El mètode dels indivisibles

de
Bonaventura Cavalieri

Ma. Rosa Massa

Els objectius d'aquest treball són dos: primer, analitzar els trets fonamentals dels dos mètodes dels indivisibles[1] de Bonaventura Cavalieri, i també les dificultats lògiques que comporta la seva comprensió; segon, aclarir mitjançant aquesta anàlisi la idea cavalieriana d'indivisible. He utilitzat la traducció italiana a càrrec de Lombardo-Radice (Torí, 1966) de l'obra original: *Geometria indivisibilibus nova quadam ratione promota* (Bolonya, 1635). En alguns casos he consultat l'obra llatina original que està microfilmada en el Seminari d'Història de la Ciència de la Universitat Autònoma de Barcelona. A més a més, he utilitzat els treballs de K. Andersen, Giusti, Cellini i De Gandt sobre l'obra de Cavalieri.

Introducció

A la fi del segle XVI, la geometria va quedar establerta com una branca de les matemàtiques gràcies a les traduccions al llatí dels treballs dels geòmetres grecs. Va produir-se una revifalla de recerques geomètricques sobre temes arquimedians, en particular sobre el càlcul d'àrees i volums de figures geomètriques i centres de gravetat. Podríem dir que durant tot el segle XVII qualsevol matemàtic que volguès ésser apreciat treballava amb problemes de quadratures i càlculs de baricentres. Les eines utilitzades per aquests matemàtics des de l'any 1600 al 1680 varen donar lloc a variades versions d'infinitesimals i indivisibles, una mena de precàlcul.

Cavalieri (1598-1647), jesuat italià, va ser un dels primers a desenvolupar un nou mètode que està explicat básicament en dos dels seus llibres:

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (Bolonya, 1635) i *Exercitationes geometricae sex* (Bolonya, 1647).

La *Geometria indivisibilium* està composta de set llibres:

Llibre primer. Aclareix algunes de les suposicions sobre figures planes i sòlids.

Llibre segon. Dóna els fonaments del mètode dels indivisibles i algunes aplicacions.

Llibre tercer, quart i cinquè. Tracta sobre curvatures i quadratures relacionades amb seccions còniques.

Llibre sisè. Aquest llibre està dedicat principalment a la quadratura de l'espiral però conté alguns resultats concernents a cilindres, esferes, paraboloides i esferoides.

Llibre setè. Segon mètode dels indivisibles.

El contingut del llibre *Exercitationes Geometricae Sex* és més variat:

Exercitatione primera. Cavalieri presenta una versió revisada del primer mètode dels indivisibles exposat en el llibre segon de *Geometria* i en suggereix algunes simplificacions.

Exercitatione segona. Cavalieri pren el seu punt de partida en el llibre VII de *Geometria* i desenvolupa una nova presentació del segon mètode.

Exercitatione tercera. Al títol, Cavalieri especifica quin és el tema: «Contra Guldin.[2] On es discuteixen les coses que va objectar a la *Geometria dels Indivisibles* Paulo Guldin en el seu *Centrobaryca*».[3]

Exercitatione quarta. Cavalieri presenta una generalització del mètode dels indivisibles que li permet de tractar com a algebraiques corbes amb grau més gran que dos.

Exercitatione cinquena. Cavalieri torna a la determinació de centres de gravetat, fonamentant-se en conceptes relacionats amb el mètode dels indivisibles.

Exercitatione sisena. Conté material divers.

Antecedents

Quan Cavalieri exposà el seu mètode, ja hi havia dos antecedents clars: la tècnica dels antics que avui s'anomena mètode d'exhaustió i el treball fet per Kepler, *Stereometria Doliorum* (Linz, 1615).

Explicarem alguns trets d'aquests mètodes a fi que s'entengui millor d'on partia Cavalieri.

a) Mètode d'exhaustió. El mètode d'exhaustió ja el va introduir Èudox i, poste-

Cavalieri volia fer un nou mètode que evités les proves indirectes i que, a més a més, pogués ser utilitzat de la mateixa manera en tots els casos.

Tanmateix Cavalieri i, sobretot Torricelli, estan convençuts que Arquimedes, a més a més del mètode d'exhaustió, havia utilitzat un mètode similar al dels indivisibles però que no l'havia donat a conèixer. Cavalieri ho posa de manifest en el *Prefazione* del llibre VII quan diu:

> «(...) l'hauria tret dels llibres precedents (el mètode col·lectiu), si no m'hagués semblat una acció indigna amagar aquestes novetats de la geometria als savis com si fossin misteris;»[7]

Pero Torricelli ho expressa més clarament:

> «... Veritablement no gosari pas afirmar que aquesta *Geometria dels indivisibles* sigui pròpiament una descoberta enterament nova. M'inclino a creure amb més voluntat que els antics geòmetres han utilitzat aquest mètode en la descoberta dels teoremes més difícils, encara que ells hagin preferit una altra via en les demostracions, ja sigui per guardar els secrets de l'art, ja sigui per no donar ocasió a crítiques dels detractors gelosos. Sigui com sigui, és cert que aquesta geometria és un meravellós compendi, i que permet d'establir innombrables teoremes quasi impenetrables per demostracions curtes, directes i positives, cosa que no es pot fer amb la teoria dels antics. Aquesta geometria dels indivisibles, en efecte, dins les maleses matemàtiques és veritablement la via real, i el primer que l'obrí i l'obrí i l'aplanà per profit de tots, és l'artesà de descobertes admirables: Cavalieri.»[8]

El fet curiós és que ells, sense saber-ho, tenien raó. El 1906 Heiberg va trobar un manuscrit d'Arquimedes on es veu que utilitzava un mètode similar. A tall d'exemple, hi ha una demostració de Torricelli de la quadratura de la paràbola[9] que és molt pròxima a la que dóna Arquimedes en l'obra trobada el 1906.

b) Treball de Kepler (1571-1630). Molts matemàtics des de Demòcrit havien utilitzat la idea intuïtiva de considerar una figura plana o un sòlid com a compostos d'infinitèsims. Aquesta idea va esdevenir la base d'un mètode d'integració utilitzat per Johannes Kepler a la seva obra *Stereometria Doliorum* (Linz, 1615).[10]

Al seu treball, Kepler utilitza una extensa varietat de mètodes per a la recerca de quadratures i cubicacions. Podem destacar-ne l'ús d'infinitesimals basat en la intuïció i sense cap elaboració prèvia del concepte d'indivisible.

Per a ell, les parts d'un continu són infinites, infinitament petites i de la mateixa dimensió que el continu.[11] Com a exemple vegeu com trobava l'àrea d'un cercle.[12]

Kepler ho raona de la manera següent: la circumferència que envolta el cercle té tantes parts, com punts, considerades infinites. Cada part forma la base d'un triangle isòsceles amb vèrtex al centre del cercle. D'acord amb això, el cercle està format d'infinits petits triangles, cada un amb la seva base sobre la circumferència i amb una altura igual al radi del cercle. Substituint aquests triangles per un únic triangle amb la riorment, Euclides i Arquimedes el varen explotar en una gran varietat de camins a fi de determinar àrees curvilínies, volums, superfícies i arcs. Aquesta tècnica era tan rigorosa com d'altres, però al mateix temps extremament laboriosa i no deixava gaire camp a la intuïció.

El mètode es basa en una sèrie de nocions que són indispensables per poder desenvolupar el procés. Aquestes nocions poden ser explicades com segueix:[4]

1. Qualsevol quantitat finita, tanmateix petita, pot arribar a ser tan gran com vulguem multiplicant-la per un nombre suficientment gran; o bé, donades dues magnituds desiguals a i b (b < a) llavors existeix,

   i) un nombre n tal que $nb > a$ (Euclides V, def. 4),
   ii) un nombre n tal que $n\ (a\text{-}b) > c$, on c és alguna magnitud del mateix tipus (L'axioma d'Arquimedes, *Sobre l'esfera i el cilindre,* Llibre I).

