ha les dades dels valors de tancament diari de l'IBEX 35 des del 14 de gener de 1992 al 30 de juny de 2011. En aquest gràfic podem notar les grans crisis mundials, i les petites crisis, una tendència creixent, la irregularitat d'aquestes dades (que, de manera genèrica, s'anomena la *volatilitat*), etc.

Com hem comentat abans, el model estàndard de dades financeres als anys seixanta (i encara ara) consistia en el fet que després de fer alguna transformació, les dades resultants es comportaven com una sèrie gaussiana. Compararem les dades reals amb unes dades simulades que, d'una banda, corresponen a un model habitual, i de l'altra, s'assemblen força a les dades reals. Més concretament, a la figura 4 b) hi ha unes dades simulades a partir d'un procés estocàstic, anomenat *moviment brownià geomètric*, definit per

$$X_t = X_0 \exp\{\mu t + \sigma B_t\}, \quad (13)$$

on $\{B_t, t \geq 0\}$ és un moviment brownià estàndard. Els valors de μ i σ han estat estimats a partir de les dades de l'IBEX 35; malgrat les aparences, l'ajust del model a les dades no és bo i no resisteix l'anàlisi de residus més senzilla; de fet (que nosaltres sapiguem), no hi ha models teòrics satisfactoris del comportament de l'IBEX 35 que cobreixin els quasi vint anys de dades, però per a il·lustrar les idees de Mandelbrot en tindrem prou. La semblança entre les dades reals i les dades simulades és força notable. Si traguéssim els rètols, algú podria distingir quines són les dades reals? Mandelbrot sí que podria.

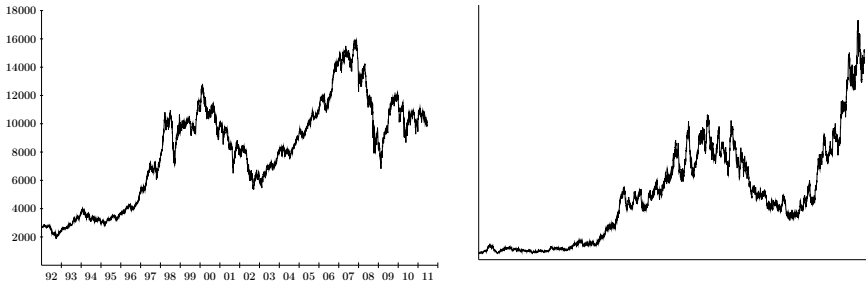
Habitualment les dades financeres no s'analitzen directament sinó que s'utilitzen els *log-retorns* dels preus: si $\{X_n, n = 1, \dots, T\}$ són els preus d'un actiu financer, s'anomenen *log-retorns* les quantitats

$$Y_n = \ln X_{n+1} - \ln X_n, \quad n = 1, \dots, T - 1$$

(on \ln denota el logaritme natural). Noteu que si les dades corresponen al moviment brownià geomètric (13) (mirat en temps discret, $t = 1, 2, \dots$), aleshores els *log-retorns* formen una successió de variables normals independents totes amb mitjana μ i desviació típica σ .

Des del punt de vista de la modelització, el motiu per a analitzar els *log-retorns* en lloc dels preus és el següent: sigui $a > 0$ i desenvolupem per Taylor la funció $\ln x$ en un entorn de a :

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x - a) + r(x),$$



a) Valor de tancament diari de l'IBEX 35 des de gener de 1992 al 30 de juny de 2011.

b) Dades simulades amb un brownià geomètric.

FIGURA 4: Gràfics amb dades reals i dades simulades: quin és quin?

on $r(x)$ és el terme complementari. Si negligim el terme complementari, tindrem

$$\ln x - \ln a \approx \frac{1}{a}(x - a).$$

Si ho apliquem a dos preus consecutius X_n i X_{n+1} , tindrem

$$\ln X_{n+1} - \ln X_n \approx \frac{X_{n+1} - X_n}{X_n}.$$

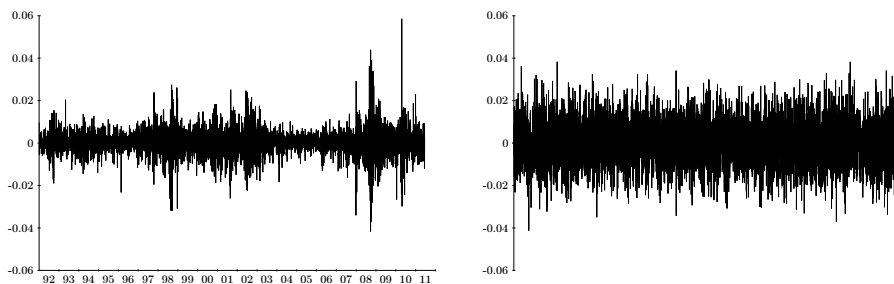
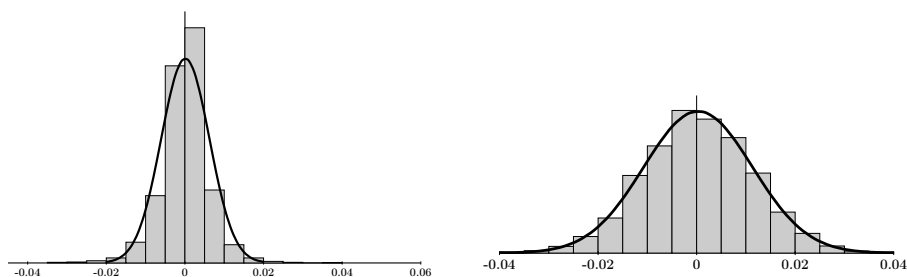
Per tant, els *log-retorns* són, aproximadament, els increments relatius dels preus. Empíricament es coneix que els increments relatius tenen propietats estadístiques millors que el preus originals.

A la figura 5 hi ha representats els *log-retorns* de les dades reals i de les simulades: ara ja no es veuen tan semblants. Així com les dades simulades tenen un aspecte molt més regular, a les dades reals hi ha períodes on els *log-retorns* varien poc, mentre que en d'altres varien molt. D'altra banda, a les dades reals hi ha molts valors que són notablement més grans que els altres.

Mirem els histogrames d'aquestes dades a la figura 6, amb una corba normal ajustada a la seva mitjana i variància. Òbviament, les dades simulades s'ajusten molt bé a la corba normal, però les dades reals semblen ser més punxegudes del que correspon a unes dades normals: es diu que tenen una *distribució leptocúrtica*. A més, si ampliem les cues de l'esquerra, veiem que les dades reals tenen moltes observacions per sota de $m - 3s$, on m és la mitjana mostral i s la desviació típica mostral.

