Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 23, núm. 1, 2008. Pàg. 121–172. DOI: 10.2436/20.2002.01.13

Arquimedes, un savi entre la història i la llegenda *

Pedro Miguel González Urbaneja

És impossible trobar en tota la geometria qüestions més difícils i més importants explicades amb termes més senzills i més comprensibles que els teoremes de la intel·ligència sobrehumana d'Arquimedes.
Vides paral·leles. Marcel.

Plutarc

Entre tots els treballs que es refereixen a les disciplines matemàtiques, sembla que el primer lloc pot ser reivindicat pels descobriments d'Arquimedes, que confonen les ànimes pel miracle de la seva subtilitat.
Opera geometrica.

Torricelli

La imaginació no actua menys en un geòmetra que crea que en un poeta que inventa. [...] De tots els grans homes de l'antiguitat, és potser Arquimedes el que més mereix figurar al costat d'Homer.
Discurs preliminar de l'Enciclopèdia.

D'Alembert

Resum Arquimedes és un dels més grans matemàtics de tots els temps, tant per la magnitud de la seva contribució al patrimoni matemàtic de la humanitat com per la genialitat dels seus mètodes. Ja que el *mètode mecànic* d'investigació d'*El mètode* d'Arquimedes apunta històricament cap als indivisibles i infinitesimals de les tècniques de quadratura del segle XVI que varen conduir al descobriment del càlcul infinitesimal

* Aquest article està basat en el text de presentació de l'edició especial dels treballs d'Arquimedes promoguda per la Real Sociedad Matemática Española i el Patrimonio Nacional en ocasió de l'International Congress of Mathematicians que es va fer a Madrid l'agost de 2006.

per Newton i Leibniz, i el mètode demostratiu d'exhaustió apunta cap a les tècniques aritmètiques dels límits que fonamenten l'anàlisi moderna en el segle XIX, la conjunció d'ambdós mètodes, un d'heurístic i empíric i un altre de rigorós i apodíctic, situa Arquimedes en les arrels històriques del càlcul integral.

Paraules clau: mètode mecànic, descobriment, mètode d'exhaustió, apodíctic, heurística, quadratura, cubatura, càlcul integral, esfera, cilindre, conoide, esferoide, cercle, espiral, paràbola.

Classificació MSC2000: 01A20, 01A70.

1 Introducció

El 1906, fa ara cent anys, el brillant hel·lenista i historiador científic J. L. Heiberg, amb gran perspicàcia i sagacitat, descobreix a Constantinoble, en novel·lesques circumstàncies, i exhuma, després d'una formidable labor d'Arqueologia matemàtica, un palimpsest que contenia l'obra perduda d'Arquimedes *El mètode relatiu als teoremes mecànics* (*El mètode*), un tractat singular en el qual el científic de Siracusa revela a la comunitat matemàtica alexandrina, en carta dirigida a Eratòstenes, el mètode mecànic d'investigació que utilitzava en els seus descobriments i que havia omès en tots els restants escrits científics. En contenir la via heurística de la investigació geomètrica d'Arquimedes, prèvia a la demostració per exhaustió, la troballa d'Heiberg ha estat, pot ser, l'esdeveniment més important dels últims temps per al coneixement de la geometria grega.

Arquimedes és el científic grec més citat al llarg de la història. Una copiosa tradició llegendària, immortalitzada per la imaginació èpica dels més egregis literats grecollatins i en part reivindicada per nombrosos escriptors i científics a partir del Renaixement, va elevar la figura d'Arquimedes fins al cim més alt del geni i de l'enginy humans, entre el mite i la realitat, magnificats encara més, en tots els temps, per un generós desplegament d'iconografia arquimediana que ha embellit el personatge fins a cotes quasi hagiogràfiques. No obstant això, el retrat que més interessa és el del pensament d'Arquimedes, plasmat en el segell immarcescible dels seus escrits geomètrics, quelcom que sobreviurà mentre hi hagi ments que continuïn obrint-se camí cap al descobriment de la veritat matemàtica perseguint trobar la demostració de la pròpia veritat. Però més enllà del romanticisme que la literatura ha impregnat en la figura d'Arquimedes, interessa molt a la història de la ciència i sobretot a la història de la matemàtica, la seva ingent contribució a la magnificació del patrimoni matemàtic de la seva època, en un triple vessant: *a*) la pròpia ampliació dels coneixements euclidians, *b*) la consolidació del procediment demostratiu, *c*) l'aplicació d'una eficient metodologia nova en el descobriment matemàtic. En conjuminar el rigor intel·lectual amb l'orientació natural de la intuïció sensorial, Arquimedes transcendeix els esquemes de l'idealisme platònic-euclidià que menyspreava les aplicacions pràctiques de la matemàtica, vincula la investigació teòrica de l'especulació abstracta a les realitzacions tècniques nascudes de la necessitat de resoldre problemes concrets i desenvolupa una concepció matemàtica experimental que inaugura una tradició científica que, represa per Leonardo i Galileu, estableix les bases de la revolució científica del segle XVII, i més enllà d'aquesta, crea la base primigènia de l'essència de la ciència moderna com a nucli incipient de la nostra civilització tecnològica. Arquimedes és un dels egregis titans sobre l'esperit fecund dels quals s'aixecaren altres gegants per albirar el camí que conduiria cap a l'extraordinari progrés de la nostra època.

No ha d'estranyar, doncs, que Arquimedes hagi estat un dels protagonistes estel·lars al Congrés Internacional de Matemàtics, celebrat a Madrid durant l'agost de 2006. I ho ha estat, perquè l'ocasió històrica ho mereixia, mitjançant una nova i impressionant edició crítica, en idioma castellà, d'algunes de les obres del savi siracusà (els dos llibres de *Sobre l'esfera i el cilindre*, *La mesura del cercle* i *La quadratura de la paràbola*) presents en certs manuscrits grecs de la Biblioteca del Monestir d'El Escorial, empresa per la Real Sociedad Matemática Española, el mateix International Congress of Mathematicians (ICM 2006) i el Patrimoni Nacional (custodi de l'original que s'ha reproduït en facsímil). Un exemplar d'aquesta edició especial ha estat el regal institucional de protocol que l'organització del Congrés mundial ha entregat als conferenciants plenaris i invitats de l'esdeveniment.

FIGURA 1: Euclides i Arquimedes, geòmetres. Fragments de frescos de la biblioteca d'El Escorial. Pellegrino Tibaldi, 1586.

2 Arquimedes: vida i obra

Arquimedes és, sens dubte, un dels personatges més coneguts en la història de la cultura, la ciència i la tecnologia. Com a original artífex de nombrosos invents, desenvolupats amb una inefable imaginació i que van enlluernar els seus conciutadans, se'l considera el primer enginyer de l'antiguitat. El seu nom està associat al cèlebre *Principi fonamental de la hidrostàtica* i és un dels creadors de l'*estàtica* on la *llei de la palanca* també porta el seu nom. En l'àmbit de la matemàtica, se'l reconeix com el més il·lustre, eminent i original dels matemàtics grecs, no només per haver engrandit de manera molt considerable el patrimoni geomètric euclidià, sinó també per haver ampliat els horitzons metodològics tant de les vies heurístiques del descobriment matemàtic com dels arguments de la demostració. Però, junt amb el seu prestigi científic, un pensament intuïtiu i rigorós va forjar una extraordinària personalitat com a home de gran inginy tècnic creatiu al servei de la comunitat. Molts dels grans escriptors de l'antiguitat coincideixen a assenyalar que, sense la contribució d'Arquimedes, la seva ciutat natal, Siracusa, no hauria pogut resistir durant tres anys els embats de l'astúcia militar de Marcel. Arquimedes era «home abans que intel·lectual i ciutadà exemplar abans que savi» ([13, p. 12]), però sobretot era [74, p. 64]:

> el més científic de tots els grecs, el savi més profund de tota l'antiguitat clàssica que va saber fondre els ulls de la cara amb els de la intel·lgència i coordinar harmoniosament ambdues visions: l'exterior per contemplar la naturalesa com a font de coneixement i descobrir les seves lleis, i la interior per fer progressar la Matemàtica.

Eloqüents paraules que expressen com la intuïció pitagòrica que la matemàtica podria ser l'instrument clau per desvetllar els misteris de la naturalesa ([49, cap. 3, p. 8]) a la ment d'Arquimedes es converteix en una palmària realitat: la matemàtica és l'instrument fonamental per a una profunda comprensió de la naturalesa, i més enllà de la intel·lecció dels fenòmens naturals, la matemàtica és el llenguatge per a la seva explicació, és a dir, les lleis de la naturalesa són expressables mitjançant els elements de la matemàtica i són perfectament comprensibles quan les lleis físiques s'han reduït a relacions matemàtiques. D'aquesta manera, Arquimedes és l'antecedent directe de Galileu, digne successor seu, com demostra la cèlebre frase de Il Saggiatore (1623) que resumim en l'expressió: *El llibre de la naturalesa està escrit en caràcters matemàtics*.

Arquimedes és un dels pocs científics grecs de qui tenim notícies de la seva vida, ja que han glossat la seva figura els historiadors i escriptors més eximis de l'antiguitat: Polibi, Tit Livi, Plutarc i Ciceró, entre d'altres. Tal vegada siguin aquestes les fonts més fiables, però n'hi ha moltes altres (Valeri Màxim, Sili Itàlic, Giorgio Valla, Eutoci, Zonaràs, Tzetzes) que han vist estimulada la seva fantasia per les sorprenents invencions tècniques, que semblaven subvertir les lleis de la naturalesa, que la tradició ha atribuït a Arquimedes. Malgrat les múltiples fonts, l'única cosa que podem afirmar certament és que Arquimedes

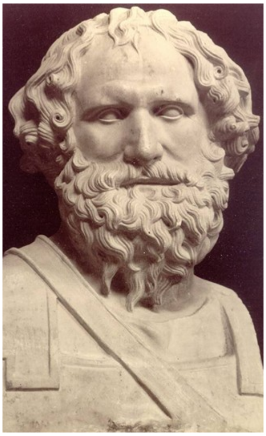


Figura 2: Bust d'Arquimedes. Museu Nacional de Nàpols. És una de les icones més conegudes del geni de Siracusa.

va morir l'any 212 aC en la caiguda de Siracusa en mans del cònsol romà Marcel, durant la segona guerra púnica, després d'un prolongat setge de tres anys en el qual el savi hauria participat brillantment com a defensor, en enginyar espectaculars artilugis militars que, causant el terror a l'enemic, prolongaren de manera considerable la presa de la ciutat.

La llegenda sempre ha rodejat la història d'Arquimedes, i els seus naixement i primers anys no podien estar-ne lliures. Per tal d'enlairar intel·lectualment el personatge des del bressol, algunes fonts àrabs arriben a conjecturar que Arquimedes podia haver estat fill de Pitàgores, contra tota cronologia i amb tan poca base com que Pitàgores ja madur va desenvolupar la major part de les seves doctrines al sud d'Itàlia.

La vida d'Arquimedes s'ha reconstruït sobre la base de fragments de diversos autors, sobretot dels historiadors de les guerres púniques. Per als seus compatriotes, Arquimedes fou un personatge popular, curiós i prestigiós pels seus mèrits científics, per les seves excentricitats i pels originals invents que li atribuïren. Segons el seu mateix testimoni a l'obra *L'Arenari* ([3, p. 137]), ([2, p. 356]), Arquimedes era fill de l'astrònom Fídies, que orientaria, quant a vocació i formació, els seus primers estudis a Siracusa. Segons Diodor Sícul (*Biblioteca històrica*, v. 37), de molt jove es va traslladar a Alexandria, que llavors era el centre més important d'estudis del Mediterrani i el nucli de la cultura hel·lenística amb les seves dues institucions, el museu i la biblioteca. Arquimedes va estar-se algun temps a Alexandria completant la seva formació. En aquest període hauria pogut fer amistat amb certs científics (en particular Conó de Samos, Dositeu de Pelusa i Eratòstenes de Cirene) a qui, de tornada a Siracusa, dirigirà posteriorment els seus tractats.

Sorprèn que Arquimedes, amb la seva vocació estudiosa i investigadora, no restés a Alexandria, on tenia un empori científic institucional a la seva disposició. Es pot conjecturar que fou la crida del rei Hieró, entestat a afavorir la cultura a la seva terra natal, el que el va induir a tornar a la seva pàtria (Plutarc, Marcel, XIV.8). No obstant això, els motius que van impel·lir Arquimedes a abandonar Alexandria poden ser d'índole encara més profunda que el mateix patriotisme, arrelat a la seva personalitat com a científic, oposada a la influència ideològica del platonisme que propiciava una ciència substancialment teòrica i abstracta lligada al model teòric de la matemàtica pura, que rebutjava les aplicacions pràctiques de la ciència a la realitat corpòria i sensible, per considerar-les objecte d'oficis toscos i manuals, impropis d'una activitat liberal dedicada només a l'estudi de la dimensió intel·ligible de l'entorn. És possible que fossin aquests pressupostos ideològics els que induïssin Arquimedes a abandonar Alexandria, conscient que allà el seu esperit científic no tindria un àmbit adequat. En efecte, l'activitat investigadora d'Arquimedes fou profundament original i diferent de la ciència alexandrina, perquè, en fondre els aspectes científics amb els tècnics, va aconseguir arribar a una síntesi harmònica que, elevant-se a les més altes fites del rigor, va produir extraordinaris resultats en complementar la investigació teòrica amb les aplicacions pràctiques ([9, p. 33]).

De tornada a Siracusa, Arquimedes es va dedicar, en exclusiva, als estudis i experiències científics i tècnics. La seva figura històrica fou embellida o deformada per la imaginació popular i per una tenaç tradició llegendària ulterior, que la revestiria amb anècdotes inversemblants que rodejaven el personatge d'una aurèola quasi sobrenatural. Plutarc, a la seva *Vida de Marcel*, és qui amb més detall relata la genialitat teòrica i pràctica del personatge [Marcel, XVII.11].

> Afalagat i entretingut contínuament per una sirena domèstica i familiar, s'oblidava de l'aliment i no cuidava de la seva persona; i portat a la força a ungir-se i banyar-se, dibuixava figures geomètriques en les cendres de les llars, i després d'untat el seu cos hi tirava línies amb el dit, dominat per un gran plaer, i fora de si, se sentia com posseït de les muses.

També Sili Itàlic escriu [Guerres Púniques, 341–342]:

> Hi havia a Siracusa un home que sense estar afavorit per una gran fortuna, es va elevar pel seu geni per sobre de l'esfera de la humanitat i de la glòria immortal d'aquesta ciutat. Tots els secrets de l'univers li eren coneguts. Sabia quan els foscos rajos del sol naixent presagiaven la tempesta, si la terra estava fixa o suspesa pel seu eix, per què el mar estès sobre el globus es mantenia encadenat a la seva superfície, quines eren les causes de l'agitació de les ones i de les diferents fases de la lluna, quina llei seguia l'oceà en el flux i reflux de les marees. Fama tenia d'haver comptat les arenes de la terra; ell, que va saber avarar una galera amb l'esforç d'una sola dona; ell, que va fer pujar roques amuntegades en contra del pendent del terreny.

Malgrat aquestes manifestacions, molts dels treballs d'Arquimedes estan vinculats a l'experiència, de manera que moltes de les seves investigacions i dels seus descobriments resulten de la necessitat de resoldre problemes pràctics. Així ho demostra l'anècdota més coneguda d'Arquimedes referent a la «corona d'or de Hieró», simplement mencionada per Plutarc, però extensament relatada per Vitruvi [en la seva *Arquitectura*, Llibre IX, cap. 3.9], per a qui la manera de descobrir el frau comès contra el rei constitueix la més subtil i genial de les intuïcions d'Arquimedes.

Una altra anècdota molt coneguda d'Arquimedes té a veure amb la famosa *llei de la palanca* que el savi estudia en les proposicions 6 i 7 del Llibre I de *Sobre l'equilibri dels plans* i que aplicarà de manera constant en el descobriment de nombroses quadratures i cubatures, mitjançant l'aplicació del mètode mecànic de la palanca de la seva famosa obra *El mètode* relatiu als teoremes mecànics ([8, p. 167–172]). Segons Pappos d'Alexandria, Arquimedes hauria pronunciat la cèlebre frase, tan arrogant com retòrica i absurda: «Doneu-me un punt de suport i aixecaré el món», en connexió amb el problema de moure un pes donat mitjançant una força donada. Plutarc descriu així les paraules d'Arquimedes [Marcel, XIV.12]:

> Arquimedes, que era parent i amic del rei Hieró, li va escriure que amb una potència donada es pot moure un pes igualment donat i li va assegurar que jugant amb la força de la demostració, si li donessin una altra terra, mouria aquesta després de passar a aquella.

Segueix el relat de Plutarc amb la sorpresa de Hieró i el suggeriment que aquest fa a Arquimedes d'aplicar el seu enginy a la construcció d'artefactes d'ús civil i militar, que més tard, en el setge de Siracusa pels romans, serien de gran utilitat i la principal font de la fama imperible del savi [Marcel, XIV.13–14]:

> Meravellat Hieró, i demanant-li que fes ostensible com es movia una gran mola amb una potència petita, va comprar un gran transport de tres veles, que fou tret a terra amb molt treball i a força de gran nombre de braços; el va carregar de gent i de la resta que s'hi solia posar, i asseguts allunyats d'ell, sense cap esforç i amb només moure amb la mà l'extrem d'un sistema de cordes i politges el va portar així dret i sense detenció, com si corregués pel mar. Atònit el rei, i convençut del poder d'aquell art, va encarregar a Arquimedes que li construís tot tipus de màquines defensives i ofensives.

Basant-se en fonts més o menys fidedignes, s'adjudiquen a Arquimedes, des de l'antiguitat, tota classe d'invents, de manera que la seva genialitat inventiva en el camp de la mecànica aplicada forma part de la tradició. Tal vegada l'atribució impròpia d'alguns invents prové del fet que, des d'antic, Arquimedes va tenir la glòria de veure adjectivat el seu nom en les fonts històriques i literàries, així que invent arquimedià tant podia significar un giny dissenyat pel mateix Arquimedes com un instrument realitzat amb el seu enginy, el seu art i la seva subtilesa ([9, p. 30]). Per exemple, sabem que el perfil com a matemàtic, enginyer i inventor del més gran dels científics de l'antiguitat encaixava fidelment en l'esperit de Leonardo, qui, no escatimarà en els seus escrits admiració per la divina saviesa geomètrica i mecànica del siracusà. A l'època de Leonardo apareix una antologia d'escrits d'Arquimedes, dirigida per Gaurico, en la qual es menciona Leonardo com a «molt notable pel seu enginy arquimedià».