2. Qualsevol quantitat finita pot arribar a ser tan petita com nosaltres vulguem per substracció repetida d'una quantitat més gran, o igual a la seva meitat; o bé, donades dues quantitats desiguals a i b ($b < a$), llavors existeix un nombre n, tal que $(1\text{-}p)^n a < b$, on $p \geqslant 1/2$ (Euclides X.1).

El mètode consistia a fer una doble «*reductio ad absurdum*». O sigui, per demostrar que $A = B$, s'ha de provar la impossibilitat de $A > B$ i $A < B$. Aquí rau la necessitat d'intuir, volem calcular A i la fem igual a B.

El procés començava amb l'establiment, a través de construccions geomètriques, d'una seqüència ascendent monòtona I_n, i una seqüència monòtona descendent C_n, entre les quals hi ha la magnitud B de la qual hem de determinar el valor. Els termes I_n i C_n constitueixen perímetres, àrees de superfícies o volums de figures inscrites i circumscrites respectivament i la relació:

$$I_1 < I_2 < I_3 < \ldots\ldots < I_n < B < C_n < C_{n\text{-}1} < \ldots\ldots < C_2 < C_1$$

es pot establir per a una sèrie de lemes geomètrics donats.

Utilitzant les nocions 1 i 2, i la construcció particular adoptada per I_n i C_n es mostra que, per a algun n, la diferència (C_n - I_n) pot arribar a ser més petita que qualsevol magnitud donada o que la raó C_n/I_n pot arribar a ser més petita que la raó de la més gran a la més petita de qualsevol magnitud donada.

El càlcul consisteix en el fet que, trobada una magnitud A que per a tots els valors de n està entre I_n i C_n, ha de ser igual a B.[5]

Per provar-ho es demostra la impossibilitat que $A < B$ i $A > B$.[6]

Les principals limitacions del mètode d'exhaustió són:

1. S'utilitzen únicament proves indirectes.
2. Cada proposició es fa de bell nou i no s'utilitzen resultats d'altres proposicions. No dóna ni intenta donar regles per fer nous càlculs.

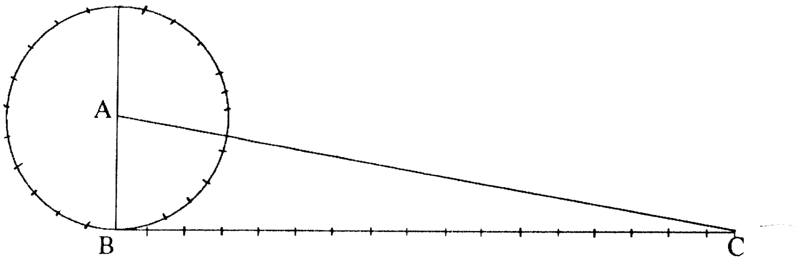


Figura 1[13]

longitud de la circumferència com a base i altura el radi, l'àrea del cercle és l'àrea d'aquest triangle i és expressada en funció de la longitud de la circumferència i del radi (Figura 1).

Va influir l'obra de Kepler en el nou mètode de Cavalieri?

Cavalieri probablement va conèixer el llibre de Kepler cap al 1626, després d'haver inventat el seu mètode. Però encara que l'hagués llegit abans, el seu mètode no reflecteix pas aquestes idees. Cavalieri i Kepler estaven d'acord en el fet que un nou mètode hauria d'unificar al mateix temps resultats i proves, cosa que no passava en el mètode d'exhaustió d'Arquimedes. Tanmateix, Cavalieri no va trobar el nou mètode de Kepler satisfactori i així ho va expressar en el *Prefazione* del seu llibre *Geometria indivisibilium.*[14]

Cavalieri va quedar molt impressionat per la quantitat de problemes que tractava Kepler, però creia que només era possible de fonamentar sòlidament un nou mètode si no s'utilitzaven elements infinitesimals[15] en les proves.

Influència dels grecs

El mètode dels indivisibles de Cavalieri és nou, però les idees estan fonamentades en la teoria de magnituds dels grecs i en concret en les magnituds que segueixen una proporció.

Cavalieri va intentar donar a la seva nova teoria uns pilars sòlids i arrelats en els primers principis de la geometria grega.[16]

El matemàtics grecs dividien els objectes matemàtics en diferents categories. Pel treball de Cavalieri són particularment interessants les categories que contenen els nombres naturals i les tres categories que contenen figures geomètriques d'una dimensió, dues dimensions i tres dimensions respectivament. En el llibre V dels *Elements* d'Euclides la paraula magnitud és introduïda per caracteritzar un objecte. És difícil definir exactament una magnitud, però per al nostre propòsit és suficient tenir en compte que, a la categoria dels nombres naturals, els nombres eren magnituds i, a la categoria de les figures, les figures, quan es consideraven mòbils, eren magnituds.

Les suposicions dels matemàtics grecs sobre relacions i composicions de magnituds implicaven que quan ens donen dues magnituds qualssevol A i B, del mateix tipus, es verifica:

1. A i B poden ser ordenades o sigui que estan en una de les tres relacions següents:

$$A > B, \qquad A = B, \qquad A < B$$

2. A i B poden ser sumades; el resultat, amb notació $A + B$, és una magnitud del mateix tipus que A i B.
3. Si $A > B$, B pot ser restada de A, formant la magnitud $A - B$ del mateix tupus que A i B.
4. A i B poden estar en una raó de l'altra. O sigui que és possible multiplicar l'una per excedir l'altra. Definició IV del llibre V dels *Elements* d'Euclides.[17] Cavalieri, com veurem més endavant, tracta de magnituds que estan una en raó de l'altra.

Per entendre el tractament que Cavalieri fa de les figures geomètriques, és molt important tenir present que els càlculs descrits es refereixen a magnituds. Pel que fa al càlcul amb magnituds utilitzades pels grecs, hi ha alguna diferència amb el que fem actualment.

Donades dues figures geomètriques A i B, podem interpretar les relacions = i > dient que A és igual o més gran que B, si la mida de A és igual o més gran que B. En canvi, el concepte de nombres dels grecs no permetia mesures com longitud, àrea i volum de les figures i per això calculaven directament amb les figures o magnituds. La raó profunda d'aquest fet és la *incommensurabilitat* que impedeix de poder associar una unitat a una magnitud. Els matemàtics grecs calculaven una àrea o un volum trobant la raó entre la figura que havia de ser determinada i una figura coneguda; per exemple, la raó entre un segment de paràbola i el paral·lelogram circumscrit a ell.

Cavalieri en el seu mètode dels indivisibles va assumir les nocions que acabem d'explicar concernents a les magnituds i, fins i tot, va intentar estendre la col·lecció de les magnituds amb una de nova. O sigui que la influència dels grecs en l'obra de Cavalieri és patent.

Primer mètode dels indivisibles. Mètode col·lectiu

a) Nocions o conceptes necessaris
b) Proposicions o teoremes bàsics. Reflexions
c) Aplicacions del mètode

a) Nocions o conceptes necessaris

1. Tangent a figures planes i sòlids
2. Concepte de «regula»
3. «Totes les línes» i «tots els plans»
4. Nomenclatura

1. Tangent a figures planes i sòlids

El mètode de Cavalieri es basa en la utilització d'unes magnituds «inventades» que estan l'una en raó de l'altra. Per al desenvolupament d'aquest mètode necessita definir els nous conceptes: tangent, «regula», «totes les línies» i «tots els plans».