Si la distribució de les dades fos normal de mitjana m i desviació típica s , aleshores la probabilitat d'observar valors menors que $m - 3s$ seria 0,00135. Llavors, atès que tenim 4904 dades, i

$$4904 \times 0,00135 = 6,62,$$

a) *Log-retorns* de l'IBEX 35.b) *Log-retorns* del brownià geomètric.FIGURA 5: *Log-retorns*.a) Histograma dels *log-retorns* de l'IBEX 35.b) Histograma dels *log-retorns* del brownià geomètric.FIGURA 6: Histogrammes dels *log-retorns*.

aproximadament 6 o 7 dades haurien de ser menors que $m - 3s$. Veiem a la figura 8 que aquest és el cas amb les dades simulades amb el moviment brownià geomètric. Al contrari, a les dades reals de l'IBEX 35, figura 9, hi ha 39 valors més petits que $m - 3s$, és a dir, aproximadament 5 vegades més del que és raonable. Cadascun d'aquests valors extrems representa una caiguda important. Encara més, si mirem les dades per sota de $m - 4s$, segons el model normal tenen una probabilitat de 0,00003. És a dir, caldria esperar-ne (de mitjana) una cada 130 anys, i n'hi ha hagut 13 durant els 20 anys de l'IBEX 35! Vegeu a la figura 10 on estan localitzades temporalment les caigudes més importants de l'IBEX 35.

La conclusió és que caigudes molt fortes que, d'acord amb el model estàndard amb què es fan tots els càlculs, s'haurien de produir molt poc sovint, fins i tot, pràcticament mai, es produeixen molt sovint. No cal dir que cada cop que es produeix una d'aquestes caigudes molta gent perd molts diners, però altres espavilats n'hi guanyen molts.

Mandelbrot treu dues conclusions d'aquestes anàlisis:

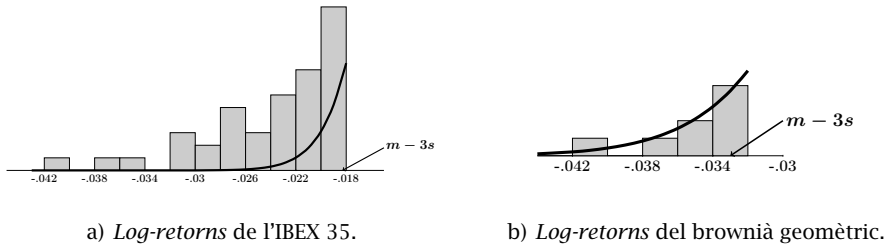


FIGURA 7: Ampliació de les cues de l'esquerra.

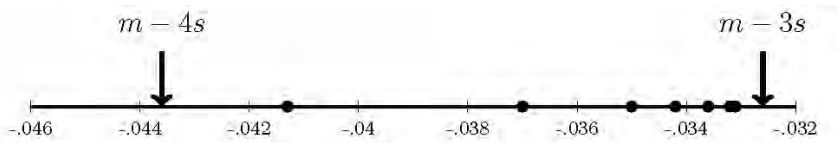


FIGURA 8: Valors extrems del brownià geomètric.

- 1) El model gaussià no és adient. Cal utilitzar un model amb una distribució de probabilitat que tingui les *cues més pesades*⁷ que la gaussiana, i que, per tant, doni més probabilitat als extrems de la distribució.
- 2) És insostenible que el model (teòric) tingui trajectòries contínues, i cal un model que incorpori salts.

La propietat d'invariància per canvis d'escala

Com hem dit abans, un dels conjunts de dades que més intensament va analitzar Mandelbrot va ser el dels preus del cotó. Reproduïm a la figura 11 un dels seus gràfics, al qual tenia molta estimació. Es tracta d'un gràfic en escala logarítmica en els dos eixos, on es dibuixen les cues de l'esquerra indicades per a^- , b^- i c^- , i les cues de la dreta (respectivament a^+ , b^+ i c^+) de les sèries següents:

- La sèrie a està formada pels *log-retorns* a un dia,

$$\ln X_{n+1 \text{ dia}} - \ln X_n,$$

on X_n és el preu de tancament diari a la llotja de cotó de Nova York durant el període 1900-1905.

⁷ Per a una variable aleatòria X , les funcions $c_+(x) = P\{X > x\}$ i $c_-(x) = P\{X < -x\}$, per a x gran, s'anomenen les *cues* de la distribució. Es té que $\lim_{x \rightarrow +\infty} c_{\pm}(x) = 0$. L'expressió *distribució amb cues més pesades que la gaussiana*, o, simplement, *amb cues pesades*, vol dir que les funcions $c_{\pm}(x)$ de la distribució en qüestió van a 0 més lentament que les corresponents de la gaussiana. Vegeu la definició 12.

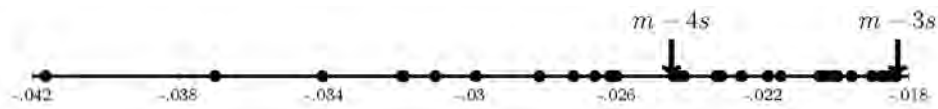


FIGURA 9: Valors extrems en l'IBEX 35.

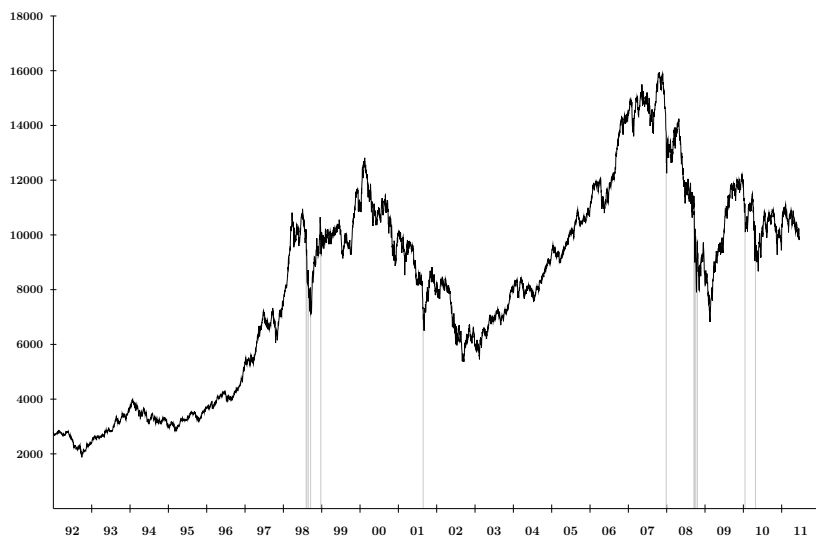


FIGURA 10: Caigudes extremes de l'IBEX 35.

