Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 25, núm. 1, 2010. Pàg. 43–80. DOI: 10.2436/20.2002.01.27

Presentació i anàlisi de la *Suma de la art de arismetica* de Francesc Santcliment

Primera part: Les aritmètiques comercials, llurs antecedents i rellevància, i les condicions socials i econòmiques del segle XV

Josep Pla i Carrera

> A Laor e gloria de deu i de la humil uerge Maria mare sua comença lo libre apellat Suma de la art de arismetica...
>
> **Francesc Santcliment**

Resum L'objectiu principal d'aquest article —que es publicarà al *Butlletí* en dues parts— és fer una anàlisi dels continguts de la *Suma de la art de arismetica* [46], una aritmètica comercial escrita en català i publicada a Barcelona l'any 1482 i de la qual la Biblioteca de Catalunya ha fet una edició facsímil. Aquest és, però, el contingut de la segona part de l'article. A la primera tractaré tres qüestions: què és una aritmètica comercial com la de Santcliment, quins són els antecedents històrics d'aquesta mena d'aritmètiques, i quina importància adquireixen en el context històric, cultural, social i econòmic en el qual es produeixen —finals del segle XV.

Paraules clau: història de la matemàtica del segle XV, aritmètiques comercials.

Classificació MSC2010: 01A40, 01A75.

1 Introducció

Entre els incunables de la Biblioteca de Catalunya s'hi troba la *Suma de la art de arismetica* [46] de Francesc Santcliment, de la qual la Biblioteca acaba de publicar una edició facsímil, molt acurada [48]. Aquesta edició l'havien d'haver realitzat l'any 2000 —en una col·laboració, molt desitjable— la Universitat de Barcelona i la Biblioteca de Catalunya.

De fet, la decisió que la Biblioteca de Catalunya i Edicions de la Universitat de Barcelona fessin una publicació, en edició facsímil, de la *Suma de la art de arismetica* de Francesc Santcliment es va prendre en ocasió de la celebració de l'Any Mundial de les Matemàtiques, declarat per la UNESCO. Amb aquesta decisió es volia realçar l'interès d'aquesta obra excepcional, tant des del punt de vista de la bibliografia i la bibliofília, com de la matemàtica aplicada.

La iniciativa de l'edició conjunta fou promoguda per l'aleshores rector de la Universitat de Barcelona, Antoni Caparrós (1938–2001), amb la col·laboració de les facultats d'econòmiques i matemàtiques, amb l'objectiu i voluntat de disposar d'un «detall matemàtic, en català» que servís com a senyal de reconeixement —i alhora constituís un recordatori— per a les personalitats que visitessin la Universitat de Barcelona durant l'Any Mundial de les Matemàtiques.

Però, malgrat l'acord inicial que s'havia pres entre les dues il·lustres corporacions públiques catalanes, les diferències en la concepció de l'edició del text varen impedir aquesta col·laboració. El motiu del conflicte era que, per a la Biblioteca de Catalunya, n'hi havia prou amb una presentació tècnica de tipus biblioteconòmic. La Universitat de Barcelona, en canvi, considerava imprescindible afegir-hi una presentació històrica del significat social i matemàtic del text i una anàlisi dels continguts de tipus tècnic. És, de fet, el que cal fer i el que s'acostuma a fer en aquesta mena d'edicions.

Finalment, tanmateix —i ens n'hem de congratular, malgrat la diferent concepció que tinguem de com s'havia d'haver executat el projecte—, la Biblioteca de Catalunya ha editat, amb molta elegància, un facsímil d'aquesta obra senyera de la matemàtica catalana, i espanyola, del segle XV.[1] S'acompanya —en un text separat— de la introducció que preconitzava la Biblioteca de Catalunya, molt acurada, fruit del pòsit dels anys que han transcorregut i de l'estudi rigorós.

Però, com ja vaig defensar —conjuntament amb en Joan Elias, aleshores degà de la Facultat de Matemàtiques— durant la discussió prèvia a l'edició fallida de l'any 2000, crec sincerament que hi manca l'altra introducció, de la qual ja havia fet un esborrany [40] l'any 1998.

Em sembla, doncs, molt adequat per coherència, i per a una millor comprensió del text, oferir ara aquesta presentació, tot desitjant que sigui ben acollida i que ajudi realment el lector del text de Santcliment a situar-lo en el context històric, social, econòmic, cultural i matemàtic que li pertoca i a poder seguir amb més facilitat els continguts matemàtics —d'altra banda, força simples— que conté.

2 Una reflexió sobre les aritmètiques més notables

No és la primera vegada que he analitzat aquesta obra —a la qual, en endavant, em referiré com l'*Arismetica* de Santcliment o, simplement, com l'*Arismetica*—, que ja té una bibliografia d'estudis nodrida i sòlida.[2] Ara, però, en aquesta

1 És, sense cap mena de dubte, el final d'un llarg procés i es deu a la decisió de na Joana Escobedo.

2 A més de l'estudi introductori de l'edició de la doctora Joana Escobedo [48], que, com ja he dit abans, destaca molt especialment l'interès bibliogràfic del llibre i la seva relació amb les cultures connexes de l'època, disposem dels treballs [19, 20, 25, 31, 32, 38, 47] i [40, p. 221–245]. Gairebé tots reflexionen també, a banda del contingut propi de l'*Arismetica*, sobre les possibles

primera part de l'article, i a manera de presentació general, voldria contribuir a destriar el fil històric remot i immediat al qual respon l'*Arismetica* i a destacar el relleu que prenien els textos comercials en aquella època. En canvi, remeto a la segona part (que serà publicada properament en aquest *Butlletí*) per a una anàlisi dels aspectes més concrets i específics de caire matemàtic de l'obra de Santcliment. Amb això, com ja he dit abans, pretenc facilitar la lectura i comprensió de l'obra.

D'antuvi, el que desitjo posar en relleu va, de fet, en la línia de les idees d'Antoni Malet i de Jaume Paradís:

> Fins a quin punt aquestes obres han influït en el desenvolupament de l'àlgebra? Hi ha algun lligam entre aquestes dues tècniques: l'algorísmia i l'àlgebra?
> [32, p. 11, 56–57 i 59–64]

No pretenc, en absolut, fer una anàlisi aprofundida d'aquesta qüestió, perquè ni és el lloc adequat ni el moment oportú. A més, no disposem, ara com ara, d'un estudi prou detallat i profund d'aquestes obres per poder-la dur a terme. Només vull fer unes reflexions que puguin ser útils per a estudis ulteriors i, àdhuc, per a treballs de recerca profunds i erudits.[3]

I, en segon lloc, vull contextualitzar els textos aritmètics —d'aritmètica comercial— de final del segle XV, en els vessants històric, econòmic i cultural.

La taula 1 conté una relació d'alguns dels textos occidentals més notables que feren una presentació de l'algorísmia numèrica índia, tal com fou transmesa a Occident pels matemàtics de l'islam.[4] Conté, doncs, les aritmètiques —o textos d'algorísmia— occidentals més rellevants i, en particular, aquells que, d'una o altra manera, han estat estudiats per algun dels autors esmentats en relació amb l'*Arismetica* de Santcliment.[5]

Està dividida en tres parts ben diferenciades. La primera conté simplement un antecendent remot. Es tracta del text àrab iniciàtic d'al-Hwārizmī. L'he inclòs per coherència conceptual.

La segona conté obres manuscrites anteriors a l'aparició, a mitjan segle XV, de la impremta de caràcters mòbils de Johannes Gutenberg —nom amb què es coneix Johannes Gensfleisch zur Laden zum Gutenberg.[6]

A la tercera s'indiquen obres que se situen a la fi de l'edat mitjana. No totes foren impreses. Les que no ho foren les he marcat amb un $*$.[7]

---

relacions, semblances i diferències que el text de Santcliment té amb altres aritmètiques més o menys coetànies.

3 Vegeu, per exemple, [16, introducció].

4 No és pas completa, ni molt menys. No es pretén pas. Tampoc no la comentaré detalladament. El lector interessat a conèixer millor l'evolució complexa i asimètrica d'aquesta aventura matemàtica pot consultar les obres esmentades a la nota 2 i, en particular, [40, p. 124–221]. He omès les aportacions dels autors indis, perquè vull centrar l'atenció en la influència que aquesta algorísmia tingué a Occident. Vegeu, no obstant això, [40, p. 106–124; 145–153].

5 A [52, edició de 1958, I, p. 211–265], hi podem trobar una exposició detallada de les aritmètiques des del segle XIII fins al segle XV i també d'altres obres matemàtiques d'aquell moment històric. Vegeu també [36, edició anglesa de 1992, p. 332–366] i [24, p. 65–70].

6 Vegeu la secció 4.8.

7 Tampoc tots els textos anteriors a l'aparició de la impremta han corregut la mateixa sort. Per exemple, fins ara, l'única edició de l'obra clau de Fibonacci —sobrenom de Leonardo da Pisa—,

Any	Ciutat	Autor	Títol
825	Bagdad? (Iraq)	Moḥammad al-Hwārizmī	*Algoritmi de numero indorum*
s. x	?	Gerbert d'Orlhac	?
1140	Sevilla (Espanya musulmana)	Juan de Sevilla	*Liber algoarismi de practica arismetrice*
s. xiii	Constantinoble (Turquia)	Máximos Planudes	*Ψηφηφορὶα κατ′ Ἰνδοὺς ή λεγ ομένε μεγάλη*
1202	Pisa (Itàlia)	Leonardo da Pisa	*Liber abaci*
1203	? (França)	Alexandre de Villedieu	*Carmen de Algorismo*
s. xiii	? (Irlanda?)	Johannes de Sacrobosco	*Algorismus vulgaris*
1430*	Pamiers (França)	?	?
1478	Treviso (Itàlia)	?	?
1482	Bamberg (Alemanya)	Ulrico Wagner	?
1482	Barcelona (Catalunya)	Francesc Santcliment	*Suma de la art de arismetica*
1484	Venècia (Itàlia)	Piero Borghi	*Nobel opera de la arithmetica*
1484*	Lió (França)	Nicolas Chuquet	*Triparty en la Science des Nombres*
1485*	? (França)	Jehan Certain	*Le Kadran aux marchands*
1487	Saragossa (Aragó)	Francesc Santcliment?	*Compilación de aritmética*
1489	Leipzig (Alemanya)	Johannes Widman	*Algorithmus linealis*
1490	Florència (Itàlia)	Filippo Calandri	*De arithmetica opusculum*
1492	Torí (Itàlia)	Francés Pellos	*Compendion del abaco*
1494	Venècia (Itàlia)	Luca Pacioli	*Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*

Taula 1: Relació succinta d'algunes obres occidentals que contenen l'algorísmia indoaràbiga.

3 Les tres menes de textos aritmètics

Em sembla que puc afirmar sense embuts que ens trobem davant de tres menes de textos d'aritmètica ben diferenciats: els textos d'*algorísmia estricta*, els *textos comercials* i els *textos algèbrics*.[8]

3.1 Els textos d'algorísmia estricta

Són textos en els quals es presenta, ras i curt, l'algorísmia sense preocupar-se per a res de les possibles aplicacions d'aquests algorismes. S'hi ofereix l'escriptura posicional indoaràbiga, amb les deu xifres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 i, en gairebé tots els casos, hom posa de manifest la singularitat de la xifra 0 i, en alguns casos, es fa una petita reflexió sobre la unitat.[9] Seguidament presenten, amb tota mena de detalls, l'algorísmia corresponent; és a dir, els algorismes de sumar, de restar, de multiplicar i de dividir. D'aquesta manera queda palès que l'algorísmia que defensen és prou bona per substituir l'*àbac*.[10] Però, en general, com si volguessin anar més lluny, donen l'algorisme d'extracció de les arrels quadrades i, en alguns casos, fins i tot de les cúbiques.

D'aquest grup, a la taula 1, hi trobem les obres de Moḥammad ibn Mūsà al-Hwārizmī —un antecedent històric que no fóra bo ometre—, de Máximos Planudes, d'Alexandre de Villedieu i de Johannes de Sacrobosco.[11]

Com deia, cap d'elles *no conté* exercicis d'aplicació dels algorismes.[12] Són, doncs, textos purament normatius, catequètics en la presentació algorísmica. Com ja he dit, i com quedarà palès més endavant, el que realment sorprèn d'aquests textos és que ofereixin quelcom tan complex com l'algorisme d'extracció d'arrels cúbiques.

---

un text insigne tant per la seva profunditat com per la seva precocitat, data de 1857. És una edició en llatí que trobem dins l'*Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo* [28, llibre primer]. Avui, però, disposem de la recent traducció anglesa [29]. Tanmateix, és una llàstima que no vagi acompanyada d'un estudi acurat, notes i comentaris.

En canvi, disposem de l'estudi de Sesiano del manuscrit en llengua d'oc de 1430, [50]. Pel que fa a l'aritmètica de Treviso, podem trobar-ne exposicions més o menys detallades a [8, 53, 54]. Hi ha una traducció anglesa parcial a [51, edició de 1959, volum I, 1–12], i una traducció total anotada i comentada a [56]. L'*Arismetica* de Santcliment fou analitzada per primera vegada per L. C. Karpinski a [25], però en ocasió del seu cinc-cents aniversari aparegueren dos treballs, en català, d'aquest tractat d'Antoni Malet i Jaume Paradís, a [31, 38]. L'aritmètica de Piero Borghi la trobem sintetitzada a [54]. En relació amb l'obra de Francés Pellos podem veure [39], edició de 1967, amb comentaris filològics de Robert Lafont, i matemàtics de Guy Tournerie. I la *Triparty* de Nicolas Chuquet la trobem editada i estudiada a [33, 34, 35] i, més recentment, a [15].

8 Una altra categoria de textos —els *textos mercantils*, totalment aplicats al comerç de l'època— solament apareixen esmentats de passada.

9 En aquesta mena de textos, n'hi ha que, en una tradició més racional —en la línia del pensament grec—, atribueixen a la unitat un paper que va més enllà del simplement numèric. D'altres, en canvi, molt més orientals en l'exposició, ometen aquesta mena de comentaris.