En el llibre I, Cavalieri suposa que els seus lectors entenen quin és el significat de tangent mentre que en el llibre VII de la *Geometria* el defineix. Aquesta definició aclareix els dubtes que un lector amb un concepte tradicional de tangent podria haver tingut:

> «Dic que una línia recta toca una altra línia corba (o recta) situada en el mateix pla que aquesta, quan la corba, en trobar la recta en un punt o al llarg d'una línia recta, o bé es troba completament en un costat de la línea que toca o bé no té cap part a l'altre costat.»[18] (Figura 2).

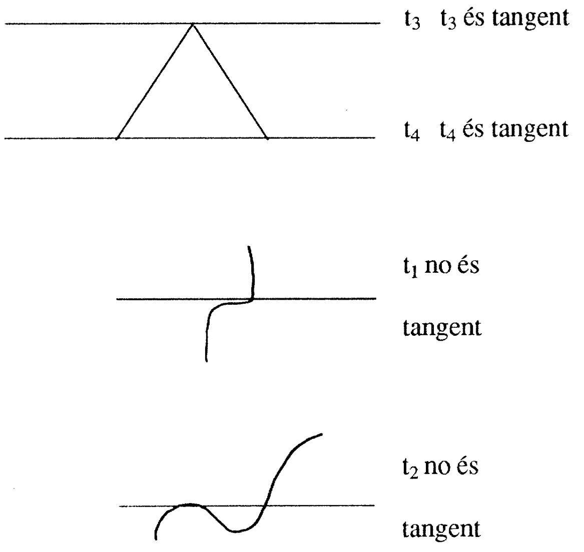


Figura 2

Aquesta definició és important ja que quasi tots els teoremes tracten les figures entre dues tangents oposades.

Així donada una figura plana tancada *ABCD* i una direcció *RS* anomenada «regula», què entén Cavalieri per dues tangents oposades? Seran les dues tangents *AE* i *CG* paral·leles a la «regula» de tal manera que qualsevol línia paral·lela situada entre les dues tangents, per exemple *BD*, tallarà la figura en segments, mentre que totes les línies paral·leles a la «regula» fora de les tangents no tindran punts comuns amb la figura. (Figura 3.)

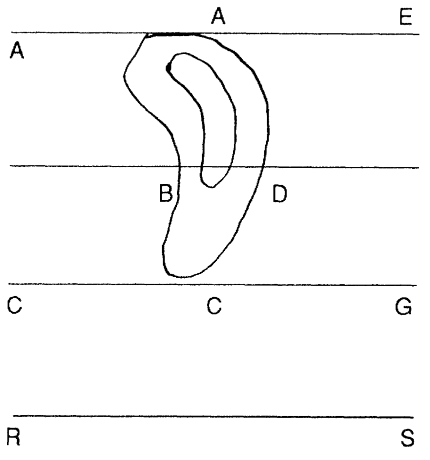


Figura 3

2. Concepte de «regula»

«Regula» és la direcció segons la qual cal traçar les tangents per tal d'aconseguir «totes les línies» d'una figura plana, concepte que tractem a continuació.

3. «Totes les línies» i «tots els plans»

La primera definició, formulada ben bé al començament del llibre II, introdueix el concepte de «totes les línies».

> «Si considerem dos plans paral·lels a través de dues tangents oposades d'un pla arbitrari donat, perpendiculars o inclinats al pla de la figura donada, i si movem un dels plans paral·lels cap a l'altre, mantenint-lo sempre paral·lel fins que coincideixen; llavors les úniques línies que formen la intersecció entre el pla que es mou i el pla donat, agafades totes juntes, s'anomenen «totes les línies» de la figura, prenent-ne una d'elles com a «regula» (trànsit recte); això quan els plans són perpendiculars a la figura donada. Quan els plans són inclinats a la figura, les línies són anomenades «totes les línies» de la mateixa figura donada respecte a un pas oblic (*Obliqui Transitus*) i, en aquestes, la «regula» també és una d'elles.»[19]

Aquest concepte de «totes les línies» és el resultat d'un procés de tallar, el qual està regit per unes condicions molt estrictes:

— la figura ha d'estar situada entre dues tangents paral·leles oposades,
— a través de dues tangents oposades hi passen dos plans paral·lels,

— un d'aquests plans flueix cap a l'altre que roman fix; el pla que es mou sempre ha de ser paral·lel al fix,
— l'interès té el seu focus en les successives posicions del pla que es mou: a cada instant aquest pla talla una línia recta particular sobre la figura plana, i la seva marca dins dels límits de la figura és un segment particular;
— si considerem tots els segments successivament tallats dins la figura pel pla que es mou, com si es tractés d'un conjunt, aquestes formes seran el que anomenem «totes les línies d'una figura».

Cavalieri en el *Prefazione* del llibre VII, en les consideracions sobre aquest concepte, fa una altra definició de «totes les línies» i diu:

> «Pel que fa a la formació del concepte de «totes les línies» o de «tots els plans», vaig pensar que podíem arribar-hi fàcilment a través de la negació, de manera que precisament s'entengui que no s'exclou cap línia o cap pla.»[20]

«Tots els plans» d'una figura sòlida. La segona definició del llibre segon de Cavalieri introdueix el concepte de «tots els plans».

> «Si, donat un sòlid qualsevol, s'hi han traçat (*condotti*) plans tangents oposats presos amb la mateixa «regula», . . . dels quals un es mou cap a l'altre sempre paral·lelament fins a sobreposar-s'hi, el plans, que durant tot el moviment queden inclosos en el sòlid donat, considerats en conjunt, s'anomenen: «tots els plans» del sòlid.donat, tenint com a «regula» un d'ells.»[21]

El procés que cal seguir és similar al que es fa servir per obtenir «totes les línies». Cavalieri, a més a més, en fer les aplicacions del mètode, utilitza termes similars com «tots els quadrats» per especificar que els plans són quadrats.

4. Nomenclatura[22]

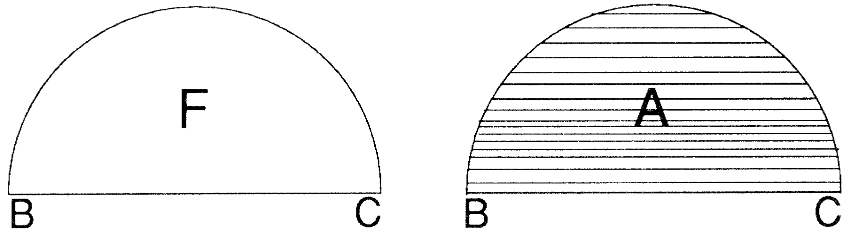


Figura 3

BC és la «regula». (Figura 3)

$O_F(l)_{BC}$ col·lecció de línies de F amb «regula» BC.
$O_F(l)$ col·lecció de línies de F sense especificar «regula».
$O_P(\quad)_{AB}$: col·lecció de quadrats de P amb regula AB.
$O_P(\quad)$: col·lecció de quadrats de P sense especificar «regula».

b) Proposicions i teoremes bàsics. Reflexions

1. Fonaments del primer mètode.
2. Teoremes bàsics.

1. Fonaments del primer mètode

Cavalieri després de definir aquests nous elements intenta demostrar que aquesta col·lecció de línies o de plans són magnituds del tipus que estan l'una en raó de l'altra.

Finalment, transfereix la raó o proporció entre «totes les línies" de dues figures a la raó o proporció entre les figures, per trobar-ne les àrees.