Diversos escriptors àrabs asseguren que Arquimedes hauria tornat a Egipte cridat pel rei Ptolemeu per resoldre problemes relacionats amb les periòdiques crescudes del Nil, cooperant a la construcció de terraplens i bases de ponts que permetessin comunicar les heretats durant les inundacions. Però el més important dels invents realitzats per Arquimedes a Egipte fou el cargol hidràulic, anomenat també *còclea cargol* o *cargol sense fi*, enginyosa màquina, que Galileu va qualificar com a*meravellosa i miraculosa*, que permet elevar l'aigua de manera ràpida vencent la resistència gravitatòria. Diodor Sícul afirma (en la seva «Biblioteca Històrica») que els egipcis residents en certa illa del delta del Nil utilitzaven la còclea per extreure aigua del riu i convertir en fèrtils terres ermes. En altres fonts s'afirma que la còclea s'usava per desaiguar les terres més baixes, on s'originaven pestes per l'estancament de les aigües. Un altre testimoni de Diodor Sícul sobre el treball a les mines de Río Tinto d'Hispania assegura que «les mines eren desaiguades amb cargols anomenats egipcis, inventats per Arquimedes quan va ser a Egipte.» En la seva «Història natural», Plini el Vell, que en la seva joventut havia estat administrador de les mines del nord-oest ibèric, relata la manera de deixar anar l'aigua a pressió sobre les muntanyes auríferes de Las Médulas, al Bierzo, per procedir després al rentat de les arenes. S'utilitzava el cargol d'Arquimedes per elevar l'aigua a les altures? D'aquesta manera es recollien vint mil lliures anuals d'or, que assortien tot l'Imperi romà.

A Arquimedes se li atribueix la invenció dels rellotges solars, les làmpades eternes i altres invents com l'escítala —un instrument emprat per mantenir en secret l'escriptura—; instruments per a operacions quirúrgiques (dels quals parla Galè); l'anomenat *nínxol arquimedià*, un tipus de joc a mode de puzle que permet construir innumerables formes i que és molt útil com a passatemps d'habilitat mental que reforça la memòria dels nens; una mena d'ullera, antecedent de la maquinària òptica instal·lada al far d'Alexandria pels Ptolemeus i mitjançant la qual, segons una llegenda àrab, es podien veure les naus salpant dels ports de Grècia. A més, segons fonts àrabs, Arquimedes va elaborar, durant la seva estada a Egipte, el cadastre d'aquest país (aquesta atribució pot provenir de l'habilitat d'Arquimedes per manipular grans nombres com va exhibir a la seva obra *L'Arenari*). Tertul·lià, el gran polemista i apologista cristià, atribueix a Arquimedes (a la seva obra *De Anima*) l'orgue hidràulic, un instrument que emetia sons melodiosos produïts pel trànsit de l'aigua en tubs combinats de certa manera.

La construcció d'Arquimedes considerada pels antics com a més meravellosa fou l'anomenada *Esfera d'Arquimedes*, una espècie de planetari que reproduïa de manera mecànica el moviment dels cossos del sistema solar llavors coneguts —el Sol, la Lluna i els cinc planetes—, emulant, així mateix, la formació dels eclipsis i la descàrrega de certs fenòmens atmosfèrics, com el llamp i el tro. Segons Pappos i Procle, la descripció del giny hauria estat feta per Arquimedes en l'obra *Esferopea*, ara perduda. Molts escriptors han parlat de la famosa Esfera d'Arquimedes: Ovidi, Sext Empíric, Claudià, Lactanci, Escot, Mirabella, Mazuchelli, Favaro, Cardano i altres. Destaquem, entre tots, Ciceró:

> Quan Arquimedes va fixar en una esfera els moviments del Sol, de la Lluna i dels cinc planetes, va realitzar el mateix que aquell Déu platònic, que en el Timeu és l'arquitecte del món, de manera que una sola revolució de l'esfera combinés moviments totalment diversos mitjançant velocitats diferents. I si en el nostre univers això no és possible sense un déu, tampoc Arquimedes sense una intel·ligència divina podria haver pogut reproduir els mateixos moviments en una esfera. [Tusculanes I.63].
>
> Jo considero que va tenir més enginy Arquimedes en imitar les òrbites de l'esfera, que la naturalesa a concebre-les [De republica, I.14].

No obstant això, la principal font de la fama imperible d'Arquimedes és el fastuós desplegament d'artefactes d'enginyeria militar ideats per a la defensa de Siracusa contra els romans: construccions a base de palanques, politges, catapultes, rodes dentades, sogues, garfis, mans de ferro, canons de vapor —l'arquitronit que descriu Leonardo ([63, p. 202–203])—, foc grec, etc., en un dantesc teatre d'operacions militars, dirigides per un ancià que va posar la seva imaginació i el seu enginy prodigiós al servei de la independència de la seva pàtria. Una fabulosa dosi de romanticisme, imaginació hiperbòlica i fantasia èpica sobre la impressionant resposta bèl·lica de la tecnologia militar dissenyada per Arquimedes impregna els textos de Polibi [Històries, VIII. 3–7], que, en ser tan sols d'una generació posterior a Arquimedes, potser va conèixer els fets per testimonis propers; Tit Livi [*Ab urbe condita*, XXIV.34 i XXV.31], que inspirant-se en Polibi escriu el relat més antic de la mort d'Arquimedes; i sobretot Plutarc [Marcel, XV, XVI, XVII], que un segle més tard dels esdeveniments accentua el tint laudatori sobre el savi siracusà amb tota mena de detalls. Segons Plutarc, Arquimedes —a qui Marcel assimila a un gegant de cent braços de la mitologia quan li diu «Briareo de la geometria»— va tenir en escac el poderós exèrcit romà, essent l'ànima de la defensa de Siracusa, ja que la ciutat es valia exclusivament dels seus ginys tant per defensar-se com per atacar.

Entre aquests, tant la literatura com la crítica historicocientífica, destaquen els enginyosos i sorprenents miralls ustoris que en reflectir els raigs solars sobre les veles dels vaixells romans enemics que assetjaven Siracusa en provocaven la ignició. Diverses fonts (Antemi de Tral·les, Apuleu, Dió Cassio, Galè, Llucià de Samòsata, Zonaràs, Tzetzes...) i llegendes atribueixen aquests artefactes a Arquimedes. El seu fonament rauria en les lleis minimals de la reflexió dels raigs lluminosos (*Els raigs de llum sempre busquen el camí més curt*) i en les propietats geomètriques focals de la paràbola en les quals es basarà la forma dels miralls. Per exemple, tots els raigs que emanen del focus de la paràbola formaran un feix de raigs paral·lels després de reflectir-hi i, recíprocament, tots els raigs procedents d'una gran distància, com els raigs del sol, poden considerar-se paral·lels; per tant, la paràbola els farà reflectir i els concentrarà en un sol punt, el focus de la paràbola. D'aquesta manera, un mirall parabòlic tindria una terrible propietat destructiva: concentrar en el focus tots els raigs provinents del sol. Els arguments sobre l'ús de miralls ustoris per Arquimedes es basen en el fet que el savi hauria conegut les propietats opticofocals del paraboloide, ja que una de les seves obres geomètriques fonamentals, «Sobre conoides i esferoides», tracta sobre les quàdriques que avui anomenem paraboloides, hiperboloides i el·lipsoides. A més, al segle IV Teó d'Alexandria —autor amb la seva filla Hipàtia d'una versió dels *Elements* d'Euclides que es considera la base de moltes edicions posteriors ([48, p. 72])— assegura que Arquimedes havia escrit un tractat de *Catòptrica*, on podria haver desenvolupat nocions essencials sobre els miralls parabòlics. La prodigiosa gesta dels miralls ustoris —tan il·lustrada en l'abundant iconografia descriptiva de l'efecte incendiari sobre la flota de Marcel— ha estat sotmesa a investigació historicocientífica per alguns científics eminents com Leonardo, Cardano, Kepler, Galileu, Cavalieri, Descartes, Mersenne, Kircher, Buffon i altres. Alguns la desmenteixen ([16, p. 28]), i altres demostren experimentalment que el giny òptic d'Arquimedes és factible i que amb independència de la seva historicitat no és absurd admetre que Arquimedes estava en condicions científiques i tecnològiques d'intentar-ho ([72, p. 49–72]). Durant segles hi ha hagut divisió d'opinions i multitud de dictàmens històrics i científics, però la qüestió des del punt de vista tècnic resta oberta, la qual cosa és un altre signe més d'universalitat, grandesa i modernitat d'Arquimedes.

Una antiga i persistent tradició idealista que es remunta a Plató ([51, cap. 5]) ha considerat sempre Arquimedes com un geòmetra pur i teòric que donava poc valor als seus invents mecànics enfront del producte del seu pensament i que fins i tot quan manipulava palanques i altres màquines simples estava molt més interessat en els principis generals que en les aplicacions pràctiques. Bona mostra d'això és un altre text de Plutarc que platonitza per complet el savi de Siracusa (Marcel, XVII.5-7):

> Fou tal el judici d'Arquimedes, tan elevat el seu esperit, tan gran el seu enginy, tan riques les seves especulacions i tan profunda la seva ànima, que sobre aquells descobriments que li havien donat nom i glòria d'una intel·ligència sobrehumana, no va voler deixar res escrit; i és que tenia per innoble i vulgar tota ocupació en la mecànica i tot art aplicat als nostres usos, i posava únicament la seva ambició en aquelles coses que comporten la bellesa i l'excel·lència, sense mescla de res servil que pugui lligar-se amb la necessitat i que ofereixi una disputa entre la demostració i la matèria; per part d'una, per la grandesa i la bellesa, i per part de l'altra, per l'exactitud i la força en grau meravellós.

Si pensem que precisament bona part dels descobriments pròpiament geomètrics d'Arquimedes es basen en l'aplicació de lleis mecàniques —que el savi havia plasmat en l'obra *Sobre l'equilibri dels plans* i en altres obres ara perdudes— com mostra una de les seves obres fonamentals ja mencionada, el cèlebre tractat *El mètode* ([8, p. 36–40]), podem imaginar fins a quin punt era

NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO
ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE
SIRACUSANO
DEL
CO. GIAN-MARIA MAZZUCHELLI
BRESCIANO.

IN BRESCIA. CIƆIƆCCXXXVII.
Preſſo GIAN-MARIA RIZZARDI.
Colla Facoltà de' Superiori.

NOTIZIE
ISTORICHE E CRITICHE
INTORNO ALLA VITA, ALLE INVENZIONI,
ED AGLI SCRITTI
DI
ARCHIMEDE SIRACUSANO.

ARchimede, che da Cicerone (1) fu chiamato un ingegno divino, ebbe per patria Siracuſa, Città celebre della Sicilia. Ignoto ci è il tempo preciſo della ſua naſcita, non eſſendoci, per quanto io ſappia, Scrittore alcuno degli Antichi, che ce l'abbia notato. Solo avendoci Giovanni Tzetze (2) riferito, che Archimede ha trapaſſati i ſettantacinque anni di vita, noi facilmente poſſiamo immaginarci intorno a qual tempo ſia nato col dedurre queſto dall' anno della ſua morte, la quale caden-

I. Luogo, e tempo della ſua naſcita.

FIGURA 3: L'obra crítica de Mazzuchelli sobre Arquimedes (Brescia, 1737). Biblioteca Municipal de Màntua. Aquest tractat, de valor històric i iconogràfic, intenta ordenar les múltiples informacions, moltes d'elles llegendàries, sobre els episodis més o menys inversemblants de la vida i l'obra d'Arquimedes, en relació amb la seva brillant activitat científica i tècnica. A l'esquerra, la portada amb l'escena d'«Eureka»; i a la dreta, la pàgina inicial amb una escena de la mort d'Arquimedes per un soldat romà, en la presa de Siracusa pel cònsol Marcel.

esbiaixada i carregada d'encomi literari la visió platònica i idealista de Plutarc sobre Arquimedes. No obstant això, efectivament, si Arquimedes va deixar alguna cosa escrita sobre la seva llegendària enginyeria, no ens ha arribat; així que potser hi ha quelcom de cert en què les seves ocupacions pràctiques no eren més que entreteniments sobre els quals no va voler deixar res escrit, però d'aquí a suposar que considerés *innoble i vulgar tota ocupació en la mecànica* hi ha un abisme.

La qüestió és que la fama de la qual ha gaudit Arquimedes durant segles prové més dels relats literaris que de la seva valuosíssima labor de geòmetra, i això és extensiu a l'actualitat on a l'heterogènia literatura divulgativa hem d'afegir la ingent informació present de manera més o menys efímera en el ciberespai d'internet. A l'antiguitat era molt comú en la literatura biogràfica la invenció d'anècdotes per situar cronològicament els personatges i els seus mèrits. No és d'estranyar, per tant, que les anècdotes relatades emfatitzin per damunt de tot els més rellevants descobriments tècnics i científics d'Arquimedes. En aquest sentit, són molt significatives les paraules de P. Ortiz a la introducció general de les obres d'Arquimedes d'editorial Gredos ([7, p. 16]):

> El *Doneu-me un punt de suport i mouré el món* ens recorda que fou Arquimedes el primer a formular matemàticament la llei de la palanca; l'*Eureka*, que fou el descobridor del primer principi de la hidrostàtica; els miralls ustoris ens haurien de portar a considerar els seus treballs en matèria de catòptrica [...]; la inscripció funerària sobre el cilindre i l'esfera ens remet als seus descobriments sobre el volum i la superfície de l'esfera...; la *mort entre els cercles* és paral·lela a la distracció de Tales, que va caure en un pou mentre observava les estrelles, amb gran gaubança de l'esclava que l'atenia; amb la qual cosa ens els representem com a *savis despistats*, més interessats en el seu món intel·lectual que en les banalitats de l'existència quotidiana. I observeu que totes aquestes anècdotes poden resumir-se en poquíssimes paraules; a vegades, fins i tot, en una sola frase. [...] Però hi hagi en elles el que hi hagi de veracitat, no podem perdre de vista que contenen les referències més difoses sobre la vida del matemàtic.

La biografia històrica i la literatura han descrit la figura d'Arquimedes com el paradigma de l'enginyer de l'antiguitat, que posa el seu geni i el seu enginy, com a tècnic, al servei del patriotisme que exigeix la difícil situació política i militar de la seva terra, amb una actuació èpica que arriba a donar la vida per la pàtria.

La mort d'Arquimedes, com un episodi novel·lesc més de la seva vida, ha estat descrita per nombrosos escriptors (Plutarc, Valeri Màxim, Tit Livi, Sili Itàlic, Giorgio Valla, Zonaràs, Tzetzes, Ciceró, etc.) sempre rodejada d'una èpica atmosfera: «Arquimedes fou assassinat per un soldat romà mentre meditava sobre unes formes geomètriques dibuixades a la sorra, en res alterava el seu ànim enmig d'una immensa destrucció.» Així desaparegué el més gran de tots els savis del món antic, víctima, com molts, de la violència que porten els desastres de la guerra. La mort —en acte de servei geomètric per a la posteritat— del més egregi geòmetra grec, inerme —als seus 75 anys— davant la fúria d'un militar romà, va fer pronunciar a Whitehead aquelles cèlebres paraules [E. Bell: *Les grands mathématiciens*. Payot, París, 1950, cap. II, 45]:

> Cap romà ha perdut la seva vida per estar absort en la contemplació d'una figura geomètrica.

3 Les obres matemàtiques d'Arquimedes

Arquimedes és reconegut, amb sorprenent unanimitat, com el més important dels científics de l'antiguitat. Les seves principals obres foren impreses i traduïdes al llatí per primera vegada entre 1503 i 1588, i van exercir una influència decisiva sobre l'especulació científica d'aquella època. Durant la centúria següent, Stevin, Galileu, Cavalieri, Kepler, Torricelli, Fermat, Wallis i Barrow reconeixeran l'immens deute amb el «sobrehumà Arquimedes», l'obra del qual, pròdiga en sorprenents resultats i model d'exposició rigorosa, desenvolupa una concepció matematicoexperimental que és a l'arrel d'una tradició científica —anomenada després *Filosofia natural* i molt més tard *Física matemàtica*— que, represa per Galileu, estableix les bases de la Revolució Científica del segle XVII, i en particular constitueix un sòlid punt de partida tant per a la configuració de la nova física com per a la invenció del càlcul infinitesimal. Així ho assenyala A. Koyré ([56, p. 44]):

> Són la maduració i l'assimilació de l'obra d'Arquimedes les que serveixen de base a la revolució científica que es realitzarà en el segle XVII.

Amb un sòlid fonament en bases euclidianes, tenint en el seu haver tot el bagatge matemàtic clàssic, Arquimedes transcendeix la tradició geomètrica grega i amplia de manera considerable els horitzons metodològics de la matemàtica del seu temps i amb sublim sagacitat per a conjugar consideracions teòriques i invencions pràctiques va produir una eclosió de fruits matemàtics i tècniques geomètriques, de manera que és considerat, per això, com un dels matemàtics més fecunds de tots els temps, tant en mètodes com en resultats. Però més enllà de la matemàtica, el pensament i l'obra d'Arquimedes han exercit sempre una irresistible atracció per la seva excel·lència i originalitat, que fan del seu llegat una font de saba singular per a molts camins de la ciència i la tècnica creen un estil que, conjuminant la geometria i la mecànica, va emergir en el Renaixement per constituir l'essència de la ciència moderna. En aquest sentit són molt il·lustratives les paraules de Pedreti ([63, p. 137]) que relacionen Arquimedes amb Leonardo:

> La revisió de les investigacions d'Arquimedes per Leonardo fou l'oportunitat per a actualizar un mètode geometricomecànic d'investigació que transformaria radicalment la forma d'entendre el coneixement científic.

Els escrits d'Arquimedes són denses memòries científiques en les quals s'assumeixen, sense mencionar-los expressament, els resultats matemàtics concebuts anteriorment, la qual cosa s'explica perquè en general les seves obres estan dirigides a matemàtics d'Alexandria. El fet que les seves obres tinguin un destinatari n'explica un tret fonamental: un científic es dirigeix a un altre científic, que considera situat en el seu mateix nivell intel·lectual i de coneixements; per això no se sent obligat a aturar-se en aclariments de caràcter didàctic. L'estil d'Arquimedes és extraordinàriament concís, fa servir les paraules necessàries i imprescindibles per a la plena intel·ligibilitat i precisió del raonament i no s'entrega mai a expansions retòriques ([8, p. 19]). Segons Vera ([13, p. 13]):

> Les obres d'Arquimedes no són compilacions, sinó vertaderes monografies en el sentit actual del terme, tant per la seva extensió, sempre breu, com per la seva intensitat, sempre gran, per la qual cosa es pot dir que fou un home modern.