10 No cal recordar que aquest giny mecànic —l'àbac— era l'estri que usaven a Grècia i Roma aquells que, per una raó o una altra, havien d'efectuar alguna mena de còmputs.

11 Sortosament disposem d'edicions relativament recents d'aquestes obres. El text en vers d'Alexandre de Villedieu ha estat reeditat a [61]; el d'al-Hwārizmī, a [2]; el de Máximos Planudes, a [41], i el de Sacrobosco, a [43] o [44].

12 A [40, p. 191–192, 205–208] podreu trobar comentaris a aquestes obres i algorismes.

L'herència islàmica Per tal de comprendre el contingut d'aquesta mena d'obres faré una síntesi breu de l'aportació del suara esmentat text d'al-Hwārizmī, seguint la traducció llatina, del segle XII, d'Adelard de Bath (~1075–1160) —deixant de banda l'aspecte estrictament evolutiu dels símbols i acceptant les reserves que posa de manifest Allard.[13] He triat aquest text i no un altre perquè probablement és el primer text aritmètic —conegut a Occident— en el qual podem trobar de manera detallada els *algorismes de càlcul* del sistema decimal posicional indi amb zero.[14]

Moḥammad ibn Mūsà al-Hwārizmī
Bagdad (ara Iraq), ~780–~850

És indubtable que, al segle IX, els erudits àrabs coneixien el sistema indi de numeració amb zero. L'any 825, Moḥammad ibn Mūsà al-Hwārizmī[15] va elaborar un petit opuscle en el qual posà de manifest la vàlua del sistema de numeració d'herència índia. Solament ens n'han arribat, com ja he indicat, traduccions llatines. La més coneguda és probablement d'Adelard de Bath i té el títol gens suspecte de *Algoritmi de numero indorum*.[16] D'aquesta traducció sols se'n coneix una còpia incompleta del segle XIII.[17]

Encara que només sigui de passada, val la pena observar que, d'acord amb el que podem deduir dels textos llatins del segle XII, al-Hwārizmī usa uns signes numèrics la grafia dels quals correspon a la que s'usava a l'Índia, provinents del sànscrit. És realment difícil justificar la procedència dels símbols i molt més encara afirmar sense reserves que són els mateixos que va usar al-Hwārizmī, atès que el text de què disposem —la traducció llatina del segle XII— és força posterior a l'època de l'autor àrab al qual s'atribueix.[18] I, de fet, no fou pas

13 Vegeu [2], i–v, i, en particular, v: «Contràriament a l'opinió que semblava acceptada definitivament, el text d'Adelard de Bath és un text híbrid i no pas una traducció fidel del text àrab d'al-Hwārizmī».

14 Vegeu també [45, p. 76, 119 i 124]. Recordem el text de Bhāskara, traduït a l'anglès a [12, p. 4–12], on trobem els algorismes de càlcul. És tardà: del segle XII. És a dir, de la mateixa època que la primera traducció llatina de l'*Algoritmi de numero indorum.*

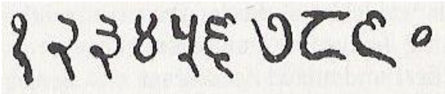
15 Vegeu [58].

16 «El llibre d'al-Hwārizmī sobre els nombres indis ens assabenta de l'existència d'un text anterior, potser de la fi del segle VIII» [63, nota 4, p. 165]. Malgrat que la traducció llatina normalment s'atribueix a aquest erudit anglès, Allard n'estableix els pros i els contres [2, p. vii–x].

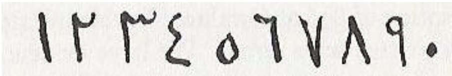
17 Per a l'anàlisi dels possibles textos existents, llurs diferències, analogies i traduccions disposem de [2], una obra excel·lent i molt acurada.

18 En aquest sentit és d'interès l'estudi [1] elaborat per Allard, l'existència del qual m'ha estat comunicada pel doctor Julio Samsó del Departament de Filologia Semítica de la Universitat de Barcelona.

aquesta grafia la que s'imposà a Bagdad; la grafia dels signes utilitzats pels musulmans d'orient prové, potser, de l'Afganistan, on els guarismes indis havien sofert una lleu modificació. Segons Smith [52, edició de 1958, volum II, p. 70–72], les formes dels dos sistemes de guarismes —el de procedència índia i l'àrab— són:[19]



sànscrit (Índia)



àrab

Els guarismes i la seva escriptura Aclarides, de manera succinta, aquestes qüestions, faré una anàlisi breu del text d'Adelard, seguint de ben a prop [2].[20]

Comença amb les paraules:

> al-Hwārizmī diu: «He vist que els indis utilitzen *nou* lletres per a tots els seus números gràcies a una disposició *pròpia* i inventada per ells. [...] Usen solament nou lletres, la representació de les quals és 9 8 7 6 5 4 3 2 1». [p. 1 i 252]

Tot seguit ens informa que, per tal d'expressar el següent de 9, cal escriure 10, i per tal d'expressar el seu doble, triple, etc., cal posar 20, 30, etc. I diu:

> Fan servir un petit cercle que s'assembla a la lletra O, el 0, per posar de manifest que, a la posició de les unitats, no hi ha res. [p. 3]

La raó per la qual al-Hwārizmī vol ensinistrar-nos en aquest nou sistema és:

> La seva simplicitat i concisió en aritmètica, tant si els números que s'usen són grans com si són petits, tant si els volem multiplicar o dividir, com sumar o restar. [p. 1]

D'antuvi ensenya a llegir els números expressats en el nou sistema de xifres i, després d'indicar-nos que la lectura cal fer-la en grups de tres començant per la dreta, dóna l'exemple següent:

> El número 1 180 703 051 492 863 es llegeix: 1 de mil mil mil mil mil (5 vegades), cent de mil mil mil mil (4 vegades) i vuitanta de mil mil mil mil (4 vegades) [...] quatre-cents noranta-dos mil i vuit-cents seixanta-tres. [p. 6]

Tot seguit ensenya a sumar i restar.

La suma La suma la dóna amb aquestes paraules:

> Quan vulguis sumar dos números posa'ls un dessota l'altre de manera que els del mateix rang es corresponguin. Després suma els de cada rang, començant pels de l'ordre més baix, les unitats, les desenes, etc. Quan en una posició aconsegueixis una desena, posaràs una unitat més a l'ordre següent [les desenes, centenes, etc.]. [...] Això ho faràs amb tots els ordres fins al darrer. [p. 7]

No n'ofereix cap exemple.

19 Al text d'Ifrah [23, p. 493–495], hi trobem una anàlisi més aprofundida; a la història de la matemàtica de Carl B. Boyer [9, edició castellana de 1986, p. 307], la genealogia dels nostres dígits seguint, però, el text de Menninger [36, edició anglesa de 1992, p. 418–419].

20 Totes les citacions que segueixen són d'aquest text i, per això, solament n'indico les pàgines.

La resta En canvi, quan explica la resta comença dient que «cal posar damunt el més gran dels dos números» i «restar posició a posició».

> Si no és possible —és a dir, si el número de la posició superior no és prou gran per tal de poder-li treure el número de la posició inferior— agafa una unitat de la posició superior de l'ordre següent i converteix-la en deu, aleshores treu-li allò que calgui treure-li i posa el que et queda a la posició superior. Si no et queda res, posa-hi un zero com abans. Ara bé, si a la posició superior de l'ordre següent hi ha un zero, ves-te'n una posició, més enllà, agafa una unitat de la posició superior i converteix-la en deu de l'ordre immediatament inferior. Aleshores agafa una unitat d'aquestes deu i fes el que t'he indicat abans, deixant-ne nou en la posició segona, on n'havies posat deu. [p. 7–8]

Els dos únics exemples que ofereix aquest text són ben senzills, en el sentit que, a cada posició, el número de la posició superior és més gran que el número de la posició inferior i, per tant, com diu el text: «del 6 en treus 3 i a la quarta posició te'n queden 3; del 4 en treus 2 i a la tercera posició te'n queden 2, etc. La representació de la diferència [en el primer exemple] és, doncs: 3 211». L'altre exemple és curiós en el sentit que «al número mil cent quaranta-quatre li traiem el número CXL quatre» [p. 7–8]. Hi ha una barreja constant entre les xifres de nova implantació i les romanes.

$$\boxed{\begin{array}{r}6\,422\\3\,211\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r}1\,144\\144\end{array}}$$

Observem que, segons el text d'Adelard del segle XII, al-Hwārizmī efectua la resta d'esquerra a dreta.[21]

En canvi, en un text usualment atribuït a Juan de Sevilla [~1140] —al marge de les crítiques d'Allard [p. 83–84, 249–251]—,[22] hi trobem tres exemples força més interessants:

$$\boxed{\begin{array}{r}12\,025\\3\,604\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r}10\,000\\15\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{r}200\,000\\2\end{array}}$$

En el primer dels tres exemples, el text és el següent:

> Volem sostreure tres mil sis-cents quatre de 12 mil vint-i-cinc. La figura següent dóna la posició d'aquests números $\boxed{\begin{array}{r}12\,025\\3\,604\end{array}}$. Ara caldria treure el número inferior en la darrera posició —és a dir, el tres— del número superior —és a dir, el dos— i això és impossible. Així, caldrà que prenguem una unitat de valor deu de la posició següent i que l'afegim al dos que teníem. Obtindrem 12. D'aquests dotze en traiem tres i en queden nou. Els posem en el lloc del 2. Ara n'hauríem de treure sis de la posició superior, però, atès que hi ha un 0, cal que agafem una

21 Això pressuposa una precaució prèvia que no es reflecteix ni en el text ni en els exemples.

22 En aquest text, tan primerenc, hi llegim:

> Un nombre és un conjunt d'unitats. Atès que és infinit (ja que, en multiplicar-lo, creix indefinidament), els indis, amb un enginy extrem, han acotat aquesta multiplicitat infinita dins de certes regles i restriccions determinades, amb l'objectiu que, de l'infinit, en sorgeixi una ciència ben definida, i que les lleis severes d'alguna art impedeixin la fugida d'aquestes coses tan subtils. [23, p. 821–822]

> unitat del nou de la posició següent; en queden vuit i la portem, amb valor 10, al lloc del 0. D'aquests deu en traiem sis i en queden quatre, que posem al lloc del 0. [...] Finalment la figura del número que resulta és $\boxed{8\,421}$. [p. 83–84]

Ho podem simbolitzar així:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 12\,025 & & {}_1 2\,025 & & 9\,025 & & 8\,{}_1025 & & 8\,425 & & 8\,421 \\ & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & & \Longrightarrow & \\ 3\,604 & & 3\,604 & & \cancel{3}\,604 & & \cancel{3}\;\;604 & & \cancel{3}\,\cancel{6}04 & & \cancel{3}\,\cancel{6}\cancel{0}\cancel{4} \end{array}$$

Queda clara, doncs, la precaució que indicava a la nota 21.

La dimidiació Després de la resta, exposa la divisió per 2. Ara, però, aconsella de començar per la dreta:

> Divideix les unitats per dos; si el nombre d'unitats és senar, divideix el que puguis i te'n quedarà una que posaràs en la forma $\frac{30}{60}$.[23] Després divideixes per dos les desenes; si és senar, agafes la meitat del parell i la poses al seu lloc i dones el valor cinc a la meitat del que et queda i l'afegeixes a la posició inferior; etc. [p. 9]

La multiplicació Seguidament, dóna els dos algorismes més importants: el de la multiplicació, primer, i el de la divisió, després.

Primerament, cal aprendre la taula de multiplicar, els uns amb els altres, tots els números que hi ha entre l'1 i el 9.

La millor manera d'entendre l'algorisme de la multiplicació és seguir l'exemple que ofereix [p. 9–12]:

Volem multiplicar 2 326 per 214. De bell antuvi, cal posar-ho en la forma:[24]

			2	3	2	6
2	1	4				

Aleshores cal multiplicar 214 per 2, sent 2 la xifra més alta del multiplicand. Dóna 428 i diu:

> Un cop feta la multiplicació per la xifra més alta del multiplicand, l'esborrem i la substituïm pel producte sencer. [p. 10]

4	2	8	3	2	6
2	1	4			

Ara desplacem el multiplicador un lloc a la dreta.

4	2	8	3	2	6
	2	1	4		

Multipliquem 214 per 3. Obtenim $214 \times 3 = 642$. Ho col·loquem de manera que les unitats vagin a ocupar el lloc del 3. Això fa que hàgim de sumar 64 a 28. S'obté 492 226.

4	9	2	2	2	6
		2	1	4	

Ara multipliquem 214 pel segon 2. Obtenim 428. Ho posem de manera que les unitats vagin a ocupar el lloc del segon 2. S'obté 496 486.

4	9	6	4	8	6
			2	1	4

23 És una reminiscència del sistema en base seixanta mesopotàmic.

24 A la nota 25, quedaran explicades i justificades les notacions successives del multiplicador i del multiplicand.

Al lloc del 6, hi col·loquem $214 \times 6 = 1\,284$. Finalment s'obté, doncs, el resultat buscat 497 764.[25]

4	9	7	7	6	4

La divisió La divisió també l'exemplifica. Volem dividir 46 468 per 324.

L'operació l'ofereix amb tota mena de detalls. L'explicació, com és usual, la fa amb paraules i no pas en forma d'algorisme [p. 13–15]. En definitiva, però, fa el que s'exposa a continuació.

Posem:

4	6	4	6	8
3	2	4		

Atès que 324 només cap un cop dins de 464, posem un 1 a la primera posició del divisor. S'obté:

		1		
4	6	4	6	8
3	2	4		

Multipliquem $324 \times 1 = 324$. Restem ordenadament. S'obté:

		1		
1	4	0	6	8
3	2	4		

Desplacem el divisor un lloc a la dreta i posem un 4 a la segona posició del divisor perquè 324 cap 4 vegades dins de 1 406.

		1	4	
1	4	0	6	8
	3	2	4	

Multipliquem $324 \times 4 = 1\,296$. Restem ordenadament. S'obté:

		1	4	
	1	1	0	8
	3	2	4	

Desplacem el divisor un lloc a la dreta i posem un 3 a la tercera posició del divisor perquè 324 cap 3 vegades dins de 1 108.

