Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 22, núm. 2, 2007. Pàg. 197–228. DOI: 10.2436/20.2002.01.9

La funció ζ de Riemann*

Jordi Quer

Resum El novembre de 1859 Riemann envià un manuscrit de sis fulls a l'Acadèmia de Berlín titulat «Sobre el nombre de primers menors que una quantitat donada», el qual seria l'única publicació dedicada a la teoria de nombres de tota la seva producció científica. Aquest treball, sens dubte una de les peces mestres de les matemàtiques de tots els temps, és pioner en l'aplicació de tècniques analítiques per a l'estudi de problemes aritmètics. Riemann hi introdueix la funció ζ i en dóna diverses propietats, de les quals treu conseqüències sobre l'acumulació dels nombres primers. També hi enuncia la famosa conjectura sobre els seus zeros que ha passat a la història amb el nom de *hipòtesi de Riemann*, i que, havent resistit els esforços de molts dels millors matemàtics del segle XX, és considerada avui dia el problema obert més important de les matemàtiques.

L'objectiu d'aquestes notes és explicar el contingut del treball de Riemann i el paper fonamental que ha tingut en l'estudi de la distribució dels nombres primers.

Paraules clau: Bernhard Riemann, la funció θ-Riemann, distribució de nombres primers.

Classificació MSC2000: 01A55, 11M06.

1 Introducció

El matemàtic alemany Bernhard Riemann va néixer l'any 1826 a Breselenz i morí prematurament als trenta-nou anys a Itàlia de tuberculosi. Excepte una estada de dos anys a Berlín, la seva activitat acadèmica va estar sempre vinculada a la Universitat de Göttingen, on va estudiar, i on va acabar ocupant la Càtedra que havia estat prèviament de Gauss i de Dirichlet, dos dels seus mestres. Malgrat que l'edició de les seves obres completes requereix un únic volum no gaire gruixut, les contribucions cabdals de Riemann a l'anàlisi i a la geometria

* Aquest article correspon a la llicó inaugural del curs 2007-2008 de la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya, que va tenir lloc el 19 de setembre de 2007.

el converteixen en la figura central de les matemàtiques de mitjan segle XIX. L'únic article que Riemann publicà sobre aritmètica és la pedra fundacional d'una nova branca de les matemàtiques: la teoria analítica de nombres.

El teorema dels nombres primers

$$\pi(x) := \#\{\, p \,:\, p \text{ primer} < x \,\} \sim \mathrm{Li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\log t}, \qquad x \to \infty, \tag{1}$$

dóna el creixement asimptòtic de la funció π que compta els nombres primers. Conjecturat per Gauss i Legendre a finals del segle XVIII, va ser abordat per diverses generacions de matemàtics de primera fila fins que, finalment, l'any 1898 Hadamard i de la Vallée-Poussin van aconseguir demostrar-lo seguint el camí indicat per Riemann en el seu article. La reputació d'aquesta conjectura entre la comunitat matemàtica del segle XIX és comparable amb la que ha gaudit durant més de tres segles l'últim teorema de Fermat o amb l'adquirida per la hipòtesi de Riemann d'ençà que Hilbert la va incloure, l'any 1900, en la seva famosa llista de problemes oberts. Fins i tot es va difondre el mite que la seva demostració proporcionaria a l'autor la immortalitat. No fou el cas de Hadamard ni de de la Vallée-Poussin, que en canvi van gaudir d'una longevitat considerable, ja que van arribar als noranta-vuit i noranta-sis anys, respectivament.

Bernhard Riemann

El manuscrit que ens ocupa és la primera comunicació que Riemann enviava a l'Acadèmia poc després d'haver-ne estat elegit membre. Com que volia que el tema del treball i la importància dels resultats estiguessin a l'altura de l'ocasió, decidí enviar un resum de les seves investigacions sobre aquesta famosa conjectura, la qual cosa demostra el respecte que l'assumpte li mereixia. En la introducció descriu el treball com «una investigació sobre l'acumulació dels nombres primers; un tòpic que potser no semblarà del tot desmereixedor d'una tal comunicació, per l'interès que els mateixos Gauss i Dirichlet li han dedicat durant un període de temps ben llarg». El resultat principal del treball és la fórmula explícita

$$\pi(x) = \mathrm{Ri}(x) + \sum_{\zeta(\rho)=0} \mathrm{Ri}(x^\rho), \qquad x > 1, \tag{2}$$

que proporciona el valor exacte de la funció π en la forma d'un terme principal dominant $\mathrm{Ri}(x)$ més un terme d'error que és la suma d'una sèrie infinita de funcions oscil·latòries $\mathrm{Ri}(x^\rho)$ associades als zeros complexos de la funció ζ. L'extensió d'aquesta funció zeta (que Euler i Dirichlet havien considerat prèviament per a valors enters i valors reals de la variable) a tot el domini complex és una de les aportacions fonamentals de Riemann, i des d'aleshores és coneguda pel nom de *funció zeta de Riemann*. El teorema dels nombres primers és equivalent a $\pi(x) \sim \mathrm{Ri}(x)$; és a dir, al fet que l'error relatiu del terme principal en la fórmula de Riemann tendeixi a zero, i aquesta propietat és la que portarà finalment a la demostració quaranta anys més tard.

La hipòtesi de Riemann assegura que tots els zeros no trivials de la funció ζ estan situats damunt la recta crítica $\Re(s) = 1/2$. Després de resistir els esforços de molts dels millors matemàtics del darrer segle i mig, ha esdevingut una de les conjectures més famoses i amb més reputació de dificultat de totes les matemàtiques: l'any 1900 Hilbert la va incloure a la seva famosa llista de vint-i-tres problemes presentada al congrés internacional de París; forma part també de la llista dels set «problemes del mil·lenni» proposats per la Fundació Clay i de la llista de divuit «problemes per al segle XXI» elaborada per Stephen Smale, ambdues publicades l'any 2000 amb motiu de l'Any Mundial de les Matemàtiques. A diferència de moltes altres conjectures, la demostració de les quals no té conseqüències apreciables, llevat potser del reconeixement que rep el matemàtic que ho aconsegueix per primera vegada (és el cas, per exemple, de l'últim teorema de Fermat), la hipòtesi de Riemann i les seves generalitzacions apareixen com a condició en l'enunciat d'innombrables resultats matemàtics teòrics, així com en l'anàlisi de la complexitat d'algorismes importants per a moltes aplicacions. És per aquest motiu que, per referir-s'hi, el costum ha portat a fer servir el terme *hipòtesi* i no pas a dir-ne *conjectura*, com és l'habitual. Fins que no sigui demostrada no es podrà considerar que l'article de Riemann ha estat completament entès i que totes les seves potencialitats han estat prou aprofitades.

L'estil d'escriure matemàtiques de Riemann és considerat difícil, ja que acostuma a presentar les seves investigacions de manera molt condensada i de vegades es deixa portar per una certa tendència a la manca de rigor. En algunes afirmacions sense demostració no queda prou clar si es tracta d'un simple exercici que el lector pot resoldre sense dificultat o d'un resultat difícil que requereix un esforç considerable. Moltes vegades es limita a indicar vagament el camí a seguir per poder arribar a una demostració com a única justificació del resultat que presenta. L'article que ens ocupa n'és un bon exemple: tot i la seva curta extensió (la publicació [12] al Butlletí de l'Acadèmia té només vuit pàgines), conté una quantitat ingent de nous conceptes, idees i resultats, i aplica tècniques d'integració i anàlisi complexa sofisticades i innovadores, i en el millor dels casos l'autor es limita a donar indicacions o esbossos de demostració. La història demostra que Riemann va sobreestimar en aquesta ocasió les capacitats dels seus coetanis, ja que les primeres demostracions rigoroses dels resultats més importants de l'article no van ser publicades fins gairebé mig segle més tard per Hadamard i von Mangoldt.

Riemann no va publicar mai més res sobre aquest tema, entre altres raons perquè ja no li quedaven molts anys de vida. Ben entrat el segle XX Siegel decidí revisar el que quedava dels seus papers, dipositats a la biblioteca de la Universitat de Göttingen després d'haver sofert una purga considerable per part de la seva assistenta i de la seva muller, que volien evitar vestigis de tota mena d'informació personal. L'examen d'aquests papers va resultar fructífer tant històricament com científica. D'una banda, va servir per refutar la creença de la comunitat matemàtica de l'època que Riemann, matemàtic eminentment teòric, havia arribat als seus resultats i formulat la seva hipòtesi sobre la base només d'una portentosa intuïció i penetració teòrica: en els seus papers s'hi troba el desenvolupament d'una expressió adequada per al tractament numèric de la funció zeta i un munt de càlculs a mà d'aproximacions dels seus zeros. D'una altra, alguns dels resultats trobats per Siegel foren encara, setanta anys després de la seva mort, contribucions originals rellevants de Riemann a una àrea en la qual alguns dels millors matemàtics de l'època havien estat treballant tot aquest temps.

La funció ζ introduïda per Riemann i la manera com es pot fer servir per a l'estudi d'un problema aritmètic és, juntament amb altres funcions i tècniques semblants usades per Dirichlet poc abans per demostrar el teorema de la progressió aritmètica, només la punta de l'iceberg de la teoria de les funcions L, que des d'aleshores no ha parat de créixer. Aquestes funcions han proliferat i han guanyat importància a partir d'investigacions de molts dels grans matemàtics del segle XX (Hecke, Weil, Selberg, Serre, Langlands, Shimura, Iwaniec...), fins al punt que actualment s'han convertit en eines universals, d'ús imprescindible en un ampli ventall de disciplines matemàtiques, en particular i especialment per a la teoria de nombres, la geometria aritmètica o la teoria de representacions, a part de l'interès notable que l'estudi de les funcions L té per si mateix. Per a la majoria d'aquestes funcions, les propietats més bàsiques demostrades per Riemann en el cas de la funció ζ segueixen sent conjectures. Per exemple, la conjectura de Shimura-Taniyama, demostrada per Wiles i d'altres, que conduí finalment a l'últim teorema de Fermat, és essencialment equivalent al fet que les funcions L de les corbes el·líptiques sobre $\mathbb{Q}$ tinguin prolongació analítica i equació funcional.

La hipòtesi sobre la localització dels zeros de la funció ζ es generalitza de manera natural al context de les funcions L, on rep els noms de *hipòtesi de Riemann generalitzada* o *estesa*. Fins ara no s'ha aconseguit demostrar que la compleixi (ni que no ho faci) cap funció de la classe de les funcions L globals, el prototipus de les quals és la ζ de Riemann. En canvi hi ha una altra classe de funcions L associades a varietats algebraiques sobre cossos finits, anomenades funcions L locals, per a les quals Deligne va aconseguir demostrar la hipòtesi de Riemann l'any 1973 (la qual, en aquest context, és una de les propietats d'aquestes funcions que, junt amb unes altres, se segueixen coneixent un cop demostrades amb el nom de *conjectures de Weil*).

El resultat principal del treball de Riemann, la fórmula explícita, ha estat sovint interpretat en termes de l'anàlisi harmònica de la manera següent. La funció que representa el so d'un instrument musical, potser amb forma de pols rectangular o de dent de serra, que en general presentarà discontinuïtats de salt, pot obtenir-se com a superposició infinita de funcions oscil·latòries (harmònics) amb les tècniques habituals de l'anàlisi de Fourier. De manera anàloga, la funció π, que és una funció en forma d'escala que puja un graó en cada nombre primer a través d'una discontinuïtat de salt, s'obté també per superposició infinita de funcions oscil·latòries, les amplituds i freqüències de les quals estan governades pels zeros de la funció zeta. Per tant (vegeu [8]), «els zeros de la funció zeta contenen la música dels nombres primers».