- La sèrie b correspon també als *log-retorns* a un dia, però amb preus de tancament diari en distintes llotges dels Estats Units durant el període 1944-1958.
- La sèrie c està formada pels *log-retorns* a un mes,

$$\ln X_{n+1 \text{ mes}} - \ln X_n,$$

però ara X_n és el preu de tancament el dia 15 de cada mes a la llotja de cotó de Nova York durant el període 1880-1940.

Finalment, la línia contínua correspon a la cua de la dreta (o de l'esquerra) de la funció de densitat d'una variable aleatòria estable amb paràmetre $\alpha = 1,7$ (vegeu més avall).

Aquest gràfic suggereix que les sèries tenen una propietat d'invariància per canvi d'escala (autosimilitud) que, tal com veurem, està relacionada amb les lleis estables i els processos de Lévy.

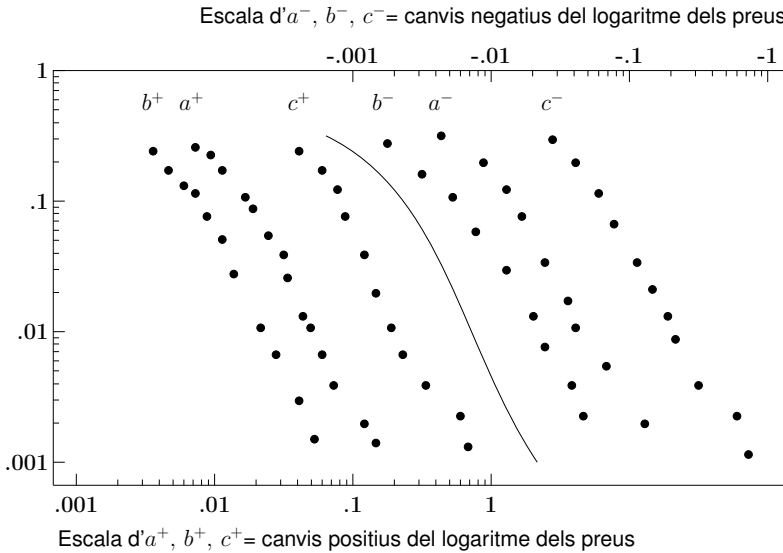


FIGURA 11: Cues dels preus del cotó i densitat de la llei estable amb $\alpha = 1,7$.

Les lleis estables

Una propietat important de les lleis gaussianes és llur estabilitat per sumes: la suma de dues lleis normals independents dóna una llei normal. Més generalment, tenim la propietat següent: si X_1 i X_2 són dues lleis normals $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ independents i $a, b \in \mathbb{R}$, aleshores

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} \mathcal{N}((a + b)\mu, (a^2 + b^2)\sigma^2)$$

(la notació $\stackrel{d}{=}$ vol dir igualtat en distribució o llei). Si prenem ara una altra variable $X \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, i posem

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{i} \quad g = (a + b - h)\mu,$$

llavors també

$$hX + g \stackrel{d}{=} \mathcal{N}((a + b)\mu, (a^2 + b^2)\sigma^2),$$

d'on resulta

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} hX + g.$$

Aquesta propietat dóna lloc a la definició de llei *estable*:

DEFINICIÓ 9. Direm que una variable X és *estable* si donades dues variables X_1 i X_2 independents, ambdues amb la mateixa llei que X , tenim que per a qualssevol $a, b \in \mathbb{R}$, existeixen $h, g \in \mathbb{R}$ tals que

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} hX + g.$$

Quan la relació anterior es compleix amb $g = 0$ per a qualssevol $a, b \in \mathbb{R}$, aleshores es diu que X és *estrictament estable*.

Vegeu [27] per a una altra caracterització de les lleis estables.

Ara cal citar el genial matemàtic francès Paul Lévy (1886–1971), que és un dels més grans probabilistes del segle XX i que juntament amb Kolmogorov és considerat un dels fundadors de la teoria de la probabilitat moderna. Mandelbrot va ser alumne de Lévy a l'Escola Politècnica, i, tal com comenten Jarque i Fagella [8], hi ha una certa polèmica sobre si Lévy va ser o no el director de la tesi doctoral de Mandelbrot. Retornant a les lleis estables, Lévy va assistir a una xerrada on el conferenciant va dir que l'única llei estable era la gaussiana (vegeu [27]); pensant-hi detingudament va veure que no era veritat, i llavors va trobar i caracteritzar totes les lleis estables. En general, la funció de densitat no es pot donar de forma explícita, però sí que és coneguda la seva funció característica, que depèn de quatre paràmetres: concretament, Lévy va provar que una variable aleatòria X és estable si i només si la seva funció característica

$$\varphi(u) := E(e^{iuX}), \quad u \in \mathbb{R},$$

és de la forma

$$\varphi(u) = \exp \left\{ -\gamma^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sign} u \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\delta u \right\}, \quad \text{quan } \alpha \neq 1,$$

o bé

$$\varphi(u) = \exp \left\{ -\gamma |u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign} u \log |u|\right) + i\delta u \right\}, \quad \text{quan } \alpha = 1,$$

on $\alpha \in (0, 2]$, $\gamma \geq 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, i $\beta \in [-1, 1]$. Aquí γ és un paràmetre d'escala, δ és un paràmetre de posició, α determina la forma de la densitat i s'anomena *paràmetre d'estabilitat*, i β determina la seva asimetria. Quan $\alpha = 2$, aleshores es tracta d'una llei normal amb esperança δ i variància $2\gamma^2$. El paràmetre α també determina els moments de la variable. Així, per a $\alpha \in (0, 2)$ (quan $\alpha = 2$ estem en el cas gaussià del qual no cal dir res) tenim

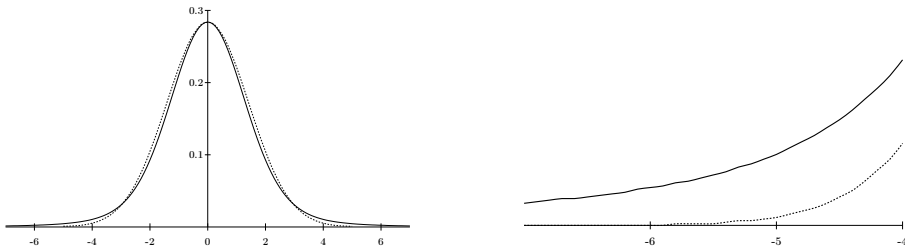
$$\begin{aligned} E(|X|^p) &< +\infty && \text{per a qualsevol } p \in (0, \alpha), \\ E(|X|^p) &= +\infty && \text{per a } p \geq \alpha. \end{aligned}$$

En particular, per a $\alpha \in (0, 2)$, $E(X^2) = +\infty$. També es demostra, per a $\alpha \in (0, 2)$, que les cues de la distribució compleixen, per a $x \rightarrow +\infty$,

$$c_+(x) = P\{X > x\} \sim Cx^{-\alpha} \quad \text{i} \quad c_-(x) = P\{X < -x\} \sim C'x^{-\alpha},$$

és a dir, una llei estable (amb $\alpha \in (0, 2)$) té cues pesades d'acord amb la definició 12.