		1	4	3
	1	1	0	8
		3	2	4

Multipliquem $324 \times 3 = 972$. Ho restem de 1 108. Dóna 136, que col·loquem al seu lloc. Finalment, s'obté:

quocient	1	4	3
romanent	1	3	6
divisor	3	2	4

Aleshores diu:

> Resulta així el que correspon a un dels números, que és 143, i 136 parts de 324. [p. 14–15]

D'aquesta manera apareixen els números fraccionaris àrabs, però, en aquest estudi, no hi enrarem.[26]

Així doncs, al segle IX, els matemàtics islàmics d'Orient coneixien ja el sistema decimal posicional. L'havien assimilat directament de pobles que, al

25 Cal molta atenció a l'hora de fer les sumes perquè les fem aparentment usant el multiplicand, però no és així. Fem els productes amb el zeros corresponents i els anem sumant de forma ordenada sense comptar el que encara resta del multiplicand: 428 000 més 64 200, més 4 280, més 1 284. En total, 497 764.

Això és també el que justifica els desplaçaments del multiplicador: en la primera multiplicació, multipliquem 214 per 2, però aquest 2 és, de fet, 2 000; d'ací la col·locació del multiplicador al lloc dels milers; anàlogament, en els altres casos.

26 Vegeu l'excel·lent text [6, p. 223–302, en particular 291–302].

seu torn, l'havien après a través de la influència dels textos matemàtics de l'Índia. No obstant això, com ja he indicat abans, els numerals eren representats de forma lleugerament diferent.[27] El sistema decimal posicional amb zero, tanmateix, havia penetrat en la matemàtica àrab desenvolupada a l'entorn cultural de Bagdad i, en particular, a *Dar al-Hikma* (Casa de la Saviesa).[28]

M'he entretingut fent una descripció prou detallada de l'obra d'al-Hwārizmī, de la qual, com ja he dit, no disposem de cap manuscrit original, i l'únic coneixement que en tenim prové d'un fragment llatí del segle XIII, la traducció i el traductor del qual han estat discutits i analitzats amb tota mena de detalls.[29]

L'extracció d'arrels En el text d'al-Hwārizmī no trobem, però, cap esment a l'extracció d'arrels —ni quadrades ni cúbiques. En canvi, en el text de Planudes, l'extracció d'arrels quadrades hi és descrita molt acuradament i insistent, i dóna tres mètodes diferents [41, p. 138–200]. En el de Sacrobosco, s'hi troben descrits els algorismes d'extracció d'arrels quadrades i cúbiques. La descripció és totalment lingüística i no ofereix cap exemple aclaridor. És el comentari de Dàcia a aquest text el que permet de comprendre millor el funcionament dels algorismes de l'*Algorismus vulgaris* [43, p. 16–17, i 79–92]. Per tal de fer-nos càrrec de la potència del sistema indoaràbic —que és el que volien posar de manifest aquests autors en oferir els algorismes d'extracció d'arrels—, en donaré una petita mostra.

JOHANNES DE SACROBOSCO
Halifax (Yorkshire, Anglaterra), 1195 – París (França), 1256

Mètode d'extracció de l'arrel quadrada d'un número arbitrari

Volem trobar l'arrel quadrada del número 235.

	1		3		10
2		3		5	
1		5			15
		2		10	30

Busca el número que multiplicat per si mateix estigui contingut en el 2 de la forma més ajustada possible. [...] Dic que és l'1. Ara, 1 multiplicat per 1 dóna 1. Al número 2 li treus el número 1. En resta 1. Col·loca'l entre el 2 i el 3, una mica més amunt, com fèiem en la divisió.

Ara multiplica per 2 el número 1 que has obtingut per extracció [de l'arrel] de 2. [...] Obtens 2. Aquest 2 col·loca'l sota el número 3, però una línia més avall d'allà on has col·locat l'1. Ara busca el número que multiplicat per 2

27 Vegeu les taules d'evolució dels numerals de [1, p. 40–41], i de [23, p. 513–517].
28 Vegeu [23, p. 491–500, i, en particular, 498–499].
29 Hi ha altres textos que també fan referència als numerals indis i a l'algorísmia associada. Algunes d'aquestes aritmètiques àrabs s'han conservat en col·leccions europees de manuscrits orientals. Vegeu [7, p. 31–48], [40, p. 133–134] i, en concret, [59].

s'apropa d'allò més al número 13 i el seu quadrat cap en allò que resta. [...] Passa del 6 i agafa el 5.[30] Ara el doble és 10. Escriu el 5 entre el 3 i el 2, a la primera filera inferior, on hi ha l'1, que és l'arrel de 2. Ara treu 10 unitats de 13. Obtindràs un 3. Escriu-lo un xic més amunt entre el 3 i el 5. Fixa't que el 5 multiplicat per si mateix dóna 25, que cap dins de 35. La diferència és 10. Escriu-la a banda, fora de l'arranjament. Ara multiplica 5 per 2 tal com havies fet abans amb l'1. Dóna 10. Escriu-lo a la tercera filera, al costat del 2. Ara suma aquest 10 amb el 20; obtens 30. Escriu-lo al costat. (Fixa't que el 2 és, en realitat, un 20 perquè està en el lloc de les desenes.) Calcula la seva meitat, que és 15, perquè 30 conté una arrel doble. De tot això, en resulta que l'arrel quadrada de 235 és 15 i deu trentens[31]. [41, p. 142–143]

Molt més sorprenent és, però, l'algorisme d'extracció d'arrels cúbiques que ofereix Sacrobosco. Per tal que sigui més entenedor, usaré l'exemplificació de Dàcia en el cas en què l'arrel cúbica és exacta [43, p. 17–19, 84–92].

Mètode d'extracció de l'arrel cúbica d'un número arbitrari

Per trobar l'arrel cúbica d'un número —com ara la del número 751 089 429— primerament el dividim en grups de tres, començant per la dreta. Cada grup tindrà doncs tres xifres, llevat potser el que es troba més a l'esquerra, que en pot tenir una, dues o tres.[32]

Hem de buscar un dígit que elevat al cub s'apropi d'allò més al número 751. És el número 9. A més, el cub de 9 és 729, que restem del 751. S'obté la primera aproximació.

7	2	9						
7	5	1	0	8	9	4	2	9
		9						

Ara tripliquem el dígit i el col·loquem a sota del 8.

2	2	0	8	9	4	2	9
		2	7				
	9						

Notem que qualsevol dígit situat al costat del 9 i multiplicat per 27 supera el número 2 208.

2	4	5	7				
2	2	0	8	9	4	2	9
		2	7				
	9	1					

Això fa que el següent valor de l'arrel cúbica sigui xifra. És a dir, obtenim:

2	2	0	8	9	4	2	9
				2	7	0	
					9	0	

30 Ara, després de treure l'1, en resten 135. Agafem 13 dividit per 2. Dóna 6. Aleshores $6\times 2 = 12$, que els traiem de 13. Obtenim 1. El que resta és, doncs, 15, però $6 \times 6 = 36$. No hi cap.

31 Indiquem, tot de passada, que, com és usual, fa servir el que hom coneix com l'algorisme d'Heró, segons el qual $\sqrt{a^2 + h} \simeq a + \frac{h}{2a}$.

32 La comprensió cabal d'aquest algorisme —no gaire senzill— comporta adonar-se de la complexitat següent. Volem aconseguir $M \cdot 10^6 + N \cdot 10^3 + P$, on M, N i P són números de tres xifres com $(100a + 10b + c)^3$. Ara bé, tenim que aquest cub es pot escriure en la forma:

$$a^3 \cdot 10^6 + 3ab(10a + b) \cdot 10^4 + 3c(100a + 10b + c)(10a + b) \cdot 10 + c^3.$$

En l'exemple que s'analitza tot es més simple, perquè resulta que $b = 0$. És a dir, s'obté solament $a^3 \cdot 10^6 + 3ac(100a + c) \cdot 10^2 + c^3$.

Ara calculem $909 \times 27 = 24\,543$, que multiplicat per 9 dóna 220 887. Així doncs, tenim:

2	2	0	8	8	7		
2	2	0	8	9	4	2	9
				2	7	0	9
					9	0	

Restant, s'obté:

					7	2	9
				2	7	0	9
					9	0	

Ara hem de calcular el cub de 9 i restar-lo. Obtenim romanent 0. L'arrel cúbica del número 751 089 429 és exacta i val 909.[33]

Sembla indiscutible que l'interès per aquesta mena d'algorismes —de fet, no hi ha cap necessitat aparent d'introduir-los— només pot respondre a una voluntat explícita de mostrar la potència enorme que el mètode algorísmic indoaràbic té davant la que oferia l'àbac, perquè després no s'usen per a res.

3.2 Els textos comercials

Un segon bloc de textos —cronològicament, a la taula 1, els trobem entre els més recents, és a dir, entre els que són de l'època en què ja s'havia introduït la impremta— són textos de tipus comercial. Concretament, l'aritmètica de Treviso, les dues de Santcliment i la de Francés Pellos. Un cop introduïts els símbols de numeració i la manera d'expressar els números i els algorismes de càlcul, fixen l'atenció en la pràctica comercial o de mercaderia però en un sentit ampli de la paraula —aquest és el motiu central del text—, és a dir, sense oblidar altres qüestions més aritmètiques. Es tracta, en definitiva, de posar de manifest fins a quin punt l'algorísmia indoaràbiga és fructífera, entenedora, potent i alhora simple, per efectuar tota mena de càlculs comercials i afins. Per això, tots ells ofereixen un nombre important d'exercicis de tipus comercial: la regla de tres simple i composta, canvi de monedes, barates, aliatges de metalls, repartiments proporcionals, càlcul d'interessos, etc.

De fet, però, la *seva complexitat matemàtica* ***no*** *sobrepassa*, en cap cas, el que, en àlgebra, és *una equació de primer grau*. Això justifica que no hi trobem els algorismes d'extracció d'arrels quadrades, i molt menys encara els d'extracció d'arrels cúbiques. Podríem dir que el tipus de dificultat que contenen és del mateix ordre que el que podem trobar al famós papir Rhind de la matemàtica egípcia. L'artifici que cal per poder-los resoldre és la *regla de tres* en la forma que coneixem com a *mètode de falsa posició*.[34]

A diferència dels textos del bloc següent —vegeu la secció 3.3—, la seva importància —més econòmica i social que no pas matemàtica— la posaré de relleu a les seccions 4 i 5.

33 Per tal de constatar-ne la validesa, Dàcia eleva el número 909 al cub i veu que efectivament s'obté el número donat inicialment. Tanmateix, però, el mètode de Sacrobosco li sembla a Dàcia massa complicat i poc clar, i n'ofereix un altre que va detallant a mesura que l'aplica al càlcul de l'arrel cúbica del número 1 234 567 890. Vegeu [43, p. 87–92] o [40, p. 206–208].

34 El mètode de falsa posició serveix, com veurem a la part segona d'aquest article, per a resoldre equacions de primer grau amb una incògnita, perquè aquesta mena d'equacions és compatible amb la proporcionalitat.

3.3 Els textos algèbrics

El tercer bloc el formen els llibres restants, sent els més notables el *Liber abaci* (1202) de Leonardo da Pisa (Fibonacci), la *Triparty en la Science des Nombres* (1484) de Chuquet, i la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proporcionalita* (1494) de Luca Pacioli. De fet, són textos en els qual apareix l'àlgebra, si entenem per àlgebra la preocupació per resoldre equacions numèriques de grau superior al primer, equacions en les quals els mètodes basats en la proporcionalitat fallarien i, per tant, la falsa posició no és prou potent.

El problema originari de l'àlgebra: l'herència mesopotàmica La col·lecció de problemes que varen portar els geòmetres a l'àlgebra, entesa com a resolució de problemes de grau superior al primer, es pot reduir a l'esquema següent:

> *Trobar dos números dels quals es coneixen la suma i el producte.*

Aquesta mena de problemes són típicament de segon grau i, de fet, corresponen a una preocupació de tipus geomètric. Consisteixen a

> *Trobar la longitud i l'amplada d'un rectangle de perímetre i superfície donats.*

Aquestes qüestions són el nucli de l'àlgebra geomètrica —és a dir, càlculs algèbrics resolts amb figures geomètriques— de la matemàtica mesopotàmica i constitueixen, sense cap mena de dubte, el naixement de l'àlgebra entesa com l'*art de trobar les arrels dels polinomis*.

Els estudiosos de la matemàtica mesopotàmica van trobar que, pels volts del 2000 aC, els babilonis sabien resoldre problemes de segon grau com ara:

> Trobeu el costat d'un quadrat del qual l'àrea menys el costat val $14,30$.
>
> [9, edició castellana de 1986, p. 56]

Abans d'observar l'algorisme de resolució, recordem dos fets notables, ben coneguts, però aclaridors.

- El sistema de numeració utilitzat en la civilització mesopotàmica és posicional en base 60. Per exemple, en la notació de l'historiador de la matemàtica Otto Neugebauer, l'expressió $14,30;15$ indica el número $14 \times 60 + 30 + 15 \times 60^{-1}$.
- La concepció numèrica dels problemes, àdhuc quan són problemes relatius a objectes geomètrics, evita l'*homogeneïtat*,[35] absolutament imprescindible en la geometria grega.

El que realment van sorprendre els estudiosos fou la manera com resolien el problema. De fet, l'algorisme concret que fa servir el matemàtic de la tauleta

35 L'homogeneïtat estableix que solament podem «afegir» o «treure» figures geomètriques de la mateixa dimensió, atès que geomètricament no té sentit «afegir» una superfície a una longitud. A l'*Isagoge in artem analyticem* (1630(] de Viète [60, edició francesa de 1986, p. 22–23], aquest principi constitueix un axioma.