2 La distribució dels nombres primers

Euclides va demostrar que hi ha infinits nombres primers: donat un nombre primer p, tots els factors primers del nombre $p! + 1$ són més grans que p.

El següent avenç significatiu en la comprensió de la seqüència dels nombres primers va ser la demostració d'Euler que la suma dels seus inversos és divergent, a diferència de la suma dels inversos de molts altres conjunts infinits de nombres, que pot ser finita. Per exemple, la suma dels inversos de les potències de 2 és finita i igual a 2 o la suma dels inversos dels quadrats és $\pi^2/6$. Per tant, «hi ha més nombres primers que potències de 2 o que quadrats».

Ja al segle XIV Nicolau d'Oresme va donar una demostració de la divergència de la sèrie harmònica; de fet, la seva suma és $\log\infty$, en el sentit que la diferència $\sum_{n=1}^{N} 1/n - \log N$ tendeix a un nombre $\gamma = 0,577215665\ldots$, conegut com a *constant d'Euler-Mascheroni*. La demostració d'Euler es basa en una relació entre la sèrie harmònica i un producte sobre els nombres primers, que es coneix pel nom de *producte d'Euler*, i que tindrà un paper importantíssim en tots els estudis posteriors sobre la funció zeta i els nombres primers. Tenint en compte la suma d'una progressió geomètrica,

$$1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}},$$

i gràcies a la descomposició única en producte de primers, es té el famós producte d'Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

o, més en general,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

per a nombres reals $s > 1$, de manera que la identitat prèvia s'interpreta com un pas al límit. Aplicant logaritmes i la sèrie $-\log(1-x) = \sum x^n/n$ es dedueix que

$$\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{p} -\log\left(1-\frac{1}{p}\right) = \sum_{p}\sum_{n}\frac{1}{np^n} = \sum_{p}\frac{1}{p} + \sum_{p}\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{np^n}.$$

Ara bé, és immediat comprovar que el segon sumand està fitat. Per tant, la divergència de la sèrie harmònica implica la de la suma dels inversos dels primers. L'any 1874 Mertens va precisar aquest resultat en demostrar que, de fet, la seva suma és igual a $\log\log\infty$, en el sentit que la diferència $\sum_{p\leqslant N} 1/p - \log\log N$ és convergent; el seu límit, $0,2614972128\ldots$, es coneix pel nom de *constant de Mertens*.

La conjectura de Gauss i Legendre. Cap a finals del segle XVIII Gauss i Legendre s'interessen per la distribució dels nombres primers. Consideren la funció $\pi(x)$ que compta el nombre de primers fins a x,

$$\pi(x) := \#\{\, p \,:\, p \text{ primer} \leqslant x \,\} = \sum_{p\leqslant x} 1.$$

Es tracta d'una funció constant a trossos que en cada primer té una discontinuïtat de salt en què augmenta en una unitat. Per bé que el comportament d'aquesta funció és impredictible quan es consideren intervals curts, d'acord amb la manera erràtica i aparentment aleatòria com van apareixent els nombres primers entre els nombres naturals, l'aspecte de $\pi(x)$ és en canvi d'una regularitat sorprenent quan s'observa des de prou lluny. A la figura 1 es pot veure la gràfica de la funció π en dos intervals de mides de diferent ordre de magnitud.

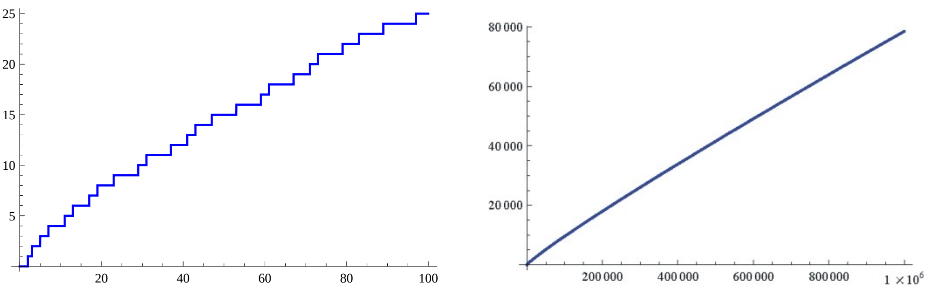


FIGURA 1: La funció $\pi(x)$ a escales diferents.

Tant Legendre com Gauss van provar d'explicar la regularitat de la funció π buscant una funció simple que en donés el creixement asimptòtic. L'any 1798 Legendre proposà la funció

$$\frac{x}{\log x - B},$$

on $B = 1,08366$ és una constant que va determinar empíricament a partir de les dades que tenia disponibles; gràcies a la potència de càlcul accessible actualment, és fàcil veure que el valor de B donat per Legendre proporciona una bona aproximació de π quan x es mou pels voltants de 10^6, però deixa de fer-ho per valors gaire més grans. El valor que s'assigni a la constant B és irrellevant de cara a l'equivalència asimptòtica entre aquesta funció i la funció π, però la que va millor no és la proposada per Legendre: mig segle més tard Txebixev va demostrar que si el límit de la funció $B(x) = \log x - x/\pi(x)$ existeix (ara sabem que sí que existeix, però Txebixev no ho sabia demostrar), aleshores aquest límit ha de ser igual a 1.

Tot i no haver-ho publicat, Gauss havia arribat a una conclusió semblant sobre el creixement de $\pi(x)$ abans que Legendre, i sembla que s'arribà a produir una certa discussió entre tots dos sobre a qui se li havia d'atribuir el mèrit. En una carta al seu col·lega Johann Enke escrita l'any 1849, Gauss li explica que, cap a l'any 1792, quan tenia quinze anys, havia rebut com a regal un llibre de logaritmes (l'equivalent durant moltes generacions de les calculadores actuals), que contenia també una taula de nombres primers, i que examinant aquestes llistes de nombres primers notà que la probabilitat que un nombre enter de magnitud x sigui primer és aproximadament $1/\log x$. Basant-se en aquesta observació empírica, Gauss proposà que el valor de la funció $\pi(x)$ es pot aproximar de la manera següent:

$$\pi(x) = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \frac{1}{\log 4} + \cdots + \frac{1}{\log\lfloor x\rfloor} = \sum_{n=2}^{\lfloor x\rfloor} \frac{1}{\log n} \simeq \int_2^x \frac{dt}{\log t}.$$

En la carta a Enke, Gauss també diu que des d'aleshores acostumava a dedicar quarts d'hora en què estava desvagat a comptar primers en intervals de mil enters, i va arribar així a acumular dades fins a tres milions i, per il·lustrar la coincidència entre la funció π i el valor de la seva predicció, dóna la taula 1, en la qual els valors de la funció $\pi(x)$ contenen errors menors (entre parèntesis s'ha afegit la modificació que cal per corregir-los). Observeu que amb els valors correctes l'aproximació encara millora per als valors alts de x.

x	Nombre de primers $\leqslant x$		$\int \frac{dt}{\log t}$	Diferència
500 000	41 556	(−18)	41 606,4	50,4
1 000 000	78 501	(−3)	78 627,5	126,5
1 500 000	114 112	(+43)	114 263,1	151,1
2 000 000	148 883	(+50)	149 054,8	171,8
2 500 000	183 016	(+56)	183 245,0	229,0
3 000 000	216 745	(+71)	216 970,6	225,6

TAULA 1: Valors de π (corregits) comparats amb $\int_2^x \frac{dt}{\log t}$ (Gauss, carta a Enke, 1849).

La funció introduïda per Gauss, però amb la integral calculada des de zero, el qual la modifica només en una constant igual a $1,04516\ldots$, es coneix amb el nom de *logaritme integral*, i es denota

$$\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t},$$

on la integral impròpia s'ha d'interpretar com el valor principal de Cauchy per evitar la singularitat en $t = 1$.

Tant la funció $\mathrm{Li}(x)$ com la funció $x/(\log x - B)$ proposada per Legendre són asimptòticament equivalents a la funció $x/\log x$, de manera que les investigacions de tots dos condueixen a formular la mateixa conjectura:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \to \infty), \qquad \text{o sigui,} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1,$$

que es coneix amb el nom de *teorema dels nombres primers*. El resultat es pot enunciar amb una o una altra funció $x/\log x$ o $\mathrm{Li}(x)$ indiferentment. Ara bé, tot i que tots dos enunciats són equivalents, el logaritme integral aproxima millor $\pi(x)$ i quan hom es refereix a qüestions relatives al terme d'error en el teorema dels nombres primers es refereix a l'error en relació amb aquesta segona funció, o sigui, a l'enunciat (1) del teorema dels nombres primers donat a la introducció. En canvi, quan l'únic que importa és el creixement asimptòtic, tot sovint s'enuncia a la literatura amb la funció $x/\log x$, i així s'estalvia d'haver de definir el logaritme integral.

Els únics progressos rellevants en la direcció d'aquesta conjectura abans de Riemann es deuen a Txebixev, que pels volts de 1850 va aconseguir demostrar amb tècniques elementals que per a x prou gran es tenen desigualtats

$$0{,}9219 \frac{x}{\log x} < \pi(x) < 1{,}10555 \frac{x}{\log x}.$$

També va demostrar que si el límit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

existeix, aleshores ha de ser necessàriament igual a 1, i que l'aproximació de Gauss sempre serà millor que la de Legendre per a x prou gran, fins i tot si es canvia la constant B proposada per Legendre per qualsevol altra. A la figura 2 es comparen aquestes dues aproximacions. Observeu que, fins a tres milions, segurament el valor més gran per al qual Gauss havia calculat π, l'estimació de Legendre encara supera la seva, però la situació canvia ben aviat. Després d'un interval en què totes dues s'assemblen força, la funció Li pren la primera posició, i la conservarà per sempre.

3 El treball de Riemann

El contingut de l'article de Riemann [12] s'organitza en dues parts, cadascuna de les quals ocupa aproximadament la meitat de l'extensió. La primera està

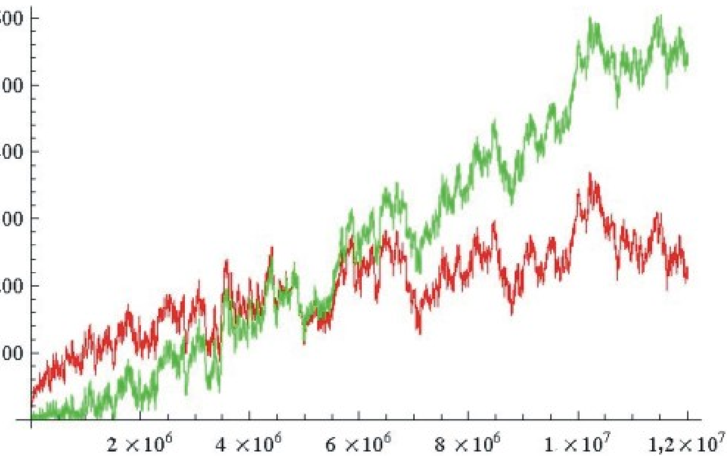


FIGURA 2: Error en les aproximacions de π de Legendre (verd o gris) i Gauss (vermell o negre).

dedicada a definir i estudiar la funció ζ. Riemann dóna dos mètodes per obtenir-ne la prolongació analítica i demostrar que satisfà una equació funcional, estudia algunes propietats dels seus zeros, i finalment en troba una expressió com a producte infinit. La segona és l'aplicació del que ha fet prèviament a l'estudi de la distribució dels nombres primers; comença definint una nova funció $\pi^*(x)$ per comptar primers que és una variant de $\pi(x)$, amb la qual està relacionada per una expressió simple, i dedueix una fórmula explícita que proporciona aquesta funció com la suma d'un terme principal i d'una sèrie infinita de funcions oscil·latòries que depenen dels zeros de la funció zeta. Finalment, la relació entre les funcions $\pi^*(x)$ i $\pi(x)$ li permet obtenir una fórmula anàloga per a la funció $\pi(x)$, que és el resultat principal del treball. En aquesta secció es donaran alguns detalls i es comentaran breument els aspectes més importants del contingut d'aquest article de Riemann.