Els *Elements* d'Euclides són el marc ineludible de referència geomètrica en tota l'obra arquimediana. La lectura d'Arquimedes no és gens senzilla, només és per a iniciats, ja que requereix un coneixement exhaustiu dels *Elements* —a Arquimedes se l'ha de llegir en presència dels *Elements* d'Euclides—, i és que per a l'escriptor Arquimedes els *Elements* són un arxiu de la matemàtica elemental, un dipòsit de proposicions i un repertori de resultats ([73, p. 387]) que aplica constantment sense mencionar explícitament els teoremes que utilitza, com donant per sabut que són de domini públic: «Arquimedes tenia tot Euclides al cap.» Per això, pas a pas, al llarg de tota la seva obra, impressiona, sorprèn i entusiasma com el geni de Siracusa podia desenvolupar amb una prodigiosa imaginació tota una seqüència de complexes i abstruses construccions geomètriques —que resultaven d'una lluminosa i eminent facultat per adaptar als mètodes—, i trobar i demostrar sobre elles múltiples relacions entre nombroses magnituds, i aplicar de manera implícita infinitat de proposicions euclidianes, i tot això sense l'auxili operatori d'una àlgebra simbòlica. Tant Galileu com Tartaglia manifestaran, després de llegir Arquimedes, opinions d'aquesta naturalesa i concedeixen al savi fama, lloances i honors encara molt superiors a les que havia transmès la tradició.

Tots els textos d'Arquimedes són originals que transcendeixen considerablement la matemàtica anterior i tenen l'estructura euclidiana de començar postulant les hipòtesis, a les quals segueixen les proposicions impecablement demostrades, amb ocultació, que sembla deliberada, del procés inventiu —tret de, precisament, en *El mètode*. A excepció de certes obres menors (*El Stomachion*, *El llibre dels lemes* i *El problema dels bous*), a la resta de tractats Arquimedes demostra importants resultats sobre la determinació d'àrees, volums i centres de gravetat, que actualment s'obtenen amb el càlcul integral. La seqüència lògica i cronològica dels escrits d'Arquimedes no és fàcil d'establir. Aquí enumerarem i descriurem molt succintament les obres referents als temes que avui anomenem infinitesimals, segons l'ordre proposat per Heiberg:

- *Sobre l'esfera i el cilindre*: resultats sobre l'esfera, el con i el cilindre, en particular la llegendària propietat de la raó de 2 a 3 entre l'esfera i el cilindre circumscrit, tant en superfície total com en volum, objecte iconogràfic del primer epitafi científic de la història, ja que segons testimoni de Plutarc (Marcel, XVII.12), ratificat per Ciceró ([36, p. 64–66]), Arquimedes havia ordenat —i així es va fer— que es col·loqués sobre el seu sepulcre un cilindre amb una esfera inscrita. El primer llibre d'aquesta obra és un complement natural del Llibre XII dels *Elements* d'Euclides. Ambdós tracten de les figures esferes, cilindres i cons, però Arquimedes amplia considerablement els resultats d'Euclides, en demostrar de manera impecable, mitjançant el mètode d'exhaustió, nous i fonamentals teoremes sobre el volum i la superfície de l'esfera, del segment esfèric i del sector esfèric, resultats que havia obtingut mitjançant el *Principi de la palanca del mètode mecànic*. El segon llibre tracta de problemes sobre la divisió de l'esfera mitjançant plans. És molt més difícil que el Llibre I i ja desborda l'àmbit de la geometria dels *Elements*. Al llarg dels dos llibres de què consta aquesta obra apareixen qüestions molt importants, com l'aplicació de l'*axioma d'Èudox-Arquimedes* o *axioma de continuïtat* (*Elements* Def. V.4) i el *Principi d'Èudox* (*Elements* X.1), que obre la porta del *mètode d'exhaustió*, així com qüestions d'altres teoremes auxiliars equivalents a la integració de la funció sinus, a la inserció de dues mitjanes proporcionals, als famosos problemes clàssics, sobretot la *Duplicació del cub* i la seva resolució mitjançant intersecció de còniques i, fins i tot, a l'estudi de la solució de l'equació cúbica. Arquimedes aplica, a més, el mètode d'anàlisi i síntesi (s'assumeix el principi que el problema està resolt i s'utilitza aquesta assumpció per a trobar el camí que porta a la solució). En aquesta obra té lloc també la primera introducció d'exponents fraccionaris; l'extensió a desigualtats d'igualtats equivalents a proposicions de la *teoria general de la proporció* d'Èudox del Llibre V dels *Elements* d'Euclides i l'extensió a la geometria sòlida de la teoria de la proporció que s'aplica en el Llibre VI dels *Elements* per a la geometria plana. En fi, una gran quantitat de qüestions matemàtiques amb les quals Arquimedes demostra la seva vocació de pioner en l'apassionant empresa del descobriment matemàtic.

• *La mesura del cercle*: resultats sobre l'equivalència entre el cercle i el triangle de base, la circumferència del cercle i l'altura el radi (és a dir, reducció de la quadratura del cercle a la rectificació de la circumferència), i càlcul aproximat de la raó entre la circumferència i el diàmetre (valor aproximat del nombre π) a base d'inscriure i circumscriure successivament polígons de doble nombre de costats que partint de l'hexàgon arriben fins al de 96 costats. La finalitat del tractat *De la mesura del cercle* d'Arquimedes entroncaria amb la importància a la geometria grega del cèlebre problema de la *quadratura del cercle*. Arquimedes aplica la idea d'Antifont d'aproximar progressivament el cercle amb polígons successivament amb doble número de costats que l'anterior, que havia estat estesa també a polígons circumscrits per Bryson ([48, p. 41–42]). Els mètodes d'Antifont i Bryson apliquen intuïcions que matemàticament són insuficients, però varen tenir la virtut d'idear la *compressió* entre dues figures conegudes de la figura a quadrar, que, junt amb la *doble reducció a l'absurd* de la rigorosa *exhaustió*, amb tant d'èxit aplicaria Arquimedes en les seves quadratures i cubatures tant en els llibres *Sobre l'esfera i el cilindre* com en el tractat *La mesura del cercle*. En aquesta obra Arquimedes sembla prendre consciència de la impossibilitat de resoldre el problema de la quadratura del cercle, per això dóna una raó aproximada entre la circumferència i el diàmetre que no realitza una quadratura exacta, però que té el valor de desenvolupar un gran desplegament d'aproximació aritmètica d'irracionals quadràtics que demostra que Arquimedes fou un dels més hàbils calculadors de tots els temps ([38, p. 66]). Llàstima que Arquimedes deixi a la foscor com dur a terme la seva gesta aritmètica, ja que no dóna gaires detalls sobre els llargs càlculs que fa. Tal vegada, com assenyala Loria ([57, p. 63]):

> Arquimedes va jutjar indigne parar-se a explicar el que tots sabien en el seu temps, però nosaltres sentim vivament el seu silenci, ja que ell és culpable que no coneguem quasi res de l'aritmètica pràctica [la logística] dels grecs.

• *Sobre conoides i esferoides*: resultats sobre la raó entre segments d'el·lipsoides, paraboloides i hiperboloides de revolució i els cilindres i cons d'igual base i eix. Aquest tractat, obra mestra de l'encadenament lògic, és considerat la continuació de les investigacions geomètriques que Arquimedes realitza en

Sobre l'esfera i el cilindre, estenent els seus descobriments a altres sòlids que en l'actualitat s'anomenen *quàdriques de revolució* (a excepció de l'hiperboloide reglat de revolució o hiperboloide de revolució d'un full, que Arquimedes no estudia), la forma aproximada dels quals havia de ser familiar als contemporanis a través de l'art de la ceràmica popular dels grecs, però que no havien estat objecte encara d'anàlisi matemàtica i la pròpia existència geomètrica dels quals no havia estat encara examinada ([3, p. 147]). Arquimedes considera dues espècies de conoides: el paraboloide de revolució —engendrat per la revolució d'una paràbola al voltant del seu eix— i l'hiperboloide de revolució —engendrat per la revolució d'una hipèrbola al voltant del seu eix transvers—, i dues espècies d'esferoides: l'el·lipsoide allargat —engendrat per la revolució d'una el·lipse al voltant del seu eix major— i l'el·lipsoide aplanat —engendrat per la revolució d'una el·lipse al voltant del seu eix menor. Ja que en temps d'Arquimedes encara es coneixien els noms de les còniques a partir de la descripció trivial de la forma com havien estat descobertes per Menecme ([9, p. 142]), és a dir, mitjançant les perífrasis: *secció* (perpendicular a una generatriu) *de con acutangle, rectangle i obtusangle* per a l'el·lipse, la paràbola i la hipèrbola, respectivament, Arquimedes anomena el paraboloide de revolució *conoide rectangle*, l'hiperboloide de revolució *conoide obtusangle* i l'el·lipsoide, *esferoide*. Encara que sembla que Arquimedes no va poder trobar la quadratura d'un segment general d'el·lipse o d'hipèrbola —el que es podria explicar perquè en les integrals que resolen aquests problemes apareixen funcions transcendents ([34, p. 176–177])—, sí que fou capaç de trobar en aquest tractat la quadratura de l'el·lipse completa en un resultat equivalent a l'expressió πab per a l'àrea de l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Arquimedes mostra també en aquesta obra com resoldre les cubatures dels segments que s'obtenen en tallar un el·lipsoide, un paraboloide o un hiperboloide de revolució (de dos fulls) per un pla perpendicular a l'eix principal. Per això utilitza uns teoremes d'aritmètica que havia demostrat en les primeres proposicions en les quals estableix desigualtats entre la suma dels quadrats dels termes d'una progressió aritmètica i els seus elements. En intentar resoldre aquestes cubatures arquimedianes mitjançant integrals utilitzant el concepte d'integral com a límit d'una suma quan el nombre de sumands creix indefinidament mentre que es fan infinitament petits, resulta que les sumes que apareixen són precisament les que utilitza Arquimedes en les seves demostracions. Ja que en Arquimedes no apareix el concepte de límit, sinó que és substituït per l'exhaustió, s'explica que per arribar a les cubatures Arquimedes necessités determinar el valor de les sumes que amagaven. Aquesta situació es repeteix assíduament en Arquimedes, és a dir, en els seus escrits apareixen com a lemes o proposicions preliminars certes sumes d'elements geomètrics que, en essència, coincideixen amb les corresponents sumes de les respectives integrals a les quals es recondueixen els problemes en termes actuals.

- *Sobre les espirals*: resultats sobre la quadratura de la regió delimitada per les espires de *l'Espiral d'Arquimedes* i rectificació d'un arc de la circumferència mitjançant aquesta corba. Arquimedes defineix l'espiral —corba la invenció de la qual atribueix al seu amic Conó d'Alexandria— de forma cinemàtica, derogant, com havia fet a *Sobre l'esfera i el cilindre* i a *Sobre conoides i esferoides*, el principi d'immobilitat de Parmènides que expressava els conceptes en llenguatge eleàtic mitjançant la descripció de l'essència estàtica —i no mitjançant la generació dinàmica ([26, p. 30])— que havia adoptat Plató, i com a herència Euclides ho havia fet prevaler en geometria. L'estudi d'aquesta corba formava part de la recerca general de solucions als tres famosos problemes clàssics —la *Quadratura del cercle*, la *Trisecció de l'angle* i la *Duplicació del cub*—. Aquest tractat està catalogat com l'obra més important d'Arquimedes sobre geometria plana, però també és una de les més difícils per les seves llargues demostracions i l'excessiva concisió del text, que sobreentén moltes relacions intermèdies. Per aquestes raons, aquest tractat no és ben interpretat fins després del Renaixement. Potser el primer a fer-ho amb certesa és Cavalieri, que pels seus importants estudis sobre la corba arquimediana fou considerat per Galileu com «èmul d'Arquimedes». La quadratura de l'espiral d'Arquimedes constitueix un dels exemples més representatius de l'aplicació del mètode d'exhaustió dels grecs als problemes de quadratures. La proposició més important estableix que *l'àrea compresa entre l'espiral descrita a la primera volta i la primera de les rectes en posició inicial de gir és equivalent a un terç del primer cercle*. A la seva demostració, Arquimedes utilitza resultats equivalents a les habituals fórmules per a la suma d'enters consecutius i els seus quadrats, que a la fi el portaran a certes desigualtats necessàries per emprendre l'exhaustió. Aquesta obra d'Arquimedes va tenir una influència decisiva en els mètodes de quadratura aritmètica del segle XVII, en especial els de Fermat, Pascal i Wallis, basats en la generalització a potències superiors de les desigualtats numèriques obtingudes per Arquimedes a partir de resultats geomètrics equivalents a les fórmules per a la suma d'enters i els seus quadrats ([26, p. 89–91, 105–114]). Es pot dir, a més, en certa manera, que la memòria *Sobre les espirals* és el tractat més antic sobre càlcul diferencial, ja que Arquimedes presta atenció a la determinació de les tangents, i això des del mateix pròleg en el qual Arquimedes escriu: *Si una recta és tangent a l'espiral en el seu extrem obtingut en últim lloc, i si, sobre la recta que ha girat i ha tornat al seu lloc, s'alça en el seu extrem fixat una perpendicular fins que es trobi amb la tangent, dic que la recta així portada fins a aquest encontre és igual a la circumferència del* [primer] *cercle*. Com veiem, *Sobre les espirals* té a veure també amb les investigacions teòriques d'Arquimedes sobre la rectificació de la circumferència del cercle.

• *Sobre l'equilibri dels plans*: resultats sobre el centre de gravetat de figures poligonals, del segment de paràbola i del trapezi parabòlic, i de les condicions d'equilibri de cossos geomètrics. Encara que és un tractat d'estàtica, formalment segueix la línia euclidiana amb definicions, postulats i demostracions en els quals, a més de conceptes geomètrics, s'utilitzen el pes i el centre de gravetat de figures. Aquesta obra estableix els fonaments d'una nova ciència exacta anomenada *Mecànica racional*. En aquest escrit, Arquimedes formula la famosa *Llei de l'equilibri de la palanca*. Aquest llibre no és el tractat més antic del que podríem anomenar física, ja que Aristòtil havia publicat la seva *Física*, en vuit llibres, un segle abans, però l'enfocament del filòsof estagirita és especulatiu i no geomètric en sentit euclidià com aquesta obra d'Arquimedes. Després de la penetrant anàlisi sobre els raonaments d'Arquimedes en aquesta obra, realitzada per Dijksterhuis ([16, p. 286–313]), aquest tractat d'Arquimedes sobre els fonaments de l'estàtica es considera un dels textos més importants de la història de les matemàtiques aplicades.

• *Sobre la quadratura de la paràbola*: resultats sobre la quadratura d'un segment de paràbola, primer mitjançant recursos d'estàtica extrets del tractat *Sobre l'equilibri dels plans* i després mitjançant consideracions geomètriques per aplicar el mètode d'exhaustió. A més d'obtenir nombroses propietats de la paràbola, Arquimedes demostra l'equivalència entre el segment de paràbola i els quatre terços del triangle inscrit —amb el mateix vèrtex i altura que la paràbola. En l'aplicació del mètode d'exhaustió, Arquimedes utilitza la suma dels termes d'una progressió geomètrica indefinida de raó 1/4. Aquest és el primer exemple en la història de la matemàtica de la quadratura d'una figura mixtilínia.

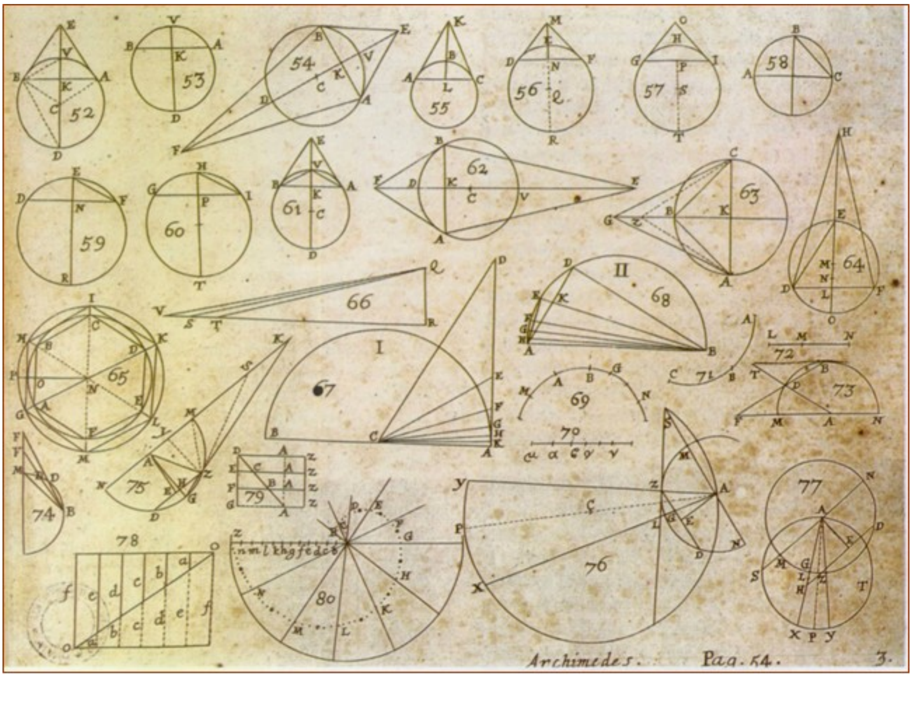


FIGURA 4: Obres d'Arquimedes, pàgina 54 de l'edició de Maurolic (1685), que conté nombroses il·lustracions dels desenvolupaments geomètrics dels teoremes. Biblioteca de la Universitat de Pavia.

• *Sobre els cossos flotants*: resultats sobre la posició d'equilibri d'un casquet esfèric i d'un segment de paraboloide de revolució parcialment submergit en un fluid. En aquest tractat —que fa d'Arquimedes l'ascendent principal de l'enginyeria naval—, elaborat també a la manera euclidiana, apareix el famós *Principi d'Arquimedes* de la hidrostàtica, ciència que es pot dir que neix en aquesta obra, en la qual els problemes d'hidrostàtica es redueixen a problemes d'estàtica en què intervenen les raons dels pesos específics del cos i del fluid. Per ser l'autor de *Sobre l'equilibri dels plans* i de *Sobre els cossos flotants*, a Arquimedes se li adjudica la paternitat de la física matemàtica.

• *El mètode sobre els teoremes mecànics*: tractat on Arquimedes exhibeix el procediment heurístic seguit en el descobriment dels resultats matemàtics. En parlarem detalladament a la secció 5 i següents.