Numèricament, en canvi, això no té cap mena d'importància perquè tot són números. És la idea bàsica del *fet algèbric*, com copsarà d'una manera absolutament nítida i inequívoca René Descartes (1596–1650), tal com palesa *La géométrie* (1637), a [14, introducció].

mesopotàmica correspon a l'expressió algèbrica

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} \tag{1}$$

com a solució de l'equació de segon grau $x^2 = b\,x + c$, aplicada, però, al cas concret de l'equació $x^2 = x + 870$.

Resolució del problema anterior

TEXT MESOPOTÀMIC	INTERPRETACIÓ MODERNA
Trobar la longitud del costat d'un quadrat del qual la superfície menys el costat és igual a 14, 30.	*Trobar un número x que satisfaci l'equació quadràtica* $x^2 = x + 870$.
Prenem la meitat d'1, que és 0; 30.	Calculem: $\frac{1}{2} \times 1 = 0,5$.
Multipliquem 0; 30 per 0; 30 i obtenim 0; 15.	Calculem: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$.
Sumem aquesta quantitat a 14, 30 i obtenim 14, 30; 15.	Sumem: $870 + 0,25$.
14, 30; 15 és el quadrat de 29; 30.	Obtenim: $29,5 = \sqrt{870 + 0,25}$.
Finalment, afegim 0; 30 a 29; 30 i el resultat, 30, és el costat buscat.	Aleshores, el costat buscat és $30 = 29,5 + 0,5$.

La qüestió rau a saber com van poder deduir aquest algorisme de resolució. La conjectura que fan els historiadors de la matemàtica mesopotàmica és que, de fet, com ja he dit abans, el problema clau és un problema de tipus geomètric que correspon a un dels problemes que, actualment, expressaríem simbòlicament de la forma següent:

> *Trobar la longitud i l'amplada x, y d'un rectangle del qual sabem que $x \pm y = a$ i $x\,y = A$.*[36]

Així, a [9, edició castellana de 1986, p. 57], llegim:

> En una tauleta de Yale es demana trobar l'alçada i l'amplada d'un rectangle sabent que $x + y = 6;30$, $x\,y = 7;30$. Aleshores $x - y = 3;30$. Per tant, $x = 5$, $y = 1;30$.

I el camí que porta a la resolució és el següent. Suposem que $x + y = a$ i $x\,y = A$. Aleshores

$$(x + y)^2 = a^2, \text{ i } (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4\,x\,y = a^2 - 4A.$$

36 També és possible que els preocupés determinar els costats x, y d'un triangle rectangle d'hipotenusa a i àrea A donades. És a dir, per als quals $x^2 + y^2 = a^2$ i $x\,y = 2\,A$.

Per tant,

$$x + y = a,$$
$$x - y = \sqrt{a^2 - 4A}.$$

Finalment, obtenim:

$$x = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4A},$$

que és el que realment volíem.

També s'ha dit [62, edició de 1988, p. 70] que un altre camí possible consistiria, per exemple en cas que $x + y = a$, a fer:

$$x = \frac{a}{2} + z, \quad y = \frac{a}{2} - z.$$

Aleshores,

$$A = xy = \frac{a^2}{4} - z^2.$$

D'ací podem treure el valor de z. Efectivament, $z = \sqrt{\frac{a^2}{4} - A}$.

L'entrada de l'àlgebra a Occident a través dels matemàtics àrabs El matemàtic islàmic Moḥammad ibn Mūsà al-Hwārizmī fou conscient que l'àlgebra és prou diferent de la simple algorísmia com per dedicar-li un tractat específic i separat del d'aritmètica. És el famós *Hisāb al-muẖtasar fī ẖisăb al-ğabr w'al-muqābala*.[37]

L'originalitat del text rau en el fet d'exposar amb claredat allò que cal fer per resoldre les equacions de segon grau dels tipus

$$x^2 = ax + b, \ \ ax = x^2 + b, \ \ \text{i} \ \ b = x^2 + ax.$$

El text focalitza tota l'atenció en les equacions de segon grau. Diu [p. 27]:

> D'aquestes tres formes —nombres, arrels i quadrats— dues són iguals a la tercera, com per exemple
>
> Un quadrat i arrels igual a nombres,
> un quadrat i nombres igual a arrels, i
> arrels i nombres igual a un quadrat.[38]

Després, ofereix la manera —sempre vinculada a un cas concret— de resoldre les tres menes de figures possibles. Seguidament dóna una prova, més visual que no pas geomètrica —de fet, és més una *mostració* que una demostració— de la validesa dels algorismes o mètodes de resolució de les equacions de segon grau. Finalment, conté una petita col·lecció de problemes la majoria dels quals estan lligats amb el problema geomètric de l'apartat anterior:

---

37 Vegeu [22]. La paginació l'he referida a la traducció castellana.

38 Robert de Chester anomena *substància* el que nosaltres anomenem quadrat. Vegeu [21].

> Dividiu el número 10 en dues parts de manera que quatre vegades el producte d'una part per l'altra sigui igual al quadrat de la primera. [p. 49]

Hi ha altres problemes lligats amb el teorema de Pitàgores, com ara:

> Dividiu el número 10 en dues parts de manera que la suma dels quadrats de les parts sigui igual a 58. [p. 53]

Malgrat la indiscutible influència mesopotàmica que té aquest text d'àlgebra, cal pensar que no està exempt de la influència que aquesta matemàtica va exercir en Heró d'Alexandria (segle I). Això ho posa de manifest el fet que hi trobem un problema típicament heronià, com ara:

> En un triangle isòsceles de costat igual a 10 unitats lineals i base de 12 unitats lineals, inscriviu-hi un quadrat.[39] [p. 89–91]

En definitiva, doncs, l'àlgebra —sembla totalment indiscutible— comença amb les qüestions matemàtiques determinades per les equacions de segon grau, siguin aritmètiques o geomètriques. I això no es troba, en absolut, en les obres que he anomenat *aritmètiques comercials*, en les quals, com ja he indicat abans, mai no se sobrepassa el primer grau, i on cap problema no és prou complex com per precisar l'algorisme de segon grau.

Ara bé, saber fins a quin punt aquests textos influirien —a través de Chuquet o de Pacioli— en els algebristes italians del Reinaxement és difícil de precisar.[40] Tanmateix és indubtable que foren aquesta mena de llibres els que, en tot cas, constituiren l'autèntica llavor de l'àlgebra.[41]

4 La importància social dels textos comercials a l'Europa de final de l'edat mitjana i començament del Renaixement

El segle XIII es pot considerar el segle més esplendorós de l'edat mitjana. El seu impuls provocà un desenvolupament econòmic, cultural i científic en els segles XIV i XV —els famosos *trecento* i *quattrocento*— dels quals em fixaré ara en alguns trets importants. A més, en aquesta secció de caire cultural, social i econòmic, intentaré de mostrar de quina manera aquests fets expliquen, encara que només sigui d'una forma parcial, la motivació i la importància dels textos comercials en les dues darreres vessants indicades a l'inici de la secció 3, que reprendré a la secció 5.

La necessitat, a finals del segle XV, de les aritmètiques comercials s'explica per alguns trets històrics, culturals i econòmics —i no tant pels científics— que van configurar el pas de l'edat mitjana al Renaixement i que intentaré de sintetitzar en aquesta secció.

---

39 Vegeu també [9, edició castellana de 1986, p. 302–303].

40 En aquesta línia és d'interès l'excel·lent [32].

41 Això no obstant, no podem oblidar la preocupació que es tingué a la ciutat de Bolonya per la resolució de les equacions de grau superior al segon. Les darreres paraules de Luca Pacioli a la *Summa*—«Resoldre la cúbica és un problema impossible com quadrar el cercle»— constitueixen un ressò d'aquesta preocupació.

4.1 Les universitats

Com indica amb molt d'encert Guy Beaujouan,[42] la fundació i, sobretot, la consolidació de les universitats «està relacionada amb la relaxació del sistema feudal, l'augment de la població i el moviment de les ciutats» [p. 664]. N'hi ha prou amb el fet que els estudiants i els mestres siguin suficients per poder-se agrupar en una associació organitzada. Amb aquest sol fet, neix una *universitat*; però quines diferències d'una ciutat a una altra! El caràcter laic i democràtic de Bolonya és molt idoni per a la vocació jurídica dels seus estudis i explica també la contribució preeminent que, uns anys més tard, tingué en els progressos de l'anatomia i la cirurgia. París, en canvi, serà objecte constant de la sol·licitud pontifícia i, per tant, la capital de la teologia i un feu dels dominics. En aquesta època, Montpeller es trobava sota la sobirania del rei d'Aragó i, per aquesta raó, estava fortament sotmesa i impregnada de la influència cultural judeoaràbiga. Això pot explicar que cultivés una medicina més raonada i racional que la que s'estava desenvolupant a Bolonya. Els mestres de la Universitat d'Oxford, la majoria franciscans, seguiren, en general, fidels al platonisme agustinià, que consideraven més compatible i concordant amb el misticisme de l'orde que no pas l'aristotelisme [p. 644–645].[43]

L'entrada de l'aristotelisme a la Universitat de París provocà un enfrontament realment punyent entre la raó i la fe. Els ensenyaments del filòsof pretenen d'identificar ciència i raó i aquesta síntesi col·loca el Déu de l'Església catòlica de Roma en un lloc molt més insignificant que el que li havien reservat els pares de l'Església. A més, alguns punts de la ciència aristotèlica entren en contradicció clara amb el cristianisme. No ens ha d'estranyar, doncs, l'enfrontament entre la Facultat de les Arts, defensora de les noves idees, i la de Teologia, guardiana de la fe, ni tampoc que aquestes noves idees fossin condemnades a París entre els anys 1210 i 1215. En aquesta discussió, hi tingueren un paper realment notable homes de gran vàlua, com ara Abelard (1079–1142), Albert, dit *el Magne* (1193/1206–1280) i Tomàs d'Aquino (1225–1274), que defensaven que «la veritat no pot contradir-se» i que, per tant, la fe i la raó havien d'estar necessàriament d'acord; i Roger Bacon [~1214–1294] conegut com el *Doctor mirabilis*, més radical, que sostenia que el valor de la ciència té el seu fonament i troba les seves raons en l'experiència i en l'experimentació i, en absolut, en l'acceptació de l'autoritat.[44]

S'elaboren textos enciclopèdics en la línia de les obres de Magnus Aurelius Cassiodorus, conegut com Cassiodor (~490–~580), Isidor de Sevilla (~560–636), Beda, dit *el Venerable* (~672–735) i d'altres. Però les enciclopèdies del segle XIII, a diferència de les dels segles VI i VII, no es limiten a donar resposta a algunes qüestions científiques elementals relacionades amb la interpretació de les Escriptures. Pretenen d'incorporar, a més, dades que provenen de l'observació

42 He usat, a bastament, l'edició castellana de [4]. La paginació fa referència a aquest text.
43 Vegeu també [52, edició de 1958, I, p. 212], o [11, edició de 1985, p. 281–285].
44 Vegeu [9, edició castellana de 1986, p. 334].

directa de la naturalesa i de les lleis i principis en què se sustenten les tècniques implantades durant els segles XII i XIII [p. 643–670].

4.2 Les crisis

No obstant això, aquesta situació no es mantindrà pas fins a la fi de l'edat mitjana ja que, a mitjan segle XIV, alguns esdeveniments crítics porten a una situació diferent en gairebé tots els àmbits. Això propicia plantejaments nous que, amb el pas del temps, permetran de consolidar allò que de positiu havia tingut el segle precedent. La consolidació, però, no s'iniciarà fins a la meitat del segle XV. S'inicià, doncs, un segle més tard d'aquell en què s'hauria esdevingut, si no s'hagués donat una situació crítica molt notable que produí un trencament en la línia ascendent del progrés. Aquesta crisi la resumiré enumerant-ne alguns dels trets més notables sense entrar, però, a fer-ne una exposició específica massa detallada. D'una banda, les famílies burgeses arriben al poder i introdueixen un element nou, inicialment desestabilitzador, en el fràgil equilibri establert entre els cavallers, el clergat i el poble. L'element desestabilitzador és donat, entre altres aspectes, pel fet que són precisament aquestes famílies burgeses de nou encuny les que tenen el poder econòmic i, per tant, poden influir de manera important en les decisions polítiques, en les guerres i el seu finançament i, fins i tot, en les decisions de l'Església catòlica. I ho fan sempre que tenen el pressentiment que algun esdeveniment, fet, directriu, norma o llei pot afectar directament o indirecta l'estabilitat econòmica i l'arrelament social assolits. Són, també, els únics nuclis que poden suportar el pes econòmic de les despeses d'infraestructura i modernització dels burgs amb tot el que això suposa en el desenvolupament de l'arquitectura, les arts, l'enginyeria, la indústria, l'artesania, l'educació, etc.

En aquesta línia d'exposició és rellevant el text següent:

> Entre els anys 1282 i 1292, la república de Florència, governada per la classe dels comerciants, va aconseguir modificacions de la Constitució. Aquest fet tindria repercussions molt importants. D'entre elles, cal remarcar que, al segle XIV, s'ensenyés, a les escoles, l'aritmètica florentina. Si l'acumulació de riqueses assolida per la classe burgesa s'hagués mantingut durant el segle XIV, s'haurien pogut nodrir amb més vigor, de forma natural, les arts i les ciències. Però això solament fou una esperança fallida. Caldria esperar fins al Renaixement per aconseguir-ho. No tingué lloc abans perquè dos factors, fonamentalment, van fer engrunes la consolidació esperada. [52, edició de 1958, volum I, 230–231]

Aquests dos factors —dels quals parlaré més àmpliament a la secció 4.5— són la Guerra dels Cents Anys i la Pesta Negra.