La funció ζ. Prolongació analítica i equació funcional. Riemann defineix la funció ζ a partir del valor comú de la suma de la sèrie harmònica i el producte d'Euler corresponent

$$\zeta(s) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}, \quad \Re(s) > 1, \tag{3}$$

totes dues expressions convergents per a nombres complexos amb part real > 1, i que defineixen una funció analítica en aquest semiplà.

La funció zeta i el producte (3) ja havien estat considerats anteriorment, per a valors enters de la variable s, per Euler, que havia arribat a una identitat anàloga a l'equació funcional de Riemann per a aquest tipus de valors i havia aconseguit calcular el valor de $\zeta(n)$ per a tot enter parell $n \geqslant 2$, i obtenir la famosa fórmula en què apareixen els nombres de Bernoulli. També havien estat considerats per Dirichlet, un dels mestres de Riemann; van tenir un paper important en la seva demostració del teorema de la progressió aritmètica, i sembla que Riemann podia haver estat influït per Dirichlet a l'hora d'enfocar-hi la seva atenció.

La veritable innovació de Riemann consisteix a considerar ζ com una funció de la variable complexa s i estendre-la a tot el pla complex, el qual li permetrà descobrir la importància fonamental que tenen els zeros no trivials d'aquesta funció, situats fora de la recta real i a l'esquerra del semiplà de convergència, per a l'estudi de la distribució dels nombres primers.

Riemann obté, per dues vies diferents, una «expressió que dóna el valor de la funció ζ per a tot valor de s». En terminologia actual es tracta de la prolongació analítica de la funció definida per (3) a una funció meromorfa a tot el pla complex llevat d'un pol (que resulta ser simple, de residu 1) en el punt $s = 1$.

La primera expressió la troba de la manera següent: si a la funció gamma d'Euler $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx$ es fa el canvi de variable de x per nx i se suma sobre tots els valors de $n \geqslant 1$ s'arriba a

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx, \qquad \Re(s) > 1.$$

Riemann integra la funció $\frac{(-x)^{s-1}}{e^x-1}$ entre $+\infty$ i $+\infty$ sobre un camí que envolta el semieix real positiu, dibuixat en blau a la figura 3 (amb els extrems que tendeixen a $+\infty$), i on $(-x)^{s-1} = e^{(s-1)\log(-x)}$ essent log la determinació principal del logaritme fora del semieix real negatiu. Tenint en compte la identitat anterior, obté una expressió

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1}\frac{dx}{x} \tag{4}$$

vàlida per a $\Re(s) > 1$. Ara bé, la integral d'aquesta fórmula convergeix per a tot valor complex de la variable s i, com que la convergència és uniforme sobre compactes, defineix una funció entera. Tenint en compte que la funció gamma és meromorfa a tot $\mathbb{C}$, amb pols simples als enters $\leqslant 0$, i que la sèrie harmònica defineix una funció holomorfa per a $\Re(s) > 1$ i és divergent en $s = 1$, es dedueix que l'expressió a la dreta de (4) és una funció meromorfa amb un únic pol simple en el punt $s = 1$, que és l'extensió de la funció ζ a tot el pla complex que es volia. A continuació Riemann integra de nou la mateixa funció d'abans (per a valors de la variable s amb part real negativa) sobre el camí tancat de la figura 3 (amb el radi exterior que tendeix a infinit). Igualant el resultat amb la suma dels residus a les singularitats, que estan als punts $2\pi in$ per a $n \neq 0$, obté l'equació funcional

$$\zeta(s) = \Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}2\sin(\pi s/2)\zeta(1-s), \tag{5}$$

que relaciona els valors de la funció ζ en els punts s i $1-s$. Tenint en compte identitats ben conegudes de la funció gamma, Riemann observa que l'equació

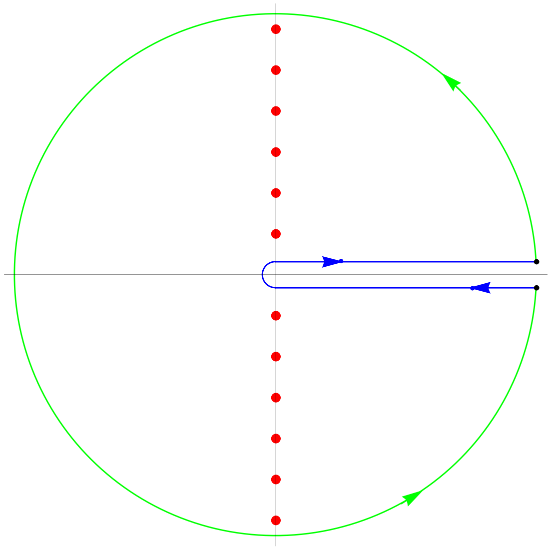


FIGURA 3: Camí d'integració. El radi exterior tendeix a ∞.

funcional anterior es pot enunciar de manera més elegant com

$$\text{la funció}\quad \Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s)\quad \text{és invariant per a}\quad s\mapsto 1-s.$$

Aquesta expressió tan simètrica inspira a Riemann la segona demostració de la prolongació analítica i de l'equació funcional: en canviar x per $n^2\pi x$ a la integral que defineix la funció gamma i sumar sobre tots els valors $n \geqslant 1$ s'obté l'expressió com a transformada integral

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \int_0^\infty \psi(x)x^{s/2-1}\,dx,$$

on $\psi(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}$ és essencialment la funció theta de Jacobi. Separant la integral anterior en dos intervals pel punt $x = 1$, i aplicant l'equació funcional $2\psi(1/x) + 1 = \sqrt{x}(2\psi(x) + 1)$ deduïda de la que relaciona els valors de la funció theta en x i en $1/x$, al tros de la integral entre zero i u, s'obté la fórmula

$$\Gamma(s/2)\pi^{-s/2}\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \psi(x)\left(x^{s/2} + x^{(1-s)/2}\right)\frac{dx}{x},$$

que permet també estendre la funció zeta a tot el pla complex, ja que la integral que hi apareix convergeix en tot nombre complex i defineix una funció entera. A més, en aquesta expressió l'equació funcional es llegeix directament, ja que la part de la dreta es queda igual en canviar s per $1-s$. Aquest mateix mètode serà utilitzat més tard per Hecke per obtenir la prolongació analítica i l'equació funcional de les funcions L associades a formes modulars.

Els zeros de la funció ζ. De la convergència del producte d'Euler (3) per $\Re(s) > 1$ es dedueix la no anul·lació de la funció ζ en aquest semiplà, i de l'equació funcional (5) resulta que al semiplà $\Re(s) < 0$ la funció ζ té zeros simples exactament en els enters parells negatius $s = -2, -4, -6, \ldots$, que es coneixen amb el nom de *zeros trivials* de la funció ζ. Tots els altres zeros, els *zeros no trivials*, han d'estar, per tant, en l'anomenada *banda crítica* $0 \leqslant \Re(s) \leqslant 1$. L'eix de simetria d'aquesta banda, la recta $\Re(s) = 1/2$, s'anomena la *recta crítica*. Per tal d'estudiar aquests zeros Riemann considera la funció

$$\xi(s) := \frac{1}{2}s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-s/2}\zeta(s),$$

que és una funció entera, ja que la multiplicació per $s-1$ anul·la el pol de ζ, la multiplicació per s anul·la el pol de $\Gamma(s/2)$ en zero, i els zeros trivials de $\zeta(s)$ es corresponen exactament amb els altres pols de $\Gamma(s/2)$. Per tant, la funció ξ té per zeros exactament els zeros no trivials de la funció ζ. L'equació funcional de la funció ζ equival a $\xi(s) = \xi(1-s)$. Observant que $\xi(\bar{s}) = \overline{\xi(s)}$, es dedueix que la funció ξ pren valors reals a la recta crítica, i que els zeros no trivials de ζ estan situats simètricament tant respecte de la recta real com respecte de la recta crítica.

Integrant la derivada logarítmica de la funció ξ al voltant del rectangle $[0,1]\times[0,T]$, Riemann diu haver calculat el nombre de zeros $N(T)$ de la funció ζ en aquesta regió i afirma que aquest càlcul proporciona l'estimació següent:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{6}$$

En fer aquesta afirmació sense donar cap detall sobre la manera d'arribar al resultat, Riemann, que era un mestre consumat en el càlcul d'integrals definides, peca d'optimista sobre les habilitats dels lectors de l'article: la primera demostració rigorosa de (6) la donarà von Mangoldt l'any 1905, i per això aquesta fórmula es coneix de vegades com a *fórmula de Riemann-von Mangoldt*.

La frase que Riemann escriu a continuació és l'única de l'article que avui dia segueix essent un repte. Referint-se a la funció $\xi(\frac{1}{2}+it)$ com a funció de la variable t (complexa) diu: «hom troba efectivament aproximadament aquest nombre d'arrels reals dins de la regió considerada, i és molt probable que totes les arrels siguin reals». En sentit estricte aquesta frase conté una afirmació: que el nombre de zeros $N_0(T)$ de part real $1/2$ en el rectangle $[0,1]\times[0,T]$ també admet la mateixa estimació (6), seguida d'una conjectura: que tots els zeros de la funció ξ tenen part real $1/2$, o sigui, que per a tot valor de T es tindrà sempre una igualtat $N(T) = N_0(T)$.

Pel que fa a l'afirmació, avui dia encara no ha estat demostrada. Van haver de passar molts anys abans que es trobessin demostracions de resultats molt més dèbils: l'any 1914 Hardy va aconseguir demostrar que ξ té infinits zeros a la recta crítica, i més concretament que $N_0(T) > CT$ per a una constant positiva C i T prou gran; l'any 1943 Selberg va millorar aquesta estimació demostrant que $N_0(T) > C\frac{T}{2\pi}\log\left(\frac{T}{2\pi}\right)$ per a alguna constant positiva menor que 1 i T prou gran, el qual es pot interpretar com que una fracció positiva C dels zeros no trivials de la funció zeta cauen sobre la recta crítica. Levinson provà, el 1974, que $C > 1/3$ i Conrey ho millorà el 1989 veient que $C > 2/5$. Tot i que fa uns anys alguns investigadors anunciaven haver demostrat una nova fita que implicaria que almenys la meitat dels zeros de ζ satisfan la hipòtesi de Riemann, el resultat no s'ha publicat mai.

Quant a la conjectura que tots els zeros de ξ estan situats sobre la recta crítica $\Re(s) = 1/2$, Riemann escriu: «Naturalment, hom desitjaria una demostració estricta d'aquest fet; he deixat de banda la recerca d'una tal prova després d'alguns intents no reeixits, ja que no cal per a l'objectiu immediat de la meva investigació». Aquesta conjectura ha passat a formar part de la llista dels problemes oberts més difícils de les matemàtiques amb el nom de *hipòtesi de Riemann*.