4 Descobriment i demostració en Arquimedes

Arquimedes demostra els resultats matemàtics que figuren en les anomenades obres fonamentals mitjançant el *mètode d'exhaustió* d'Èudox ([51, cap. 16]) que confereix un rigor lògic impecable a l'argument matemàtic, però que té certes servituds. En primer lloc, és bastant laboriós l'establiment de les desigualtats bàsiques que es necessiten per iniciar una doble reducció a l'absurd, la qual cosa en fa més feixuga la lectura, però el més greu és que aquest mètode obliga a conèixer prèviament el resultat a demostrar, és a dir, no té valor heurístic, no serveix per trobar noves veritats, sinó només per demostrar aquelles de les quals ja es té un coneixement previ. El *mètode d'exhaustió* és, doncs, un mètode de demostració i no de descobriment; cal complementar-lo a priori amb un altre mètode, ja sigui analític o mecànic, per descobrir els resultats. Sent això així, sorgeix de manera natural la pregunta al voltant de com coneixia i obtenia Arquimedes els magnífics resultats que més endavant demostrava amb un rigor absolut, perquè en cap de les obres citades en l'apartat anterior, excepte en l'última, Arquimedes no en suggereix cap indicació. Val a dir que, en els casos senzills, Arquimedes pot haver arribat intuïtivament als resultats per via inductiva. Per exemple, relacionant un polígon amb el quadrat construït sobre el diàmetre del seu cercle circumscrit, sabent que les àrees de dos polígons regulars d'igual nombre de costats estan en raó com els quadrats corresponents esmentats (Euclides, XII.1), raonant inductivament resulta plausible que la mateixa raó es mantingui per als mateixos cercles (Euclides, XII.2). Així s'aventuraria un resultat —ja conegut per Hipòcrates de Quios— que el mètode d'exhaustió —aplicat per Èudox— confirmaria plenament a posteriori.

Però l'abast de la intuïció té els seus límits:

- Com es pot intuir que «la superfície de l'esfera és quatre vegades un cercle màxim»?
- Com es pot intuir que «l'àrea de la primera volta de l'espiral és un terç del primer cercle»?

- Com es pot augurar que «l'àrea d'un segment parabòlic és quatre terços de l'àrea del triangle inscrit de la mateixa base i altura sobre l'eix»?
- Com es pot vaticinar que «el volum del segment de paraboloide de revolució és tres mitjos el del con d'igual base i altura»?

Davant d'aquests sorprenents descobriments, no és estrany que molts matemàtics creguessin que Arquimedes disposava d'un mètode miraculós que aplicava en les seves investigacions. Quan durant el Renaixement i en segles posteriors té lloc la recuperació, reconstrucció i divulgació del llegat clàssic grec i en particular es difon un entusiasta interès per les obres d'Arquimedes, tots els estudiosos, impressionats per aquests treballs, es formulen les preguntes anteriors, sintetitzades en la formulació de la següent: *Com havia arribat Arquimedes als seus impressionants resultats sobre quadratures i cubatures, que més tard demostrava rigorosament mitjançant el mètode d'exhaustió?* Com bé va assenyalar Galileu, en la pràctica de la investigació científica i en particular en la investigació matemàtica, sempre existeix un dualisme metòdic, dos moments diferents i consecutius en el procedir: la fase de la invenció, intuïtiva, heurística, no rigorosa i carregada d'hipòtesis, suggeriments, analogies, arguments plausibles i raonaments informals, és l'*ars inveniendi* o via del descobriment; i la fase apodíctica, on s'imposa el rigor, l'*ars disserendi* o via de la demostració ([5, p. 20]). D'ambdues vies, que són complementàries en la investigació científica, on és en Arquimedes el primer camí?

Ignorada per tots la manera com Arquimedes havia arribat als seus descobriments, molts matemàtics van albergar la sospita que Arquimedes disposava d'una eina singular, una via de descobriment que no apareix davant el lector de les seves obres i que sembla haver ocultat premeditadament per a la posteritat «per audàcia perniciosa, per mantenir l'admiració, la qual desapareixeria després de divulgat», com diria Descartes a la Regla IV de les seves *Regulae* (*Regles per a la direcció de l'Esperit*) ([40, p. 85; AT.X.376-377]). Així, per exemple, Torricelli manifesta al proemi de la seva *Opera geometrica* (Florència, 1644): «Els geòmetres antics empraven en les seves demostracions un mètode diferent del seguit en la fase inventiva i procedien així, entre altres raons, per amagar el secret de l'art.» També Wallis, que va tenir cura d'una edició de les obres d'Arquimedes, publicada a Oxford el 1676, escrivia: «Sembla que Arquimedes va amagar expressament les petjades de la seva investigació, com si hagués sepultat per a la posteritat el secret del seu mètode d'investigació.» Així mateix, Barrow, que es va encarregar també d'una edició en llatí de les obres d'Arquimedes, que es va publicar a Londres el 1675, es manifestava en aquests termes:

> En no poder imaginar quin enginy mortal pugui arribar a tant mitjançant la virtut del raonament, estic segur que Arquimedes es va veure ajudat per l'àlgebra, que coneixia en secret i que amagava de manera estudiada.

Efectivament, Arquimedes posseïa un mètode d'investigació, que va plasmar a la seva obra *El mètode*, en la qual, mitjançant procediments reconeguts per ell mateix com a no rigorosos, descobria els seus famosos teoremes matemàtics.

Però foren els avatars històrics i no la seva voluntat els que ho van deixar amagat per a la posteritat. En paraules d'E. Rufini ([12, p. 91]):

> [...] L'obra escassament estudiada i tal vegada poc compresa pels mateixos grecs va caure fatalment en un complet oblit.

5 El mètode mecànic de descobriment

El mètode és una obra singular d'Arquimedes, perquè s'hi decideix a revelar a la comunitat matemàtica alexandrina, en carta dirigida a Eratòstenes, la via d'investigació de qüestions matemàtiques mitjançant la mecànica. La combinació de geometria i estàtica que Arquimedes havia fet a *Sobre l'equilibri dels plans* i a *Sobre els cossos flotants* per establir rigorosament certes propietats relacionades amb l'equilibri de certs cossos geomètrics, la realitza de nou a *El mètode* per descobrir i investigar resultats que, obtinguts de manera mecànica geomètrica, demostrarà de manera rigorosa en els seus tractats científics. *El mètode* d'Arquimedes és un magnífic informe científic sobre un mètode d'investigació i d'argumentació plausible en geometria, il·lustrat amb alguns exemples, uns de coneguts i altres de nous, on Arquimedes dóna mostres d'una perícia i d'una imaginació teòrica inefables, així com d'una intuïció que es mou amb un increïble instintiu olfacte matemàtic. En realitat, *El mètode* és una memòria científica molt elaborada, bastant singular pel seu caràcter metodològic dins el conjunt dels grans tractats de la geometria grega, però és fàcil prendre'l per un escrit més d'Arquimedes, estructurat amb el mateix rigor. És clar que el mateix Arquimedes ho desmenteix quan manifesta a Eratòstenes en el preàmbul d'*El mètode* ([8, p. 61]):

> [...] He cregut oportú exposar-te per escrit les particularitats d'un mètode, mitjançant el qual et serà possible iniciar la investigació de certes qüestions matemàtiques mitjançant la mecànica. Estic convençut, a més, que aquest mètode no serà menys útil per demostrar els mateixos teoremes. Ja que alguns dels que primer se'm van fer patents mecànicament reberen després demostració geomètricament, tenint en compte que la investigació feta per aquest mètode no comporta demostració [...].

És a dir, *El mètode*, en utilitzar consideracions mecàniques, descobreix resultats per analogia que il·lustren l'art de la invenció amb una argumentació científica informal que estableix una pauta de discurs matemàtic dirigida a mostrar el caràcter plausible d'unes conclusions que seran de seguida convalidades en la forma demostrativa vigent, és a dir, mitjançant el mètode d'exhaustió. Però no només això, perquè la mateixa confirmació del resultat mitjançant rigorosa demostració es veu també afavorida per la manera de descobrir-lo, ja que, com continua la comunicació d'Arquimedes:

> [...] ja que és més fàcil, després d'haver adquirit per aquest mètode cert coneixement de les qüestions objecte d'investigació, donar després la demostració, que investigar sense cap coneixement previ.

Els resultats que Arquimedes obté en *El mètode* i que desenvolupa en forma de proposicions són els següents:

1) Quadratura del segment parabòlic obté que l'àrea del segment és quatre terços del triangle d'igual base i altura.
2) Equivalència de l'esfera amb el quàdruple del con (resp. amb els dos terços del cilindre) de base el cercle màxim de l'esfera i d'altura el radi (resp. el diàmetre). Equivalència de la superfície de l'esfera i quatre dels seus cercles màxims.
3) Anàlogues equivalències que a la proposició 2 entre un el·lipsoide de revolució, un con i un cilindre.
4) Equivalència entre un segment de paraboloide de revolució, de base perpendicular a l'eix, i els tres mitjos del con d'igual base i eix que el segment.
5) Centre de gravetat d'un segment de paraboloide de revolució.
6) Centre de gravetat d'un hemisferi.
7) Raó entre un segment esfèric i el con d'igual base i altura.
8) Raó entre un segment d'el·lipsoide de revolució i el con d'igual base i altura.
9) Centre de gravetat d'un segment esfèric.
10) Centre de gravetat d'un segment d'el·lipsoide de revolució.
11) Volum i centre de gravetat d'un segment d'hiperboloide de revolució.
12) i 13) Equivalència de l'ungla cilíndrica i la sisena part de tot el prisma circumscrit al cilindre.
14) Determinació mecanicogeomètrica del volum de l'ungla cilíndrica.
15) Determinació geomètrica (pel mètode d'exhaustió) del volum de l'ungla cilíndrica.
16) Equivalència de la volta cilíndrica i els dos terços del cub corresponent.

5.1 Quadratura del segment parabòlic (figura 5)

PROPOSICIÓ *Sigui ABC un segment parabòlic comprès entre la recta AC i la secció ABC d'un con rectangular (paràbola); dividiu AC per la meitat en D i traceu la recta DBE paral·lela al diàmetre de la paràbola i, unint B amb A i B amb C, traceu les rectes AB i BC.*

El segment parabòlic ABC és quatre terços del triangle ABC.

PROVA Traceu pels punts A i C la recta AZ paral·lela a DBE i la CZ tangent al segment parabòlic en C; prolongueu CB fins a T i sigui KT igual a CK. Considereu CT com una palanca, sent K el seu punt mitjà, i sigui MQ una recta paral·lela a ED.

Ja que CBA és una paràbola i que CZ li és tangent, *la subtangent relativa a un punt de la paràbola és doble de l'abcissa d'aquest punt*, és a dir, EB és igual a BD.

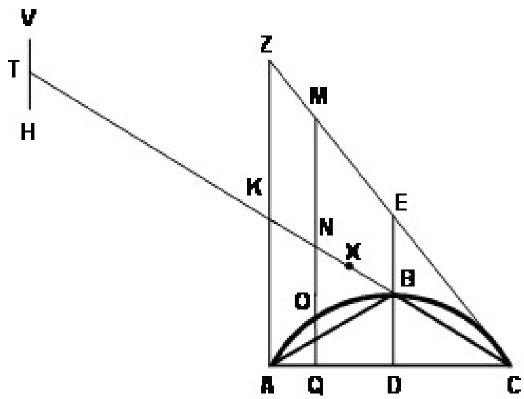


FIGURA 5.

De la semblança dels triangles ZKC, MNC i EBC, així com KAC, NQC i BDC es dedueixen [*Euclides* VI.4] les igualtats de segments: $MN = NQ$ i $ZK = KA$ en ser $EB = BD$.

Aplicant una relació coneguda que Arquimedes havia demostrat en la proposició V de *Sobre la quadratura de la paràbola* resulta que $\frac{CA}{AQ} = \frac{MQ}{QO}$, i sent semblants els triangles ACK i QCN es té: $\frac{CA}{AQ} = \frac{CK}{KN}$, però en ser iguals els segments CK i TK, resulta la igualtat de raons $\frac{TK}{KN} = \frac{MQ}{QO}$, relació geomètrica bàsica per a aplicar el mètode mecànic de la palanca.

En efecte, com que el punt N és el centre de gravetat de la recta MQ, per ser MN igual que NQ, si prenem la recta VH igual a QO de manera que el seu centre de gravetat sigui el punt T, és a dir, de manera que VT sigui igual que TH, la recta VTH estarà en equilibri amb la recta MQ *que resta en el seu lloc*, per estar TN dividida pel punt K en parts que estan en raó inversa als pesos VH i MQ [*Sobre l'equilibri dels plans* I.6], i per tant K és el centre de gravetat del conjunt d'ambdós pesos.

Anàlogament, si en el triangle AZC es tracen tantes paral·leles com es vulgui a ED, aquestes, *restant en el seu lloc*, estaran en equilibri amb els segments determinats sobre elles pel segment parabòlic i traslladats al punt T, de manera que el centre de gravetat de les unes i de les altres serà K.

Ara bé, les rectes traçades en el triangle AZC *componen* el mateix triangle i els segments rectilinis obtinguts en segment parabòlic de la mateixa manera que OQ *componen* el segment parabòlic ABC; per tant, el triangle AZC, *restant en el seu lloc*, estarà en equilibri, respecte del punt K, amb el segment parabòlic traslladat fins a tenir el seu centre de gravetat en T, de manera que el centre de gravetat del conjunt d'ambdós serà el punt K.

Dividiu ara CK pel punt X de manera que CK sigui el triple de KX; el punt X serà llavors el centre de gravetat del triangle AZC [*Sobre l'equilibri dels plans* I.14], i ja que el triangle AZC, *restant en el seu lloc*, està en equilibri, respecte del punt K, amb el segment parabòlic ABC, traslladat amb centre de gravetat en T, i que X és el centre de gravetat del triangle AZC, es compleix, per tant, que la raó del triangle AZC al segment parabòlic ABC col·locat al voltant del centre T és igual a la raó de TK a KX. Ara bé, sent TK triple de KX, el triangle AZC serà triple del segment parabòlic ABC. A més, el triangle AZC es quàdruple del triangle ABC, ja que ZK és igual que KA i KA és doble de BD en ser AD igual que DC, per tant, el segment parabòlic ABC equival a quatre terços del triangle ABC. □

5.2 Cubatura de l'esfera (figura 6)

PROPOSICIÓ *Tota esfera és quàdruple del con de base igual al cercle màxim de l'esfera i altura igual al radi de l'esfera; al seu torn, el cilindre de base igual al cercle màxim de l'esfera i altura igual al diàmetre de l'esfera és igual a una vegada i mitja l'esfera.*

PROVA Sigui una esfera el cercle màxim de la qual sigui $ABCD$, sent AC i BD dos diàmetres perpendiculars. Sigui també en l'esfera un cercle de diàmetre BD, perpendicular al cercle $ABCD$; i a partir d'aquest cercle construïu un con que tingui per vèrtex el punt A. Prolongada la superfície del con, talleu aquest per un pla que passi per C i sigui paral·lela la base, que donarà un cercle perpendicular a AC, el diàmetre del qual serà la recta EZ. Construïu després a partir d'aquest cercle un cilindre d'eix igual a AC i en què EL i ZH en siguin generatrius. Prolongueu CA i prengueu en la seva prolongació una recta AT igual a ella, i considereu CT com una palanca el punt mitjà de la qual sigui A. Traceu una paral·lela qualsevol MN a BD, que talli el cercle $ABCD$ en Q i O, el diàmetre AC en S, la recta AE en P i la recta AZ en R. Aixequeu sobre la recta MN un pla perpendicular a AC, que tallarà el cilindre segons el cercle de diàmetre MN, l'esfera $ABCD$ segons el cercle de diàmetre QO i el con AEZ segons el cercle de diàmetre PR.

De la geometria de la figura, Arquimedes va obtenint:

$$AQ^2 = AC \cdot ES \quad [\textit{Euclides}\ \text{III.31}]\,,$$
$$AQ^2 = QS^2 + SP^2 \quad [\textit{Euclides}\ \text{I.47}]\,,$$
$$MS \cdot SP = AC \cdot ES = AQ^2 = QS^2 + SP^2\,,$$
$$\frac{AT}{ES} = \frac{MS}{SP} = \frac{MS^2}{MS} \cdot SP = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2}\,.$$

Siguin ara $c(MN)$, $c(QO)$, $c(PR)$ els cercles de diàmetre MN, QO, PR, respectivament,

$$\frac{AT}{AS} = \frac{MS^2}{QS^2 + SP^2} = \frac{MN^2}{QO^2 + PR^2} = \frac{c(MN)}{c(QO) + c(PR)} \quad [\textit{Euclides}\ \text{XII.2}]$$

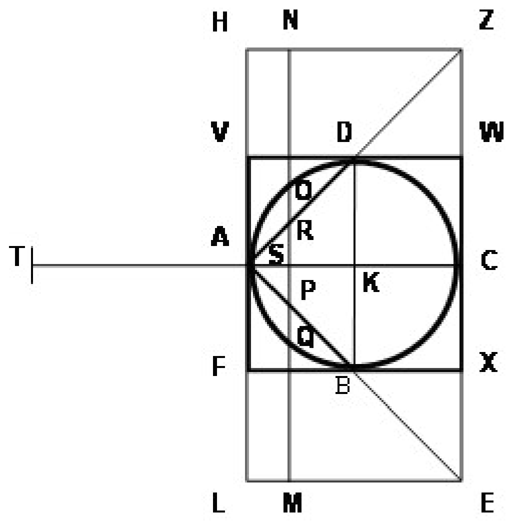


FIGURA 6.

relació geomètrica bàsica per a emprendre el mètode mecànic de la palanca: el cercle $c(MN)$ del cilindre, *restant en el seu lloc* estarà en equilibri respecte del punt A (fulcre de la palanca) amb els cercles $c(QO)$, $c(PR)$ traslladats i col·locats sobre el punt T, de tal manera que el centre de gravetat de cada un d'ells sigui T.

Realitzant el mateix procés per a totes les paral·leles MN a EZ i els cercles que s'obtenen sobre l'esfera, el cilindre i el con, resulta que *plens* amb tals cercles el cilindre, l'esfera i el con, el cilindre, *restant en el seu lloc*, estarà en equilibri, respecte del punt A, amb l'esfera i els conjunts, traslladats i col·locats sobre la palanca en el punt T, de manera que el centre de gravetat de cadascun d'ells sigui T. D'aquí, aplicant la llei de la palanca [*Sobre l'equilibri dels plans* I.6 i I.7], resulta que *la raó del cilindre a l'esfera i els conjunts* serà la mateixa que la raó de AT a AK.

Desenvolupant simbòlicament els càlculs que Arquimedes descriu retòricament, siguin:

e = esfera $ABCD$.

c = cilindre de diàmetre EZ i generatrius EL, ZH.

d = cilindre de diàmetre BD i generatrius XF, WV.