Basant-se en la figura 11 i els seus càlculs, Mandelbrot va raonar que per a modelitzar les dades del cotó calia utilitzar una llei estable amb $\alpha = 1,7$. El fet que llavors $E[X^2] = +\infty$ quadrava amb els càlculs de la variància mostral, que a mesura que prenia més dades semblava créixer indefinidament. A la figura 12 hi ha representades la densitat de la llei estable de paràmetre $\alpha = 1,7$ comparada amb la densitat d'una llei normal que talla l'eix d'ordenades al mateix punt. Noteu que semblen pràcticament iguals, però les cues de la llei estable són més pesades que les de la normal i, per tant, els valors grans són més probables, i a més fan que la variància sigui infinita.



a) Línia contínua: densitat de la llei estable.
Línia discontinua: densitat d'una llei normal.

b) Ampliació de les cues de l'esquerra.

FIGURA 12: Comparació de les densitats de la llei estable de paràmetres $\alpha = 1,7$; $\beta = 0$; $\gamma = 0$; $\delta = 0$, i la d'una llei normal que talla l'eix d'ordenades al mateix punt.

Processos de Lévy

Un procés estocàstic $\{X_t, t \geq 0\}$ es diu que és un *procés de Lévy* si

- 1) $X_0 = 0$.
- 2) Té increments independents: per a qualssevol $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables

$$X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

són independents.

- 3) Els increments són estacionaris: per a qualssevol $t, h > 0$,

$$X_{t+h} - X_h \stackrel{d}{=} X_t - X_0.$$

- 4) El procés té trajectòries que en tot punt són contínues per la dreta i tenen límit per l'esquerra.

Els exemples més importants de processos de Lévy són el moviment brownià estàndard i el procés de Poisson. Cal remarcar que, excepte el moviment brownià, tots els processos de Lévy tenen trajectòries amb discontinuïtats, que era una de les característiques dels models que Mandelbrot cercava.

Es demostra que existeix un procés de Lévy tal que la distribució de la variable X_1 és estable (resp. estrictament estable). En aquest cas es diu que tenim un *procés de Lévy estable* (resp. *procés de Lévy estrictament estable*). Un procés de Lévy estrictament estable és autosimilar amb índex $H = 1/\alpha$ segons la definició 3, i α és el paràmetre d'estabilitat de X_1 . De fet, el recíproc d'aquesta propietat també és cert, i tenim que un procés de Lévy és autosimilar si i només si és estrictament estable (vegeu [27]).

Per tant, un procés de Lévy estrictament estable tenia alhora la propietat d'invariància per canvis d'escala (autosimilitud), les cues pesades amb variància infinita, i els salts. Aquest va ser el model proposat per Mandelbrot per als preus del cotó: un procés de Lévy estrictament estable amb $\alpha = 1,7$.

Val a dir que Mandelbrot va analitzar moltes altres dades financeres i econòmiques, i que va proposar altres models d'acord amb les característiques específiques de les dades; en particular va utilitzar processos en què les variables tinguessin lleis de potència. També va utilitzar el moviment brownià fraccionari per a certes sèries en les quals observava memòria llarga. El lector interessat pot consultar [18, 19, 20].

4 Mandelbrot i l'enginyeria del teletrànsit

En l'article seminal de Leland, Taqqu, Willinger i Wilson de l'any 1993 [10] s'estableixen les bases per tal de considerar l'autosimilitud com la característica més important del teletrànsit per a l'enteniment de la natura de la seva dinàmica, de cara a la modelització i a l'estudi del comportament de les xarxes de telecomunicacions. A partir d'aquest article han sorgit un gran nombre de treballs d'investigació sobre la polifacètica natura d'aquest fenomen, fenomen que és una nova concreció de la visió de Benoît Mandelbrot d'un ordre en els sistemes físics, socials i d'enginyeria caracteritzats pel fet de mantenir alguna propietat sota canvi d'escala i que es formalitza amb una llei de potència.

Encara que Mandelbrot no va treballar directament en la modelització del teletrànsit, és ben cert que ha tingut una influència decisiva en aquest camp. En primer lloc, perquè alguns dels conceptes que havia introduït en relació amb la lingüística, la hidrologia i els models econòmics també hi són aplicables i, encara més, resulten ser fonamentals en la comprensió del fenomen que representa el teletrànsit. Aquests conceptes són *l'efecte Josep*, *l'efecte Noè* i *l'autosimilitud*. En segon lloc, perquè en l'article conjunt amb James Wallis de l'any 1969 [22], va proposar un model econòmic en el qual es basa el model estructural de fonts On/Off introduït l'any 1997 a [30], que és un dels models més utilitzats actualment pel teletrànsit. I, finalment, perquè en l'article conjunt amb Van Ness del 1968 [21], tal com hem comentat en la secció 2, va començar l'estudi del procés de moviment brownià fraccionari i va emfasitzar

la seva adequació com a model de diferents fenòmens naturals que presenten «memòria llarga». Un d'aquests fenòmens és el del teletrànsit (fenomen potser no natural però que sí que presenta «memòria llarga»), com queda patent quan Taqqu i els seus col·laboradors demostren que quan es treballa amb el model de fonts On/Off, és precisament el moviment brownià fraccionari el procés límit al qual tendeix la «càrrega de treball acumulada» associada a la xarxa de telecomunicacions, convenientment normalitzada. A continuació explicarem això amb una mica de detall.

Efecte Josep i efecte Noè

Aquestes dues expressions, actualment molt utilitzades en l'àmbit de l'enginyeria, van ser introduïdes per Mandelbrot i Wallis quan les van fer servir per primera vegada a [22], article dedicat a Harold Edwin Hurst, on es presentava el procés de moviment brownià fraccionari com a model «autosimilar» adequat en hidrologia, tal com hem comentat en la secció 2.

Mandelbrot i Wallis proposen el terme *efecte Noè* per a l'observació de precipitacions molt extremes a partir del fragment següent del llibre del Gènesi que descriu el diluvi universal (Gènesi: 7, 11-12):

«[...] Noè tenia sis-cents anys quan van sobreixir les aigües abismals del gran oceà i s'obriren les rescloses del cel. Era el dia disset del mes segon. Sobre la terra començà a caure un aigua que durà quaranta dies i quaranta nits.»

També proposen el terme *efecte Josep* pel fet de trobar períodes molt llargs de precipitacions inusualment grans o inusualment petites a partir de l'episodi bíblic de la interpretació que fa Josep del somni del faraó d'Egipte sobre les set vaques grasses i les set vaques magres (Gènesi: 41, 29-30):

«[...] Els set anys vinents seran d'una gran abundància en tot Egipte. Després seguiran set anys de fam que esborraran a Egipte el record de l'abundància dels set anys precedents, perquè la fam consumirà tot el país.»