Expressió en producte infinit. En l'obra de Riemann apareix sovint el problema de la caracterització de funcions analítiques en termes de les seves singularitats. Naturalment, la funció ξ també és objecte d'una anàlisi d'aquesta mena. Argumentant que la funció $\log\xi$ té les mateixes singularitats logarítmiques que la suma $\sum_{\xi(\rho)=0}\log(1 - s/\rho)$, i que totes dues funcions tenen un comportament semblant a l'infinit, Riemann justifica que han de diferir en una constant, i en exponenciar obté l'expressió en producte infinit

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\substack{\rho\in\mathbb{C}\\ \xi(\rho)=0}}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right), \tag{7}$$

on se sobreentén que cada factor apareix en el producte tantes vegades com la multiplicitat de ρ com a zero de la funció, i que el producte s'ha de fer en ordre creixent del mòdul de les arrels per assegurar-ne la convergència. Aquesta factorització és anàloga a la que es donaria si ξ fos un polinomi.

Tot i que les raons que Riemann esgrimeix són certament les que acaben portant a la fórmula (7), la justificació que en fa al seu article està molt lluny de poder-se considerar una demostració. En particular la convergència de la suma $\sum\log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$ requereix una estimació de les magnituds de les arrels ρ, i la que Riemann addueix és conseqüència de (6), fórmula que no es demostraria fins gairebé mig segle més tard. D'altra banda els arguments que dóna per justificar el comportament de $\xi(s)$ per $s \to \infty$ són massa vagues per poder-los acceptar com a demostració.

La representació com a producte infinit (7) va ser demostrada per primera vegada per Hadamard l'any 1893 en un treball en què investiga i resol el problema general de trobar expressions en producte infinit per a funcions enteres.

La fórmula explícita. Immediatament després de trobar la fórmula (7), cap al final de la pàgina 3 del seu manuscrit, Riemann dóna per acabat el seu estudi de la funció ζ i comença a ocupar-se de la distribució dels nombres primers. Diu: «Amb aquests fets preparatoris, ara es pot determinar el nombre de primers menors que x».

Tot i que l'objectiu és estudiar la funció π, Riemann introdueix una altra funció anàloga, que compta no només els nombres primers sinó també les potències de primer, tot i que cada potència p^n compta només amb un pes igual a $1/n$,

$$\pi^*(x) = \sum_{p^n \leqslant x} \frac{1}{n}.$$

De fet, per tal que les fórmules que apareixeran més endavant per a aquesta funció siguin correctes, tant a les funcions π i π^* com en totes les funcions amb discontinuïtats de salt, el valor en els punts on hi ha la discontinuïtat s'han de redefinir com la semisuma dels límits laterals, com és habitual en l'anàlisi de Fourier.

La relació entre aquesta funció i la funció ζ s'obté de la manera següent: substituint cada sumand p^{-ns} per l'expressió $s\int_{p^n}^{\infty} x^{-s-1}\,ds$ en el logaritme del producte d'Euler,

$$\log\zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - p^{-s}\right) = \sum_p \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} p^{-ns},$$

Riemann arriba a l'expressió

$$\log\zeta(s) = s\int_1^{\infty} \pi^*(x)\, x^{-s} \frac{dx}{x},$$

de $\log\zeta$ com a transformada integral de la funció π^*.

Aleshores, per inversió de Fourier, obté la fórmula

$$\pi^*(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \log\zeta(s)\, x^s \frac{ds}{s}, \qquad (a > 1), \tag{8}$$

que dóna la funció π^* en termes de la funció $\log\zeta$.

De la relació entre les funcions ζ i ξ i de la descomposició en producte d'aquesta segona funció resulta que $\log\zeta(s)$ és la suma

$$-\log(s-1) + \sum_{\xi(\rho)=0} \log\left(1 - \frac{s}{\rho}\right) - \log\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \frac{s}{2}\log\pi + \log\xi(0),$$

i Riemann obté la fórmula explícita per a la funció π^* com el resultat de substituir $\log\zeta(s)$ per cadascun dels sumands d'aquesta expressió en la fórmula (8), i calculant les integrals corresponents. De fet, el procediment es complica una mica ja que fer-ho així donaria lloc a integrals divergents i en realitat la substitució es fa en la fórmula

$$\pi^*(x) = \frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{d}{ds}\left[\frac{\log\zeta(s)}{s}\right] x^s\, ds,$$

que es dedueix de (8) integrant per parts.

Ara, introduint en aquesta expressió cadascun dels sumands en què s'ha expressat $\log\zeta(s)$, es van obtenint els termes de la fórmula explícita: el primer és

$$\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{-\log\zeta(s)}{s}\right]x^s\,ds=\int_0^x\frac{1}{\log t}\,dt=\mathrm{Li}(x).$$

El terme corresponent a la suma sobre les arrels de ξ dóna

$$\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\sum\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)}{s}\right]x^s\,ds=\sum_{\xi(\rho)=0}\mathrm{Li}(x^\rho),$$

on $\mathrm{Li}(x^\rho)$ s'ha d'interpretar com el valor obtingut, fixant x, per prolongació analítica de la funció $\mathrm{Li}(x^\beta)$ dels β reals positius a tot el semiplà complex $\Re(\beta)>0$. Aquí cal dir que Riemann no justifica prou els passos que segueix per arribar a aquest resultat. En particular, reconeix que el fet que es pugui avaluar terme a terme per a cada sumand requeriria una discussió més acurada. D'altra banda, els termes $\mathrm{Li}(x^\rho)$ només tenen sentit si $\Re(\rho)>0$, i Riemann no havia demostrat que els zeros no poguessin estar a l'eix imaginari, fet que va ser més endavant clau en la demostració del teorema dels nombres primers.

El terme corresponent al sumand de la funció Γ dóna

$$\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{\log x}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{-\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s}\right]x^s\,ds=\int_x^\infty\frac{dt}{t(t^2-1)\log t}.$$

Quant al terme $\frac{s}{2}\log\pi$, la divisió per s el converteix en constant i en derivar s'anul·la. Finalment, la integral sobre la constant $\xi(0)$ dóna com a valor aquesta mateixa constant, que és igual a $-\log(2)$.

Sumant tots els resultats anteriors s'arriba a la fórmula explícita per a la funció π^*

$$\pi^*(x)=\mathrm{Li}(x)-\sum_{\substack{\rho\in\mathbb{C}\\ \xi(\rho)=0}}\mathrm{Li}(x^\rho)+\int_x^\infty\frac{dx}{x(x^2-1)\log x}-\log 2. \tag{9}$$

Aquesta fórmula és el resultat principal de l'article de Riemann i aconsegueix donar el valor exacte de la funció esglaonada $\pi^*(x)$ com la suma d'un terme principal $\mathrm{Li}(x)$, dos termes residuals fitats, i una suma infinita de termes oscillatoris corresponents a les arrels no trivials de ζ. És fàcil comprovar que el terme fitat que s'escriu com una integral és igual a la suma $\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{Li}(x^{-2n})$, que té la mateixa forma que el sumatori de (9) però per les arrels trivials de ζ en els enters negatius parells, de manera que la fórmula de Riemann es pot escriure, de manera més simple,

$$\pi^*(x)=\mathrm{Li}(x)-\log(2)-\sum_{\substack{\rho\in\mathbb{C}\\ \zeta(\rho)=0}}\mathrm{Li}(x^\rho).$$

Les gràfiques de les figures 4, 5 i 6 serveixen com a il·lustració de la fórmula explícita: mostren l'aspecte que tenen els termes oscil·latoris corresponents a algunes arrels (en agrupar-les per parelles simètriques es cancel·len les parts imaginàries) i dibuixen les aproximacions de π^* que s'obtenen a partir de sumes parcials en dos intervals diferents.

La funció Ri de Riemann. En els darrers paràgrafs de l'article Riemann considera la funció π i enuncia les conseqüències per a aquesta funció que s'obtenen dels seus resultats. Només a partir de les definicions la relació entre π^* i π s'obté immediatament:

$$\pi^*(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\pi(x^{1/n}),$$

i amb la fórmula d'inversió de Möbius s'obté la relació recíproca

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \pi^*(x) - \frac{1}{2}\pi^*(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\pi^*(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\pi^*(x^{1/5}) + \frac{1}{6}\pi^*(x^{1/6}) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\pi^*(x^{1/n}),\end{aligned}$$

on μ és la funció de Möbius que val zero en els enters divisibles pel quadrat d'algun primer i val $(-1)^m$ en els enters divisibles exactament per m primers diferents. Atès que totes dues funcions π i π^* valen zero per a $x < 2$, les sumes anteriors són en realitat finites per a cada valor de x, ja que eventualment serà $x^{1/n} < 2$.

Ara, substituint π^* per la sèrie de la fórmula explícita (9) en el sumatori anterior i arranjant la suma terme a terme s'arriba a una fórmula explícita semblant per a la funció π. El terme principal d'aquesta fórmula és la funció

$$\begin{aligned}\mathrm{Ri}(x) &= \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{1/5}) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{1/6}) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{1/n}),\end{aligned}$$

que es coneix com a *funció de Riemann*. Per a valors reals $x > 1$ aquesta funció admet la sèrie ràpidament convergent anomenada *sèrie de Gram*:

$$\mathrm{Ri}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^n}{n!n\zeta(n+1)}.$$

Els termes corresponents al sumatori sobre les arrels de ζ de les funcions $\mathrm{Li}(x^\rho)$ donen lloc a un sumatori de funcions $\mathrm{Ri}(x^\rho)$ i el terme constant $\log(2)$ desapareix gràcies a la identitat $\sum_{n\geqslant 1} \mu(n)/n = 0$ (que, poca broma!, és equivalent al teorema dels nombres primers). D'aquesta manera s'obté l'elegant fórmula explícita (2) per a la funció π, enunciada a la introducció.

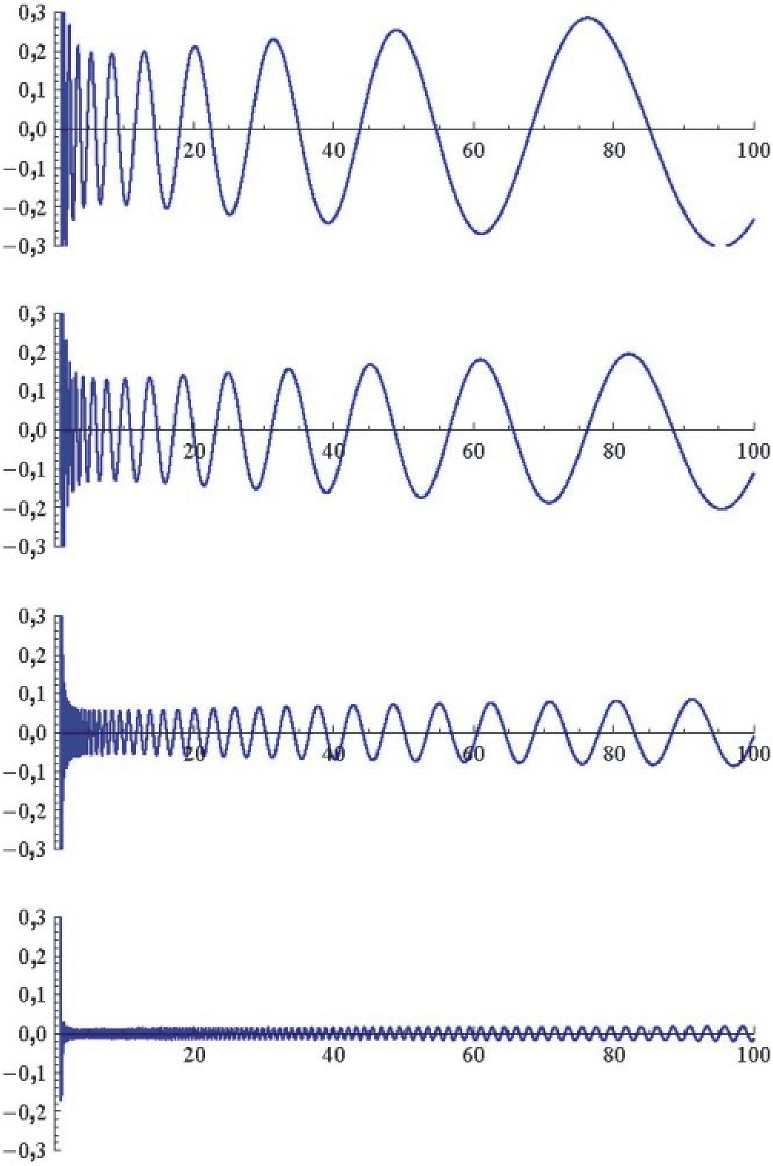


FIGURA 4: Termes oscil·latoris $-\operatorname{Li}(x^{\rho}) - \operatorname{Li}(x^{1-\rho})$ corresponents als parells d'arrels números 1, 2, 10 i 100.