4.3 Les monarquies

Un altre factor que va incidir en aquesta situació de desequilibri, posant en perill el que s'havia assolit des del segle X al XIII, fou la consolidació de les monarquies com a poders polítics absoluts en les naixents nacions europees. Això forçà un nou estatus en el qual els cavallers es trobaven entre el poder del monarca, cada cop més sòlid però que s'estintolava en la seva fidelitat i lleialtat, i el compromís que els lligava amb els seus propis vassalls que, amb el seu treball, les lleves, els servents, les donzelles, els artesans i els artistes els proporcionaven tot allò que els calia per poder-se mantenir en la categoria dels cavallers. Els subministraven queviures, homes per als seus exèrcits, servents que cuidaven i mantenien els castells, palaus o habitatges, com també les propietats agrícoles, forestals i de caça. Els artesans els fabricaven i mantenien els ginys de la guerra. Les donzelles, quan així ho exigien, els satisfeien les necessitats que tenien en els temps de pau. Els artistes els distreien en els moments d'oci i de recés. A voltes, però, es veien obligats a ofegar els seus súbdits, trencant allò que justificava la seva raó de ser, per poder satisfer les ambicions desmesurades dels seus «senyors per la gràcia de Déu» —els monarques—; a voltes, s'havien d'enfrontar amb el monarca, trencant el jurament de fidelitat, per tal de protegir llurs feus i els drets dels seus súbdits.

Recordem —és un simple exemple d'una situació més general— com, a Anglaterra, els cavallers —autèntics *senyors feudals*— van obligar el rei Joan I, dit *el Sense Terra* (1167–1216), a acceptar, el juny de 1215, la *Carta Magna*.

4.4 El laïcisme

Ultra aquests fets d'ordre polític, en l'ordre cultural i de les idees, ens trobem amb un creixent esperit laic que, malgrat que encara està fortament vinculat a la fe i a l'Església de Roma, s'endinsa cada cop més en la literatura, el dret, l'art i, a poc a poc, va influint en els costums i els comportaments.

A Itàlia es descobreixen els textos literaris clàssics i això porta els escriptors i poetes a imitar-los. Així, Dante Alighieri (1265–1321), conegut com *el Dant* —un dels autors més reconeguts de la literatura universal—, prenent Publi Virgili Maró (~70 aC–19 aC) com a mestre, escriu la *Divina Comèdia*, una obra clau de l'edat mitjana italiana; Petrarca (1304–1374) impulsa el coneixement dels clàssics grecs i llatins, aconseguint una col·lecció notable de manuscrits dels literats d'ambdues cultures clàssiques; Boccaccio (1313–1375) porta a terme un estudi aprofundit i ple de zel d'aquestes obres.

L'autoritat, tota mena d'autoritat, inclosa la del Papa, va perdent prestigi i cada cop inspira menys respecte. Els erudits aconsegueixen trencar definitivament amb l'esperit dels pares de l'Església —un fet que s'havia iniciat ja de forma incipient, com he indicat, al segle XIII—, els quals sostenien que tots els coneixements de l'home (la ciència, el dret, l'art, la filosofia, la medicina, l'astronomia, etc.) havien de concordar totalment amb els ensenyaments que emanen de la Bíblia i mai no els podien contradir. Però, a més, la Bíblia havia de ser interpretada adequadament i aquest paper estava reservat a l'autoritat incontestable de l'Església romana. No obstant això, els estudiosos dels segles XIV i XV —i els que vindrien darrere seu— defensaven que els ensenyaments bíblics s'havien de limitar a l'ordre de la fe i del dogma i, en alguns aspectes, de la moral, però que, en canvi, no tenien res a dir en relació amb el coneixement de l'home en general i, molt menys encara, en les qüestions relatives a la ciència.[45]

A més, calia —i fins i tot era lícit— dubtar de les interpretacions de l'Església, sobretot en aquelles qüestions que no pertanyien estrictament al dogma. I en això, com ja he insinuat abans, les universitats hi van tenir un paper d'anàlisi crítica molt notable i, en particular, els estudiosos dels fenòmens de la naturalesa, és a dir, de la filosofia natural.[46]

4.5 La situació econòmica

Ens trobem, a més, davant d'una crisi molt important del sector agrícola a causa fonamentalment a dos fets. D'una banda, al creixement de la població durant tot el segle XIII i la primera quarta part del XIV i, de l'altra, a l'abandó del camp per la gent que fins aleshores havia viscut del seu conreu, en cerca de les formes alternatives de vida que els oferien les ciutats. A més, tingué lloc la Guerra dels Cent Anys (1337–1453, si bé hi ha qui la situa entre els anys 1328 i 1491), que dugué l'Europa del segle XV a una situació gairebé apocalíptica. La destrucció de les collites, el bestiar i algunes poblacions es convertí en una nova arma que pretenia debilitar l'enemic, en privar-lo dels recursos més indispensables i dels béns més preuats. El resultat que s'aconseguí fou, en definitiva, la debilitació de la situació d'estabilitat i creixement assolida al segle XIII.

En aquest context, l'any 1345, Europa s'hauria d'enfrontar amb la primera fallida bancària, els efectes de la qual foren importants perquè influïren d'una manera notable en el futur del sistema bancari i dels seus usos. S'imposaren condicions molt més rígides, que podem considerar d'autèntica usura.

A més, dos anys més tard, fruit del desgavell provocat per una situació cada cop més depauperada per la guerra i la fam, va aparèixer la Pesta Negra (1347–1349) que, en menys de dos anys, va reduir entre un terç i la meitat la població europea.

Aquesta reducció tan notable de població va afectar també els ordes monàstics i, de retruc, tot el que havien significat en l'equilibri social i cultural del segle XIII. No podem oblidar el paper que els ordes feien com a contrapunt dels senyors feudals —malgrat el caràcter, a voltes, feudal de certs monestirs— i també de l'autoritat excessivament rígida dels bisbats, molt més vinculats a l'autoritat del papat romà.

4.6 La necessitat d'aprofundir en els oficis

Aquesta situació de guerra, fam, mort i malaltia —els quatre genets de l'Apocalipsi recorren Europa d'un extrem a l'altre— origina una important regressió econòmica i demogràfica durant la baixa edat mitjana (1350–1450). Però alhora és el que provoca una creixent veu crítica envers les elits intel·lectuals que

45 Vegeu [4, edició castellana de 1988, p. 643–670].

46 En aquest sentit, considero [3] d'un gran interès tan cultural com formatiu i, en particular, el capítol primer.

no han estat prou hàbils per evitar-la. La població es tomba amb força cap al misticisme més desordenat i cap a les supersticions més absurdes. Les universitats entren en una situació de crisi i decadència importants que no afavoreix gaire l'estudi de les matemàtiques.[47]

Malgrat tot, el convenciment que l'home pot aconseguir que aquesta situació no es torni a produir mai més porta la ciència a comprometre's molt més estretament amb la vida pràctica, abandonant l'excessiu classicisme del segle XIII. S'imposa la medicina i la comptabilitat. L'enginy humà i les teories desenvolupades a les universitats es posen al servei de grans descobriments. Això obliga a millorar les tècniques de navegació, fabricant vaixells més idonis per a grans viatges, la cartografia, l'astronomia aplicada i, per tant, la trigonometria, etc.[48]

Podem, doncs, afirmar que el darrer segle de l'edat mitjana és el segle de la tècnica. Esmentem, encara que sigui de passada, algun dels èxits de la tècnica dels segles XIV i XV. El segle XIV, a França, s'introdueix la roba blanca —la *linge*—, que permet de millorar la higiene i fa retrocedir la lepra. A més, proporciona, a un cost baix, matèria primera per a la indústria del paper. Aquesta indústria l'havien portat de la Xina, al segle XIII, els presoners de Samarcanda i els àrabs.[49] Així doncs, com diu Beaujouan, «la invenció del botó i de la camisa va condicionar la impremta». Entre els anys 1350 i 1450, apareixen a Lieja els primers *alts forns*. També és en aquest període que es descobreixen el procés de *xampanyització* del vi blanc i el torn per filar, amb el corresponent impuls que això va suposar per a la indústria del vi i el tèxtil. El segle XV, a l'Alemanya meridional, hi trobem el sistema de biela-manovella que permet un rendiment sensiblement millor en l'ús de la politja.

Amb l'art de la guerra es consolida l'aplicació creixent de la pólvora: apareixen els canons, els coets i la granada de mà. Tanmateix, la pirotècnia va simplificar enormement el treball de la mineria i això va permetre una millora molt important de l'explotació minera. També es va fer un pas de gegant amb el descobriment dels àcids que havien de permetre noves tècniques en l'orfebreria i en la tècnica i l'ús del vidre. No ens ha d'estranyar, doncs, ni l'aparició de les vidrieries de Murano ni l'ús de les vidrieres com a element ornamental en l'arquitectura gòtica. També les lupes i les primeres lents es consoliden durant aquest període final de l'edat mitjana. Els primers rellotges mecànics amb pesos hi troben la seva època d'expansió.

L'ús del carretó va facilitar la tasca de la construcció. Van aparèixer, sobretot als Països Baixos, les rescloses, les encluses, les dragues i la utilització del cargol d'Arquimedes, que permeté d'eixugar els *pòlders*.

---

47 Vegeu [52, edició de 1958, I, 231].

48 Ramon Llull (~1232–~1315) diu que «els mariners disposen de mapes, compassos, brúixola i l'estrella marina» però amb això no en tenen prou. Els cal saber també que «la navegació marina neix i es deriva de la geometria i l'aritmètica». Afirma, per exemple, que un vaixell que avança vuit milles cap el sud-est solament en recorre sis cap a orient. De fet, en aquesta frase usa implícitament l'aproximació $8\cos 45^\circ = 5,64 \simeq 6$ [4, edició castellana de 1988, III, p. 685].

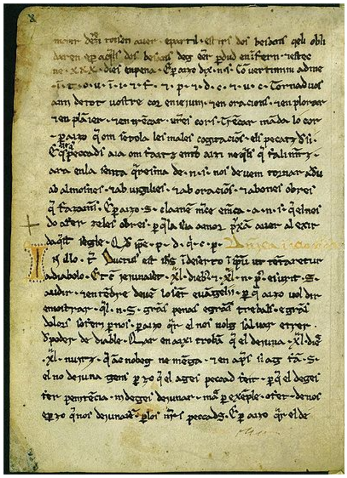
49 Hi ha també qui sosté que la va portar Marco Polo (1254–1324), juntament amb la pólvora.

4.7 De fets novells en llengua i en arts

És també durant el darrer segle de l'edat mitjana que les llengües vernacles traspassen el llindar dels usos col·loquials per incorporar-se als textos científics que pretenen una difusió més àmplia, sobretot en nuclis de població laics, que tenen un coneixement menys acurat, i fins i tot nul, del llatí.[50]

Moltes d'aquestes tècniques foren el resultat d'aplicar els coneixements teòrics impartits a les universitats o a les escoles especialitzades. La música, sobretot l'estudi de l'harmonia, per exemple, estava vinculada a les matemàtiques. S'abandonà el *cant pla* i es passà a l'*organum*, el *discant* i la *polifonia* actual, que s'escriu nota per nota.

L'astronomia i la trigonometria entren a formar part del corpus de matèries que s'ensenyen a la Universitat d'Oxford. La primera està íntimament lligada amb l'astrologia, que té una importància notable no només entre la classe popular, sinó també entre els mandataris polítics i religiosos. Els primers títols que s'imparteixen són els de «mestre en arts i medicina» i «batxiller en teologia». La geometria solament es desenvolupa per la seva relació amb l'astronomia, la trigonometria i l'agrimensura, però no com una disciplina teòrica d'interès per si mateixa.



Una pàgina de les Homilies d'Organyà, un dels primers textos escrits en català

En aquest període, els artistes més teòrics descobreixen els principis de la perspectiva, però caldrà esperar el Renaixement perquè aquesta s'imposi. Ho farà gràcies als estudis de Leon Battista Alberti (1404–1471), Leonardo da Vinci (1452–1519) i Albrecht Dürer (1471–1528).

També és l'època en què apareixen les primeres cartes marines i els mapes: per exemple, l'any 1436, Andrea Bianco elabora el seu *Atlas*.

4.8 La impremta de caràcters mòbils

Cal indicar, finalment, que l'edat mitjana s'acaba precisament amb l'aparició de la impremta de caràcters mòbils, que tingué la virtut de facilitar una difusió més àmplia dels textos i alhora originà l'establiment d'una lexicografia i una iconografia més extenses. Això ajudaria a consolidar les llengües vernacles:

50 Recordem, per exemple, la situació d'inferioritat en què es trobà Niccolò Fontana, conegut també amb el sobrenom de Tartaglia, (1500–1557), de família humil, autodidacta i desconeixedor del llatí, en la disputa amb Gerolamo Cardano (1501–1576) i el seu deixeble Ludovico Ferrari (1522–1565), en relació amb la prioritat en la resolució de la cúbica per radicals. Aquest fet fou usat, amb mala volença, per deixar-lo en ridícul en més d'una ocasió.

el lèxic, l'ortografia, la sintaxi, etc., però també fou decisiu en la divulgació i implantació de les tècniques esmentades més amunt.

L'any 1450, Johannes Gutenberg es va associar amb el cal·lígraf Peter Schoeffer, format a París, i el comerciant Johannes Fust, de qui va obtenir 800 florins per finançar la investigació prèvia i la impressió de la Bíblia. De fet, l'invent va ser una tasca conjunta de Gutenberg i Schoeffer —el qual posteriorment va tenir una fecunda carrera com a impressor i va fer servir tipus diferents. Ells foren els qui van aportar la idea i la van desenvolupar. El negoci muntat es deia *Das Werk der Bücher*, i de fet, va constituir la primera impremta tipogràfica moderna de la qual Fust va ser solament l'element capitalista.

JOHANNES GENSFLEISCH ZUR LADEN ZUM GUTENBERG
Magúncia (Alemanya), ~1398 – 3 de febrer de 1468

La impressió de la cèlebre *Bíblia* de 1 282 pàgines de 42 línies, coneguda com la *Bíblia de Gutenberg* —de la qual es van fer 135 exemplars en paper i 45 en pergamí, dels quals es conserven, respectivament, 48 i 12— s'inicià el 1452. Era una versió llatina de la *Vulgata* de Sant Jeroni i s'hagueren de fondre gairebé cinc milions de tipus. L'any 1455, tot just acabada l'edició, la societat es va desfer i Schoeffer i Fust van portar Gutenberg a un plet: els dos es van quedar amb els materials d'impressió i van continuar imprimint altres obres.