Aquests efectes no només s'observen en l'àmbit de la hidrologia, en el qual van ser batejats, sinó també en economia i enginyeria, en què les dades obtingudes acostumen a suggerir la presència de fortes correlacions en el temps. La *persistència*, com també s'anomena de vegades l'efecte Josep que acabem de descriure, s'explica intuïtivament per una tendència natural de les observacions en el temps a agrupar-se formant «clústers», cosa que succeeix en molts sistemes físics o d'enginyeria. És a dir, les dades mostren fluctuacions per sobre o per sota d'un nivell donat durant llargs períodes de temps, molt més sovint del que passaria en el cas que fossin independents.

Des d'un punt de vista matemàtic, la *persistència* o *efecte Josep* (també anomenat *síndrome H-espectre* en l'article [17] en relació amb les observacions econòmiques que mostren cicles) es descriu pel terme *dependència a llarg termini* o *memòria llarga* de la manera següent: considerem un procés estocàstic $Y. = \{Y_t, t \geq 0\}$ que representa les observacions que tenim del nostre sistema físic o d'enginyeria, en funció del temps.

DEFINICIÓ 10. Si Y . és un procés amb increments estacionaris i tal que les variables del procés tenen totes la mateixa esperança i tenen variància finita (no necessàriament la mateixa), direm que Y . té *memòria llarga* si es compleix que la funció d'autocovariàncies dels increments

$$\rho(\ell) = \text{Cov}(Y_{k+1} - Y_k, Y_{k+\ell+1} - Y_{k+\ell}) = E((Y_{k+1} - Y_k)(Y_{k+\ell+1} - Y_{k+\ell}))$$

(que no depèn de k) es comporta com $\ell^{-\gamma} L(\ell)$ quan $\ell \rightarrow +\infty$, amb $0 < \gamma < 1$ i L una funció de *variació lenta* a l'infinit.⁸ (Observem com el concepte de *memòria llarga* es formalitza amb una llei de potència.)

Per tant, com que $\ell^{-\gamma} L(\ell) > 0$, si Y . té memòria llarga, els seus increments tendeixen a tenir el mateix signe, i llavors les trajectòries del procés poden ser irregulars però no gaire (ho són menys que si la covariància fos ≤ 0).

NOTA. Observem que la sèrie $\sum_{\ell \geq 1} \rho(\ell)$ divergeix, i és aquesta divergència que captura la intuïció que hi ha darrere de la «memòria llarga»: encara que les autocovariàncies $\rho(\ell)$ amb ℓ gran (és a dir, en un interval llarg) siguin petites individualment considerades, el seu efecte acumulat resulta ser prou important i dóna lloc a un comportament marcadament diferent del que tenen els processos amb *memòria curta*, per als quals aquesta sèrie és convergent.

Autosimilitud i memòria llarga

Quina relació hi ha entre l'*autosimilitud* o *fractalitat* d'un procés, introduïda a la definició 3, i la *memòria llarga*? Hi ha processos autosimilars que no tenen memòria llarga, com és el cas del procés de moviment brownià, que és autosimilar amb paràmetre de Hurst $H = 1/2$, però no té memòria llarga, ja que els seus increments són independents (tenen autocovariància zero). En canvi, tot procés autosimilar amb paràmetre $H > 1/2$ i variància finita ha de tenir necessàriament memòria llarga, com veurem a la proposició següent.

PROPOSICIÓ 11. Si $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$ és un procés autosimilar d'índex $H \in (1/2, 1)$, amb increments estacionaris i totes les variables del procés tenen variància finita, llavors Y . té memòria llarga amb $\gamma = 2(1 - H)$ i L constant i igual a $\sigma^2 H(2H - 1)$, amb $\sigma^2 = E(Y_1^2)$.

PROVA. En primer lloc, no és difícil veure que per ser Y . un procés autosimilar d'índex $H \in (0, 1)$, amb increments estacionaris i tal que totes les variables del procés tenen variància finita, es compleix el següent (vegeu la proposició 9 de [5]):

a) $Y_0 = 0$.

b) El procés és centrat, és a dir, $E(Y_t) = 0$ per a tot $t \geq 0$.

⁸ Una funció L es diu que és de *variació lenta* a l'infinit si és acotada en cada interval finit, i per a tot $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1$. Les constants i els logaritmes en són exemples.

c) $E(Y_t^2) = t^{2H} \sigma^2$, si $\sigma^2 = E(Y_1^2)$.

d) La funció de covariàncies del procés Y . és:

$$\text{Cov}(Y_s, Y_t) = E(Y_t Y_s) = \frac{\sigma^2}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad (14)$$

per a tots $s, t \geq 0$.

Ara podem considerar la covariància entre dos increments del procés Y . en intervals $(s_1, s_2]$ i $(t_1, t_2]$ qualssevol, que per (14) serà

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_{t_2} - Y_{t_1}, Y_{s_2} - Y_{s_1}) &= E((Y_{t_2} - Y_{t_1})(Y_{s_2} - Y_{s_1})) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} (-|t_2 - s_2|^{2H} + |t_2 - s_1|^{2H} + |t_1 - s_2|^{2H} - |t_1 - s_1|^{2H}). \end{aligned} \quad (15)$$

Com a conseqüència, la funció d'autocovariàncies dels increments de Y . és

$$\rho(\ell) = E((Y_{k+1} - Y_k)(Y_{k+\ell+1} - Y_{k+\ell})) = \frac{\sigma^2}{2} ((\ell + 1)^{2H} + (\ell - 1)^{2H} - 2\ell^{2H}),$$

fent servir (15) amb els intervals $(k, k + 1]$ i $(k + \ell, k + \ell + 1]$, i tenim que

$$\rho(\ell) \begin{cases} < 0 & \text{si } 0 < H < 1/2, \\ = 0 & \text{si } H = 1/2, \\ > 0 & \text{si } 1/2 < H < 1. \end{cases}$$

Més concretament, si $H \neq 1/2$,

$$\rho(\ell) = \frac{\sigma^2}{2} \ell^{2(H-1)} \underbrace{\left(\ell^2 \left(\left(1 + \frac{1}{\ell}\right)^{2H} + \left(1 - \frac{1}{\ell}\right)^{2H} - 2 \right) \right)}_{\text{tendeix a } 2H(2H-1) \text{ quan } \ell \rightarrow +\infty}$$

i, per tant, $\rho(\ell)$ es comporta com $\sigma^2 H (2H - 1) \ell^{-2(1-H)}$ quan $\ell \rightarrow +\infty$. Hem vist que $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \rho(\ell) = 0$ com una potència, però quan $1/2 < H < 1$ ho fa tan lentament com $\ell^{-\gamma} L(\ell)$ amb $\gamma = 2(1 - H) \in (0, 1)$ i $L \equiv \sigma^2 H (2H - 1)$. Per tant, el procés Y . té «memòria llarga», segons la definició 10. \square

NOTA. En particular, aquest resultat s'aplica per al cas del procés de moviment brownià fraccionari d'índex $H \in (1/2, 1)$.