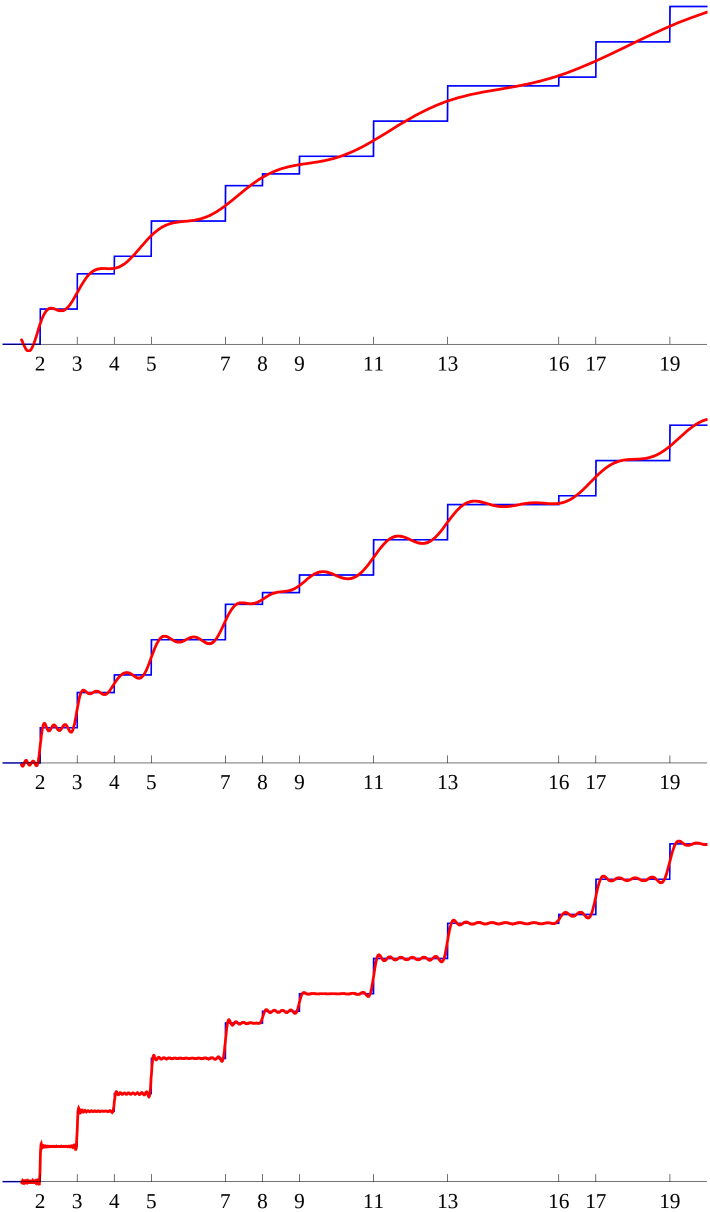


Figura 5: Aproximació de π^* a l'interval $(1, 20]$ amb la fórmula explícita de Riemann usant 1, 10 i 100 zeros de ζ, respectivament.

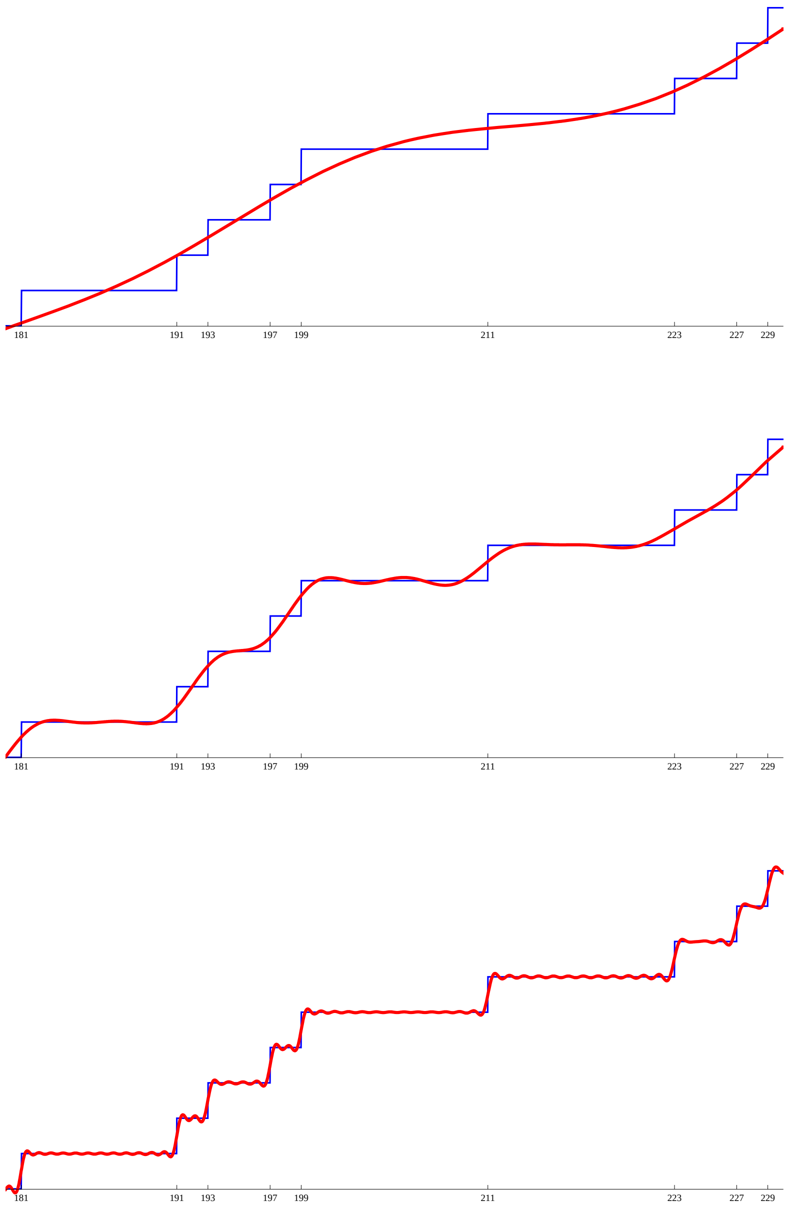


FIGURA 6: Aproximació de π^* a l'interval $[180, 230]$ amb la fórmula explícita de Riemann usant 10, 100 i 1.000 zeros de ζ, respectivament.

Per aquestes consideracions Riemann ha aconseguit arribar a una nova funció $\mathrm{Ri}(x)$ que s'afegeix a les funcions ja conegudes $x/\log x$ i $\mathrm{Li}(x)$ com a candidata a aproximar la funció π. En l'últim paràgraf Riemann fa referència a les dades calculades per Gauss. Dels valors de $\pi(x)$ fins a tres milions, observa que la funció Li sobreestima la quantitat de nombres primers i comet un error de magnitud comparable a l'arrel quadrada, i que el segon terme $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Li}(\sqrt{x})$ en la suma que defineix Ri, que és el terme dominant de la diferència entre totes dues, sembla corregir aquesta sobreestimació, tal com es pot constatar a les gràfiques de les figures 7 i 8. Des d'aleshores les taules de

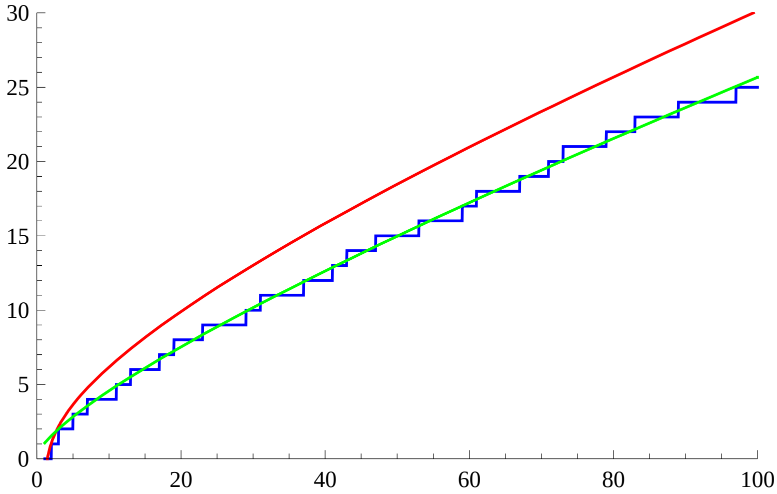


FIGURA 7: Les funcions Li (vermell o negre) i Ri (verd o gris) comparades amb π per a $x \leqslant 100$.

nombres primers i de valors de la funció π s'han anat ampliant, sobretot des de la proliferació de les calculadores electròniques. A més, i pel que fa al càlcul de π, l'any 1871 l'astrònom alemany Meissel va proposar un mètode combinatori que millora sensiblement el càlcul basat en el garbell d'Eratòstenes, i que ha estat perfeccionat i simplificat per Lehmer i d'altres.

Actualment, se sap el valor exacte de $\pi(x)$ per a molts valors de x de l'ordre de les vint xifres decimals, en particular per a les potències de 10 fins a la vint-i-tresena. La taula 2 conté aquests valors i els compara amb els proporcionats per les tres aproximacions de Legendre, Gauss i Riemann, respectivament.

En aquesta taula s'observa com les funcions $x/\log x$ i $\mathrm{Li}(x)$ donen aproximacions, respectivament, per defecte i per escreix en tots els casos, i que l'error comès per la segona és clarament inferior. El nombre de xifres de x és notòriament el doble que el nombre de xifres de l'error $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$, el qual ratifica que la magnitud de l'error és, com ja havia observat Riemann, de l'ordre de l'arrel quadrada.