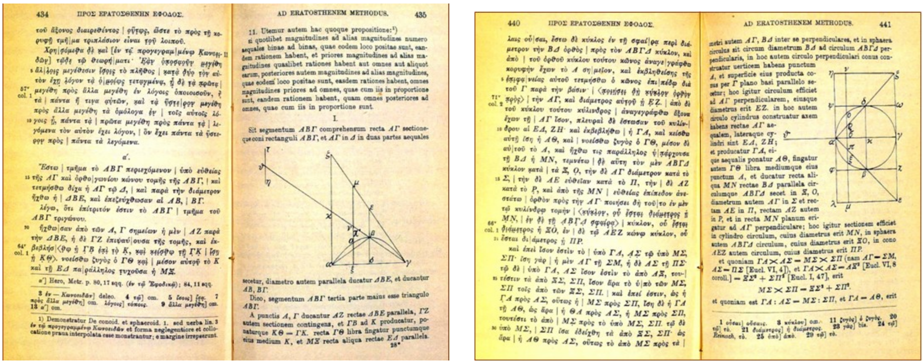
a = la secció del qual és el triangle AEZ.

b = la secció del qual és el triangle ABD.

Aplicant el mètode mecànic, Arquimedes mostra que $c = 2(e + a)$.

Però com que, segons *Euclides* XII.10, es compleix que $d = 3b$ i $c = 3a$, es té:

$a = 2e$. Ara d'*Euclides* XII.12, resulta: $a = 8b$ i d'*Euclides* XII.14, s'obté: $c = 2d$. Combinant els resultats, s'obté finalment: $e = 4b$, $d = \dfrac{3}{2}e$. □


434 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 435

440 ΠΡΟΣ ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ ΕΦΟΔΟΣ.

AD ERATOSTHENEM METHODUS. 441

FIGURA 7: La quadratura d'un segment parabòlic i la cubatura de l'esfera a *Archimedes Opera Omnia* (Leipzig, 1910–1913) de J. L. Heiberg.

5.3 Anàlisi del mètode

És interessant fer una anàlisi de l'estructura interna del procés discursiu d'Arquimedes a *El mètode*, a través d'un plantejament abstracte de les diverses fases del mètode mecànic, a fi d'intentar dilucidar la fita de rigor subjacent en cadascuna d'aquestes fases, encara que Arquimedes reconegui que: «[...] la investigació feta per aquest mètode no comporta demostració [...].»

L'essència del mètode mecànic es dedueix de qualsevol dels problemes que Arquimedes tracta. Es poden considerar tres fases. En una primera fase, purament geomètrica, seleccionats els objectes geomètrics pertinents, es procedeix a la comparació de seccions de la figura la quadratura de la qual és objecte d'investigació, amb altres seccions de figures ja conegudes. Sigui determinar l'àrea d'una figura S, les seccions de la qual (cordes), determinades per un sistema de rectes paral·leles, són comparades amb les seccions t d'una figura coneguda T. Arquimedes fixa la posició dels extrems i el punt de suport d'una palanca i obté, en virtut de les propietats geomètriques conegudes de S i T, una relació geomètrica: $\dfrac{s}{t} = \dfrac{k}{h}$, sent h la distància fixa de l'extrem de la palanca al punt de suport i k la distància de la secció t —del seu centre de gravetat— al punt de suport. A continuació s'entra a la segona fase del mètode, la fase mecànica, en la qual, aplicant consideracions estàtiques que Arquimedes havia desenvolupat en el seu tractat *Sobre l'equilibri dels plans*, estableix que la secció t de la figura T, *restant en el seu lloc*, equilibra, respecte del fulcre de la palanca, la secció s de la figura S, traslladada a una posició de manera que el seu centre de gravetat sigui un extrem de la palanca. Fins aquí el desenvolupament lògic i intuïtiu seguit per Arquimedes és totalment rigorós, ja que és conseqüència lògica dels postulats admesos i dels teoremes demostrats en altres tractats. Però Arquimedes entra ara en una tercera fase en la qual diu que les seccions s i t *omplen o componen*, respectivament, les figures S i T, de manera que, repetint l'operació anterior per a totes les seccions paral·leles, la figura T *restant en el seu lloc* equilibrarà, respecte del fulcre de la palanca, la figura S traslladada a una posició de manera que el seu centre de gravetat sigui un extrem de la palanca. Per tant, coneixent el centre de gravetat de les figures i l'àrea d'una d'elles, la seva posició d'equilibri permetrà trobar el volum de l'altra.

És clar que la clau del mètode mecànic d'Arquimedes rau en el procés que té lloc en la tercera fase i que ell mateix anomena amb gran encert *composició*, mitjançant el qual, com a bon grec, evita i camufla la presència de l'infinit. Considerem el costat de la palanca en el qual la figura T *ha restat en el seu lloc*: Arquimedes diu que les seccions t de T omplen o componen T, però això, a més de no tenir cap base matemàtica, perquè no es dedueix de cap postulat ni teorema, no té cap base material, ja que les seccions t que són rectes no poden compondre ni emplenar de cap manera cap figura perquè això violaria la *llei de l'homogeneïtat*. No obstant això, l'error lògic de la consideració d'Arquimedes es veu temperat intuïtivament pel fet que el sòlid T no s'ha desplaçat, és *en el seu lloc*. Ara bé, les seccions s que componen la figura S s'han mogut paral·lelament a la seva posició inicial fins a coincidir els seus centres en l'altre extrem de la palanca, de manera que totes queden col·locades en una mateixa recta que hauria d'equilibrar una figura plana, la qual cosa, lògicament i intuïtiva, és absurda. De tota manera, Arquimedes, amb un esforç d'intuïció ideal, imagina que les seccions s del sòlid S, traslladades, recomponen i reconstrueixen el sòlid del qual eren els components, com si els elements geomètrics que es desplacen no fossin en realitat elements rectilinis, sinó elements plans de cert gruix capaços de recompondre el sòlid del qual procedeixen. Tractant-se d'una intuïció ideal que no casa amb la intuïció sensible de l'experiència ni amb el sentit comú, Arquimedes té molt en compte que aquests resultats només tenen *certa aparença de veritat* i el mètode *no comporta demostració*.

Fem una interpretació deliberadament anacrònica mitjançant una anàlisi del *mètode mecànic* d'Arquimedes a la llum del nostre càlcul integral, per comprendre com amb mètodes tan poc ortodoxos va poder Arquimedes obtenir resultats absolutament correctes.

Siguin S i T dues figures planes situades al llarg del mateix interval d'un eix horitzontal L. Donada l'àrea $a(T)$ i el centre de gravetat G de T, es vol trobar l'àrea $a(S)$ de S. Podem interpretar les dues figures planes S i T com a làmines de densitat unitat, compostes d'un nombre infinitament gran d'elements geomètrics elementals —segments de línia o rectangles d'amplada infinitesimal, és a dir, indivisibles o infinitesimals ([26, p. 263–269]), respectivament, que dirien els matemàtics del segle XVII—, perpendiculars a l'eix L. Prenem l'eix L com una palanca amb el punt de suport en A i suposem que podem trobar una constant h tal que cada línia vertical, a una distància x de A, determina en les figures S i T segments de línia de longituds s i t, respectivament, tals que

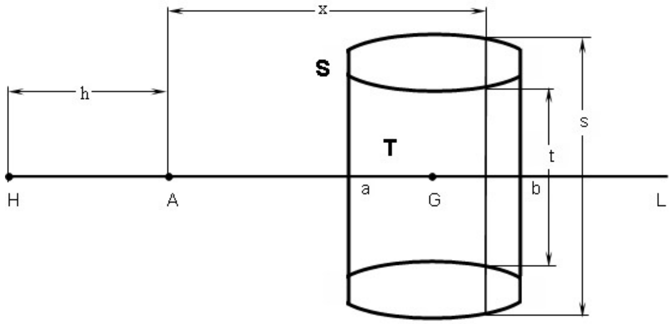


FIGURA 8.

es compleix:

$$\frac{s}{t} = \frac{x}{h}. \tag{1}$$

La llei de la palanca implica llavors que el segment desplaçat al punt H, que és a una distància h de A, equilibra el segment t, que es manté *en el seu lloc*. D'això dedueix Arquimedes que si la figura S es desplaça de manera que arribi a tenir el seu centre de gravetat en H, equilibrarà la figura T que es manté *en el seu lloc*, és a dir, que es té:

$$\frac{a(S)}{g(T)} = \frac{a(T)}{h(2)}. \tag{2}$$

on $g(T)$ és la distància del punt A al centre de gravetat G de T i s'assumeix que cada figura actua com una massa puntual situada en el seu centre de gravetat. Conegudes llavors l'àrea $a(T)$ i les distàncies h i $g(T)$, aplicant (2) s'obtindrà l'àrea $a(S)$. El punt crucial del desenvolupament anterior rau en el trànsit lògic de (1) a (2), és a dir, en la manera de demostrar que (1) implica (2), deducció que Arquimedes no realitza, sinó que assumeix. El pas de (1) a (2) es resol fàcilment mitjançant càlcul integral. En efecte, siguin $s(x)$ i $t(x)$ les seccions de les figures S i T a distància x del fulcre de la palanca A; tenim, per a les àrees S i T, i per al centre de gravetat de T, les expressions següents:

$$a(S) = \int_a^b s(x)\,dx\,, \qquad a(T) = \int_a^b t(x)\,dx\,, \qquad g(T) = \frac{1}{a(T)}\int_a^b xt(x)\,dx\,.$$

Ara bé, de la igualtat (1) es dedueix $s(x) = x\frac{t(x)}{h}$, d'on s'obté:

$$a(S) = \int_a^b s(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_a^b xt(x)\,,dx\,,$$

és a dir: $a(S) = g(T)\cdot a(T)\frac{1}{h}$, expressió equivalent a (2).

Així, doncs, en termes d'integrals, l'efecte del mètode mecànic d'*El mètode* és expressar una integral que s'ha de calcular per trobar l'àrea d'una figura S, en termes d'altres integrals, de l'àrea i del centre de gravetat d'una altra figura coneguda T.

En la seva introducció a la seva versió d'*El mètode*, J. Babini descriu molt significativament que en pensar en el procés discursiu que té lloc en realitzar una integral definida es pot explicar l'aparent paradoxa de com Arquimedes va poder aconseguir amb un mètode tan poc ortodox un resultat correcte ([4, p. 24]):

> El càlcul actual de quadratures i cubatures es realitza mitjançant el càlcul d'integrals definides, que poden considerar-se límits de sumes, els sumands de les quals són productes de dos factors: la funció integrant que en el nostre exemple està donada per la secció, i un increment o diferencial que correspondrà a la distància entre dues seccions consecutives. Ara bé, el resultat de la integral depèn exclusivament de la forma i propietats de la funció integrant, i l'altre factor no fa sinó el paper passiu destinat a mantenir l'homogeneïtat; és, doncs, explicable que Arquimedes, en menysprear en absolut l'homogeneïtat i atendre únicament a les propietats de la secció, expressada en la seva proporció d'equilibri, aconsegueix resultats correctes.

Sembla, doncs, que el mètode mecànic d'*El mètode* és una etapa intermèdia entre el moment realment creador que Arquimedes amaga i l'etapa final, rigorosament deductiva, en la qual mitjançant el *mètode d'exhaustió* demostra els seus magnífics tractats geomètrics. En definitiva, el *mètode mecànic* d'Arquimedes és una brillant combinació de consideracions geomètriques i mecàniques, en les quals en essència hi ha, subjacents, certs procediments del nostre càlcul integral.

6 El mètode de demostració per exhaustió

El *mètode d'exhaustió* és el procediment geomètric utilitzat per Arquimedes per convalidar apodícticament els nombrosos problemes de quadratures i cubatures que el savi siracusà descobria mitjançant el *mètode mecànic* de descobriment. Com en altres aspectes, l'aplicació arquimediana del *mètode d'exhaustió* és tributària del treball d'Èudox de Cnidos, el més important dels matemàtics de l'acadèmia platònica, que va resoldre de manera brillant i rigorosa la incompatibilitat radical entre finit i infinit que havia provocat amb l'aparició de l'incommensurable la primera crisi de fonaments a la història de la matemàtica, que és conjurada mitjançant la introducció de la idea de *tan petit com es vulgui*, que és l'antecedent del nostre procés de *pas al límit*, mitjançant un recurs brillant que desenvolupa mitjançant l'axioma d'Èudox–Arquimedes o *axioma de continuïtat* (*Elements* Definició V.4) —convertit per Arquimedes en el cinquè postulat de l'obra *Sobre l'esfera i el cilindre* i en lema fonamental

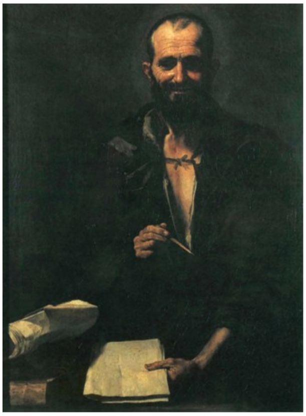


FIGURA 9: «Arquimedes» pintat per Ribera el 1630. (Museu del Prado, Madrid). Ribera representa Arquimedes com a geòmetra d'una manera una miqueta irreverent, exhibint un sorneguer somriure. Això ha induït alguns crítics a afirmar que potser el personatge seria més aviat Demòcrit, un matemàtic les investigacions matemàtiques del qual estan en els antecedents dels grans descobriments geomètrics d'Arquimedes. Aquesta icona es va fer molt famosa a Espanya per l'emissió d'un segell (el 24 de març de 1963) que la reprodueix.

en les cartes a Dositeu que antecedeixen les obres *Sobre les espirals* i *Sobre la quadratura de la paràbola*— i un teorema —el *principi d'Èudox*, *Elements* X.1.[1]

La forma geomètrica del *mètode d'exhaustió*, aplicat per Arquimedes, també és tributària de l'aproximació progressiva del cercle amb polígons inscrits successivament amb doble nombre de costats que l'anterior, que desenvolupa, com s'ha dit, el sofista Antifont i que s'estén també a polígons circumscrits per Bryson. Aquests mètodes geomètrics apliquen una espècie d'infinit actual, i per això són refutats per Aristòtil en diversos passatges de *La física*, però són la matriu de les idees que Arquimedes aplicarà en les seves quadratures i cubatures on transcendeix de manera considerable l'aplicació que Euclides fa de l'exhaustió en el Llibre XII dels *Elements* per provar els teoremes sobre cercles, esferes, cilindres i piràmides que havien estat descoberts per Hipòcrates i Demòcrit i demostrats, potser, per Èudox; tots els matemàtics a qui Arquimedes anomena de manera genèrica *els geòmetres anteriors*.

El *mètode d'exhaustió* aplicat per Arquimedes a la demostració dels resultats obtinguts per via mecànica és utilitzat de diverses maneres, que poden classificar-se en dos tipus fonamentals: *el mètode de compressió* i *el mètode d'aproximació*. Vegem successivament (en llenguatge actual) l'aspecte formal d'ambdós mètodes.

1 Per a una visió exhaustiva d'aquestes qüestions històriques, es pot consultar l'obra [51, cap. 15, 16, p. 153–177].

El mètode d'exhaustió per compressió d'Arquimedes s'aplica de la manera següent: Donada una magnitud geomètrica A, ja sigui longitud, àrea o volum, es vol demostrar que és igual a una altra magnitud B coneguda. Basant-se en la geometria de la figura A, es construeixen dues successions de figures geomètriques: $\{I_n\}$ monòtona creixent (inscrites a A) i $\{C_n\}$ monòtona decreixent (circumscrites a A) tals que:

$$I_n < A < C_n \quad \text{per a tot } \ n\,. \tag{3}$$

Llavors es comprova:

1) La diferència $C_n - I_n$ es pot fer tan petita com es vulgui, per a n suficientment gran, és a dir:

$$\text{per a tot } \varepsilon > 0 \text{ existeix } N \text{ tal que per a tot } n > N,\ C_n - I_n < \varepsilon. \tag{4}$$

2) Per a tot n,

$$I_n < B < C_n. \tag{5}$$

A partir de (3), (4) i (5) es demostra fàcilment que $A = B$. En efecte:

a) Suposem $A > B$. Prenent $\varepsilon = A - B$, podem trobar un n tal que $C_n - I_n < \varepsilon = A - B$, però segons (3) $A < C_n$; per tant, $A - I_n < A - B$; per tant, es compliria $B < I_n$, la qual cosa està en contradicció amb (5).

b) Suposem $A < B$. Prenent $\varepsilon = B - A$, podem trobar un n tal que $C_n - I_n < \varepsilon = B - A$, però segons (3) $I_n < A$; per tant, $C_n - A < B - A$; per tant, es compliria $C_n < B$, també en contradicció amb (5).

En conseqüència, com que ni $A < B$ ni $B < A$, ha de ser $A = B$.

En concret aquesta forma del *mètode d'exhaustió* s'anomena *mètode d'exhaustió per compressió mitjançant diferència*. En altres casos, Arquimedes substitueix la primera condició en forma de *diferència* per la següent en forma de *raó*:

1') La raó Cn/In es pot fer, per a n suficientment gran, menor que la raó μ/ν entre dues magnituds donades μ i ν, on $\mu > \nu$. És a dir, en el nostre llenguatge:

$$\text{per a tot parell } \mu \text{ i } \nu \ (\mu > \nu) \text{ existeix } N \text{ tal que}$$
$$\text{per a tot } n > N,\ C_n - I_n < \mu/\nu.$$

De manera anàloga al cas de diferència, es demostra que en les condicions 1') i 2), $A = B$. I així s'aplica l'anomenat *mètode d'exhaustió per compressió mitjançant raó*.

En termes actuals, l'aplicació del *mètode per compressió* és:

- Per diferència: si per a tot valor natural de n es té: 1) $I_n < A < C_n$, 2) $I_n < B < C_n$. Si a més:

$$\lim_{n\to\infty} (C_n - I_n) = 0\,, \quad \text{llavors: } A = B\,.$$

- Per raó: si per a tot valor natural de n es té: 1) $I_n < A < C_n$, 2) $I_n < B < C_n$. Si a més:
$$\lim_{n\to\infty}[\frac{C_n}{I_n}] = 1\,, \quad \text{llavors: } A = B\,.$$

L'aplicació del *mètode de compressió* no és uniforme, sinó que difereix d'un exemple a un altre segons la magnitud coneguda B, amb la qual es compara la desconeguda A i no hi ha cap regla general vàlida en tots els casos. No obstant això, una vegada s'han demostrat les desigualtats (3) i (5), el procés demostratiu subsegüent és automàtic; així i tot, Arquimedes realitza el procés per a cada cas particular basant-se en la geometria intrínseca de les figures.