El primer mètode de Cavalieri reposa així sobre un tipus d'isomorfisme: la proporcionalitat entre dues col·leccions de línies o de plans pot ser transferida a les figures sobre les quals s'han determinat aquestes línies o aquests plans, sense que es defineixi clarament si les línies "componen" la figura o si els plans "componen" el sòlid.

El procediment de Cavalieri de transferència de proporcions es fa en tres estadis que corresponen als tres primers teoremes del llibre segon. Aquests estadis són:

1. Pot establir-se una proporció entre "totes les línies" de dues figures planes, definides tal com hem explicat, ja que són magnituds que estan l'una en raó de l'altra. Aquest estadi correspon al primer teorema que diu:

   «"Totes les línies" de figures planes... són magnituds que estan (l'una) en raó (de l'altra).»[23]

2. Si les figures planes són iguals, les seves «totes les línies» són iguals. Correspon al teorema 2 que diu:

   «"Totes les línies" de figures planes iguals... són iguals.»[24]

3. La raó entre «totes les línies» de dues figures pot ser transferida a les mateixes figures.[25] Correspon al teorema 3 que diu:

   «Figures planes tenen entre si la mateixa raó que tenen "totes les línies" d'elles...»[26]

Analitzarem detingudament aquests tres teoremes fonamentals en el primer mètode dels indivisibles que anomenarem col·lecitu, per ser fidels a l'esperit de Cavalieri. En efecte, Cavalieri en la *Geometria indivisibilium* l'anomena mètode anterior, però en el començament del llibre *Exercitationes Geometricae Sex* (Bolonya, 1647) li canvia el nom i l'anomena col·lectiu. Cavalieri ho diu així:

> «Utilitzarem aquests (indivisibles) de manera diferent en els dos mètodes: en l'anterior pensem comparar-los col·lectivament, en el posterior en canvi, ho farem distributivament.»[27]

A més a més, analitzarem el teorema 4 ja que és l'eina més utilitzada en les aplicacions del mètode.

Tractarem solament el cas de figures planes ja que el mateix es pot estendre al cas de figures sòlides i anàlogament entendrem que la col·lecció de «totes les línies» que volem comparar té la mateixa «regula».

2. Teoremes bàsics

Teorema 1. Proposició 1.

> «"Totes les línies" de trànsit recte de figures planes . . . són magnituds que tenen raó.»[28]

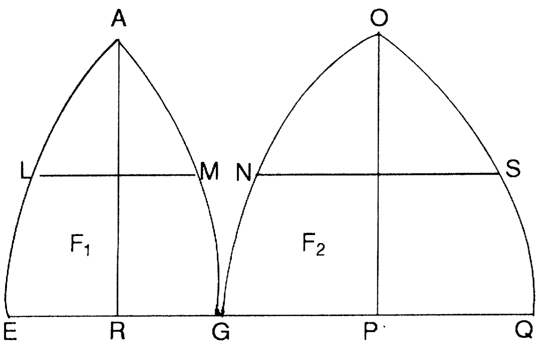
Cavalieri en l'obra original ho expressa així:

> « . . . *sunt magnitudines inter se rationem habentes*».

Comparem-ho amb la definició IV del llibre V dels *Elements* d'Euclides:

> *«Proportionem inter se habere magnitudines dicantur, quae multiplicatae se invicem superare possunt.»*

De fet, Cavalieri el que intenta fer en la demostració és trobar un múltiple[29] d'una col·lecció de línies que excedeixi l'altra col·lecció, o sigui que estableix la proporció segons la definició IV del llibre cinquè d'Euclides i ell mateix en el marge del text original llatí ho fa notar.



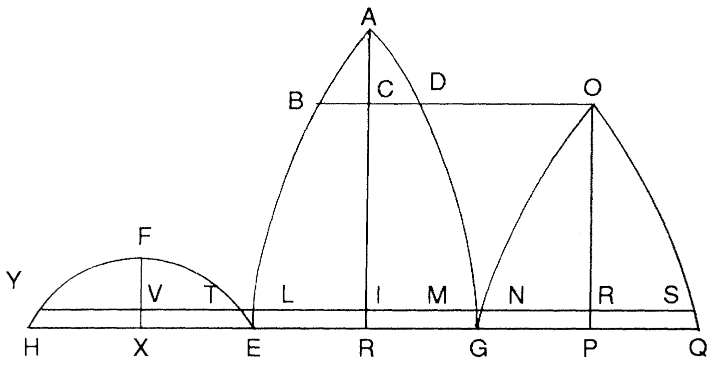


Figura 4[30]

La seva prova es basa en consideracions poc precises.

El raonament de Cavalieri se centra en les dues figures planes $F_1 = EAG$, $F_2 = GOQ$, en les quals «totes les línies» s'obtenen tallant les figures segons la «regula» EQ. Considera primer el cas on les figures tenen la mateixa alçada, o sigui $AR = OP$ (figura de l'esquerra) i després el cas $AR > OP$ (figura de la dreta).

Les línies de cada figura les anomenarem $O_{F_1}(l)$ i $O_{F_2}(l)$.

Es formen amb segments tals com LM i NS, que es troben per les posicions successives del tall d'un pla que es mou paral·lel a la «regula» EQ i al pla de la figura.

Analitzarem detingudament els passos successius del seu raonament:

1. Determina dos segments dels que formen «totes les línies». Els anomena l_2 = NS de F_2 i $l_1 = LM$ de F_1.
2. Aquests dos segments satisfan la definició de magnituds que poden estar l'una en raó de l'altra, ja que pot excedir l'una a l'altra multiplicant-la un nombre suficient de vegades. Diu Cavalieri:

   « . . . si la línia NS és més petita que la línia LM, pot, estenent-la indefinidament, esdevenir cada cop més llarga» (*potest indefinite producta aliquando fieri major*).

3. El mateix es pot fer amb "totes les línies" (*si hoc intelligamus fieri de ceteris lineis*)
4. Llavors

   «"totes les línies" de la figura EAG serà una part de "totes les línies" de la figura GOQ que han estat esteses» (*patet ergo quod omnes lineae figurae EAG erunt pars omnium linearum figurae GOQ sic productarum*).

5. Però el tot és més gran que la part (*totum autem est majus sua parte*).

Llavors «totes les línies» de GOQ, sent esteses, són més llargues que «totes les línies» de EAG. El mateix procediment pot ser aplicat en l'altra direcció, canviant el rol EAG i GOQ.

6. Com a conseqüència, aquestes dues col·leccions infinites de línies són susceptibles, si una la multipliquem un nombre suficient de vegades, d'excedir l'una a l'altra. Llavors, satisfan la definició de magnituds que estan l'una en raó de l'altra.

El pas 3[31] s'hauria de considerar exclòs de la teoria d'Euclides, ja que implica fer la mateixa operació un nombre infinit de vegades.

En el cas $AR \neq OP$, per exemple $AR > OP$, Cavalieri divideix AR en una part igual a OP o a diverses OP i la resta serà sempre més petita que OP. En el cas més senzill seria $AR + CR + AC$ on $CR = OP$ i $AC < OP$. A través de C va dibuixar la línia CO paral·lela a EG i va moure la figura BAD cap a la figura HFE.