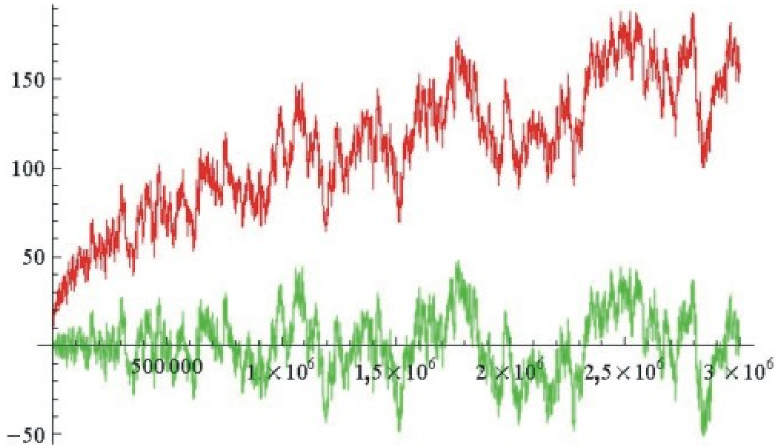


FIGURA 8: Diferències $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ (vermell o negre) i $\mathrm{Ri}(x) - \pi(x)$ (verd o gris) a l'interval $x \leqslant 3\,000\,000$.

n	$\pi(x)$	$\pi(x) - x/\log x$	$\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$	$\pi(x) - \mathrm{Ri}(x)$
3	168	23	9	0
4	1229	143	16	−2
5	9592	906	37	−5
6	78498	6116	129	29
7	664579	44158	338	88
8	5761455	332774	753	97
9	50847534	2592592	1700	−79
10	455052511	20758029	3103	−1828
11	4118054813	169923159	11587	−2318
12	37607912018	1416705193	38262	−1476
13	346065536839	11992858452	108970	−5773
14	3204941750802	102838308636	314889	−19200
15	29844570422669	891604962452	1052617	73218
16	279238341033925	7804289844393	3214632	327052
17	2623557157654233	68883734693928	7956590	−598255
18	24739954287740860	612483070893536	21949508	−3501366
19	234057667276344607	5481624169369952	99878336	23884333
20	2220819602560918840	49347193044659712	222745856	−4891825
21	21127269486018731928	446579871578169344	597340160	−86432204
22	201467286689315906290	4060704006019645440	1932787712	−127132665
23	1925320391606818006727	37083513766592905216	7236222976	1019262049

TAULA 2: Valors de π en $x = 10^n$ fins al rècord actual i comparació amb les aproximacions de Legendre, Gauss i Riemann.

Per a tots els valors de la taula la funció Ri aproxima π millor que Li i la diferència $\mathrm{Ri}(x) - \pi(x)$ va canviant de signe. Aquesta aproximació, tot i ser millor, no ho és significativament en magnitud, ja que el nombre de xifres de tots dos errors sembla comportar-se de manera molt similar. Tal com es veurà a la secció següent en parlar de l'error en el teorema dels nombres primers, tot i que l'experimentació numèrica i l'observació de pautes i correlacions en les dades és una pràctica molt útil en matemàtiques, s'ha d'anar amb molt de compte a deixar-se convèncer d'un fet només basant-se en una propietat observada numèricament, fins i tot si es disposa d'una quantitat ingent de dades. Vegeu referent a això els «philosophical comments» de Peter Sarnak sobre la verificació numèrica de la hipòtesi de Riemann al final de la seva presentació del problema del mil·lenni [14].

4 Després de Riemann

Els efectes del treball de Riemann van trigar a arribar: després de la publicació es va fer el silenci durant gairebé trenta anys. Després, a l'última dècada del segle XIX floreix una edat d'or de la teoria analítica de nombres que continuarà amb menys intensitat durant el primer quart del segle XX. Es publiquen demostracions de tots els resultats enunciats per Riemann (excepte de la seva estimació del nombre de zeros sobre la recta crítica, que encara no ha estat provada), es demostra el teorema dels nombres primers seguint la via que ell havia obert i s'obtenen nombrosos resultats sobre el terme d'error i la seva relació amb la hipòtesi de Riemann i amb altres propietats sobre la posició dels zeros no trivials. Des d'aleshores, tot i el rang mític que la hipòtesi de Riemann va assolir des de 1900 gràcies a Hilbert, les diverses connexions proposades amb diferents branques de les matemàtiques i la física, i la ingent informació numèrica obtinguda gràcies a la revolució informàtica, es fa difícil destacar progressos espectaculars.

Aquesta secció està dedicada a repassar alguns resultats i algunes idees posteriors directament relacionats amb el treball de Riemann.

Demostració de la fórmula explícita. El resultat principal del treball de Riemann és la fórmula explícita (9), que va ser demostrada per von Mangoldt l'any 1895. En realitat, el que fa von Mangoldt és demostrar una fórmula anàloga, que en molts aspectes és més simple que la de Riemann, tot i que essencialment es tracta de dues versions diferents d'un mateix fenomen. Un cop demostrada la seva fórmula, von Mangoldt aconsegueix sense massa dificultat passar a la de Riemann.

En les seves investigacions sobre el teorema dels nombres primers, cap a l'any 1850, Txebixev havia introduït dues noves funcions per comptar primers, anàlogues a les funcions π i π^*. Les funcions

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p \qquad \text{i} \qquad \psi(x) = \sum_{p^n \leqslant x} \log p,$$

que es coneixen com a *funcions de Txebixev*. Es tracta també de funcions en forma d'escala, que tenen els graons en els nombres primers i en les seves potències, respectivament, exactament igual que π i π^*, amb l'única diferència que l'altura del graó en cada primer p o en qualsevol potència seva és $\log p$. Hi ha fórmules que expressen l'una en funció de l'altra completament anàlogues a les que donen la relació entre π i π^*. Txebixev havia observat que la funció $\psi(x)$ creix com x i havia demostrat sense massa dificultat que tant l'equivalència asimptòtica $\vartheta(x) \sim x$ així com també $\psi(x) \sim x$ són totes dues equivalents al teorema dels nombres primers $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$.

Von Mangoldt arribà a la seva fórmula seguint pas a pas la construcció de Riemann, però partint de la derivada logarítmica $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ en comptes de la funció $\log \zeta(s)$ i de la funció de Txebixev $\psi(x)$ en comptes de la funció $\pi(x)$. En expressar la primera com a transformada integral de la segona i per inversió de Fourier es tenen les expressions

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = s \int_0^\infty \psi(x) x^{-s} \frac{dx}{x},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) x^s \frac{ds}{s} \qquad (a > 1).$$

Aplicant la derivada logarítmica a la descomposició en producte de ξ (que, afortunadament, havia estat demostrada per Hadamard tot just dos anys abans) von Mangoldt obté

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{s}{s-1} - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{s}{\rho(s-\rho)} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}.$$

Finalment, substituint cadascun dels sumands d'aquesta expressió en la fórmula integral per a la funció ψ, i després de justificar la convergència en cadascun dels passos, arriba a la fórmula

$$\psi(x) = x - \sum_{\xi(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{x^2}{x^2-1} \right) - \log 2\pi, \qquad x > 1. \tag{10}$$

En comparar-la amb la fórmula explícita de Riemann (9), s'observa que l'analogia entre totes dues és total. La funció x és el terme principal. La funció $\frac{1}{2}\log(\frac{x^2}{x^2-1})$ és monòtona decreixent i tendeix a zero, de manera que la seva contribució és irrellevant; en escriure-la com a la suma de la sèrie $-\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{-2n}}{2n}$ es veu que la seva presència a la fórmula correspon als zeros trivials de la funció ζ. Cadascun dels zeros no trivials dóna lloc a un terme oscil·latori x^ρ/ρ, amb el benentès que la suma s'ha de fer aparellant cada zero ρ amb $1-\rho$ o bé simplement com a límit de les sumes parcials fent tendir $|\rho|$ a infinit.

El teorema dels nombres primers. El teorema dels nombres primers, conjecturat per Gauss i Legendre, va ser finalment demostrat l'any 1898 simultàniament i de manera independent per Hadamard i de la Vallée-Poussin, de manera molt semblant, i tots dos seguint el camí indicat per Riemann.

Segons la versió equivalent del teorema dels nombres primers donada per Txebixev, el que s'ha de demostrar és que $\lim_{x\to\infty} \psi(x)/x = 1$. Tenint en compte la fórmula explícita de von Mangoldt (10) es dedueix que el teorema dels nombres primers equival al límit

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_\rho x^\rho/\rho}{x} = \lim_{x\to\infty} \sum_\rho \frac{x^{\rho-1}}{\rho} = 0.$$

Ara bé, si es demostra que el límit es pot calcular terme a terme, aleshores n'hi ha prou a comprovar que $x^{\rho-1} \to 0$ per a tot zero ρ a la banda crítica, el qual és equivalent a la condició $0 < \Re(\rho) < 1$. Atesa la posició simètrica dels zeros respecte a la recta crítica, resulta que el teorema dels nombres primers és conseqüència del fet que la funció zeta de Riemann no tingui zeros sobre la recta $\Re(s) = 1$.

Tant Hadamard com de la Vallée-Poussin van evitar haver de justificar l'intercanvi del límit amb el sumatori partint de fórmules que són lleugeres variacions de la fórmula explícita de von Mangoldt i que són expressions no pas per a ψ sinó per a les funcions $\int_0^x t^{-k}\psi(t)\,dt$ amb $k = 1$ (Hadamard) o $k = 2$ (de la Vallée-Poussin). Les demostracions segueixen els mateixos passos però són força més fàcils; de fet, sembla que Hadamard volia que la demostració del teorema dels nombres primers no depengués del treball de von Mangoldt publicat tot just feia poc, amb aspectes que encara no havien aconseguit convèncer alguns experts.

Un cop arribats aquí, l'únic que cal és demostrar que $\zeta(s) \neq 0$ per a tot complex s amb $\Re(s) = 1$. Tots dos ho aconsegueixen en veure, combinant la funció zeta, el seu logaritme i la seva derivada logarítmica, i fent servir l'equació funcional, que si hi hagués un zero al punt $s = 1 + it$ aleshores seria $|\zeta(1 + 2it)| = \infty$, que no pot ser, ja que ζ és holomorfa fora de $s = 1$.

Les investigacions de de la Vallée-Poussin sobre els zeros de la funció ζ li permeteren arribar a un resultat més fort, en què aconsegueix trobar una regió lliure de zeros dins de la banda crítica. Més endavant aquest tipus de resultats sobre regions lliures de zeros s'han anat millorant successivament, però tots són del tipus

$$\zeta(\sigma + it) \neq 0 \quad \text{per} \quad 1 - \frac{C}{\lambda(t)} \leqslant \sigma \leqslant 1,$$

per a t suficientment gran, on C és una constant positiva i $\lambda(t)$, una funció que tendeix a infinit ($\log t$ en de la Vallée-Poussin, millorada fins a $(\log t)^{2/3}$ $(\log\log t)^{1/3}$ per Richert el 1963). A pesar d'això avui dia encara no se sap demostrar que ζ no tingui zeros a la banda vertical $1 - \epsilon < \Re(s) < 1$ per a cap nombre positiu ϵ.

Provocant un gran enrenou en la comunitat matemàtica, Erdös i Selberg van obtenir, l'any 1949, una demostració del teorema dels nombres primers basada només en enginyoses fites de funcions aritmètiques, que no requereix tècniques analítiques ni té cap relació amb resultats de Riemann. Se la coneix com a demostració *elemental* del teorema dels nombres primers, tot i que la paraula elemental només es pot fer servir aquí en el sentit de no necessitar cap eina analítica, ja que la demostració és intricada i requereix diverses desigualtats fines que no s'obtenen pas sense grans dificultats i amb una considerable virtuositat tècnica. A pesar d'una certa expectació sobre les conseqüències que podria tenir per a l'estudi del terme d'error per altres vies, i d'una agra disputa per la precedència de l'autoria, la realitat és que les tècniques emprades en aquestes i altres «demostracions elementals» posteriors no han donat fins ara el fruit obtingut amb la potència de les eines analítiques.