Les «cues pesades»

DEFINICIÓ 12. Es diu que una variable aleatòria X té una llei amb *cues pesades* quan per a x gran, $c_+(x) = P(X > x)$ i $c_-(x) = P(X < -x)$ (les cues) se'n van cap a zero més lentament que l'exponencial (que correspon a les cues de la gaussiana); concretament, quan se'n van cap a zero a la velocitat d'una potència. Formalment, X (o la seva llei) té *cues pesades a la dreta* (respectivament, a

l'esquerra) si existeix una funció de variació lenta a l'infinit $L(x) > 0$ tal que quan $x \rightarrow +\infty$,

$c_+(x)$ (respectivament, $c_-(x)$) es comporta com $x^{-\alpha}L(x)$, amb $\alpha \in (0, 2)$.

Notem que en aquesta definició torna a aparèixer una *lleï de potència*, i que la lleï de Pareto n'és un exemple.

Si X té *cues pesades*, llavors ha de tenir necessàriament variància infinita (pot fluctuar molt i prendre valors molt allunyats del seu valor mitjà o esperança). L'esperança també és infinita en el cas particular $\alpha \leq 1$. És a aquest fenomen que Mandelbrot es refereix com a *efecte Noè* o també com a *síndrome de la variància infinita*.

El anys 1993 i 1994 van aparèixer els primers treballs ([10], [11]) on es donaven evidències del caràcter *fractal* o *autosimilar*, a més de mostrar la presència de l'*efecte Josep* (memòria llarga), en el trànsit de dades a través d'Internet. En aquell moment no es comprenia el motiu de la presència d'aquest fenomen tan sorprenent, l'autosimilitud, però sí que es va pensar que havia d'estar relacionada amb les «cues pesades». I, en efecte, quan es van començar a buscar, les «cues pesades» van començar a aparèixer: al temps de CPU consumit per diferents processos, a les mides dels fitxers, al temps entre pulsacions a un teclat d'ordinador, a les durades dels períodes d'activitat elevada i dels períodes de descans de les connexions individuals a Internet, etc. Per exemple, a [3] s'estableix que la lleï que modelitza les mides dels fitxers disponibles a un servidor té «cues pesades» i, com a conseqüència, la lleï dels seus temps de transmissió també complirà la mateixa propietat.

Per tant, sembla que hi ha una relació entre el fet que alguns descriptors, com ara la mida o durada de les connexions d'una xarxa de comunicació, tinguin «cues pesades» i l'autosimilitud del trànsit de dades a través seu. Però aquesta constatació no és suficient, és necessari trobar una explicació de per què el fet que hi hagi certs elements amb «cues pesades» indueix autosimilitud al teletrànsit. Aquesta explicació ens la dóna el model de fonts On/Off que explicarem a continuació.

El model de fonts On/Off

Ara presentem un model *estructural* simple i intuïtiu que permet la simulació i que captura l'autosimilitud i la «memòria llarga» observades al trànsit d'informació a través d'Internet. És estructural perquè, a diferència del que succeeix amb els models de tipus «caixa negra», explica les característiques de les dades obtingudes utilitzant el coneixement del qual es disposa sobre el trànsit a través de la xarxa, és a dir, sobre la seva estructura, com per exemple el fet que aquest trànsit és el resultat de la superposició d'un gran nombre de fonts que comparteixen els recursos (les sessions dels usuaris individuals).

Aquest model va ser introduït per primera vegada pels investigadors W. Willinger, M. S. Taqqu i els seus col·laboradors l'any 1997 en l'article [32], on van desenvolupar, tal com hem dit abans, una aproximació suggerida originalment

per Mandelbrot el 1969 a [17] en un context d'economia, i que havia estat donada a conèixer als probabilistes per Taqqu i Levy l'any 1986 ([29]). La importància d'aquest model radica en el fet que ha estat el primer a donar una explicació física plausible del fenomen de l'autosimilitud de les mesures obtingudes del trànsit de dades a través d'una xarxa de telecomunicacions, i en el fet que és la base de molta de la investigació més recent relacionada amb la modelització física del teletrànsit. El model de fonts On/Off explica el trànsit per la superposició de moltes fonts que poden estar o bé On (enviant dades de manera constant) o bé Off (no enviant res) i que alternen tots dos estats estrictament, amb les longituds dels períodes On totes amb la mateixa llei de probabilitat i les longituds dels períodes Off també amb la mateixa llei (no necessàriament la mateixa que els On), totes independents entre si i amb «cues pesades» (*efecte Noè*). En aquest escenari es demostra que el trànsit agregat (acumulat) convergeix cap a un procés de moviment brownià fraccionari d'índex $H \in (1/2, 1)$, en el sentit de la convergència de les distribucions en dimensió finita. El procés límit resulta ser, doncs, un procés autosimilar i amb memòria llarga, justament les dues característiques principals del teletrànsit que preteníem modelitzar. Aquest tipus de fonts es coneix com a *packet trains* en anglès. L'article [32] presenta anàlisis estadístiques molt completes que avalen la presència de cues pesades a les mesures de trànsit obtingudes en una xarxa.

Aquest resultat cabdal des del punt de vista de la modelització, que s'enunciava sense demostració a [32], va ser demostrat pels mateixos investigadors el mateix any a [30]. Com escriuen a la seva introducció, l'*efecte Noè* («cues pesades») queda identificat com el punt clau en la construcció dels nous models per al trànsit autosimilar (com el de dades a través de les xarxes de telecomunicacions), alternatius als models tradicionals basats en el procés de Poisson. A més, el seu resultat relaciona el paràmetre que descriu la intensitat de les «cues pesades» dels períodes On i Off de les fonts amb l'índex d'autosimilitud H del trànsit agregat (en el límit) que, com hem dit, resultarà ser $> 1/2$ i, per tant, correspon a un procés que a més de ser autosimilar té memòria llarga.