Com en la primera part de la prova, per concloure l'existència d'un múltiple de $O_{GOQ}(l)$, el qual és més gran que $O_{EBDG}(l) + O_{HFE}(l)$ i per tant més gran que $O_{EAG}(l)$, utilitzava l'argument que cada $l_2 = NS$ en $O_{GOQ}(l)$ pot ser multiplicat per excedir la suma del corresponent $l_1 = LM$ en $O_{EBDG}(l)$ i $l_3 = YT$ en $O_{HFE}(l)$. En l'últim pas s'utilitza la propietat additiva:

$$F \cong F_1 + F_2 \rightarrow O_F(l) = O_{F_1}(l) + O_{F_2}(l)$$

Cavalieri va considerar implícita aquesta propietat però no la va demostrar. Com veiem Cavalieri es preocupa de demostrar la noció 4 de les magnituds però sembla que no creu necessari demostrar les nocions 1, 2 i 3.[32]

Després d'haber aplicat la demostració a «totes les línies», Cavalieri fa el mateix amb «tots els plans».

Anàlisi i consideracions sobre aquest teorema i el seu escoli

El primer que hom pot pensar és: como concebia Cavalieri «totes les línies»? Com podia parlar de raó entre «totes les línies» d'una figura plana i d'una altra figura també plana, sent en nombre infinit?

Cavalieri era conscient d'aquest problema des del començament del treball sobre els indivisibles. Pero això, el 15 de desembre de 1621, preguntava a Galileu la seva opinió sobre el dilema. D'una banda li deia:

> «Sembla que "totes les línies" d'una figura donada són infinites (en nombre) i per tant excloses de la definició de magnituds que estan en proporció.»

I d'altra banda:

> «Per la raó que si la figura es fa més gran, també les línies es fan més grans . . . , sembla que "totes les línies", per tant, queden incloses en la definició mencionada».[33]

Sembla que Cavalieri no va rebre resposta de Galileu però Guldin creu trobar una resposta en els *Discorsi* (1638), quan Salviati explica que les expressions «més petit» i «més gran» perden sentit en el regne de l'infinit. Salviati diu així:

> «Aquesta dificultat (la de comparar dos infinits) es deriva de la nostra manera de fer un discurs sobre els infinits amb el nostre intel·lecte finit, en donar-los els atributs que adscrivim a les coses finites i acabades; penso que això és inconvenient, perquè crec que aquests atributs de més gran, més petit i igual no convenen als infinits, dels quals no es pot dir que un sigui més gran o més petit o igual que un altre.»[34]

Guldin en el seu llibre *Centrobaryca* acusa Cavalieri, en referir-se al paràgraf anterior dels *Discorsi*, de no seguir les indicacions del seu mestre. Cavalieri li contesta a l'*Exercitatione* tercera dient:

> «... que en aquell pas, en el qual (Galileu) diu que les propietats del finit no són aplicables als infinits, havia parlat de l'infinit en un altre sentit, sobreentenent-lo com infinit absoult, o sigui havent considerat la totalitat, com diuen els filòsofs, no podent afegir-hi res; mentre que als infinits punts de les línies, encara que infinits —no sent però infinits en sentit absolut—[35] puc afegir-hi de tant en tant alguna cosa, com és de per si evident.»[36]

Cavalieri va retornar freqüentment al problema durant la resta de la seva vida. Durant el període 1621-1647 Cavalieri va utilitzar principalment dos arguments matemàtics per provar l'existència de la raó entre dues col·leccions de línies.

El primer argument matemàtic es troba en el teorema I que acabem d'analitzar i ja molt abans, en una carta de Cavalieri del 22 de març de 1622 dirigida a Galileu on explica haver trobat la solució al seu dubte, li diu:

> «Que "totes les línies" de dues figures planes i "totes les superfícies" de dues figures sòlides estan en proporció per mi és fàcil de demostrar; perquè, multiplicant una d'aquestes figures, també es multiplicquen "totes les línies" de les figures planes i "totes les superfícies" de les figures sòlides, així doncs "totes les línies" d'una figura o d'una superfície poden, augmentades, excedir "totes les línies" o superfícies de l'altra... (primer argument matemàtic).»[37]

De fet Cavalieri, com hem vist, s'entreté a demostrar-ho en el teorema I. Encara que sembli que Cavalieri ja no té dubtes, en el seu llibre escriu un escoli després de la demostració del teorema I per aclarir les idees dels lectors. En paraules de Cavalieri:

> «Escoli del Teorema I»
>
> «Hom pot dubtar d'aquesta demostració, no comprenent bé com línies i plans indefinits en nombre, que jo he anomenat "totes les línies" o "tots els plans" de tal o tal figura, poden ser mútuament comparats. Per aquest motiu em

sembla necessari fer notar que, quan jo considero "totes les línies" o "tots els plans" d'una figura, no en comparo el nombre, que ignorem, sinó la magnitud· que és igual a l'espai ocupat per "totes les línies", perquè "totes les línies" són congruents amb l'espai; i com que aquest espai està tancat dins de límits, per aquesta raó la magnitud de "totes les línies" també està tancada dins els mateixos límits; llavors aquesta magnitud pot ser sumada o restada (segon argument matemàtic), encara que no coneixem el nombre de línies. Dic que això és suficient a fi que siguin mútuament comparables, altrament els espais de les figures que ocupen tampoc serien comparables.»[38]

Per tant Cavalieri dedueix que es poden comparar, o sigui estar l'una en raó de l'altra, del fet que poden ser afegides i restades.

En el *Prefazione* de *Geometria indivisibilium* dóna un altre argument a favor que «totes les línies» poden ser considerades una magnitud. Aquí Cavalieri traça un paral·lelisme entre les col·leccions de línies i les magnituds algebraiques com les arrels d'una equació, amb les quals es pot calcular encara que no se'n conegui la naturalesa:[39]

> «M'he servit d'un artifici (*artificio*) similar al que els algebristes solen utilitzar per resoldre les seves qüestions. Aquests, en veritat, malgrat que les arrels dels nombres siguin inefables (*ineffabilis*), absurdes i desconegudes, no per això deixen de sumar-les, restar-les, multiplicar-les i dividir-les, i estan convençuts d'haver fet perfectament el seu deure per tal de treure'n la solució desitjada al problema proposat...»[40]

Després d'haver explicat els arguments de Cavalieri per provar l'existència d'aquestes magnituds que estan l'una en raó de l'altra, hom pot preguntar-se:

Com es pot pensar en una magnitud que conté infinites línies? Com es poden comparar dos infinits?

Cavalieri era conscient d'aquest problema i, com hem vist, el tracta en l'escoli anterior quan diu:

> «... No comparo el seu nombre, que ignorem, sinó la seva magnitud que és igual a l'espai ocupat per "totes les línies", perquè "totes les línies" són congruents amb l'espai...»

Guldin, en la seva anàlisi crítica del mètode dels indivisibles de Cavalieri,[41] negava de manera determinant l'existència de la raó entre dues col·leccions de línies amb l'argument següent:

> « . . . Entre un infinit i un altre mai no hi ha una proporció o raó.»[42]

En contestar a Guldin, Cavalieri emfasitzava que encara que una col·lecció de línies és infinita respecte al nombre de línies, és finita respecte a l'extensió (l'espai).

Més endavant, intentava fer comprensible la raó entre dues col·leccions de línies plantejant la qüestió:

> «No és obvi que dues col·leccions de línies pertanyents a dos quadrats congruents, són el doble de cadascuna de les col·leccions?»[43]

L'aproximació de Cavalieri al problema de l'espai ocupat per «totes les línies» ens porta a la qüestió de la composició del continu i al rol que els indivisibles hi fan. Cavalieri eludeix la discussió filosòfica subjacent sobre la composició del continu. Aquesta discussió era molt antiga i anava fortament lligada a la idea d'indivisible.