A Itàlia, l'edició de llibres s'inicià l'any 1464 i fou introduïda per un espanyol de Valladolid, Juan de Torquemada (1388–1488), el qual era abat del monestir de Subiaco, a prop de Roma. El primer llibre editat a Itàlia, datat l'any 1465, fou un Donato, del qual no queden ni rastre ni exemplars, quelcom lògic si tenim en compte que era un llibre de text per aprendre gramàtica llatina. Després s'editià el *De oratore* de Ciceró, sense data, i d'altres.

El llibre més antic a la península Ibèrica del qual es té notícia, imprès el 7 d'octubre de 1468, és *Pro condendis orationibus justa grammaticas, leges, literatissimi auctoris* de Bartomeu Mates. Va ser imprès en una premsa ambulant, a Barcelona. I potser la impremta fixa més antiga establerta a Barcelona fou la de Joan de Salzburg i Paul Hurus (o Pau de Constança). El 12 de desembre de 1475, s'hi editià els *Rudimenta grammaticæ* de Perotti. I la primera persona del país que tingué taller tipogràfic propi fou el prevere Pere Posa, que fou també llibreter i signà colofons des del 1482. Fou l'editor de la *Suma de la art de arismetica* de Santcliment.

A València, el primer editor fou el flamenc Lambert Palmart, deixeble de Gutenberg, i el primer llibre imprès fou *Les obres o trobes dauall scrites les quals tracten de lahors de la sacratíssima Verge Maria*, de 1474, escrit en una llengua diferent del llatí. Un any més tard s'establia el taller de Jacob Vozlant on, el 23 de febrer de 1475, s'imprimí el *Comprehensorium* de Johannes.[51]

4.9 Aïllament de les influències de l'islam

Observem finalment que, a la darreria de l'edat mitjana, l'islam es troba ja en una situació de total decadència, tant política com cultural. Les derrotes sofertes pels musulmans a la península Ibèrica a mans dels *reconqueridors*, els quals l'any 1492 van aconseguir d'expulsar-los definitivament de la península, i les derrotes davant les tropes bizantines, els pobles del nord d'Europa i, finalment, els turcs, van aconseguir de minar la seva puixança, provocant escissions i lluites internes que finalment van anorrear l'islam, com a element decisiu de la història dels segles XIV i XV. D'altra banda, les croades, amb tot el que havien tingut de positiu per a Occident amb l'intercanvi de mercaderies, costums i coneixements de tota mena, feia ja més d'un segle que s'havien acabat.

Europa s'havia quedat, doncs, aïllada de les influències orientals i el seu futur depenia del propi esforç, i havia de trobar dintre seu l'impuls necessari per fer un pas endavant tant políticament com socialment i cultural. Aquest pas endavant és el Renaixement, un període en el qual els pobles d'Europa i, en particular, els d'Itàlia, França, Alemanya i els Països Baixos, aconseguiren consolidar les ciències i les arts, la medicina, la navegació, l'art de la guerra, la filosofia, el dret, la literatura, etc. Aquesta naixença es veurà alimentada per les obres clàssiques llatines, però sobretot per les de la Grècia clàssica, molt més desconegudes. Són obres que, l'any 1453, amb l'emigració provocada per la caiguda de Constantinoble en mans dels turcs, arriben parcialment a Europa. Moltes s'havien perdut definitivament i irremissiblement.

Però precisament a les acaballes de l'edat mitjana, pel que fa a les matemàtiques, es farien uns passos molt importants, alguns vinculats a la matemàtica grega —com el redescobriment dels textos d'Arquimedes, Apol·loni i Diofant— i d'altres, en canvi, independents d'aquesta influència. Un dels passos aliè a la influència grega consistiria en la consolidació del sistema de numeració indoaràbic, quelcom que era una assignatura pendent des del segle XIII. I les aritmètiques comercials del segle XV foren, en aquest afer, decisives.

5 L'aprenentatge de l'art de l'algorísmia

La crisi econòmica del segle XIV va portar a una reestructuració i reorganització del sistema comercial i bancari. Així, per exemple, Cosimo Medici (1389–1464) aconseguia aixecar un imperi comercial i industrial basat en el model nou.

51 Autor de qui s'ignora el cognom.

Aquest model consistia fonamentalment en el fet de substituir les companyies amb sucursals per companyies amb filials. Això significa que un mateix grup capitalista —que, com abans, és essencialment un grup familiar— controla companyies que, des d'un punt de vista jurídic, són independents: és el que avui anomenem un *hòlding*. El sistema resultava més flexible en el sentit que un fracàs local no comportava necessàriament la fallida del conjunt.

Però la complexitat dels negocis obligava a mantenir una correspondència i comptabilitat importants. A més, els capitals que s'arriscaven s'havien d'assegurar. Això féu que apareguessin les companyies d'assegurances que, amb el pas del temps, forçarien l'estudi estadístic aprofundit de certs fenòmens naturals —la vida i la mort, les tempestes i els naufragis dels vaixells, els riscos de robatoris, les pèrdues accidentals i les minves de tota mena en els llargs viatges a què es veien sotmeses les mercaderies— i de les possibilitats d'èxit i fracàs en qualsevol mena d'empresa —l'establiment d'un negoci, la realització de viatges transoceànics, l'eventualitat de la victòria o de la derrota en una guerra, etc.[52]

5.1 Luca Pacioli

LUCA PACIOLI
Sansepolcro (Itàlia), 1445–1517

Tot això comportà que, a la darreria de l'edat mitjana, els contractes d'assegurances tinguessin un creixement notable alhora que apareixia un sistema nou per dur els comptes: la *comptabilitat per partida doble*. En aquesta tècnica comptable, cada operació té *dues entrades*; en una es col·loca allò que es té —és l'*haver*— i, en l'altre, allò que es deu —és el *deure*. Cal que el saldo sigui sempre nul. Una de les originalitats de l'aritmètica de Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494), no és pas el coneixement de la comptabilitat de partida doble, sinó el fet d'introduir una tècnica més que secular en el seu manual, adreçat fonamentalment als comerciants, com una nova eina de càlcul imprescindible. Dins del sistema comercial de l'època feien falta formes de pagament, i això féu que les grans companyies comercials italianes i, més tard, les holandeses, fonamentalment, fossin alhora companyies bancàries dedicades al préstec i a l'intercanvi. Cal tenir present la diversitat de monedes i de llengües a Europa a la darreria de l'edat mitjana. Aquest fet féu que entressin en joc les *lletres de canvi* amb l'objectiu de fixar la devolució, en una data, lloc i moneda determinats, d'un

52 Recordem que el primer tractat pròpiament estadístic fou elaborat per John Graunt (1620–1674), l'any 1662. És el tractat clàssic *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, un text en el qual, de l'anàlisi de les partides de defunció de la ciutat de Londres i la seva rodalia, Graunt aconsegueix establir algunes conclusions sobre l'esperança de vida.

préstec fet en un moment anterior, en un altre indret i amb una moneda diferent. Així doncs, les lletres de canvi esdevenen alhora una forma de canvi de moneda, de transferència bancària i de crèdit.

Un exemple de lletra de canvi és:

> En el nom de Déu, el 18 de desembre de 1399, per aquesta lletra de venciment, pagareu a Brunancio di Guido i Cia., al seu venciment, CCCCLXXII lliures amb X sous de Barcelona. Aquestes 472 lliures i 10 sous, que valen 900 escuts a 10 sous i 6 cèntims per escut, m'han estat pagades per Ricard degl'Alberti i Cia. Pagueu-les de bona gana i de forma correcta i poseu-les al meu compte. Que Déu us guardi. Ghuiglielmo Barbieri. Salut des de Bruges.[53]
>
> [5, edició castellana de 1991, p. 228]

5.2 Leonardo da Pisa, Fibonacci

Aquest nou sistema econòmic, de préstec i mercat, necessitava l'escriptura i també un coneixement clar de les tècniques de càlcul. Això darrer ho proporcionava l'*art de l'algorísmia* o *art de l'algorisme*. Calia dominar l'art de «les lletres i les xifres». Era un ofici que calia aprendre i que, per tant, calia ensenyar. I, malgrat que el pare de Leonardo da Pisa ja s'havia adonat d'aquesta necessitat a final del segle XII i havia fet tot el que calia per tal que el seu fill l'aprengués, podem afirmar que fou una preocupació aïllada que no trobaria el ressò degut fins als segles XIV i XV, quan l'edat mitjana es trobava ja a les acaballes.

LEONARDO DA PISA, FIBONACCI
Pisa (Itàlia), 1170–1250

No obstant això, Fibonacci va elaborar un text, el *Liber abaci*, que pretenia satisfer aquesta necessitat i alhora omplir un buit existent a l'Europa llatina de l'època. Fou, però, un text massa elaborat i complex per a l'època en què fou escrit, amb més de sis-centes pàgines. A més de la introducció a l'algorísmia índia, oferia una quantitat enorme d'aplicacions en forma de problemes concrets, i tancava el text amb un capítol dedicat a l'àlgebra.

A l'obra de Guglielmo Libri (1838) hi podem llegir:[54]

---

53 El venciment d'una lletra era el termini habitual del seu cobrament d'un lloc a un altre. Al segle XV, entre Bruges i Barcelona, el venciment habitual era de trenta dies. Una lletra de canvi com la que descriu P. Benoit servia per satisfer operacions de canvi de moneda: la moneda era entregada en una ciutat amb la moneda pròpia d'aquella ciutat i, en un altre lloc, hom cobrava un valor equivalent a l'entregat però amb la moneda local. També servia per fer transferències i era una eina adequada per establir crèdits. Es convertí en un dels instruments essencials del comerç italià de final de l'edat mitjana.

54 Vegeu [30, volum II, p. 289–290]. Aquest índex el podem comparar amb l'índex de l'*Arismetica* de Santcliment que es troba detallat a la introducció de na Joana Escobedo. És interessant d'observar l'enorme semblança de l'un amb l'altre fins que arribem als capítols 14 i 15 del *Liber abaci*. Com ja he indicat abans, l'obra barcelonina no els conté pas. La raó, com he dit també, és

> Leonardo Fibonacci, o Leonardo da Pisa, va escriure el seu *Liber abaci* l'any 1202. La seva obra, similar pel seu contingut als tractats dels segles XIV i XV, està escrita en llatí.
>
> Índex del *Liber abaci* de Leonardo da Pisa (1202)
>
> 1. Les nou figures de l'Índia, les xifres i la numeració
> 2. La multiplicació dels enters
> 3. L'addició
> 4. La sostracció
> 5. La divisió
> 6. La multiplicació d'enters, la introducció de les fraccions, i la multiplicació de fraccions
> 7. L'addició, la sostracció, la divisió d'enters i fraccions i la reducció a comú denominador
> 8. Les compres i les vendes
> 9. Les barates (intercanvis)
> 10. Les societats
> 11. El canvi de moneda
> 12. La solució d'un bon nombre de problemes
> 13. La regla de Chatayn que permet de resoldre problemes diversos.
> 14. L'extracció d'arrels quadrades i cúbiques i les operacions amb arrels.
> 15. La geometria i les qüestions de l'àlgebra

La comprensió del text «exigia dels mercaders una formació massa elevada».[55] Era, no em cansaré de repetir-ho, una obra notable. Fou precisament la seva pròpia vàlua, excessiva per als estàndards del segle XIII, allò que la va perjudicar. El *Liber abaci* no tingué el ressò que li corresponia i els seus continguts restaren gairebé oblidats del tot, malgrat que, com indica Beaujouan,

> L'obra del pisà no seria superada fins als anys 1556–1660, amb la publicació del *Trattato* de Niccolò Tartaglia.[56]

Això va fer que se n'efectuessin resums en italià que afavorien la difusió i comprensió dels apartats fonamentals que, als segles XIV i XV, eren estrictament *algorísmics*. Les qüestions algèbriques superaven amb escreix els interessos immediats dels calculistes i dels mercaders. Però, en canvi, nasqué tot un sistema de formació dels futurs mercaders italians de Pisa, Gènova, Venècia i, sobretot, Florència. Als set anys, els nens entraven en una escola en la qual, en dos o tres anys, aprenien a llegir, a escriure i les parts més rudimentàries de la gramàtica. Després, un cop assimilat aquest primer aprenentatge, venia l'estudi de l'àbac, entenent amb aquesta paraula *l'art de calcular*.

Ens trobem, doncs, que la paraula *àbac* va adquirir precisament el significat que Fibonacci li havia atribuït, irònicament, al *Liber abaci*. L'àbac no és ja

perquè no hi ha gens ni mica d'àlgebra, tal com l'he descrit a la secció 3.3.

El més notable de tot, però, és el fet que entre el *Liber abaci* del pisà i l'*Arismetica* del barceloní han passat 282 anys. És moltíssim temps, fins i tot en aquella època en què els avenços eren més lents i molt menys espectaculars del que ho serien a partir del segle XVII fins ara. La precocitat del *Liber abaci* és quelcom realment sorprenent. La seva anàlisi aprofundida i comparada —també ho he repetit a bastament— aclariria moltíssim els lligams que hi ha entre uns textos i els altres.

55 Vegeu [4, edició castellana de 1988, p. 675].

56 Vegeu [4, edició castellana de 1988, p. 675].

la tècnica de càlcul basada en el giny físic conegut com a *àbac*. És l'*art de l'algorisme*, basat en l'escriptura i en les xifres indoaràbigues. S'ensenyava, doncs, l'aritmètica i, també, tot allò que «era útil per al comerç».