Concretament, el model suposa que a un determinat servidor arriba la informació provinent de N fonts diferents (independents i del mateix tipus). Cada font pot estar activada (On, i en aquest cas envia informació en forma de «paquets» amb un flux constant) o bé estar desactivada (Off). Podem definir, per a cada instant de temps $t \geq 0$ i per a cada font $n = 1, \dots, N$, les variables aleatòries

$$U_t^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{si la font } n \text{ a l'instant } t \text{ és On} \\ 0 & \text{si la font } n \text{ a l'instant } t \text{ és Off,} \end{cases}$$

que en variar $n = 1, \dots, N$ són totes independents i amb la mateixa llei. Suposem que, per a cada font, els períodes de temps On i Off s'alternen estrictament, formant cicles On-Off, i que les longituds dels períodes On tenen totes la mateixa llei i les longituds dels períodes Off també tenen totes la mateixa llei, totes independents entre si. Sigui X_1 una variable aleatòria amb la llei de la longitud

d'un període On, i X_2 el mateix amb un període Off. Notem que tant X_1 com X_2 són variables aleatòries que només prenen amb probabilitat positiva valors no negatius. Suposem que les lleis de probabilitat de les longituds dels períodes On i Off tenen «cues pesades» a la dreta; concretament, assumim que quan $x \rightarrow +\infty$,

$$P(X_1 > x) \sim x^{-\alpha_1} L_1(x) \quad \text{i} \quad P(X_2 > x) \sim x^{-\alpha_2} L_2(x),$$

amb $1 < \alpha_1, \alpha_2 < 2$, L_1 i L_2 funcions de variació lenta a l'infinít.⁹ Llavors, les corresponents esperances són finites, però no ho són les variàncies.

Considerem la suma $\sum_{n=1}^N U_u^{(n)}$, que és el nombre de fonts que estan On a l'instant de temps u . Llavors,

$$A_t^N = \int_0^t \left(\sum_{n=1}^N U_u^{(n)} \right) du$$

és la suma del temps que les fonts han estat On a l'interval $[0, t]$. El nombre de paquets arribats a l'interval $[0, t]$ és proporcional a A_t^N , i és per això que fent un abús de llenguatge es diu que A_t^N és la quantitat acumulada o agregada de paquets arribats al servidor des de l'instant 0 fins a l'instant t o *càrrega acumulada*. A [30] es demostra que, normalitzant convenientment, A^N convergeix, quan $N \rightarrow +\infty$, a un procés de moviment brownià fraccionari, en el sentit de la convergència de les distribucions en dimensió finita. L'índex de Hurst d'aquest procés de moviment brownià fraccionari és

$$H = \frac{3 - \min(\alpha_1, \alpha_2)}{2}.$$

Aquesta és la relació entre un paràmetre que descriu la intensitat de les «cues pesades» amb variància infinita dels períodes On/Off, que és $\min(\alpha_1, \alpha_2)$, d'una part, i l'índex de Hurst H que mesura el grau d'autosimilitud del trànsit agregat, de l'altra. Com que $\alpha_1, \alpha_2 \in (1, 2)$, tenim que $H \in (1/2, 1)$ i, per tant, per la proposició 11, el procés límit té memòria llarga amb

$$y = \min(\alpha_1, \alpha_2) - 1 \in (0, 1).$$

Per a veure més detalls sobre aquest resultat límit s'adreça el lector a l'article [5].

5 Conclusió

Tot va començar cap a l'any 1950, quan el jove Mandelbrot va descobrir casualment les *lleis de potència* i la seva utilitat en el camp de la lingüística. Allò el va portar al terme *fractal*. No va ser el primer a introduir-lo, encara que ha passat

⁹ Aquests funcions de variació lenta a l'infinít han de satisfer la restricció tècnica següent: si $\alpha_1 = \alpha_2$, ha d'existir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L_1(x)}{L_2(x)} \in (0, +\infty)$.

a la història com a seu. Aquest concepte es refereix a tots aquells objectes que es caracteritzen perquè són invariants per canvi d'escala, és a dir, són tals que hi ha una llei de potència que relaciona la seva longitud en dues unitats de mesura diferents.

Mandelbrot va desenvolupar la *geometria fractal* entorn del concepte de *fractal*, i el va aplicar en camps molt diversos, entre els quals aquí hem comentat la hidrologia i les finances a tall d'exemple. N'hi ha molts més als quals també es pot aplicar, com és el cas de l'enginyeria del teletrànsit, que també hem comentat. De fet, és un concepte d'aplicació tan àmplia que quasi el podríem qualificar d'*universal*. En el context dels models aleatoris per a observacions que evolucionen en el temps (els processos estocàstics), el concepte de *fractal* es concreta en forma d'una propietat, l'*autosimilitud*. El més important de tots els processos estocàstics autosimilars és el *moviment brownià fraccionari*, que Mandelbrot va donar a conèixer al món en l'article amb Van Ness de 1968.

La importància del procés de moviment brownià fraccionari d'índex $H \in (0, 1)$ en modelització es fonamenta en tres característiques d'aquest procés:

- a) és autosimilar,
- b) té memòria llarga (*efecte Josep*) quan $H \in (1/2, 1)$, i
- c) té trajectòries contínues,

que són fonamentals en la modelització de les dades hidrològiques analitzades per Hurst, i també en la de les dades relatives al teletrànsit proporcionades per Taqqu i els seus col·laboradors.

Però també hi ha models aleatoris, els *processos de Lévy estrictament estables*, que són autosimilars però que no tenen memòria llarga, sinó que els seus increments són independents. Aquests processos han tingut un gran èxit en la modelització de les dades financeres. Les tres característiques fonamentals d'un procés de Lévy estrictament estable quant a la modelització són:

- a) és autosimilar,
- b) té cues pesades (*efecte Noè o síndrome de la variància infinita*), i
- c) té trajectòries amb salts.

De fet, hem vist a la proposició 11 que tot procés autosimilar d'índex $H \in (1/2, 1)$ (i amb increments estacionaris, com són el moviment brownià fraccionari d'índex H o els processos de Lévy estrictament estables amb paràmetre d'estabilitat $\alpha = 1/H \in (1, 2)$), si té variància finita, necessàriament ha de tenir memòria llarga (és el cas del moviment brownià fraccionari). Per tant, si tenim un procés autosimilar que no té memòria llarga, necessàriament ha de tenir variància infinita (és el cas dels processos de Lévy estrictament estables).

Però és que, a més, els tres conceptes introduïts (*autosimilitud*, *memòria llarga* i *cues pesades*) es relacionen entre si en l'àmbit de l'enginyeria del teletrànsit. En efecte, el teletrànsit mostra caràcter autosimilar i memòria llarga, però alguns descriptors de les xarxes de telecomunicacions, com són la mida o durada de les connexions, tenen cues pesades. És més, el model de

fonts On/Off per a les dades observades del teletrànsit, basat en un model econòmic introduït per Mandelbrot, explica l'autosimilitud i la memòria llarga que mostren les dades a partir de suposar que hi ha un nombre gran de fonts tals que les longituds dels períodes que les fonts estan On (enviant dades de manera constant a la xarxa) i dels períodes que estan Off (no enviant res) tenen cues pesades. En aquest escenari, el trànsit acumulat de dades convergeix cap a un procés de moviment brownià fraccionari d'índex $H \in (1/2, 1)$, procés autosimilar i amb memòria llarga.