Què passa si un continu, com per exemple una línia segment, és dividida indefinidament? Passaria, com establia Aristòtil, que cada vegada es poden obtenir parts les quals poden tornar a ser dividides, sent aquestes del mateix tipus que el continu? O passaria, com mantenen altres, que les parts últimes indivisibles (àtoms) poden ser obtingudes? I aquestes parts tindrien les mateixes dimensions que el continu o una menys? Per exemple, si un continu és un segment rectilini, serien els indivisibles al seu torn segments rectilinis o bé serien punts? I si Aristòtil tenia raó, com és possible d'imaginar els punts d'un segment rectilini o les rectes paral·leles d'una figura plana?[44]

En una carta a Galileu, el 28 de juny de 1639 Cavalieri deia:

> «No vull pas dir que el continu està compost d'indivisibles, però mostraré que el continu no té altra proporció que la del munt (*congerie*) d'indivisibles.»[45]

En respondre a Guldin sobre la interpretació de la magnitud igual a l'espai ocupat per «totes les línies», Cavalieri torna a parlar del tema i dóna les dues possibilitats, per justificar la finitud d'aquest espai: el continu compost d'indivisibles i una contínua divisibilitat. També en l'escoli al teorema I que estem analitzant dóna les dues possbilitats quan diu:

«Escoli del Teorema I» (Cont.)

> «... El continu o bé no és res més que els seus indivisibles o bé és quelcom més. Si no és res més que els seus indivisibles, llavors sens dubte els seus agregats no poden ser comparats llevat que ho sigui l'espai o el continu. Si el continu és quelcom més, és just admetre que aquesta altra cosa roman (*giace*) entre els mateixos indivisibles. Tenim, doncs, que el continu es pot dissoldre en aquest "quelcom" que compon el continu, indefinit en nombre... Sent així no podem pas comparar els continus, o sigui els seus espais, entre si perquè el nombre dels elements que agreguem[46] seria indefinit... Però és absurd dir que continus que són limitats no són mútuament comparables, per tant és absurd dir que la col·lecció de "totes les línies", o plans, de dues figures qualssevol, no pugui ser comparada l'una amb l'altra, malgrat el fet que les coses, que són col·leccionades i que componen aquestes col·leccions, siguin indefinides en nombre. Això no és un obstacle en el continu. Llavors, tant si un continu està compost d'indivisibles com si

no, els agregats dels indivisibles són mútuament comparables i estan en proporció.»[47]

Com vèiem, Cavalieri no es vol pronuncir. A més a més, sembla que vol donar a entendre que sigui quina sigui la solució, no és obstacle per poder comparar les seves noves magnituds i construir la seva teoria.

Teorema 2. Proposició 2

«Totes les línies de figures planes iguals són iguals . . . »[48]

Cavalieri, en llatí ho expressa així:

«Aequalium planarum figurarum omnes lineae sunt aequales.»

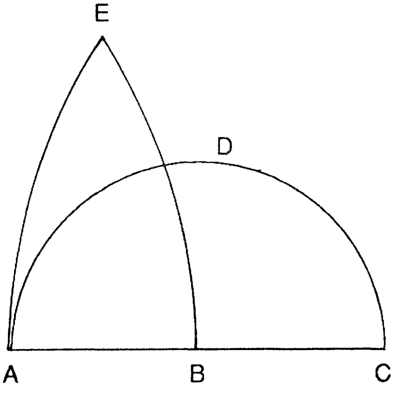
Estableix que:

$$AEB = ADE \rightarrow O_{AEB}\,(l) = O_{ADC}\,(l).$$

Què vol dir Cavalieri quan diu que dues figures són iguals? Vol dir que tenen igual àrea?

Sembla que Cavalieri, escapant als requeriments de la geometria clàssica grega, no estableix diferències entre les dues nocions: una superfície (un objecte geomètric de dues dimensions i amb una forma determinada) i un àrea (un nombre o una classe d'equivalència de figures de formes diverses, que mesura el seu contingut).

Aquest teorema 2 no seria necessari per justificar la transferència de proporcions de «totes les línies» a les figures, però Cavalieri el necessita i l'utilitza per demostrar el teorema 3 que estableix la igualtat de raons entre figures i entre «totes les línies» d'aquestes figures. A més a més, aquesta demostració, la del teorema 2, és especialment interessant perquè és on radica un dels punts febles de la base d'aquest mètode.[49]



Demostració

Figura 5[50]

Aquí la tècnica de la demostració és la comparació de figures per superposició i l'aplicació del postulat I que defineix en el llibre segon de la *Geometria* abans del teorema 1.

Postulat 1

«Totes les línies de figures planes congruents ... són congruents.»[51]

En llatí, Cavalieri ho expressa així:

«*Congruentium planarum figurarum omnes lineae ... sunt congruentes.*»

Estableix que:

$$F_1 \simeq F_2 \rightarrow O_{F_1}(1) \simeq O_{F_2}(l).$$

El significat d'aquest postulat ve explicat per Cavalieri en el capítol VII de l'*Exercitatione* IV-Contra Guldin. Quan dues figures superposables (congruents) se superposen, cada una de les línies de la primera figura, que els anomenem «totes les línies» de la primera figura (respecte a una determinada «regula»), també se superposen una a una a les línies que anomenem «totes les línies» de la segona figura que tenen com a «regula» la línia a la qual ve a superposar-se la «regula» de la primera figura. Aquesta explicació justifica com ha de ser la congruència entre les col·leccions de «totes les línies», però de fet quan utilitza aquest postulat en la demostració fa un pas més i diu: «magnituds que són congruents són iguals». I en cap moment especifica què vol dir que «totes les línies» d'una figura que són congruents a «totes les línies» de l'altra figura són iguals.

Analitzarem el seu raonament.

Sent $AEB = ADC$ (figura 5) demostrarem que $O_{AEB}(l) = O_{ADC}(l)$.

Diu Cavalieri:

«Dic que totes les línies de la figura *ADC*, amb regula *AC*, són iguals a totes les línies de la figura *AEB*, amb regula *AB*. Imaginem[52] (*intelligatur*) que la figura *AEB* és superposada a la figura *ADC*, de tal manera que les seves regules queden superposades, per exemple *AB* sobre *AC*, o que són com a mínim paral·leles. Llavors:[53] o bé tota la figura és congruent a tota la figura, o bé una part és congruent a una part.

Suposem que una part (*ADB*) és congruent a una part. Llavors (pel postulat 1) totes les línies de les parts congruents seran també congruents; és a dir, totes les línies de la part *ADB* de la figura *AEB* seran congruents a totes les línies de la part *ADB* de la figura *ADC*.

Sobreposem a més a més les parts residuals de les figures amb el següent requeriment: que totes les línies siguin sempre col·locades paral·leles a les regules *AB* i *AC*, o a la regula comú *AB*, o *AC*; i això ho fem una i altra vegada, fins que les parts residuals hagin estat superposades les unes a les altres (*et hoc semper fiat, donec omnes residuae partes ad invicem superpositae fuerint*). Llavors ja que les figures senceres són iguals, les parts superposades seran congruents. Per tant, "totes les línies" d'aquestes seran també congruents. I com que magnituds congruents són iguals les unes a les altres,[54] "totes les línies" de les parts de la figura AEB, preses juntes, o sigui "totes les línies" de la figura AEB, seran iguals a . . . "totes les línies" de la figura ADC.»[55]

Per tant, en ser congruents, «totes les línies» seran iguals, que és el que Cavalieri volia demostrar.

La part problemàtica de la prova és la frase «fins que les parts residuals hagin estat situades les unes sobre les altres», ja que el procés pot esdevenir infinit. Per exemple, en el cas d'un triangle i un semicercle, introduiria sumes infinites en la demostració de Cavalieri, la qual cosa va contra l'esperit del seu mètode.