Freqüentment, és bastant laboriós seguir el curs de la doble reducció a l'absurd de l'exhaustió arquimediana i es requereix una gran dosi d'imaginació geomètrica per complimentar tot allò que Arquimedes desenvolupa. Es comprèn que, davant l'absència del mètode de descobriment[2] —no revelat com s'ha dit, fins al 1906—, els matemàtics del segle XVII, anteriors a Newton i Leibniz, junt amb la seva admiració pel geni siracusà, critiquessin l'exhaustió arquimediana per la seva absència d'il·lació heurística i busquessin amb afany nous mètodes més operatius de ràpid descobriment que utilitzessin els anomenats indivisibles i infinitesimals. Però només la irrupció de la geometria analítica en el panorama matemàtic del segle XVII permet la substitució de les construccions geomètriques complexes de la geometria sintètica euclidiana i arquimediana per automàtiques operacions algebraiques que permeten l'aplicació de les mateixes tècniques a problemes de naturalesa geomètrica diversa, a més de posar de manifest el procés heurístic de descobriment que té lloc amb la justificació de les diverses tècniques i mètodes infinitesimals. Amb això s'aconseguiria el gran objectiu que havia plantejat Descartes al *Discurs del Mètode*, «exercitar l'enteniment sense fatigar gaire la imaginació» [DM.AT.VI.17], amb la pretensió de la reforma general de l'activitat matemàtica transformant els antics instruments de la geometria grega —l'àlgebra geomètrica i l'anàlisi geomètrica— en el que avui anomenem la geometria analítica cartesiana, mitjançant la intervenció de l'àlgebra literal i simbòlica de Vieta sobre la geometria, després de la dràstica reforma i simplificació de la notació algebraica que el mateix Descartes realitzarà, primer de manera provisional a la Regla XVI de les *Regulae* (RXVI.AT.X.455) i ja de manera definitiva a *La geometria* (G.AT,VI,371). I tot això, com a part del projecte universal cartesià de reforma de la filosofia.[3]

Arquimedes aplica el *mètode de compressió* en les proposicions següents:

- Per diferència: *La mesura del cercle* (1); *Sobre conoides i esferoides* (22, 26, 28, 30); *Sobre les espirals* (24, 25); *Sobre la quadratura de la paràbola* (16); *El mètode* (15).
- Per raó: *Sobre l'esfera i el cilindre* (13, 14, 33, 34, 42, 44).

2 Per aprofundir en aquesta visió geometricofilosòfica, podeu consultar [26, cap. 1.3, p. 59–65].

3 Per a una visió exhaustiva d'aquestes qüestions històriques, vegeu [50, cap. 8, 10, p. 85–124, p. 133–145].

El mètode d'exhaustió per aproximació d'Arquimedes s'aplica de la manera següent:

Donada una magnitud geomètrica A, ja sigui longitud, àrea o volum, es vol demostrar que és igual a una altra magnitud B coneguda. Basant-se en la geometria de la figura A es construeix una successió $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de magnituds tals que:

1) $S_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n$ sigui tal que la diferència $A - S_n$ es pugui fer tant petita com es vulgui per a n suficientment gran, i el mateix respecte de s_n (de fet, això és conseqüència de l'anterior). És a dir, en el nostre llenguatge:

$$\text{per a tot } \varepsilon > 0 \text{ existeix } N \text{ tal que per a tot } n > N,\ \ A - S_n < \varepsilon,\ \ s_n < \varepsilon.$$

2) Per a tot n es satisfà la relació $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + R_n = B$, on $R_n < s_n$.

A partir de 1) i 2) es demostra que $A = B$. En efecte, si no fos així, seria $A > B$ o $A < B$.

a) Suposem $A > B$. Prenent $\varepsilon = A - B$, podem trobar un n tal que $A - S_n < \varepsilon = A - B$; per tant, $B < S_n$, la qual cosa està en contradicció amb 2).

b) Suposem que $A < B$. Prenent $\varepsilon = B - A$, podem trobar un $<n$ tal que $s_n < \varepsilon = B - A$. Però segons 2), $B - S_n = R_n < s_n < \varepsilon = B - A$; per tant, es compliria $A < S_n$, en contradicció amb 1).

En conseqüència, coM que ni $A < B$ ni $B < A$, ha de ser $A = B$.

Arquimedes utilitza aquest *mètode d'exhaustió per aproximació* en les proposicions 20–24 de la seva obra *Sobre la quadratura de la paràbola*, sent la successió $s_1, s_2, \ldots, s_n$ una progressió geomètrica descendent de raó 1/4 i el resultat 1 conseqüència del *principi d'Èudox* (proposició X.1 dels *Elements* d'Euclides).

Respecte al nom *mètode d'exhaustió*, observem que és bastant inapropiat, ja que encara que la semàntica del terme insinua una aproximació indefinida fins a assolir el resultat de manera anàloga a l'aplicació d'un límit, no és realment així perquè mai no s'arriba a *exhaurir*, amb les figures inscrites i circumscrites que van aproximant la figura la magnitud de la qual es vol estudiar, sinó que és suficient arribar a un punt en què certa figura és menor que una figura donada. D'aquesta manera, mitjançant la prova indirecta de l'argument de la doble reducció a l'absurd s'evita l'ús explícit dels límits. Més encara, el nom d'*exhaustió* és paradoxal perquè precisament pretén resoldre amb rigor el problema de la inexhaustivitat de l'infinit. De fet, el nom del mètode no el van utilitzar els grecs, sinó que és una desafortunada encunyació introduïda en el segle XVII per G. de Saint Vincent; però el seu ús s'ha fet habitual en la literatura matemàtica, encara que un dels més importants estudiosos d'Arquimedes, E. J. Dijksterhuis ([16, p. 132]), es resisteix a anomenar-lo així i prefereix denominar-lo el *mètode indirecte del procés infinit*, d'acord amb la missió essencial que compleix, és a dir, excloure de la geometria grega, mitjançant l'aplicació del *principi d'Èudox* (*Euclides* X.1), l'existència de l'infinitèsim actual i admetre, en la matemàtica, d'acord amb *La física* d'Aristòtil (Llibre III, cap. 7, 207a, 208a), només l'infinit potencial, basat en la idea de *tan gran o tan petit com es vulgui* que s'orientarà ulteriorment cap a la noció aritmètica de límit del càlcul infinitesimal.

7 El mètode d'exhaustió per compressió. La quadratura de l'espiral

Un dels exemples més significatius de l'aplicació del *mètode d'exhaustió* és la quadratura de la primera volta de l'espiral d'Arquimedes, que el savi aconsegueix, a la proposició 24 del tractat *Sobre les espirals*, mitjançant compressió per diferència.

Arquimedes introdueix la corba, en termes de composició de moviments, en la definició 1: *Si una línia recta traçada en un pla gira un nombre qualsevol de vegades amb moviment uniforme, restant fix un del seus extrems, i torna a la posició inicial, mentre que, sobre la línia en rotació, un punt es mou uniformement com ella a partir de l'extrem fixat, el punt descriurà una espiral en el pla.*

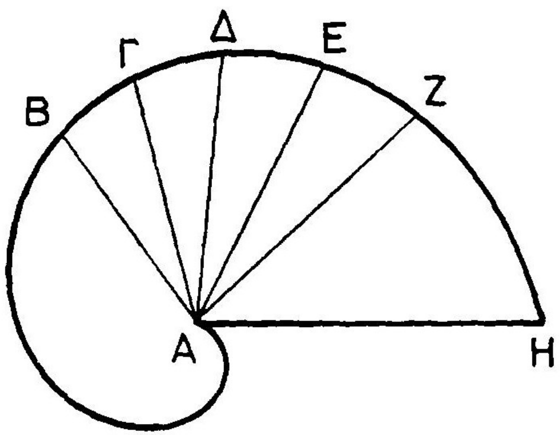


FIGURA 10.

En les definicions 4, 5 i 7, respectivament, Arquimedes defineix respecte de la primera volta de l'espiral, la primera recta —que uneix el punt inicial amb el final—, la primera àrea —la regió determinada per la corba i la primera recta— i el primer cercle C —amb centre a l'origen de l'espiral i radi la primera recta—.

Després de diverses proposicions i corol·laris, Arquimedes acaba demostrant el resultat fonamental següent (proposició 24):

> L'àrea compresa E, entre l'espiral descrita a la primera volta i la primera de les rectes en posició inicial de gir, és equivalent a un terç del primer cercle C.

És a dir,

$$a(E) = \frac{1}{3}a(C)\,. \tag{6}$$

En la prova de (6) Arquimedes utilitza certs resultats que obté en la proposició 10, i que són equivalents a les habituals fórmules per a la suma d'enters consecutius i els seus quadrats, que a la fi el portaran a certes desigualtats necessàries per emprendre l'exhaustió. En efecte, en despullar aquesta proposició del seu caràcter geomètric i traduir el llenguatge retòric a expressió algebraica, es troba una progressió:

$$a, 2a, 3a, \ldots, na,$$

per a la qual Arquimedes demostra la relació:

$$(a^2n^2 + a^2n^2 + \cdots + a^2n^2) + a^2n^2 + a(a + 2a + \cdots + na) \\ = 3[a^2 + (2a)^2 + \cdots + (na)^2]$$

resultat equivalent a la fórmula per a la suma dels n primers quadrats d'enters:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,. \tag{7}$$

Prossegueix Arquimedes amb el corol·lari de la proposició 10 que en ser despullat del seu llenguatge geomètric, i expressar-lo en llenguatge algebraic, es pot escriure:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\,, \tag{8}$$

resultat que es podria obtenir en expressar (7) en la forma:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\,.$$

A partir d'aquí, Arquimedes prepara el terreny per resoldre el problema considerant les habituals figures —en aquest cas sectors circulars inscrits i circumscrits—, i ho fa a la proposició 21 i següents, i finalment, a la proposició 24 aplica impecablement el *mètode d'exhaustió* per obtenir amb tot rigor el resultat.

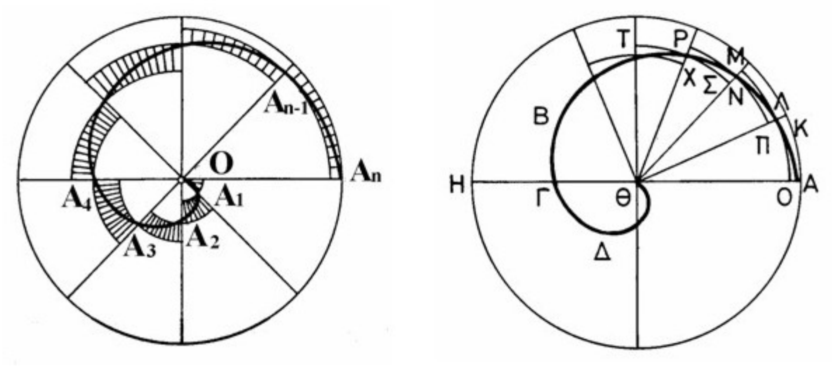
Interpretant el raonament d'Arquimedes en llenguatge aritmètic es tindrà:

Amb referència a la figura 11*a*) (similar a la figura 11*b*), utilitzada per Arquimedes a la proposició 21 de *Sobre les espirals*), es divideix el cercle C en n sectors, que intersecten l'espiral en els punts $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Escrivint $OA_1 = c$, resulta: $OA_1 = c$, $OA_2 = 2c, \ldots OA_n = nc$.

Es té, llavors, que la regió espiral E conté una regió P, formada per sectors circulars inscrits P_i, de radis $o, c, \ldots, (n-1)c$, i està continguda en una regió Q, formada per sectors circulars circumscrits Q_i, de radis $c, 2c, \ldots, nc$.

Trivialment, les àrees de P, E, Q compleixen: $a(P) < a(E) < a(Q)$.



a) *b*)

FIGURA 11.

A més, la quantitat $a(Q) - a(P)$ és igual a l'àrea d'un sector circular i, per tant, pot fer-se tan petita com es vulgui. Prenent n suficientment gran, de manera que, coneixent prèviament el resultat (6) de la quadratura, aquest es demostrarà amb tot rigor mitjançant la doble reducció a l'absurd del *mètode d'exhaustió*.

En efecte, suposem $a(E) < (1/3)a(C)$, escollim n suficientment gran per tal que es compleixi:

$$a(Q) - a(P) < (1/3)a(C) - a(E)\,;$$

com que $a(P)$ és menor que $a(E)$, es té:

$$a(Q) < (1/3)a(C)\,. \tag{9}$$

Ara bé, la raó de les àrees de sectors circulars semblants és igual a la raó dels quadrats dels seus radis (teorema d'Hipòcrates, *Euclides*, XII.2), és a dir:

$$\frac{a(Q_i)}{a(C_i)} = \frac{(ic)^2}{(nc)^2} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots n, \tag{10}$$

on C_i són els sectors del cercle C circumscrit a l'espiral. A partir de (10), aplicant les propietats de la suma de proporcions (*Euclides*, 5.12), s'obté:

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{c^2 + (2c)^2 + \cdots + (nc)^2}{n(nc)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}\,; \tag{11}$$

l'última desigualtat és conseqüència de (8).

A partir de (11) s'obté el resultat $a(Q) > (1/3)a(C)$, contradictori amb (9); per tant, no pot succeir que $a(E)$ sigui menor que un terç de $a(C)$.

De manera anàloga s'aborda el supòsit $a(E) > (1/3)a(C)$.

8 El mètode d'exhaustió en Arquimedes i els límits

En la quadratura de l'espiral, Arquimedes obté geomètricament un resultat equivalent a la nostra integral $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b}{3}$, la qual avui es pot establir mitjançant el límit:[4]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3},$$

que es dedueix de la fórmula:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

que és precisament l'obtinguda per Arquimedes a la proposició 10 de *Sobre les espirals*, a partir del corol·lari de la qual, el savi, considerant les regions P i Q formades respectivament per sectors circulars inscrits i circumscrits al cercle C associat a la regió i determinada per la primera volta d'espiral, estableix les desigualtats:

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3} < \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{a(Q)}{a(C)}.$$

En arribar a aquest punt, és una autèntica temptació prendre límits a ambdós extrems de les desigualtats. D'aquesta manera obtindríem directament el resultat demostrat per Arquimedes: $a(E) = (1/3)a(C)$.

Però Arquimedes no estableix el resultat d'aquesta manera; en lloc de prendre el límit, qüestió extemporània per a ell, en no disposar del desenvolupament aritmètic necessari per realitzar aquesta operació, aplica els resultats geomètrics equivalents a les desigualtats per, tenint en compte que la diferència $a(Q) - a(P)$ es pot fer *tan petita com es vulgui*, deduir, mitjançant una doble reducció a l'absurd, que $a(E)$ no pot ser ni major ni menor que $(1/3)a(C)$, és a dir, obtenir el resultat de la quadratura de l'espiral aplicant el *mètode d'exhaustió per compressió n*. Amb la seva argumentació basada en l'estructura geomètrica particular de cada problema, Arquimedes se situa al llindar de la moderna teoria de límits; però sense l'aparell aritmètic, el *mètode d'exhaustió* evita el pas al límit i exclou tota consideració infinitesimal directa. Es comprèn, doncs, com s'ha dit anteriorment, que del mètode d'exhaustió aplicat per Arquimedes se'n diu, a vegades, *mètode indirecte del procés infinit* i fins i tot *mètode indirecte del pas al límit*.

De vegades es diu de manera entusiasta que Arquimedes és l'artífex del càlcul integral, volent indicar que per primera vegada en la història, Arquimedes

4 La integral definida $\int_0^b x^2\,dx = \frac{b}{3}$ es pot calcular com a cas particular de la fórmula:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

fa una vertadera integració. En un sentit ampli, els procediments d'Arquimedes són a la pràctica integracions, però, en puritat, no podem assegurar que Arquimedes realitza una autèntica integració —en el sentit genuí de calcular el límit d'una suma quan el nombre de sumands creix indefinidament mentre es fan infinitament petits—, perquè Arquimedes evita el pas al límit amb la doble reducció a l'absurd del *mètode d'exhaustió*.

El model arquimedià de la quadratura de l'espiral és utilitzat pels matemàtics del segle XVII, sobretot Fermat i Pascal, per fer les seves quadratures aritmètiques, i obtenen resultats que permeten calcular l'àrea limitada per les paràboles generalitzades $y = x^k$, equivalents a la quadratura bàsica: $\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$, a base d'estendre les desigualtats que Arquimedes va utilitzar per a aplicar el *mètode d'exhaustió per compressió* a la quadratura de l'espiral. La base per a aquests desenvolupaments són les fórmules recurrents per a la suma de potències d'enters, fonamentades, en el cas de Fermat, en les propietats dels nombres poligonals, que obté inspirant-se en els apèndixs de l'*aritmètica* de Diofant, i en el cas de Pascal en les propietats del *triangle aritmètic de Tartaglia*.

Així, doncs, alguns dels càlculs de la quadratura bàsica, més o menys rigorosos, es basen en fórmules per a la suma de les primeres potències d'enters, que condueixen a les desigualtats:

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k < \frac{n^{k+1}}{k+1} < 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

de les quals nosaltres precisament deduïm el límit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} > \frac{1}{k+1}\,,$$

que és utilitzat implícitament, disfressat com sempre a través de la doble reducció a l'absurd, que tots els matemàtics saben que és l'única cosa que pot concloure amb rigor l'argument, però cap d'ells segueix fidelment tots els passos que en rigor s'han de fer, com feia Arquimedes, sinó que es queden en el llindar de l'*exhaustió*, comentant que és de domini públic el camí a seguir. Així, doncs, les proves patien de falta de rigor, perquè per esquivar la rigidesa del *mètode d'exhaustió*, de manera intuïtiva, s'aplicaven subreptíciament idees d'aproximació mitjançant límits.

Així, per obtenir la quadratura $\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$, divideixen l'interval $[o, a]$ en n subintervals de longitud $\frac{a}{n}$, a continuació construeixen els habituals rectangles inscrits P_n i circumscrits Q_n, tenint tots per base $\frac{a}{n}$ i altura la determinada per la corresponent ordenada, de manera que s'obté per a la suma de les àrees:

$$a(P_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}}\left[1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k\right]$$

$$a(Q_n) = \frac{a^{k+1}}{n^{k+1}} 1^k + 2^k + \cdots + n^k\,.$$

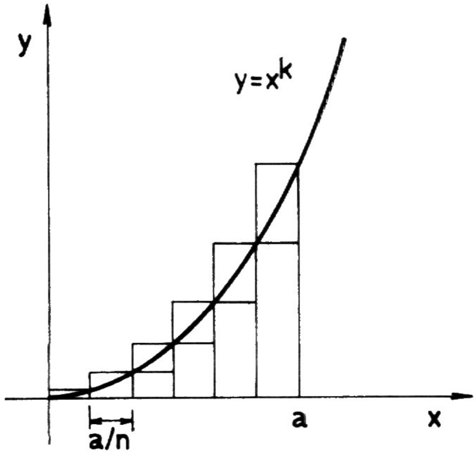


FIGURA 12.