I potser no ens sorprendrem gaire, si creiem en l'harmonia de l'univers, en constatar que el concepte de *cues pesades* també s'expressa en termes d'una llei de potència, tancant d'aquesta manera el cercle que va començar el dia que Mandelbrot va tenir l'impuls de salvar de la paperera una ressenya del llibre de Zipf per llegir-la al metro.

Agraïments

Aquest treball ha estat subvencionat pel projecte de recerca del Ministeri de Ciència i Innovació i FEDER amb referència MTM2009-08869.

Referències

- [1] AUERBACH, F. «Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration». *Petermanns Geographische Mitteilungen*, 59 (1913), 74-76.
- [2] ADAMIC, L. A.; HUBERMAN, B. A. «Zipf's law and the Internet». *Glottometrics*, 3 (2002), 143-150.
- [3] CROVELLA, M. E.; BESTAVROS, A. «Self-similarity in World Wide Web traffic: evidence and possible causes». *IEEE/ACM Trans. Networking*, 5 (6) (1997), 835-846. 160-169.
- [4] CUNHA, C. R.; CROVELLA, M. E.; BESTAVROS, A. «Characteristics of WWW client-based traces». *Technical report of the Computer Science Department, Boston University*, (2010). <http://cs-www.bu.edu/faculty/crovella/paper-archive/TR-95-010/paper.html>.
- [5] DELGADO, R. «Matemàtiques i Internet: 101 anys de teoria de cues». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 25 (2) (2010), 109-144.
- [6] ESTOUP, J.-B. *Games sténographiques*. París: Institut Sténographique de France, 1916.
- [7] HURST, H. E. «Long-term storage capacity of reservoirs». *Trans. Amer. Soc. Civil Engineers*, 116 (1951), 770-808.
- [8] JARQUE, X.; FAGELLA, N. «B. B. Mandelbrot: científic i matemàtic». *Notícies de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 30 (2010), 20-23.
- [9] KOLMOGOROV, A. N. «Wiensche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen raum». *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 26 (1940), 115-118.

- [10] LELAND, W.; TAQQU, M.; WILLINGER, W.; WILSON, D. V. «On the self-similar nature of the Ethernet traffic». A: *Proceedings of SIGCOMM'93, San Francisco, California*, 1993, 183-193.
- [11] LELAND, W.; TAQQU, M.; WILLINGER, W.; WILSON, D. V. «On the self-similar nature of the Ethernet traffic (extended version)». *IEEE/ACM Trans. Networking*, 2 (1) (1994), 1-15.
- [12] MANDELBROT, B. B. «Adaptation d'un message à la ligne de transmission. I & II». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 232 (1951), 1638-1640, 2003-2005.
- [13] MANDELBROT, B. B. «Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication». Tesi doctoral. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 2 (1953), 1-124.
- [14] MANDELBROT, B. B. «An informational theory of the statistical structure of language». A: JACKSON, W. (ed.). *Symposium on Applications of Communications Theory*. Londres: Butterworth, 1953, 486-500.
- [15] MANDELBROT, B. B. «The variation of certain speculative prices». *The Journal of Business*, 36 (1963), 394-319.
- [16] MANDELBROT, B. B. «Une classe de processus stochastiques homothétiques a soi; application a loi climatologique de H. E. Hurst». *C. R. Acad. Sci. Paris*, 240 (1965), 3274-3277.
- [17] MANDELBROT, B. B. «Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variances». *International Economic Review*, 10 (1969), 82-113.
- [18] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. Nova York: W. H. Freeman and Co., 1982. [Traducció al castellà: *La geometría fractal de la naturaleza*. Barcelona: Tusquets, 1997]
- [19] MANDELBROT, B. B. *Fractals and scaling in finance*. Nova York: Springer, 1997.
- [20] MANDELBROT, B. B.; HUDSON, R. L. «Fractales y finanzas». Barcelona: Tusquets, 2004.
- [21] MANDELBROT, B. B.; VAN NESS, J. W. «Fractional Brownian motions, fractional noises and applications». *SIAM Review*, 10 (1968), 422-437.
- [22] MANDELBROT, B. B.; WALLIS, J. R. «Noah, Joseph, and operational hydrology». *Water Resources Research*, 4 (5) (1968), 909-918.
- [23] NEWMAN, M. E. J. «Power laws, Pareto distributions and Zipf's law». *Contemp. Phys.*, 46 (5) (2005), 323-351.
- [24] OMORI, F. «On the aftershocks of earthquakes». *J. Coll. Sci.*, 7 (111) (1895).
- [25] PARETO, V. «Cours d'économie politique». París: Rouge, 1897.
- [26] SHANNON, C. E. «A mathematical theory of communications». *Bell System Technical Journal*, 27 (3) (1948), 379-423, 623-656.
- [27] SOLÉ, J. L. «El món de les variables sense moments finits de tots els ordres: de la paradoxa de Sant Petersburg als processos de Lévy». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 27 (1) (2012), 63-113.

- [28] SORELL, C. J. «Zipf's law and vocabulary». *Preprint* (2011), disponible a http://vuw.academia.edu/JosephSorell/Papers/549885/Zipfs_Law_and_Vocabulary.
- [29] TAQQU, M. S.; LEVY, J. «Using renewal processes to generate long-range dependence and high variability». A: EBERLEIN, E.; TAQQU, M. S. (ed.). *Dependence in probability and statistics*. Birkhäuser, 1986.
- [30] TAQQU, M. S.; WILLINGER, W.; SHERMAN, R. «Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling». *Computer Communications Review*, 27 (2) (1997), 5-23.
- [31] WILLINGER, W.; TAQQU, M. S.; ERRAMILLI, A. «A bibliographical guide to self-similar traffic and performance modeling for modern high-speed networks». A: KELLY, F. P.; ZACHARY, S.; ZIEDINS, I. (ed.). *Stochastic networks: Theory and Applications*. Oxford: Oxford University Press, 1996. (Royal Statistical Society, Lecture Note Series, 4)
- [32] WILLINGER, W.; TAQQU, M. S.; SHERMAN, R.; WILSON, D. V. «Self-similarity through high-variability: statistical analysis of Ethernets LAN traffic at the source level». *IEEE/ACM Trans. Networking*, 5 (1) (1997), 71-86.
- [33] ZIPF, G. K. «Human behavior and the principle of least effort». Nova York: Hafner, 1949.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
EDIFICI C, CAMPUS DE LA UAB
08193 BELLATERRA (CERDANYOLA DEL VALLÈS)
{Rosario.Delgado,Maria.Jolis,Frederic.Utzet}@uab.cat