En la *Geometria indivisibilium*, Cavalieri no va fer cap esment sobre aquest procés infinit, però més tard en una carta a Torricelli, el 10 de març de 1643 fa el comentari següent:

> «Hom pot dubtar si això (l'operació de superposició) ha arribat alguna vegada al seu terme, ja que a través de la superposició mútua hom no sap si en les figures les parts que trobem són congruents a la meitat de la figura, o a més de la meitat (perquè llavors seria cert que com a mínim hom pot arribar a un residu que és més petit que qualsevol quantitat donada) i això podria generar dubtes.»

I afageix:

> «Crec també que puc donar en aquesta proposició una demostració similar a les d'Arquimedes, a través de circumscripcions i inscripcions de sòlids, per a aquells sòlids que presenten algunes regularitats; però trobar una demostració diferent de la que he donat per a tots els sòlids, considero que és d'una gran dificultat.»[56]

També a *Exercitationes* fa un raonament semblant.[57]

Teorema 3. Proposició 3

> «Figures planes tenen entre si la mateixa raó que tenen totes les seves línies . . .»[58]

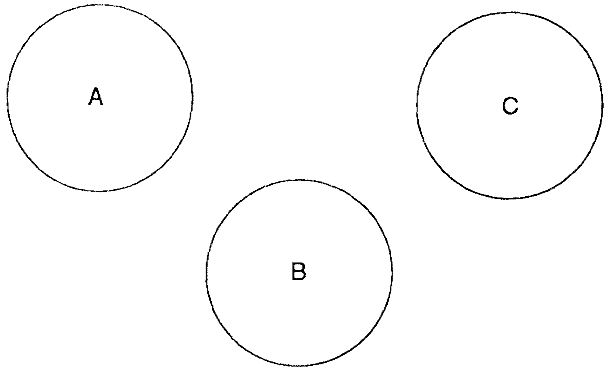
Cavalieri, en llatí, ho expressa així:

> *«Figurae plane habent inter se eadem rationem, quam eorum omnes lineae . . »*

Estableix que:A :

$$D = O_A(l) : O_D(l)$$

$$A : D = O_A(1) : O_D(1)$$



Demostració

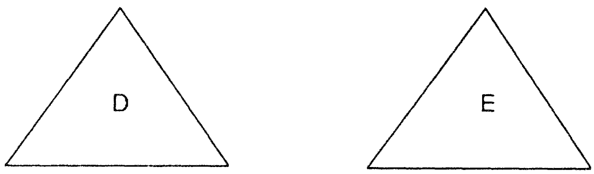


Figura 6[59]

Cavalieri ha de provar (d'acord amb la definició V dels *Elements*) que

$$\underbrace{F_1 + F_1 + \ldots + F_1}_{n \text{ vegades}} > \underbrace{F_2 + F_2 + \ldots + F_2}_{m \text{ vegades}}$$

implica que

$$\underbrace{O_{F_1}(l) + O_{F_1}(l) + \ldots + O_{F_1}(l)}_{n \text{ vegades}} > \underbrace{O_{F_2}(l) + O_{F_2}(l) + \ldots + O_{F_2}(l)}_{m \text{ vegades}}$$

i anàlogament per = i <. Considera dues figures planes *A* i *D* (figura 6). Vol demostrar que la figura *A* és a la figura *D* com «totes les línies» de la figura *A* és a «totes les línies» de la figura *D*. Per això considera dues figures *B* i *C* iguals a *A* i una figura *E* igual a *D*. Aplicant el teorema 2, en ser iguals les figures, «totes les línies» de cada una de les figures *A*, *B* i *C* seran iguals a «totes les línes» de la figura *A* i «totes les línies» de cada una de les figures *D* i *E* seran iguals a «totes les línies» de la figura *D*. Per tant, la unió de totes les figures *A*, *B*, *C* és múltiple de la figura *A*, com la unió[60] de «totes les línies» de les figures *A*, *B*, *C* és múltiple de «totes les línies» de la figura A. El mateix passa amb la unió de les figures *D*, *E* i la figura *D*. Per tant, si un múltiple de la unió de les figures *A*, *B*, *C*, superarà el múltiple de la unió de les figures *D*, *E*, el múltiple corresponent de la unió de «totes les línies» de les figures *A*, *B*. *C* superarà el múltiple de la unió de «totes les línies» de les figures *D*, *E*, *I*, si els múltiples fossin iguals, iguals i si fossin més petits, més petits. Per tant, conclou que si passa amb la unió, també passa amb una de les figures. Després ho demostra per les figures sòlides

«En el corol·lari d'aquest teorema Cavalieri diu explícitament que aquest és el fonament del seu mètode:

> «D'això (de les tres proposicions i les seves demostracions), se'n dedueix de manera evident que, per trobar quina proporció hi ha entre dues figures planes o dos sòlids serà suficient trobar quina és la proporció que hi ha entre "totes les línies", en el cas de les figures planes, i, entre "tots els plans", en el cas dels sòlids, presos respecte a un referent donat ("regula"). I això ho poso com a màxim fonament d'aquesta meva nova geometria.»[61]

Aquests resultats del teorema 3 i les seves generalitzacions són realment la idea central de la teoria de Cavalieri: transforma el càlcul d'una raó entre dues àrees en el càlcul d'una raó entre dues col·leccions de línies. Podríem dir que és la versió col·lectiva del *principi de Cavalieri*.[62] Cavalieri ho explica al començament del llibre *Exercitationes Geometricae Sex* (Bolonya, 1647), que correspon als 5 primers nombres de l'*Exercitatione* primera:

> «A la nova geometria dels indivisibles faig servir aquests mateixos indivisibles com un instrument singular per procurar-me la mesura de les figures, ja siguin planes o sòlides. Amb aquesta finalitat havia establert, doncs, una doble via. Exposo la primera en els meus primers sis llibres de la *Geometria* mentre que el llibre VII conté la segona.»

I més endavant continua Cavalieri:

> «D'acord amb el primer procediment opera el mètode anterior que confronta recíprocament agregats de "totes les cordes" de les figures planes y agregats de "totes les seccions planes" de les figures sòlides, tants com n'hi hagi.»[63]

I continua en el núm. 7 de l'*Exercitatione* primera:

> «... Així, en general, qualsevol proporció que hi hagi entre "totes les línies" (d'una figura) i "totes les línies" (d'una altra figura), serà la mateixa proporció que hi haurà entre aquestes mateixes figures.»[64]

Mereix un comentari especial el fet que Cavalieri expliqui que l'objectiu dels seus mètodes sigui mesurar les àrees, perquè aquesta proporció entre els agregats que es transfereix a les figures es podria entendre com la mesura de l'àrea d'una figura respecte a l'altra. Com fa notar Lombardo-Radice,[65] Cavalieri intenta definir l'àrea d'una figura encara que no utilitzi la paraula definició i en digui teorema.

A l'hora d'aplicar aquests resultats, l'eina més utilitzada és el corol·lari del teorema 4 que anomenaré principi de «*com un . . . tots*». Encara que la paraula corol·lari en aquest cas té un sentit poc usual, ja que aquest principi no és una conseqüència del teorema 4 sinó que s'utilitza en la demostració.