5.3 Les escoles de l'àbac

Aquest ensenyament el duien a terme preceptors o mestres, però sempre a grups reduïts. Paul Benoit ofereix una descripció força detallada i clara de la situació. La reprodueixo ara i aquí *in extenso*:

> Nicolas Chuquet, abans de ser qualificat d'«algorismista» en els llibres fiscals de Lió, apareix com a «escriptor», un nom que s'acostumava a donar a Lió als que ensenyaven als fills dels patricis i dels grans comerciants. Luca Pacioli (1445–1517), autor d'una *Summa Arithmetica* impresa a Venècia l'any 1494, va començar la seva carrera com a preceptor dels fills d'Antonio Rompiani, un mercader venecià ric.
>
> Però a les ciutats italianes els futurs comerciants passaven gairebé tots per l'escola. A Florència, segons el cronista Giovanni Villani, l'any 1338, «[...] els nens que estaven aprenent l'àbac i l'algorísmia a sis escoles eren de mil a mil dos-cents». Unes xifres realment impressionants per a una ciutat amb menys de cent mil habitants i, probablement, excepcionals a causa de la importància de Florència com a ciutat mercantil i com a centre intel·lectual. Però, l'any 1345, a Lucca hi havia escoles públiques de l'àbac; a Milà, l'any 1452, trenta-set homes de negocis van enviar una petició al duc per tal que financés l'ensenyament de la comptabilitat dels seus fills; l'any 1486, a Gènova, l'Art de la Llana, agrupació de productors i comerciants de productes tèxtils de llanes, va obrir una escola.
>
> Les escoles florentines són les més conegudes a causa, sens dubte, de la importància de la ciutat, però també perquè l'ensenyament de les matemàtiques hi tenia un lloc especial. Àdhuc els venecians, competidors de Florència i sovint enemics seus, reconeixen la superioritat de la ciutat toscana pel que fa a aquesta matèria. D'acord amb el que sabem, sembla que les escoles florentines, les *botteghe dell'abbaco*, les botigues del càlcul, eren privades. A mitjan segle XIV, Maestre Paolo dell'Abbaco era propietari de la seva escola. La va llegar a un amic i col·lega seu. L'herència comprenia un local i el material útil per a l'ensenyament. Aquest testament, millor que cap altra font, mostra amb claredat la vida d'un matemàtic florentí del segle XIV. Redactat l'any 1367, probablement poc temps abans de la seva mort, mostra un home acomodat, propietari de dues cases a la ciutat i d'una tercera, al camp, amb un capital estimat d'uns 1 000 florins, aproximadament, en una època en què un servent guanyava anualment 10 florins, un paleta, 40, i un notari, aproximadament, 300. Una fortuna gens menyspreable. Entre els marmessors del seu testament, hi figura un mestre de l'àbac i també un ric mercader de sedes. Els documents posen de manifest que Paolo no era pas una excepció entre els seus col·legues. Amb menys fortuna que els grans mercaders que freqüentaven, els mestres de l'àbac amb renom posseïen rendes superiors a les dels artesans, un fet que els col·locava entre els rics de la classe mitjana.
>
> D'altres, al contrari, tenien un nivell de vida inferior [...] Un contracte de 1517 mostra les condicions de contractació d'un jove docent per part d'un mestre de major renom, Francesco Galigai, que necessitava un adjunt: la condició

> del que comença és d'allò més mediocre. El sou mínim que se li garanteix és el d'un peó de la construcció. A Florència hi ha un grup de professors professionals, que viu de les matemàtiques i, més concretament, del càlcul. La seva posició és reconeguda i estimada a la ciutat. A final del segle XV, un florentí, Luca Landucci, en definir els homes «més notables i valuosos» de la seva ciutat, cita, al costat de Cosimo Medici, set artistes, dos bisbes, però també dos mestres de càlcul. [5, edició castellana de 1991, 229–230]

No ens ha de sorprendre, doncs, que, durant els segles XIV i XV, les aritmètiques per a mercaders proliferessin d'una manera tan espectacular. L'any 1340, Paolo Dagomari dell'Abbaco en va escriure una —no fou pas l'única ni molt menys—, que seria amb diferència la *més cèlebre*. I, amb l'aparició de la impremta, les aritmètiques van ser considerades prioritàries a l'hora d'editar obres matemàtiques. Eren socialment i culturalment atractives però, a més, resultaven econòmicament rendibles per als editors.

5.4 Les primeres edicions de textos matemàtics

Tot aquest procés ens permet de justificar la taula 1 i la necessitat i la importància de les aritmètiques comercials del segle XV.

El primer llibre de matemàtiques que es va imprimir va ser un tractat d'aritmètica comercial, publicat a Treviso, Itàlia, l'any 1478,[57] seguit d'un degoteig constant durant la segona meitat del segle XV d'edicions d'aritmètiques mercantils, un fet que posa de manifest la consideració que se'ls va concedir. Segons consta al *Catalogue of Books Printed in the Fifteenth Century*,[58] de la trentena de llibres d'aritmètica impresos abans del 1500, 14 foren editats a Itàlia, 11 a Alemanya, 2 a França, 1 a Espanya i un altre als Països Baixos. La majoria d'aquests llibres eren d'aritmètica mercantil i anaven adreçats als comerciants.

L'aritmètica de Treviso s'editià a la petita ciutat de Treviso, situada a un dia de camí de Venècia. Domenico Maria Federici Manzolino va establir-hi tres impremtes i féu nombroses edicions. Entre aquestes es troba la famosa aritmètica anònima, de la qual es conserven encara vuit exemplars. De fet, les edicions d'aquesta mena d'obres aritmètiques està vinculada a les «ciutats més riques i econòmicament més desenvolupades, és a dir, a les ciutats del nord d'Itàlia i a les d'Alemanya, que són les ciutats en què treballen els autors més notables d'aquest període» [32, p. 47]. Algunes de les obres aritmètiques més notables d'aquest període les he posat de relleu a la taula 1 i, com ja he indicat abans, he marcat amb un $*$ aquelles que no foren editades. Se n'han conservat, però, els manuscrits. No obstant això, uns i altres —com ara la *Triparty* de Nicolas Chuquet— són textos que he considerat d'interès per la seva notòria importància i la seva qualitat expositiva i de continguts.

Aquesta obra conté la *regla dels primers o les belleses de l'àlgebra*. Hi llegim textualment:

57 La primera edició dels *Elements* d'Euclides no tingué lloc fins quatre anys més tard. Es publicaria a la impremta de Ratdolf de Venècia.

58 El lector interessat pot consultar també l'obra de D. E. Smith [51], on trobarà una descripció de les aritmètiques comercials del segle XIII al segle XVI de la Plimpton Library.

> Com diu Boeci en el seu llibre primer o capítol primer, la ciència dels nombres és molt gran i, entre les ciències del *quadrívium*, és de la que tot home n'ha de ser, si se li pregunta quelcom, diligent. En una altra banda diu que la ciència dels nombres s'ha de preferir per ser adquirida com a coneixement abans de qualsevol altra, tant per la necessitat que d'ella es té com pels grans secrets i altres misteris que són propis de les propietats dels nombres. Totes les ciències tenen relació amb ella i, en canvi, ella no precisa de cap altra ciència. I per això és una ciència d'una gran utilitat i d'una gran necessitat. És útil tant als clergues com als laics. Molts savis l'han estudiada per arribar a les subtileses meravelloses i enormes que posseeix. S'han establert moltes lleis una de les quals és la *regla de tres*, que és la dama i senyora de les proporcions dels nombres. És tan recomanable conèixer-la que alguns filòsofs l'han anomenada la *regla daurada*. De manera semblant, de la *regla d'una posició*, per la qual es fan tants comptes bonics i delitosos, és difícil d'estimar-ne la vàlua. També la *regla de les dues falses posicions*, que serveix per inquirir coses molt pregones i d'una subtilesa tan gran que cap de les regles abans esmentades pot assolir. I de forma semblant hi ha la *regla d'oposició i remoció*. Hi ha també la *regla dels nombres intermedis*, de la qual sóc, des de fa poc temps, l'inventor i mitjançant la qual he fet algun càlcul que, amb el mètode de les dues posicions, no podia fer. De totes aquestes regles he fet menció a la primera part del llibre. Però damunt de totes aquestes regles meravelloses, per excel·lència hi trobem aquesta *regla dels primers* que fa el que les altres fan i, a més i sobrepassant-les, comptes innombrables d'una profunditat inestimable. Aquesta és la clau i l'entrada i la porta dels abismes que hi ha a la ciència dels nombres.
>
> [33, les èmfasis són meves]

Val la pena remarcar que en aquesta exposició es barregen qüestions relatives a l'aritmètica de les propietats dels nombres naturals en la línia dels llibres VII, VIII i IX dels *Elements*, qüestions de logística, qüestions d'algorísmia i comercials i, finalment, les més importants, qüestions d'àlgebra. Recordem que la darrera part —és a dir, la tercera part— es titula concretament *Comment la science des nombres peut servir au fait de merchandise*. Això palesa la voluntat explícita de l'autor d'aconseguir que el text fos útil als qui estudiaven l'art del comerç.[59]

5.5 Les dues influències geogràfiques possibles

Notem que moltes d'aquestes obres estan escrites en llengua vulgar i no en llatí, a diferència de la literatura científica precedent i, fins i tot, de gran part de la que es publica a la segona meitat del segle XV. Això posa de manifest que no estaven pensades per anar adreçades al públic universitari, coneixedor del llatí, ni tampoc als erudits, sinó a un públic per al qual *conèixer i saber* no es confon amb *conèixer i saber la cultura heretada de l'antiguitat*. De fet, el manuscrit de

59 La primera aritmètica purament mercantil [vegeu la nota 8 de la pàgina 47], *Qvesto e el libro che tracta di Mercatantie et vsanze de paesi*, fou editada tres anys després de la de Treviso. El seu autor fou, segons sembla, Giorgio Chiarino, del qual no se sap res. L'obra és una simple compilació de les mesures i dels usos dels canvis de moneda. Està desenvolupada d'acord amb les necessitats dels comerciants de Florència i no fa cap mena de referència a altres qüestions. És possible que Pacioli n'adoptés parts notables.

1430 està escrit en occità, i aquest i el text posterior de Pellos són les úniques aritmètiques escrites, durant el segle XV, en llengua d'oc antiga. És una de les raons que m'han induït a incloure'ls a la taula 1. Segons diu Sesiano, «hi ha quatre tractats que tenen alguns trets en comú amb aquesta aritmètica». Tres d'aquests són els de Pellos, Santcliment i Chuquet. A més, el darrer, malgrat haver estat editat l'any 1484, fou escrit l'any 1460, és a dir, vint-i-dos anys abans de la publicació del text de Santcliment.

Entre la major part de les obres esmetades a la taula 1 hi ha interrelacions clares. El problema sorgeix quan es planteja si hi ha una o dues vies d'influència: una de francesa —que podria tenir els orígens a l'Occitània— i l'altra italiana.[60] Entre les obres franceses hi ha lligams evidents que podem constatar perquè alguns dels problemes i mètodes de resolució es repeteixen. Els dos textos escrits en llengua d'oc influiren, sens dubte, Santcliment. Els textos italians estan influïts pel de Treviso i pel de Chiarino (nota 59), però el de Luca Pacioli té, en canvi, influències de la *Triparty*, d'arrel francòfona.[61] Tampoc no hi ha cap estudi comparatiu aprofundit que estableixi les dependències amb el *Liber abaci* de Fibonacci que, com ja he indicat, s'havia avançat un segle i mig. De fet, el *Liber abaci* està més a prop dels textos de Santcliment, Chuquet, Pellos, o Pacioli que no pas dels textos de Sacrobosco i Villedieu, que són els de la seva època. El *Liber abaci* conté moltíssimes aplicacions aritmètiques i geomètriques. Sense cap mena de dubte, havien d'influir d'alguna manera —i ho van fer— en les aritmètiques ulteriors.[62]

5.6 Els dos àmbits de la matemàtica

Tots aquests llibres, però, eren escrits amb finalitat pràctica. Nicolas Chuquet volia aplicar la ciència dels nombres al comerç. Jehan Certain ambicionava que el seu text fos «guia, ensenyament i aclariment per als comerciants en el saber de l'art de comptar...». Borghi escriu que pretén elaborar una obra adreçada «als joves que volen dedicar-se al comerç». Francesc Santcliment, si bé no fa cap manifestació d'aquesta mena, ho deixa ben clar des de bon començament quan enumera les quinze parts de què consta l'obra. De fet, el tronc d'aquestes obres és comú. Tanmateix, però, entre les unes i les altres trobem diferències essencials. N'hi ha algunes que es limiten a l'aritmètica en el sentit més estricte de la paraula. Per resoldre els problemes més diversos, recorren solament a la *regla de tres* i a les *regles de falsa posició* i de *doble falsa posició*. Aquestes

60 En aquest sentit podem llegir detingudament les opinions de Malet, a [47], i la introducció a l'edició facsímil de Joana Escobedo, a [48]. Malgrat que hi ha una certa coincidència, no sempre defensen les mateixes opinions. Aquesta diferència d'opinions és, com sempre, el que fa que la qüestió sigui realment interessant i el seu estudi necessari.

61 Al meu entendre, malgrat els treballs existents, cada cop més copiosos, manca un estudi comparatiu aprofundit de les interrelacions de totes les aritmètiques europees d'aquest període, una tasca força interessant però no pas tan simple i elemental com pot semblar en una primera valoració.

62 Val a dir que, a les obres [15, 27, 50], s'hi poden trobar alguns del lligams que hi ha entre aquests textos i el *Liber abaci*.

regles són, de fet, els recursos de l'aritmètica quan s'evita l'àlgebra.[63] No els cal, doncs, introduir ni el llenguatge ni les tècniques de l'àlgebra.

Això, no obstant, no impedí que d'altres introduïssin l'*àlgebra de les incògnites* —una tècnica que havien introduït i consolidat els matemàtics àrabs— i la seva manera de resoldre els problemes fos, en essència, diferent de la dels problemes d'aritmètica comercial, com ja he indicat a la secció 3.3, quelcom que obligava els seus autors a introduir una *simbologia* més idònia a la resolució algèbrica. Serà precisament gràcies a aquesta recerca de símbols adequats com anirant apareixent els signes algèbrics actuals. Per exemple, els signes + i − els trobem per primera vegada a l'aritmètica de Johann Widman (~1460). No tenen el significat d'operadors aritmètics, sinó que són simples abreujaments tipogràfics que indiquen l'excés o defecte de determinades quantitats de mercaderies. El signe $\sqrt{\ }$ per indicar les arrels s'introdueix a l'obra *Coss* (1525) de Christoff Rudolff (~1499–~1545). Els signes per a les incògnites sofreixen diverses variacions —cada autor adopta un simbolisme propi— fins que finalment, amb François Viète (1540–1603) i René Descartes, es consolida el simbolisme actual. El símbol = per designar la *igualtat* fou introduït, l'any 1557, per Robert Recorde (1510–1558) de Cambridge en el primer tractat d'àlgebra anglès, *The Whetstone of Witte*. Usa aquest símbol, diu, «perquè no hi ha res més igual que dues línies paral·leles iguals».