Si S és l'àrea limitada per la corba $y = x^k$ en el segment $[o, a]$, fàcilment s'obtenen els elements per aplicar el mètode de compressió d'Arquimedes: $a(P_n) < a(S) < a(Q_n)$

1) $a(Q_n) - a(P_n) = \frac{a^{k+1}}{n}$, per a tot n,

2) $a(P_n) < \frac{a^{k+1}}{k+1} < a(Q_n)$, per a tot n,

que són les desigualtats bàsiques per iniciar la doble reducció a l'absurd que els porti al resultat conjecturat:[5]

> L'àrea limitada per la corba $y = x^k$ en el segment $[o, a]$ és $\frac{a^{k+1}}{k+1}$, és a dir: $\int_0^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}}{k+1}$.

9 Els mètodes d'Arquimedes, antecedents del càlcul integral

El *mètode d'exhaustió* aplicat per Arquimedes, combinat amb el seu heurístic *mètode mecànic* de descobriment, constitueix un poderós instrument rigorosament lògic que li permet il·luminar intuïtivament i convalidar apodícticament nombrosos resultats sobre quadratures i cubatures, amb els quals Arquimedes transcendeix els *Elements* d'Euclides i amplia considerablement el patrimoni matemàtic grec. Aquests resultats són el primigeni antecedent del càlcul integral actual en què els mateixos problemes es resolen mitjançant els recursos analítics del càlcul algebraic i de l'aplicació dels límits, que descobreixen i demostren simultàniament en un únic acte intel·lectual matemàtic. Però les

5 Els detalls d'aquestes quadratures d'orientació arquimediana són tractats àmpliament a [26, cap. 2, 5, p. 105–114.]

rigoroses demostracions d'Arquimedes impliquen sota una forma estrictament geomètrica —la de l'àlgebra geomètrica dels llibres II i VI dels *Elements* d'Euclides— tots aquests mitjans algebraics i infinitesimals moderns. Així, doncs, el treball matemàtic del savi siracusà el situa a l'avantsala històrica del càlcul integral. Per això, afirma E. Rufini ([12, p. 187]):

> Arquimedes anticipa el càlcul integral en el temps i a la seguretat dels procediments i a la genialitat dels artificis no superats pels precursors del segle XVII.

Després del descobriment i de la divulgació d'*El mètode* sabem que els qui en el segle XVII buscaven amb ansietat nous mètodes més heurístics de ràpid descobriment, es trobaven, molts d'ells sense saber-ho, més a prop d'Arquimedes del que mai haurien imaginat. En tot l'embalum de tècniques i mètodes infinitesimals, amb indivisibles o infinitament petits, es recorren novament els camins oberts per Arquimedes i no només pel que fa als elements infinitesimals utilitzats, sinó que també es redescobreix el procediment inventiu. També, quan després del procés d'aritmetització de l'anàlisi es fonamenta el càlcul infinitesimal a través del concepte de límit, els matemàtics troben models de rigor apodíctic impecable en els procediments arquimedians dels *mètodes d'exhaustió*. Heus aquí una doble analogia històrica —entre els desenvolupaments del *mètode mecànic* i els resultats obtinguts mitjançant indivisibles, així com entre el rigorós *mètode d'exhaustió* i la fonamentació rigorosa de l'anàlisi mitjançant els límits— que ens dóna una idea de la transcendental ascendència d'Arquimedes en la gènesi de les arrels del càlcul integral.

En relació amb això, J. Babini escriu ([4, p. 27]):

> Encara que els matemàtics del Renaixement no varen conèixer *El mètode*, varen conèixer la geometria grega, el mètode d'exhaustió i el caràcter rigorós que aquest mètode conferia a les demostracions. Però uns altres eren els recursos i els problemes matemàtics, i una altra era l'atmosfera que els envoltava. L'àlgebra permetia una generalització impossible d'aconseguir amb la geometria grega, mentre que en els problemes mecànics, que es presenten en primer pla i exigeixen recursos infinitesimals, el mètode d'exhaustió és inaplicable. Per què llavors la matemàtica va trigar un parell de segles a trobar un recurs analític que substituís amb igual rigor el mètode d'exhaustió? Per què els matemàtics dels segles XVII i XVIII no van sentir aquella exigència de rigor dels geòmetres grecs i dels analistes del segle XIX? Potser la resposta resideixi en la concepció diferent del saber en l'antiguitat i en l'edat moderna; aquesta diferència entre el grec, contemplatiu i teòric, més interessat en el procés que en el producte, més en la demostració que en el resultat; i l'home modern, actiu i pràctic, que veu en el resultat correcte la garantia de la validesa de la demostració.

Però més enllà de l'aspecte apodíctic de les memòries d'Arquimedes, l'ancestre dels grans creadors del càlcul integral s'ha de buscar en la magnífica obra d'Arquimedes *El mètode*, un document històric d'un valor científic incommensurable que desperta una gran inquietud científica i que fins i tot, incita a especular amb fantasies ucròniques sobre com hauria estat la història de la matemàtica si s'hagués conegut des del Renaixement. Després de la seva lectura, ens podem explicar el profund misteri que rodejava l'activitat investigadora d'Arquimedes, plasmada en tots els seus tractats científics coneguts, i desmentir Descartes quan manifesta —en la Regla IV de les *Regles per a la direcció de l'esperit*— la insatisfacció de la curiositat frustrada per l'ocultació —amb audàcia perniciosa— dels mètodes de descobriment de la geometria grega. Encara que *El mètode* no fou conegut fins al 1906, ha estat present de manera subreptícia en la història de la matemàtica com una variable oculta. Una vegada conegut *El mètode*, la relectura de les altres obres d'Arquimedes ens obliga a plantejar-nos diverses qüestions epistemològiques sobre la relació entre processos de descobriment-invenció i mètodes d'exposició-demostració ([81, p. 740]).

La literatura clàssica, la tradició llegendària i la imaginació popular magnificaren fins al paroxisme les gestes científiques i tecnològiques del geni siracusà, però en l'àmbit matemàtic no cal recolzar-se en relats més o menys fidedignes per conèixer les proeses geomètriques de la intel·ligència sobrehumana d'Arquimedes. Només cal acostar-se amb curiositat i paciència a qualsevol dels seus magnífics tractats per quedar impressionat per una sorprenent intuïció que, aplicada amb una prodigiosa imaginació, produeix un entusiasme intel·lectual davant un inusitat desplegament de singulars construccions geomètriques que condueixen sense cap implementació de llenguatge algorítmic —per inexistent— a la demostració dels teoremes geomètrics més complexos que el savi havia descobert mitjançant procediments mecànics. No és gens estrany, doncs, que molts matemàtics del segle XVII —els grans artífexs dels primers rudiments del càlcul integral— arribessin a pensar que Arquimedes disposava d'algun mètode secret com a pedra filosofal del descobriment geomètric. Com tampoc és sorprenent o extraordinari, encara que sí meravellós, que després d'apropar-se a les matemàtiques llegint el gran científic, Voltaire exclamés en el seu *Diccionari filosòfic*:

> Hi havia més imaginació en el cap d'Arquimedes que en el d'Homer,

una sentència d'un gran valor per la personalitat del filòsof. Opinions molt similars foren expressades pel compatriota de Voltaire, D'Alembert ([39, p. 63]) —ell sí que era matemàtic—, en la tercera part del *Discurs preliminar de l'Enciclopèdia*; i també en els temps moderns pel gran matemàtic Hardy ([52, p. 82]), en la seva famosa obra *Apologia d'un matemàtic*.

Acabem amb dues citations; l'una, de la més important autoritat del segle XVIII en història de les matemàtiques, J. F. Montucla ([60, p. 223]):

> Arquimedes va obrir noves vies en la geometria i va fer tan gran nombre de descobriments, que l'antiguitat li ha concedit de comú acord el primer lloc entre els geòmetres.

L'altra, d'un dels més egregis matemàtics i pedagogs de principis del segle XX, gran entusiasta de l'aplicació de la història de les matemàtiques com a recurs didàctic bàsic per a l'argumentació genètica i la forma heurística a la classe de matemàtiques, F. Klein ([54, p. 254–255]):

> Arquimedes fou un gran investigador que en cadascun dels seus escrits avança un pas més, sobre el ja conegut. [. . .]. El procediment d'exposició [*en la seva obra El mètode*] és exactament igual que la nostra manera d'ensenyar en l'actualitat, ja que procedeix genèticament, indicant el procés mental seguit i no utilitzant mai el rígid encadenament de «hipòtesi, tesi, demostració i determinació» que domina els *Elements* d'Euclides.

10 Algunes edicions crítiques d'*El mètode*

10.1 La reconstrucció d'*El mètode* d'Arquimedes per Heiberg

El gran hel·lenista i historiador de la matemàtica J. L. Heiberg va exhumar, en circumstàncies quasi novel·lesques, el 1906, l'obra d'Arquimedes *El mètode* d'un palimpsest medieval de la biblioteca del Priorat del Phanar del patriarcat grec del Sant Sepulcre de Jerusalem, a Constantinoble; i en va reproduir a l'article «Eine neue Archimedeshandschrift» (a la revista *Hermes*, vol. XLII, Berlín, 1907, 235) el foli 41*r*.

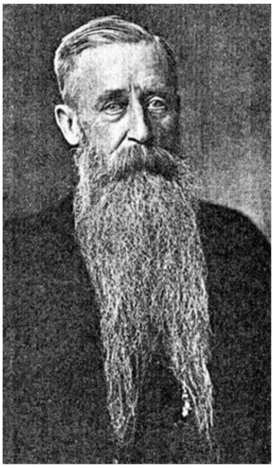


FIGURA 13: Imatge venerable de Johan Ludving Heiberg (1854–1928). Pàgina 41*r* del palimpsest trobat per Heiberg amb l'obra *El mètode* sobre els teoremes mecànics, on Arquimedes revela de forma heurística, en una comunicació a Eratòstenes, les vies i els procedimients mecànics que utilizava en els seus descobriments matemàtics.

El document era un eucologi dels segles XII al XIV amb textos litúrgics escrits en un manuscrit que contenia fragments d'obres d'Arquimedes. Per sort, l'amanuense no va raspar l'escriptura original, sinó que es va limitar a netejar-la escrivint després a sobre. Després d'una titànica tasca d'arqueologia matemàtica, J. L. Heiberg va aconsseguir transcriure, lletra per lletra, el contingut del text arquimedià, situat en l'escriptura inferior, reconstruir figures mig esborrades i restablir l'ordre seqüencial del fulls, que havia estat molt alterat. El contingut del palimpsest que fou utilizat per J. L. Heiberg per a l'edició de les seves *Archimedis Opera Omnia*, de 1910–1913, és considerat pels historiadors de la matemàtica Zeuthen, Reinach, E. Rufini, Ver Eecke, Vera i Babini com el descobriment més important dels temps moderns per al coneixement de la història de la geometria grega.

10.2 L'edició crítica en llengua castellana d'*El mètode* d'Arquimedes

L'autor d'aquest article, junt amb el catedràtic de grec Joan Vaqué Jordi, publicà el 1992, com a número de la col·lecció «Clásicos de las Ciencias» que coediten la Universitat Autònoma de Barcelona i la Universitat Politècnica de Catalunya, una edició crítica d'*El mètode* d'Arquimedes, amb el títol *Arquímedes. El Método relativo a los teoremas mecánicos*.

La traducció ha estat realitzada sobre el text establert per Heiberg a la seva *Archimedis Opera Omnia*, assumint, per descomptat, les seves autoritzades conjectures. Ens hem esforçat a aconseguir una versió literal, fidel a l'estil d'Arquimedes, sense més límit que l'inexcusable respecte a l'estructura de la llengua castellana.

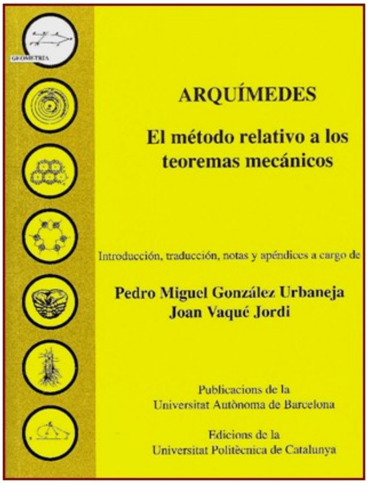
Les notes de la traducció s'han classificat en tres tipus, segons el seu caràcter i finalitat:

- Didàctiques: expliquen raonaments amb expressió matemàtica en termes moderns.
- Històriques: intenten enriquir la traducció del text amb breus indicacions d'erudició històrica relacionades amb el passatge en qüestió —gènesi de les seves idees, contrast amb altres de coetànies, influència ulterior, etc.— són breus, i remeten, per a major ampliació, a algun apèndix o a algun dels textos de la bibliografia.
- Criticotextuals: puntualitzen el text original, justificant la substitució d'alguna expressió (la traducció literal de la qual resultaria inintel·ligible) per una altra d'equivalent.

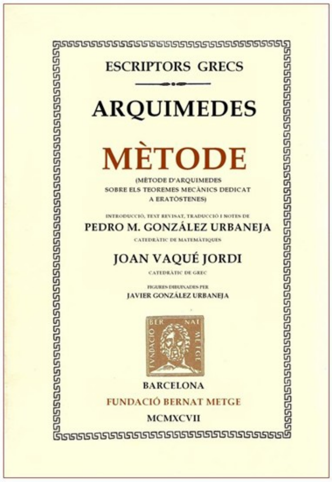
Aquesta edició consta, a més d'un facsímil de l'obra completa i la traducció anotada al·ludida, d'una introducció on es descriuen les vicissituds històriques del seu suport físic i la reconstrucció per Heiberg; se'n subratlla la importància històrica i l'aportació al patrimoni matemàtic grec i, en particular, el seu enquadrament en el context de la magna obra d'Arquimedes, sobretot en relació amb qüestions epistemològiques al voltant de la dualitat *descobriment – demostració*. També es compon d'una sèrie d'apèndixs que tenen la finalitat d'escurçar les notes i concentrar material de consulta freqüent. En aquests se situen els antecedents històrics; es fa una anàlisi crítica del *mètode mecànic* d'Arquimedes; s'il·lustra el *mètode d'exhaustió* amb la seva aplicació a dos exemples significatius: la quadratura de l'espiral i la quadratura de la paràbola; i s'estudia la influència d'Arquimedes en la gènesi del càlcul integral: el *mètode mecànic* sobre els indivisibles i infinitesimals de l'etapa empírica del càlcul del segle XVII i del *mètode d'exhaustió* sobre els límits i l'aritmetització de l'anàlisi del segle XIX.

Finalment, hi ha un glossari que cataloga els termes grecs específicament matemàtics, amb la seva traducció i notes que aprofundeixen en el seu aspecte semàntic.

Acaba aquesta edició amb una extensa bibliografia, curosament seleccionada, sobre l'autor, l'obra, les diverses edicions, la seva gènesi i la seva repercusió ulterior.



Edició en llengua castellana.



Edició en llengua catalana.

FIGURA 14.

10.3 L'edició crítica en llengua catalana d'*El mètode* d'Arquimedes

Els mateixos autors de l'edició crítica castellana (l'autor d'aquest article, junt amb el catedràtic de grec Joan Vaqué Jordi) han publicat a la col·lecció dels «Clàssics grecs i llatins» instituïda per Francesc Cambó (Fundació Bernat Metge, Barcelona, 1997) una edició crítica en grec i en català d'*El mètode* d'Arquimedes, amb el títol *Mètode d'Arquimedes* sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes.

Aquest llibre fou presentat en acte acadèmic organizat per l'Institut d'Estudis Catalans i la Fundació Bernat Metge el 10 de març de 1998 a l'IEC per commemorar la primera obra matemàtica publicada en grec i en català per la Fundació.

La traducció ha estat realitzada, directament al català des del grec, a partir del text establert per Heiberg. Per a la introducció i els apèndixs, s'ha utilitzat la versió castellana, també per a algunes notes, encara que, per la naturalesa de la col.lecció Bernat Metge, en aquestes s'ha incidit més en qüestions semàntiques i filològiques. A més, s'ha afegit una extensa biografia d'Arquimedes, entre la història verídica i les llegendes romàntiques, amb nombroses dades d'erudició, extretes d'eximis historiadors i escriptors de l'antiguitat —Tit Livi, Plutarc, Polibi, Ciceró, Valeri Màxim, Sili Itàlic, Giorgio Valla, Eutoci, Zonaràs, Tzetzes, entre d'altres. Finalment, s'han agregat quatre apèndixs amb la reconstrucció de les llacunes de les proposicions VI, VII, XIII i XV.

10.4 L'edició d'obres d'Arquimedes per a l'ICM 2006 de Madrid

Com s'ha dit a la introducció, la més rellevant trobada de membres de la comunitat matemàtica mundial, el Congrés Internacional de Matemàtics de Madrid (ICM 2006), va voler homenatjar un dels seus més il·lustres membres al llarg de la història, Arquimedes, amb una magnífica edició crítica amb facsímil d'algunes de les seves obres imperibles realitzada a partir d'uns manuscrits de la Biblioteca d'El Escorial. Segons el coordinador i editor de la publicació [80, p. 319]:

> El criterio general para la realización de la edición en castellano de esta selección de obras de Arquímedes ha sido dotarla de capacidad para evocar la dimensión y la textura histórica de la época. [...] Se pensó que lo más adecuado a la hora de escoger la obra a partir de la cual realizar la edición facsímil era utilizar un manuscrito griego con obras de Arquímedes. Más que reproducir las obras de Arquímedes de la edición, todavía hoy canónica, de Heiberg (1910–1915), era más acorde al espíritu [del criterio adoptado] buscar un manuscrito griego apropiado, esto es, que garantizara la fidelidad a la obra arquimediana, al menos de la misma manera que queda garantizada en la edición de Heiberg. Por fortuna disponemos en España de uno de estos manuscritos.

El manuscrit X-I-14 de la Biblioteca del Monestir d'El Escorial, del qual s'han pres les obres d'Arquimedes reproduïdes en el facsímil, és una còpia d'un de finals del segle XV, conservat a la Biblioteca Marciana de Venècia. El manuscrit X-I-14 garanteix, pel seu caràcter, la fidelitat requerida al text arquimedià i té més capacitat que cap altre text imprès per evocar la cultura i la matemàtica gregues [80, p. 20]). L'estat de perfecta conservació del manuscrit, l'excel·lent qualitat de la reproducció en quadricromia i les seves dimensions —333 × 230 mm.— han permès obtenir un facsímil impressionant. Però juntament amb la qualitat per evocar l'obra d'Arquimedes en el seu context científic i cultural, aquesta edició havia de tenir la capacitat de ser assequible al lector actual amb interès a aprendre directament dels clàssics, conservant tot el seu sentit històric. I això sense requerir els coneixements imprescindibles d'història de les matemàtiques per assimilar la dimensió històrica de l'obra, ni els suficients rudiments de grec que permetin llegir-la en la llengua original d'Arquimedes. El segon volum amb una edició crítica intenta pal·liar una circumstància o una altra . Consta de dues parts: uns estudis preliminars i la traducció anotada.