El terme d'error en el teorema dels nombres primers. Gauss va observar que la funció $\mathrm{Li}(x)$ aproxima el valor de $\pi(x)$ sempre per escreix en tot l'interval on havia fet els seus càlculs, i això s'ha seguit complint per a tots els valors de x dels quals s'ha pogut calcular el valor de la funció π fins ara (vegeu la taula 2). Durant més d'un segle tots els matemàtics (Gauss i Riemann inclosos) pensaren que la diferència $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ seguiria sent positiva indefinidament. L'any 1916 Littlewood va demostrar un resultat sorprenent: la diferència $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ alterna el signe infinites vegades quan x va creixent! Més precisament, el que Littlewood demostra és que

$$\mathrm{Li}(x) - \pi(x) = \Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\,\frac{\log\log\log x}{\log x}\right),$$

on la notació indica que el terme de l'esquerra supera en magnitud el de la dreta, per a x tan gran com es vulgui, i prenent tant valors positius com negatius. Observeu que aquest resultat de Littlewood té una altra conseqüència que contradiu el que les dades numèriques porten a creure: que l'aproximació de Riemann $\mathrm{Ri}(x)$ del valor de $\pi(x)$ sigui sempre millor que l'aproximació de Gauss $\mathrm{Li}(x)$ (vegeu la figura 2 i la taula 2). En efecte, al voltant dels infinits punts x on la diferència $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ travessa l'eix real l'aproximació de Gauss és imbatible!

Fins ara no s'ha pogut donar cap valor numèric concret de x en què $\pi(x)$ superi $\mathrm{Li}(x)$, i pel que sabem de la magnitud dels nombres amb aquesta propietat és gairebé segur que ni per més capacitat de càlcul de què es disposi en el futur, ni per molt que es millorin els algorismes, mai serà possible calcular el nombre $\pi(x)$ exactament en cap d'aquests valors. En efecte, l'any 1933 Skewes demostrà, suposant la hipòtesi de Riemann, que existeixen nombres $x < 10^{10^{10^{34}}}$ amb $\pi(x) > \mathrm{Li}(x)$. Aquesta fita se cita sovint com el nombre més descomunal que mai hagi tingut algun paper seriós en un article matemàtic. Més endavant el mateix autor va aconseguir rebaixar la fita canviant el 34 per un 3 i que el resultat fos independent de la hipòtesi de Riemann. Amb el temps la fita s'ha anat rebaixant gràcies a disposar de més zeros de ζ calculats cada vegada amb una precisió millor; en un article recent, [2], es donen arguments (basats en un gran nombre de zeros) a favor que el primer canvi de signe en l'error del teorema dels nombres primers té lloc al voltant de 1.398×10^{316}. L'any 1994 Rubinstein i Sarnak [13] demostraren (mòdul hipòtesis plausibles sobre els zeros de la funció zeta que inclouen la hipòtesi de Riemann) un resultat que d'alguna manera explica per què cal anar tan lluny i és tan difícil trobar valors negatius a pesar dels infinits canvis de signe que Littlewood ens garanteix que hi ha d'haver: la diferència $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$ és positiva per al $99,999973\ldots$ per cent dels nombres!

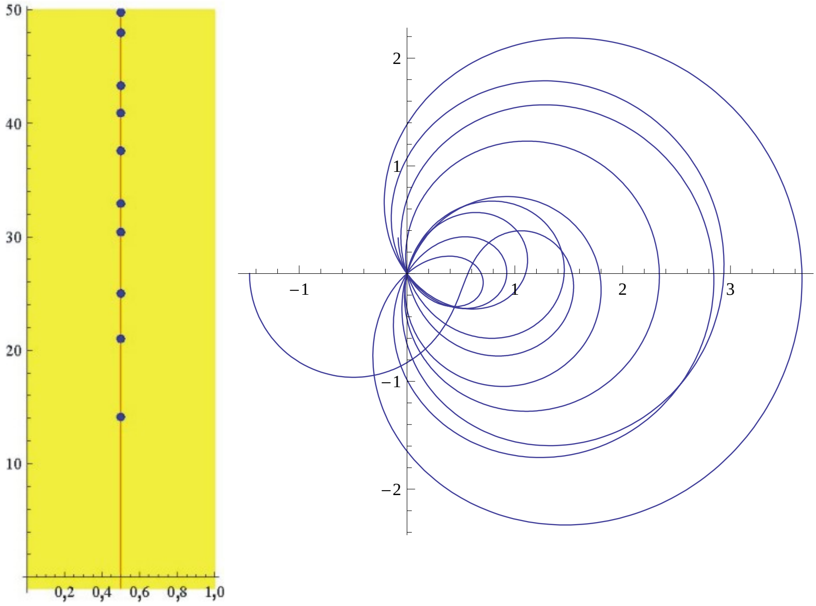
Es recomana al lector encuriosit per aquests resultats que llegeixi l'excellent article «Prime number races», d'Andrew Granville i Greg Martin [11], on es descriu un fenomen anàleg que es dóna en comptar nombres primers en diferents progressions aritmètiques de la mateixa raó, i que s'explica gràcies als resultats de Littlewood i de Rubinstein i Sarnak aplicats a funcions L de Dirichlet.

Un altre tòpic que guarda molta relació amb els resultats sobre el terme d'error és el de l'estudi estocàstic de la distribució dels nombres primers, que aprofundeix en l'observació de Gauss sobre la variació de la densitat dels nombres primers. A final dels anys trenta Cramér va proposar fer servir el model estocàstic consistent en una successió de variables aleatòries $\{X_n\}_{n\geqslant 2}$ que prenen valors $0, 1$ amb probabilitat $P(X_n = 1) = 1/\log n$, la qual és un model de la successió dels nombres primers. La idea és que qualsevol propietat d'aquesta successió que es compleixi gairebé segur (amb probabilitat 1) la complirà la successió dels nombres primers. El fet és que molts resultats coneguts (teorema dels nombres primers, oscil·lacions de Littlewood) o conjecturats (hipòtesi de Riemann, conjectura dels primers bessons) s'adiuen plenament amb les prediccions d'aquest model, el qual ha estat sovint utilitzat com a argument a favor de propietats conjecturades de la successió dels nombres primers i també com a motor per a predir-ne de noves.

Mètodes numèrics i zeros de la funció zeta. El primer càlcul de zeros el va publicar Gram el 1903, tot i que Siegel trobaria més tard càlculs d'aquesta mena entre els papers de Riemann. Emprant la fórmula de sumació d'Euler-Maclaurin per calcular els valors de la funció zeta i de la funció gamma, Gram va aconseguir donar els deu primers zeros de la funció ζ amb sis decimals de precisió i demostrar la hipòtesi de Riemann fins a $T = 50$. Vegeu la figura 9, en què, a part del valor numèric dels zeros, es mostra la seva posició sobre la recta crítica. També s'hi representa gràficament el recorregut de $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ quan el paràmetre t recorre l'interval $0 \leqslant t \leqslant 50$, on es veu com passa deu vegades pel punt zero.

La determinació numèrica dels zeros a la recta crítica $s = \frac{1}{2} + it$ es redueix a l'estudi de la funció $\xi(\frac{1}{2} + it)$, que és una funció real de la variable real t. Utilitzant les tècniques numèriques habituals per a aquest tipus de càlculs es poden aproximar els zeros amb la precisió desitjada, sempre que se sàpiga calcular el valor d'aquesta funció amb prou precisió. En comptes de treballar directament amb $\xi(\frac{1}{2} + it)$ és habitual considerar la descomposició

$$\xi\left(\frac{1}{2} + it\right) = \left[-e^{\Re \log(\Gamma(s/2))}\pi^{-1/4}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{8}\right)\right] \times \left[e^{\Im \log(\Gamma(s/2))}\pi^{-it/2}\zeta(s)\right],$$



$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= 0,5 + 14,1347251417347i \\
\rho_2 &= 0,5 + 21,0220396387716i \\
\rho_3 &= 0,5 + 25,0108575801457i \\
\rho_4 &= 0,5 + 30,4248761258595i \\
\rho_5 &= 0,5 + 32,9350615877392i \\
\rho_6 &= 0,5 + 37,5861781588257i \\
\rho_7 &= 0,5 + 40,9187190121475i \\
\rho_8 &= 0,5 + 43,3270732809150i \\
\rho_9 &= 0,5 + 48,0051508811672i \\
\rho_{10} &= 0,5 + 49,7738324776723i
\end{aligned}
$$

FIGURA 9: Els deu primers zeros no trivials calculats per Gram l'any 1905, amb altura $\leqslant 50$.

on el primer factor pren sempre valors negatius i la funció del segon factor es coneix com a *funció de Riemann-Siegel* i es denota

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right), \qquad \vartheta = \Im \log\left(\Gamma\left(\frac{1}{4} + i\frac{t}{2}\right)\right) - \frac{t}{2}\log \pi.$$

Així, tant els zeros com els canvis de signe de la funció de Riemann-Siegel coincideixen amb els de la funció $\xi(\frac{1}{2} + it)$. La figura 10 presenta la gràfica de la funció Z de Riemann-Siegel en intervals tots de mida 50 que contenen nombres de diferents ordres de magnitud. S'hi observa com, en augmentar x, els zeros es van atapeint com a conseqüència de la fórmula de Riemann-von Mangoldt (6), apareixen alternats amb els extrems locals (fet que es conjectura cert, i que és equivalent al fet d'ésser tots simples) i les oscil·lacions augmenten en amplitud.

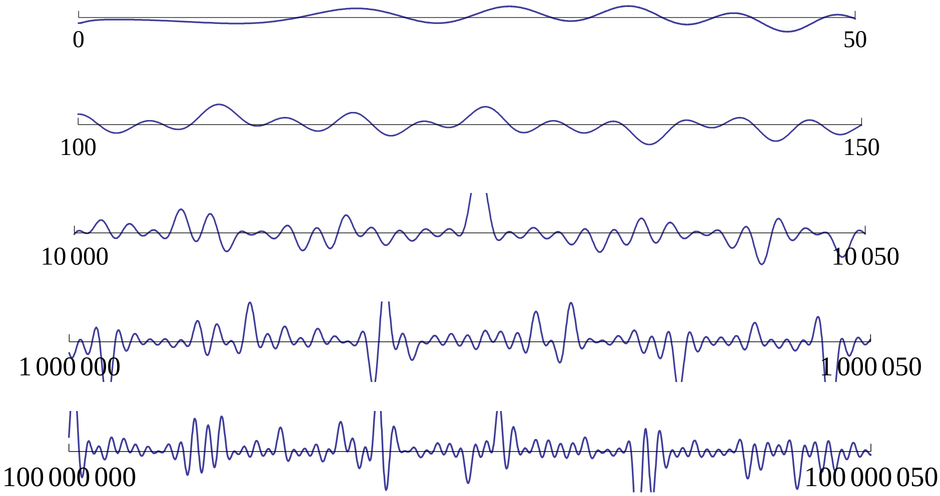


FIGURA 10: La funció Z de Riemann-Siegel en diversos intervals de mida 50.