El camí de l'àlgebra s'inicia, doncs, a la fi del segle XV i es consolida l'any 1637 amb l'aparició de *La géométrie* de René Descartes, sense oblidar les aportacions de Pierre de Fermat (1601–1665).

I, malgrat que les aritmètiques comercials són, considerades des del punt de vista de la profunditat matemàtica, força elementals, la seva importància històrica a final del segle XV —com ha quedat ben palès— fou notable. A més eren textos vinculats a una llengua concreta i, en el cas de la *Suma de la art de arismetica* de Santcliment, a la nostra: el català. Això féu que —cada una d'elles en el seu àmbit lingüístic— consolidessin una certa terminologia que ja no s'abandonaria.

Val la pena, doncs, dedicar una estona a analitzar-ne els continguts, tant els simplement aritmètics i algorísmics, com els d'índole més aplicada. Això és el que proposo —i que faré— en la segona part d'aquest article, que es publicarà properament en aquest *Butlletí*.

63 En aquest sentit és d'interès [32]. En aquesta publicáció, el títol de la qual és prou suggerent, els autors pretenen fer una presentació històrica dels orígens de l'àlgebra simbòlica a Europa. Això els porta a fer una anàlisi succinta d'alguna d'aquestes aritmètiques i a veure que s'estableix una clara diferenciació entre aritmètiques com ara la de Santcliment —encara no hi ha l'ús explícit de l'àlgebra— i la de Chuquet —on l'àlgebra té un paper clau.

Referències

[1] ALLARD, André. «L'époque d'Adélard et les chiffres arabes dans les manuscrits latins d'arithmétique», a [10, p. 7–43].

[2] ALLARD, André. *Le calcul indien (Algorismus).* París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1992.

[3] BARZUN, Jacques. *From dawn to decadence: 500 years of western cultural life, 1500 to the Present.* Nova York: Harper Collins, 2000. Traducció castellana de J. Cuéllar i E. Rodríguez Halffter, *Del amanecer a la decadencia: 500 años de vida cultural en Occidente (de 1500 a nuestros días).* Madrid: Taurus, 2001.

[4] BEAUJOUAN, Guy. «Chapitre VIII. La science dans l'occident médiéval chrétien», a [57, p. 624–695].

[5] BENOIT, Paul. «Calcul, algèbre et merchandise», a [49, p. 197–221].

[6] BENOIT, Paul; CHEMLA, Karine; RITTER, Jim. *Histoire des fractions, fractions d'histoire.* Basilea: Birkhäuser, 1992.

[7] BERGGREN, J. L. *Episodes in the mathematics of medieval Islam.* Nova York: Springer, 1986.

[8] BONCOMPAGNI, Baldassarre. «La révolution arithmétique du Moyen age». *Atti dell'Accademia Pontificia dei Nuovi Lincei*, vol. 14 (1862/1863).

[9] BOYER, Carl Benjamin. *A history of mathematics.* Nova York: John Wiley & Sons, 1968. Revisat per Uta C. Merzbach el 1989. Traducció castellana de la primera edició de Mario Martínez Pérez, *Historia de la matemàtica.* Madrid: Alianza, 1986.

[10] BURNETT, Charles [ed.] *Adelard of Bath. An english scientist and arabist of the early twelfth century.* Londres: Warburg Institute, 1987.

[11] BURTON, David M. *The history of mathematics. An introduction.* Nova York: McGraw-Hill, 1989. Reeditat profusament el 1991, 1995, 1997, 2003 i 2007.

[12] COLEBROOKE, Henry Thomas. *Brahmegupta/Bhaskara. Algebra with arithmetic and mesuration from the sanscrit.* Londres: John Murray, 1817.

[13] DESCARTES, René. *La géométrie.* Leyden, 1637. Traducció catalana a [14].

[14] DESCARTES, René. *La geometria.* Traducció, introducció i comentaris de Josep Pla i Pelegrí Viader. Barcelona: IEC; Vic: Eumo, 1999.

[15] FLEGG, Graham; HAY, Cynthia; MOSS, Barbara. *Nicolas Chuquet, renaissance mathematician.* Dordrecht: Reidel, 1985.

[16] FRANCI, Raffaella; RIGATELLI, Laura Toti. *Introduzione all'aritmetica mercantile del Medioevo e del Rinascimento: realizzata attraverso un'antologia degli scritti di Dionigi Gori (sec. XVI).* Siena: Quattro Venti. Servizio editoriale dell'Università di Siena, 1982.

[17] GILLISPIE, Charles Coulston. *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scribner's Sons, 1970. 4 v. Nombroses reedicions. Edició consultada de 1991.

[18] HALLIWELL, James Orchrad, [ed.]. *Rara mathematica*. Londres: Samuel Maynard, 1841. Reeditat a Nova York: Georg Olms Verlag, 1977.

[19] HERNÁNDEZ-ESTEVE, Esteban. «Una suma de aritmética anterior a la de Luca Pacioli: La "Suma de la art de arismetica" de Francesch Sanct Climent (Barcelona, 1482)». *Contaduría* [Universidad de Antioquía], 26–27 (1995), 113–176.

[20] HERNÁNDEZ-ESTEVE, Esteban. «El primer libro de matemáticas impreso en España: La "Suma de la art de arismetica" de Francesch Sanct Climent (Barcelona, 1482)». *Técnica Contable*, 47 (1995), 769–774.

[21] HUGHES, B. B. *Robert of Chester's latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. Wiesbaden: F. Steiner Verlag, 1989.

[22] AL-HWĀRIZMĪ, Moḥammad ibn Mūsà. *Hisāb al-muẖtasar fī ẖisăb al-ğabr w'al-muqābala*. Bagdad: *Dar al-Hikma*, 813. Traduccions angleses a [42] i [21]. Traducció castellana a [37].

[23] IFRAH, Georges. *Histoire universelle des chiffres*. París: Seghers, 1981. Traducció castellana *Historia universal de las cifras*. Madrid: Espasa-Calpe, 2002.

[24] KARPINSKI, Louis C. *Robert of Chester's latin translation of the Algebra of al-Khowarizmi*. Nova York: Macmillan, 1936. Reeditat a Ann Arbor: University of Michigan Press, 1930.

[25] KARPINSKI, Louis C. «The first printed arithmetic of Spain. Francesch Sanct Climent. *Suma de la art de arismetica*. Barcelona 1482». *Osiris*, 1 (1936), 411–420.

[26] KARPINSKI, Louis C. *The history of arithmetic*. Nova York: Russell & Russell, 1965.

[27] L'HUILIER, Hervé [ed.]. *Nicolas Chuquet. La géometrie*. París: Vrin, 1979.

[28] Leonardo da Pisa. *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*. Edició de Baldassarre Boncompagni. Roma: Tipografia delle scienze matematiche e fisiche, 1857. Conté: 1) *Il Liber abaci*. 2) *Leonardi Pisani Practica geometriæ*.

[29] Leonardo da Pisa. *Fibonacci's Liber abaci*. Traducció anglesa del *Liber abaci*, de Laurence Sigler. Nova York: Springer, 2002.

[30] LIBRI, Guglielmo. *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la rénaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, París: J. Renouart, 1838/1841. 4 v.

[31] Malet, Antoni; Paradís, Jaume. «500 aniversari de la primera aritmètica impresa a Catalunya i a la península Ibèrica». *Ciència*, 19 (1982), 550–554.

[32] Malet, Antoni; Paradís, Jaume. *Els orígens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*. Barcelona: Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, 1984.

[33] Marre, Aristide. «Notice sur Nicolas Chuquet et son Triparty en la science des nombres». *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 13 (1880), 555–592.

[34] Marre, Aristide. «Le Triparty en la science des nombres par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien». *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche*, 13 (1880), 593–658, 693–814.

[35] Marre, Aristide. «Appendice au Triparty en la Science des Nombres par Maistre Nicolas Chuquet, Parisien». *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, 14 (1881), 413–460.

[36] Menninger, Karl. *Zahlwort und Ziffer: eine Kulturgeschichte der Zahl*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht Publishing Company, 1957. Traducció anglesa revisada de Paul Broneer: *Number words and number symbols*. Cambridge: MIT Press, 1969. Reeditada a Nova York: Dover, 1992.

[37] Moreno Castillo, Ricardo. *El libro del álgebra*. Madrid: Nivola, 2009.

[38] Paradís, Jaume; Malet, Antoni. «El primer llibre de matemàtiques a Catalunya». *L'Avenç*, 51 (1982), 493–495.

[39] Pellos, Francés. *Compendion de l'abaco*. Montpeller: Editions de la Revue des Langues Romanes. Université de Montpellier, 1967. Transcripció i comentaris filològics de Robert Lafont i comentaris matemàtics de Guy Tournierie.

[40] Pla, Josep. «Panoràmica del sistema decimal posicional des dels orígens indis a l'*Arismetica* de Santcliment». *Rvbrica. Paleographica et Diplomatica Studia*, vii (1998), 101–256.

[41] Planudes, Maxime. *Le grand calcul selon les indiens*. A cura d'André Allard. Louvain-la-Neuve: Université Catholique de Louvain, 1981.

[42] Rosen, Frederic. *The Algebra of Muhammed ben Musa*. Londres: Oriental Translation Fundation, 1831.

[43] Sacrobosco, Johannes. *Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius*. Amb un prefaci de Maximilianus Curtze. Hauniæ (Copenhaguen): A. F. Host, 1897.

[44] Sacrobosco, Johannes. «Algorismus vulgaris», a [18, p. 1–28].

[45] Sánchez-Pérez, José Augusto. *La aritmética en Roma, en India y en Arabia*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Instituto Miguel Asín, 1949.

[46] Santcliment, Francesc. *Suma de la art de arismetica*. Barcelona: Pere Posa, 1482. N'existeixen l'edició comentada i anotada [47] i l'edició facsímil [48].

[47] Santcliment, Francesc. *Suma de la art de arismetica*. Introducció, transcripció i notes d'Antoni Malet. Vic: Eumo, 1998.

[48] Santcliment, Francesc. *Suma de la art de arismetica*. Edició facsímil amb una introducció de Joana Escobedo. Barcelona: Biblioteca de Catalunya, 2008.

[49] Serres, Michel [ed.]. *Éléments d'histoire des sciences*. París: Bordas, 1989. Traducció castellana de Raquel Herrera, Luis Puig, Isabel París, M. José López i Jerónima García: *Historia de las ciencias*. Madrid: Cátedra, 1991.

[50] Sesiano, Jacques. «Une Arithmétique médiévale en langue provençale». *Centaurus*, 27 (1984), 26–75.

[51] Smith, David Eugene. *Rara Arithmetica*. Boston: Ginn & Co., 1908. Reimprès a Nova York: Chelsea, 1970.

[52] Smith, David Eugene. *History of mathematics*. Toronto: General Publishing Company, 1923. Reimprès en dos volums a Nova York: Dover, 1958.

[53] Smith, David Eugene. «The First Printed Arithmetic». *Isis*, 6 (1924), 311–331.

[54] Smith, David Eugene. «The First Great Commercial Arithmetic». *Isis*, 8 (1926), 41–49.

[55] Smith, David Eugene; Karpinski, Louis Charles. *The Hindu-Arabic numerals*. Boston: Ginn & Co., 1911.

[56] Swetz, Frank. *Capitalism and arithmetic. The new math of the 15th century, including the full text of the Treviso arithmetic of 1478*. Traducció de David Eugene Smith. La Salle (Illinois): Open Court, 1987.

[57] Taton, René [ed.]. *La science antique et médiévale (des origines à 1450)*. París: Presses Universitaires de France, 1957. Traducció castellana de Manuel Sacristán: *La historia de la ciencia*. Barcelona: Destino, 1961. Reeditat amb un volum afegit, el volum 18, a Barcelona: Orbis, 1988.

[58] Toomer, G. J. «al-Hwārizmī, Abu Ja'far Moḥammad ibn Mūsà», a [17, vol. 2, p. 1246–1253].

[59] Uqleidisei, Arhmad ibn Ibreaheim. *The Arithmetic of al-Uqleidisei: The story of Hindu-Arabic arithmetic as told in Kiteab al-furseul fei al-rhiseab al Hindei, by Abeu al-rHasan, Arhmed ibn Ibreaheim al-Uqleidisei, written in Damascus in the year 341 (A.D. 952/3)*. Traducció anglesa anotada d'A. S. Saidan, de l'única còpia del ms. 802 de la Biblioteca Yeni Cami, Istambul, escrita pels volts del 1186. Dordrecht: Reidel, 1978.

[60] Viète, François. *Isagoge in artem analyticem*. París, 1591. Traducció francesa de J. L. Sieur de Vaulézard: *La nouvelle algèbre de M. Viète*. París: Jacquin, 1630. Reedició a París: Fayard, 1986.

[61] VILLEDIEU, Alexandre de. «Carmen de Algorismo», a [18, p. 78–83].

[62] WAERDEN, Bartel Leendert van der. *Science awakening*. Nova York: John Wiley & Sons, 1961. Reeditat a Dordrecht: Kluwer, 1961, 1969, 1975 i 1988. La primera edició és de 1954.

[63] YOUSCHKEVITCH, Adolf P. *Les mathématiques arabes (*VIII^{e}-XV^{e} *siècles)*. Traducció francesa de M. Cazenave i K. Jaouiche. París: Vrin, 1976.

DEPARTAMENT DE PROBABILITAT, LÒGICA I ESTADÍSTICA
FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT DE BARCELONA
GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
08007 BARCELONA
jpla@ub.edu