Els estudis preliminars són quatre articles, la finalitat dels quals és la descripció del context històric, filosòfic, cultural, científic i biogràfic d'Arquimedes i la seva obra. Són els següents:

A. Ciència grega. Els preludis i els camins d'un saber crític. Carlos García Gual —tal vegada en l'actualitat el més expert estudiós espanyol de la cultura clàssica grega i llatina— amb el seu conegut mestratge escriu una introducció historicocultural que cobreix els tres segles que separen l'emergència de la filosofia i matemàtica grega (segle VI aC) de l'època hel·lenística (segle III aC) en la qual viu el geni i pensa l'enginy d'Arquimedes.

B. La recuperació de l'obra arquimediana. Arquimedes i els seus manuscrits. Amb la seva habitual amenitat i brillant erudició, l'editor i coordinador de l'obra, Antonio J. Durán, narra amb tota mena de detalls i curiositats la fascinant història secular —i fins i tot mil·lenària— dels manuscrits —i en particular els d'El Escorial— que ens han permès de recuperar i conèixer la magnífica obra d'Arquimedes.

C. Arquimedes, un savi de llegenda. El firmant d'aquest article realitza un estudi biogràfic del savi, que inclou una àmplia tradició llegendària, embellida fins a l'èpica mitològica per la imaginació popular, sobre els episodis més o menys inversemblants de la vida i l'obra del «sobrehumà» Arquimedes, en relació amb la seva brillant activitat científica i tècnica. Les fonts utilitzades són les de grans historiadors i literats grecollatins, en especial els relators de les guerres púniques, però també la visió sobre Arquimedes de grans escriptors i científics a partir del Renaixement.

D. L'obra matemàtica d'Arquimedes. L'autor d'aquest article realitza també un estudi del pensament arquimedià mitjançant l'anàlisi de les seves obres, la seva importància i la seva decisiva influència històrica en els orígens i desenvolupament del càlcul integral en conjuminar l'heurística del mètode mecànic de descobriment amb l'apodíctica del mètode de demostració per exhaustió.

Quant a la traducció, diguem que per a *Sobre l'esfera i el cilindre* i *La mesura del cercle* s'ha utilitzat la realitzada per Paloma Ortiz per a l'edició de les obres d'Arquimedes de la Biblioteca Clásica Gredos —dirigida per Carlos García Gual— de la qual ja ha aparegut el 2005 un primer volum, mentre que de la traducció de *La quadratura de la paràbola*, així com de l'adaptació de la traducció de les tres obres que editem del manuscrit X-I-14 d'El Escorial, se n'ha encarregat Susana Mimbrera.

Atesa l'estructura i la naturalesa de la geometria grega, però en especial la d'Arquimedes per la parquedat de les seves explicacions, els dibuixos geomètrics són part consubstancial dels raonaments matemàtics; per tant, són un

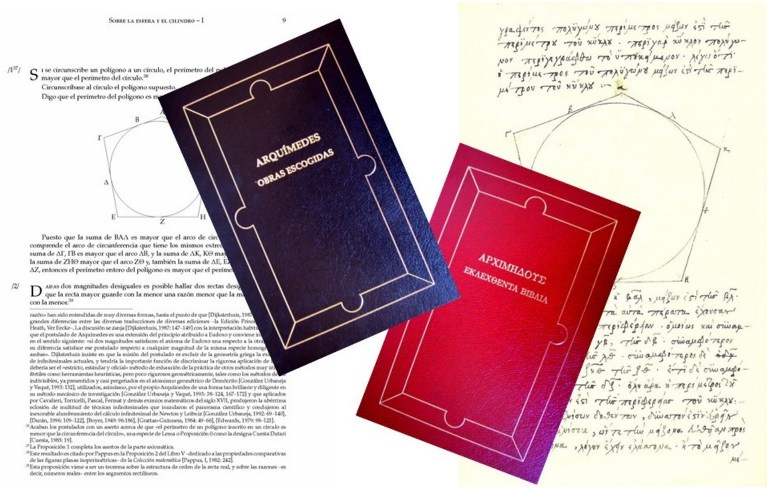


FIGURA 15.

component essencial de l'obra arquimediana, més encara, com diu Durán [80, p. 323]: «Els dibuixos són una espècie de mapa que guia les demostracions.» La filosofia seguida per a la reproducció de prop de 120 diagrames geomètrics ha estat la de fidelitat al manuscrit, però corregint el que semblaven ser errors de la imperícia del copista. Han estat realitzats per Juan Luis Varona, que també s'ha encarregat de la maquetació del volum amb la traducció, les notes i els estudis preliminars. En aquesta tasca ha estat ajudat per Renato Álvarez Nodarse.

Finalment, respecte a l'anotació, diguem que efectua una anàlisi multidisciplinària de les obres d'Arquimedes. Hi ha tres classes d'anotacions: unes de tipus filològic relatives a la traducció, degudes a les traductores Paloma Ortiz i Susana Mimbrera; unes altres referents a les figures, l'autor de les quals és Antonio J. Durán, que puntualitza aspectes dels esquemes geomètrics reproduïts en relació amb els originals del manuscrit, i unes de tipus històric, filosòfic i matemàtic, realitzades per l'autor d'aquest article.

Referències

Fonts originals sobre Arquimedes

[1] ARQUIMEDES. *Archimedis Opera Omnia*. Edició de J. L. Heiberg. Leipzig: 1910–1913.

[2] ARQUIMEDES. *Les oeuvres complètes d'Archimède*. Introducció i notes de P. Ver Eecke. Liège: Vaillant Carmanne, 1960.

[3] ARQUIMEDES. *Archimède*. Text establert i traduït per Charles Mugler. París: Société d'Édition «Les Belles Lettres», 1970–1972. 4 volums.

[4] ARQUIMEDES. *El método*. Introducció i notes de J. Babini. Buenos Aires: Eudeba, 1966.

[5] ARQUIMEDES. *El método*. Introducció i notes de L. Vega. Madrid: Alianza Editorial, 1986.

[6] ARQUIMEDES. *Obras escogidas*. Edició amb facsímil del manuscrit X-I-14 de la Biblioteca d'El Escorial. Editor, Antonio J. Durán. Traducció, Paloma Ortiz i Susana Mimbrera. Notes a la traducció, Pedro M. González Urbaneja. Estudis preliminars de Carlos García Gual, Antonio J. Durán i Pedro M. González Urbaneja. Diseny i maquetació, Juan Luis Varona. Madrid: Real Sociedad Matemática Española, International Congress of Mathematicians (ICM 2006), Patrimonio Nacional, 2006.

[7] ARQUIMEDES. *Sobre la esfera y el cilindro. Medida del círculo. Sobre conoides y esferoides*. Introduccions, traducció i notes de Paloma Ortiz García. Madrid: Gredos, 2005.

[8] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.; VAQUÉ, J. *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Edició amb facsímil. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Col·lecció «Clásicos de las ciencias», vol. 4, 1993.

[9] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.; VAQUÉ, J. *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Edició amb facsímil. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes. Barcelona: Fundació Bernat Metge, 1997.

[10] HEATH, T. *The method of Archimedes recently discovered by Heiberg (A supplement to the works of Archimedes, 1897)*. Cambridge University Press, 1912.

[11] NETZ, R. *The works of Archimedes*. Vol. I, *The two books on the sphere and the cylinder*. Traduït a l'anglès, amb comentaris i edició crítica dels diagrames. Cambridge University Press, 2004.

[12] RUFINI, E. *Il metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità*. Roma: Casa Editrice Alberto Stock, 1926. Milà: Nova edició de Feltrinelli, 1961.

[13] VERA, F. *Científicos griegos. Antología*. Recopilació, estudi preliminar, preàmbul i notes de F. Vera. Madrid: Aguilar, 1970, 9–296.

Obres monogràfiques sobre Arquimedes

[14] BABINI, J. *Arquímedes*. Buenos Aires: Espasa Calpe, 1948.

[15] CLAGETT, M. *Archimedes*. A: *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scribners sons, 1970. Vol. I, 213–231.

[16] DIJKSTERHUIS, E. *Archimedes*. Princeton University Press, 1987.

[17] DIVERSOS AUTORS *Arquímedes*. Madrid: Editorial Debate–Itaca, 1983.

[18] Heath, T. L. *The works of Archimedes*. Nova York: Dover, 2002.

[19] Netz, R.; Noel, W. *El código de Arquímedes*. Madrid: Ediciones Temas de Hoy, 2007.

[20] Strathern, P. *Arquímedes y la palanca*. Madrid: Siglo XXI, 1999.

[21] Torija, R. *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Madrid: Nivola, 1999.

Obres generals sobre història del càlcul infinitesimal

[22] Baron, M. E. *The origins of the infinitesimal calculus*. Londres: Pergamon, 1969, cap. 1, 2.

[23] Boyer, C. B. *The History of the Calculus and its conceptual development*. Nova York: Dover, 1949, cap. II, IV.

[24] Castelnuovo, G. *Le Origini del Calcolo Infinitesimale nell'èra moderna*. Bolònia: Zanichelli, 1938, cap. I.

[25] Edwards, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. Nova York: Springer Verlag, 1979, cap. 1, 2, 4.

[26] González Urbaneja, P. M. *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo XVII*. Madrid: Alianza Universidad, 1992, cap. 1, 2, 8.

[27] González Urbaneja, P. M. «Las técnicas del cálculo» A: *De Arquímedes a Leibniz, tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico*, 405–438. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 1995.

[28] González Urbaneja, P. M. «La aparición de los inconmensurables». Mundo Científico. Barcelona: 220 (2000), 56–63.

[29] González Urbaneja, P. M. «De la cuadratura de la espiral a la cuadratura de parábolas. La integración de x^k». A: *Resolución de problemas en los albores del siglo* XXI, 39–79. Huelva: Editora Andaluza, 2000.

[30] Grattan Guinness, I. *Del cálculo a la teoría de conjuntos*. Madrid: Alianza Universidad, 1984, cap. 1.

[31] Toeplitz, O. *The calculus, a genetic approach*. Chicago: Chicago University Press, 1963, cap. 1, 2.

Obres generals sobre història i filosofia de la ciència i de les matemàtiques

[32] Aristòtil *Metafísica, Física* (a *Obras*). Madrid: Aguilar, 1967.

[33] Bell, E. T. *Les grands mathématiciens*. París: Payot, 1950, cap. II.

[34] Boyer, C. B. *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad Textos, 1986, cap. VIII.

[35] Brunschvicg, L. *Les étapes de la Philosophie Mathématique*. París: Blanchard, 1972, llib. III, cap. 9.

[36] Ciceró. *Tusculanes*. Barcelona: Bernat Metge, 1948. 3 volums.

[37] Ciceró. *Disputaciones tusculanas*. Introducció, traducció i notes de A. Medina. Madrid: Gredos, 2005.

[38] Colerus, E. *Breve historia de las matemáticas*. Madrid: Doncel, 1972, vol. 1, cap. 3.

[39] D'Alembert, J. *Discurso preliminar de la enciclopedia*. Barcelona: Orbis, 1984.

[40] Descartes, R. *Reglas para la dirección del espíritu*. Madrid: Alianza Editorial, 1034, 1989.

[41] Descartes, R. *Discurso del Método*. Madrid: Alianza Editorial, 736, 1991.

[42] Diversos Autors. *Historia del pensamiento*. Barcelona: Ediciones Orbis, 1983. Vol. 1.

[43] Dunham, W. *Viaje a través de los genios*. Madrid: Pirámide, 1992, cap. 4.

[44] Euclides. *The thirteen books of The Elements*. Traducció i introducció i comentaris de Sir T. L. Heath. Nova York: Dover, 1956. 3 volums.

[45] Euclides. «Elementos de Euclides» A: *Científicos Griegos*, 689–980. Antologia. Recopilació, estudi preliminar, preàmbul i notes de F. Vera. Madrid: Aguilar, 1970.

[46] Euclides *Elementos*. Traducció i notes de M. L. Puertas. Madrid: Gredos, 1996. 3 volums.

[47] Eves, H. *An introduction to the history of mathematics*. Nova York: CBS Coll. Publ., 1983, cap. 11.

[48] González Urbaneja, P. M. «Matemáticas y matemáticos en el mundo griego» A: *El legado de las matemáticas, de Euclides a Newton*. Sevilla: Universidad de Sevilla, 2000, cap. 1.

[49] González Urbaneja, P. M. *Pitágoras, el filósofo del número*. Madrid: Nivola, 2001, cap. 3, 8.

[50] González Urbaneja, P. M. *Los orígenes de la geometría analítica*. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 2003, cap. 2, 3, 8.

[51] González Urbaneja, P. M. *Platón y la Academia de Atenas. Matemática en la filosofía y filosofía en la matemática*. Madrid: Nivola, 2006, cap. 5, 16, 17.

[52] Hardy, G. *Apología de un matemático*. Madrid: Nivola, 1999.

[53] Heath, T. L. *A history of Greek mathematics*. Nova York: Dover, 1981, vol. 2, cap. xiii.

[54] Klein, F. «Matemática elemental desde un punto de vista superior». *Geometría Biblioteca Matemática*, vol. ii. Director: J. Rey Pastor. Madrid: 1931, cap. iii.ii.3.

[55] Kline, M. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad, 1992, cap. 5.3.

[56] Koyré, A. *Estudios de historia del pensamiento científico*. Madrid: Siglo XXI, 1971, cap. 4.

[57] Loria, G. *Histoire des Sciences Mathématiques dans l'antiquité hellénique*. París: Gauthiers Villars, 1929, cap. iii.

[58] MONTESINOS, J. [coordinador]. *Historia de la geometría griega*. Actas del Seminario Orotava de Historia de la Ciencia. Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 1992, cap. 22.

[59] MONTESINOS, J. *Historia de las matemáticas en la enseñanza secundaria*. Madrid: Síntesis, 2000, cap. 4.

[60] MONTUCLA, J. *Histoire des Mathématiques*. París: Blanchard, 1968, vol. I, llibre IV, cap. V.

[61] NICOLAU, F. *La Matemàtica i els matemàtics*. Barcelona: Claret, 2000, cap. 10.

[62] PAPPOS D'ALEXANDRIA. *La Collection Mathémathique*. Introducció i notes de P. Ver Eecke. París: Blanchard, 1982.

[63] PEDRETI, C. *Leonardo, Arte y Ciencia*. Madrid: Susaeta, 2003.

[64] PLATÓ. *Diálogos*. Introducció de J. A. Míguez. Madrid: Aguilar, 1969.

[65] PLATÓ. *La República* (a *Diálogos*, tom IV). Introducció de C. Eggers. Madrid: Gredos, 1986.

[66] PLUTARC. *Vides paral·leles. Marcel*. Traducció de Carles Riba. Barcelona: Bernat Metge, 1937.

[67] PLUTARC. *Vidas paralelas, «Vida de Marcelo»*. XIV-XIX, 339–343 (a *Biógrafos griegos*). Madrid: Aguilar, 1970

[68] REY, A. *El apogeo de la ciencia técnica griega*. México: UTEHA, 1962. Llibre V.

[69] REY PASTOR, J.; BABINI, J. *Historia de la matemática*. Buenos Aires: Espasa Calpe, 1951. Cap. III.17.

[70] SERRES, M. *El saber griego*. Madrid: Akal, 2000. Cap. 4.4.

[71] TATON, R. *Historia general de las ciencias*. Barcelona: Orbis, 1988. Vol. 2. Llibre II, cap. II.2.

[72] THUILLIER, P. *De Arquímedes a Einstein*. Madrid: Alianza Editorial, 1988. Cap. 1.

[73] VEGA, L. *La trama de la demostración*. Madrid: Alianza Universidad, 1990. Cap. IV.4.2.

[74] VERA, F. *Breve historia de la geometría*. Buenos Aires: Losada, 1963. Cap. IV.

[75] VITRUBI. *Los diez libros de la arquitectura*. Madrid: Akal, 2001. Llibre IX, cap. 3.9.

Articles de revistes científiques

[76] BACHMAKOVA, I. G. «Les méthodes diferentielles d'Archimède». *Archiv for History of Exact Sciences*, vol. 2. Moscou, (1962–1963), 89–107.

[77] BRUSOTTI, L. «Il metodi di esaustione nella storia della matematica». *Periodico di Matematiche*, serie IV, vol. XXX, núm. 5, 1952.

[78] CASSINA, U. «Storia dal concetto di limite». *Periodico di Matematiche*, serieIV, vol. XVI, (1936), 1–19, 82–103, 144–167.

[79] DIVERSOS AUTORS. *Sur le nombre* π. Revue «Le petit Archimède», París, 5/1980. núm. 64–65.

[80] DURÁN, A. J. «Arquímedes: una pasión griega». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 9.2, (2006), 317–326.

[81] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M. «A un siglo del descubrimiento de El Método de Arquímedes por Heiberg». *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 9.3, (2006), 715–744.

[82] GOULD, S. H. «The Method of Archimedes». *American Mathematical Monthly*, LXII (1955), 473–476.

[83] HEIBERG, J. L. «Eine neue Archimedeshandschrift». *Hermes*, vol. XLII. Berlín: (1907), 234–303.

[84] HEIBERG, J. L.; ZEUTHEN, H. G. «Eine neue Schrift des Archimedes». *Bibliotheca Mathematica de Teubner*, vol. VII 3. Leipzig: (1907), 321–363.

[85] KNORR, W. R. «Archimedes and the pre euclidean proportion theory». *Archives Internat. Hist. Sciences*, 28 (1978), 183–244.

[86] KNORR, W. R. «Archimedes and the Elements». Proposal for a Revised Chronological Ordering of the Archimedean Corpus. *Archive for History of Exact Sciences*, 19 (1978), 211–290.

[87] PLA, J. «Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, vol. 13, núm. 2 (1998), 35–84.

[88] RAEDER, H. «Johan Ludving Heiberg». *Isis*, vol. 11, (1928), 367–374.

[89] REINACH, T. «Un traité de Géométrie inédit d'Archimède. Restitution d'après un manuscrit récemment découvert». *Revue général des Sciences pures et appliquées*, núm. de 30/11/1907, 15/12/1907, XVIII. París, 1907.

[90] WHITESIDE, D. «Patterns of mathematical thought in the later 17th century». *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960–1962), (1983) 179–388.

[91] WILSON, N. «The Archimedes Palimpsest». A Progress Report. Lincoln College Oxford. http//www.archimedespalimpsest.org/index.html.

IES SANT JOSEP DE CALASSANÇ
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
pgonzale@xtec.cat