A més de calcular numèricament valors aproximats dels zeros de la funció ζ, també es pot demostrar amb tècniques numèriques que tots els zeros de ζ en una regió fitada $[0,1]\times[0,T]$ de la banda crítica cauen exactament sobre la recta crítica, de la manera següent. En primer lloc s'apliquen tècniques numèriques per integrar la derivada logarítmica de ξ sobre la frontera d'aquesta regió; el resultat serà el nombre de zeros $N(T)$ dins de la regió i, tractant-se d'un enter, pot calcular-se exactament a partir només d'un valor aproximat de la integral. A continuació es busca una seqüència de valors $0 \leqslant t_0, t_1, \ldots, t_n \leqslant T$ del paràmetre t tals que el signe de la funció $Z(t)$ canviï de l'un al següent, el qual garanteix que hi ha almenys n zeros sobre la recta crítica. Si s'aconsegueix arribar a $n = N(T)$ es dedueix que la hipòtesi de Riemann és certa en la regió considerada. Naturalment, aquest mètode donarà resultat només si tots els zeros en la regió són de multiplicitat 1, propietat que es conjectura certa, i de fet ha funcionat sempre en tots els càlculs fets fins ara.

Backlund, l'any 1915, i Hutchinson, l'any 1925, van ampliar els càlculs fets per Gram fins a $T = 200$ (regió on hi ha 79 zeros) i $T = 300$ (138 zeros), respectivament.

Un avenç important en les tècniques per avaluar numèricament la funció zeta a la recta crítica és una fórmula asimptòtica per al càlcul de la funció $Z(t)$, coneguda pel nom de *fórmula de Riemann-Siegel*, que Siegel va trobar en els papers de Riemann, la qual va permetre avaluar numèricament aquesta funció de manera molt més eficient i precisa, i ampliar considerablement els resultats numèrics obtinguts fins aleshores.

La revolució informàtica de les darreres dècades i l'increment continuat de la potència de càlcul conseqüent han permès estendre els resultats, com es pot observar a la taula 3. El rècord actual és de l'any 2004: s'han calculat els primers 10 bilions de zeros de la funció zeta de Riemann i cap s'ha desviat el més mínim de la recta crítica!

Any	Nombre de zeros	Autors
1903	15	J. P. Gram
1914	79	R. J. Backlund
1925	138	J. I. Hutchinson
1935	1 041	E. C. Titchmarsh
1953	1 104	A. M. Turing
1956	15 000	D. H. Lehmer
1956	25 000	D. H. Lehmer
1958	35 337	N. A. Meller
1966	250 000	R. S. Lehman
1968	3 502 500	J. B. Rosser, J. M. Yohe, L. Schoenfeld
1977	4×10^7	R. P. Brent
1979	$8,1 \times 10^7$	R. P. Brent
1982	2×10^8	R. P. Brent, J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter
1983	3×10^8	J. van de Lune, H. J. J. te Riele
1986	$1,5 \times 10^9$	J. van de Lune, H. J. J. te Riele, D. T. Winter
2001	10^{10}	J. van de Lune
2003	$2,5 \times 10^{11}$	S. Wedeniwski
2004	10^{13}	X. Gourdon

TAULA 3: Nombre de zeros calculats.

Aproximacions a la hipòtesi de Riemann. En el darrer segle i mig, a través de les investigacions dels continuadors de l'obra de Riemann, han proliferat els problemes i les teories directament relacionats amb els seus resultats, i en especial amb la conjectura encara per demostrar.

El més significatiu és sens dubte el fet que la hipòtesi de Riemann és equivalent al fet que l'error del teorema dels nombres primers sigui en un cert sentit el més petit possible (no pot ser menor a causa de la magnitud de les oscil·lacions predites per Littlewood). L'any 1901, Helge von Koch va demostrar que la hipòtesi de Riemann és equivalent a

$$\mathrm{Li}(x) = \pi(x) + O(\sqrt{x}\log x).$$

Mertens estudià la funció $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(x)$ que dóna la suma dels valors de la funció de Möbius en els enters menors que x; tenint en compte que aquesta funció multiplicativa proporciona els coeficients de la sèrie de Dirichlet que dóna el recíproc de ζ,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \qquad \Re(s) > 1,$$

i com a conseqüència de condicions ben conegudes per a la convergència d'aquest tipus de sèries, no és difícil concloure que la hipòtesi de Riemann és equivalent al fet que es tingui $M(x) = O(\sqrt{x}^{1+\varepsilon})$ per a tot $\varepsilon > 0$. Mertens enuncià, el 1897, la conjectura $|M(x)| \leqslant \sqrt{x}$ (que implica la hipòtesi de Riemann) però l'any 1985 Odlyzko i te Riele van refutar-la: emprant una ingent quantitat de zeros de la funció zeta calculats amb prou precisió es pot veure que hi ha algun nombre menor que $e^{3,21\times10^{64}}$ en què la suma dels valors de la funció de Möbius supera l'arrel quadrada. Els experts opinen que la desigualtat $|M(x)| \leqslant C\sqrt{x}$ serà també eventualment falsa per a tota constant C, tot i que això no s'ha aconseguit provar fins ara.

Una altra via d'aproximació a la hipòtesi de Riemann és l'estudi del creixement de la funció ζ. Per a cada nombre real σ la funció ζ té ordre de creixement finit a la recta vertical d'abscissa σ, o sigui, $|\zeta(\sigma + it)| \leqslant t^{\alpha}$ per a algun $\alpha > 0$ i t prou gran. Definint $w(\sigma)$ com l'ínfim d'aquests nombres α s'obté una funció contínua monòtona decreixent a tot $\mathbb{R}$. És fàcil calcular els valors d'aquesta funció per als valors fora de l'interval $0 < \sigma < 1$ corresponent a la regió crítica i la gran incògnita és el valor en $\sigma = 1/2$. La *hipòtesi de Lindelöf* prediu que $w(1/2) = 0$ o, de manera equivalent, que

$$w(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sigma, & \text{si} \quad \sigma < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si} \quad \sigma \geqslant \frac{1}{2}, \end{cases}$$

i es pot demostrar que equival a la hipòtesi de Riemann. El 1916 Hardy i Littlewood van demostrar que $w(1/2) \leqslant 0,166\ldots$; el rècord actual és de Bombieri i Iwaniec, que donen la fita $9/56$.

Una aproximació deguda a Beurling i Nyman des de l'anàlisi funcional obté la hipòtesi de Riemann com a conseqüència que l'espai generat per les funcions

$$\eta_{\alpha}(t) := \left\{\frac{\alpha}{t}\right\} - \alpha\left\{\frac{1}{t}\right\},$$

on $\{\cdot\}$ indica la part fraccionària d'un nombre real, per als valors de l'interval $0 < \alpha < 1$, generen tot l'espai $L^2(0,1)$. Una descripció detallada d'aquesta teoria (i molt més) es pot consultar a [5].

Per acabar, tot i que la llista podria seguir, una equivalència curiosa: la hipòtesi de Riemann és equivalent al fet que $\det(A(n)) = O(\sqrt{n}^{1+\varepsilon})$, on $A(n)$ és la matriu binària que té un 1 en el lloc (i,j) si $j = 1$ o bé $i \mid j$, i zeros a la resta (vegeu [3]).

Operador de Riemann i matrius aleatòries. Una de les aproximacions a la hipòtesi de Riemann que ha originat més discussió i controvèrsia és la coneguda amb el nom de *conjectura de Hilbert-Pólya*. Es tracta de l'especulació sobre la possibilitat que els zeros de la funció $\xi(\frac{1}{2} + it)$ siguin valors propis d'un operador hermític autoadjunt en un espai de Hilbert de dimensió infinita adequat, l'operador de Riemann. Com que aquests valors propis són reals, la hipòtesi de Riemann queda reduïda «només» a la construcció d'aquest operador.

L'analogia amb el cas de les funcions L locals, en què la hipòtesi de Riemann es va demostrar a partir de la construcció de certs espais (la cohomologia ℓ-àdica) i de les propietats d'un automorfisme que hi opera (l'automorfisme de Frobenius), ha estat de vegades presentada com a argument a favor d'aquesta via, tot i que els experts són molt cauts en les seves opinions sobre això (vegeu [1, 4, 14]).

La conjectura de Hilbert-Pólya rebé un fort impuls durant els anys setanta quan Montgomery i Dyson observaren que l'espaiat entre zeros consecutius de la funció zeta, convenientment normalitzat, es distribueix de manera increïblement idèntica a com ho fa l'espaiat entre els valors propis de matrius aleatòries hermítiques. La verificació numèrica d'aquesta «correlació de parells» ha estat l'objectiu de molts projectes de càlcul intensiu durant les darreres dècades, i aquest ha estat un dels principals esperons per al desenvolupament de tècniques numèriques relacionades amb la recerca de zeros de la funció ζ. A més, la teoria s'ha estès amb èxit a altres famílies de funcions L, les quals s'han fet correspondre a matrius aleatòries de diversos tipus. En tots els casos les dades confirmen el comportament previst, tot i que fins ara no s'ha obtingut cap resultat teòric rellevant sobre la funció ζ com a conseqüència d'aquesta teoria.

Referències

[1] Bayer, P. «La hipòtesi de Riemann (IV Cicle Ferran Sunyer i Balaguer)». *Aula de ciència i cultura* [Fundació Caixa Sabadell], 25 (2007).

[2] Bays, C.; Hudson, R. H. «A new bound for the smallest x with $\pi(x) > Li(x)$». *Math. Comp.*, 69 (1999), 1285–1296.

[3] Bombieri, E. *The new book of prime number records*. Springer-Verlag, 1995.

[4] BOMBIERI, E. *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis.* Pàgina web de la Fundació Clay
http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

[5] BRUNA, J. *Euler, sèries i funció zeta de Riemann*. Conferències FME, volum IV (Curs Euler 2006-2007), 2007.

[6] CONREY, J. B. «The Riemann Hypothesys». *Notices of the AMS*, 50 (2003), 341–353.

[7] DELÉGLISE, M.; RIVAT, J. «Computing $\pi(x)$: the Meissel, Lehmer, Lagarias, Miller, Odlyzko, method». *Math. Comp.*, 65 (1996), 235–245.

[8] DU SAUTOY, M. *The Music of The Primes. Why an Unsolved Problem in Mathematics Matters*. Harper Perennial, 2004. [Traducció al castellà: *La música de los números primos*, Acantilado, 2007.]

[9] EDWARDS, H. M. *Riemann's Zeta function*. Nova York, Londre: Academic Press, 1974.

[10] GOURDON, X. *The* 10^{13} *first zeros of the Riemann zeta function, and zeros computation at very large height*. [*Preprint*. Octubre 2004.]

[11] GRANVILLE, A.; MARTIN, G. «Prime number races». *Amer. Math. Monthly*, 113 (2006), 1–33.

[12] RIEMANN, G. F. B. «Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe». *Monatsberichte der Berliner Akademie* (1859), 671–680.

[13] RUBINSTEIN, M.; SARNAK, P. «Chebyshev's bias». *Experiment. Math.* 3 (1994), 173–197.

[14] SARNAK, P. *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis (2004).* Pàgina web de la Fundació Clay
http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/.

[15] TENENBAUM, G.; MENDÈS FRANCE, G. *The prime numbers and their distribution*. AMS Student Mathematical Library, vol. 6, 2000.

[16] ZAGIER, D. «The first 50 million prime numbers». *Math. Intelligencer*, vol. 0 (1977), 7–19.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA 2
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
CAMPUS NORD, EDIFICI OMEGA
JORDI GIRONA, 1-3
08034 BARCELONA
jordi.quer@upc.edu