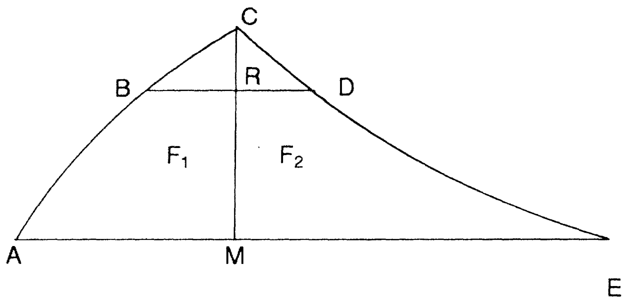
Teorema 4. Proposició 4

«Si dues figures planes . . . són col·locades a la mateixa altura; si havent traçat a les figures planes rectes qualssevol . . ., es trobés que els trossos de les línies traçades, inclosos a les figures planes, són magnituds proporcionals, existint-hi sempre les (línies) corresponents, llavors les figures seran entre elles, com un qualsevol dels antecedents és al seu conseqüent o sigui al seu corresponent a l'altra figura.»[66]

Cavalieri en llatí ho expresa així:

«*Si due figurae planae ..., in eadem altitudine fuerint consritutae, ductis autem in planis rectis lineis ..., repertum fuerit ductarum linearum portionis figuris planis interceptas, esse magnitudes proportionales homologis in eadem figura semper existentibus, dictae figurae erunt inter se, vt unum quodlibet eorum antecedentium, ad suum consequens in alia figura eidem correspondens.*»

Estableix que, si $BR : RD = AM : ME$, llavors $ACM : MEC = AM : ME$.



Demostració.

Figura 7[68]

Si dues figures planes $F_1 = ACM$ i $F_2 = MCE$ col·locades a la mateixa altura, tenen la propietat que per a cada línia BD paral·lela a la base AE, les seccions BR i RD en F_1 i F_2 i les seccions AM i ME en F_1 i F_2 satisfan que BR és a RD com AM és a ME,[68] aleshores la figura CAM és a la figura CME com AM és a ME, o bé com BR és a RD (figura 7). Llavors diu Cavalieri:

«Dir que *AM* és a *ME*, és el mateix que dir com un dels antecedents és a un dels conseqüents, tots els antecedents, que són precisament "totes les línies" de la figura *CAM*..., seran a tots els conseqüents, o sigui a "totes les línies" de la figra *CME*...»[69]

Conclou ràpidament la demostració utilitzant el teorema 3 de transferència de proporcions. El mateix fa per a les figures sòlides.

El punt crucial d'aquesta demostració és el que he anomenat principi de «*com un... tots*». Què volen dir aquests «tots els antecedents» i aquests «tots els conseqüents»? Cavalieri està utilitzant l'expressió «*ut unum ad unum, sic omnia ad omnia*» presa directament de la teoria de proporcions. Però en la teoria de proporcions «tots» equival a «la suma de», cosa que voldria dir que «totes les línies» equivalen a la suma de totes elles. Aquesta és la principal font d'ambigüitat de Cavalieri. Sembla que Cavalieri no s'adoni que el teorema 4 depèn essencialment d'acceptar la suma de «totes les línies». D'altra banda, si Cavalieri acceptés la suma, no podria admetre que són magnituds, ja que la suma de línies no pot donar superfícies. Cavalieri tampoc no pot acceptar la idea d'utilitzar infinitesimals donant a les línies una àrea infinitament petita que li permetés sumarles. De fet Cavalieri utilitza línies en nombre infinit sense esmentar mai la suma de «totes les línies», ni parlar de cap contradicció. Aquesta idea queda reflectida en el llibre *Exercitationes* quan fa el comentari següent:

«En els dos mètodes per al mesurament de les figures planes faig servir cordes paral·leles a una recta prefixada (que n'hi dic "regula"), pensades en nombre infinit a les mateixes figures, i limitades per dues d'aquestes que per parts oposades toquen la figura, i que en la definicio I-B del llibre I en vinc a dir tangents oposades d'aquestes... D'aquí és evident que nosaltres hem de pensar la figura plana com una roba teixida amb molts fils paral·lels; els sòlids com si fossin llibres compostos de full paral·lels. En veritat, doncs, mentre els fils en la roba, i els fulls en els llibres, són sempre en nombre finit i tenen efectivament un cert gossor, en els meus dos mètodes per contra s'ha de suposar que, les cordes en les figures planes, les seccions planes en els sòlids, han de ser en nombre infinit, i com privats de qualsevol espessor.»[70]

Aplicacions del mètode

Per entendre millor com Cavalieri utilitzava aquest agregat de línies i plans per trobar les quadratures, veurem dos exemples del llibre segon de *Geometria*.

1. El primer és el corresponent al teorema 19 del llibre segon. Diu aixi:

«Si una diagonal és dibuixada en un paral·lelogram, el paral·lelogram és el doble de cada un dels triangles determinants per la diagonal.»[71]

Cavalieri, en llatí, ho expressa així:

«*Si in parallelogrammo diameter ducta fuerit, parallelogrammum duplum est cuiusvis triangulorum per ipsam diametrum constitutorum.*»

Això correspon al resultat actual de:

$$\int_0^a t\,dt = 1/2\,a^2.$$

Sent *ACFD* un paral·lelogram i *CF* una de les diagonals (figura 7),[72] el teorema 19 estableix que:

$$ACDF = 2\,\Delta\,ACF = 2\,\Delta\,FCD$$

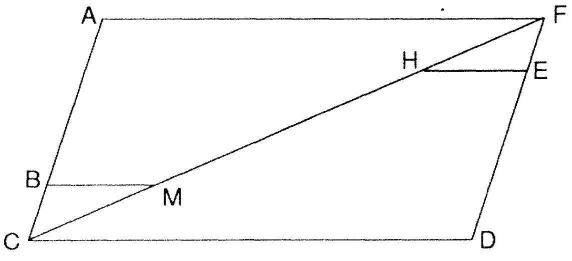


Figura 7

Cavalieri per provar això considerava un parell arbitrari de línies segments corresponents *BM* i *HE* en $O_{FAC}(l)_{CD}$ i $O_{CFD}(l)_{CD}$ respectivament; *BM* i *HE* són corresponents a les divisions iguals fetes sobre *AC* i *FD* respectivament, en aquest cas a *BC* i *FE*. Considera els triangles així formats *BCM* i *HEF* i, utilitzant el teorema 26 del llibre I dels *Elements*, Cavalieri conclou que:

$$\Delta\,BCM = \Delta\,HEF$$

i d'aquí $BM = HE$.

Com que això és vàlid per a totes les línies segments corresponents en $O_{FAC}(l)$ i $O_{CFD}(l)$, Cavalieri dedueix que:

$$O_{\Delta FAC}(l) = O_{\Delta CFD}(l)$$

La relació anterior juntament amb el teorema 3 implica que:

$$\Delta\,ACF = \Delta\,FCD$$

Per tant, la unió dels dos triangles *ACF*, *FCD*, o sigui el paral·lelogram *ACDF*, serà el doble d'un qualsevol dels triangles ACF, FCD, on queda vist el resultat que volíem demostrar.

2. El segon exemple és la demostració geomètrica de l'equivalent actual: integració de t^2; Cavalieri ho fa en el teorema 24 que diu així:

«Sigui un paral·lelogram en el qual és dibuixada una diagonal; llavors "tots els quadrats" del paral·lelogram seran el triple de "tots els quadrats" de cadascun dels triangles determinats per la diagonal, quan un dels costats del paral·lelogram és pres com a "regula".»[73]

Cavalieri, en llatí, ho expressa així:

«Exposito parallelogrammo quocunque in eoque ducta diametro; omnia quadrata parallelogrammi ad omnia quadrata cuiusvis triangulorum per dictam diametrum constitutorum erunt in ratione tripla, uno laterum parallelogrammi communi regula existente.»

Per fer aquesta demostració necessita tres resultats: el teorema 11,[74] el teorema 22[75] i el teorema 23,[76] tots del llibre segon.

a) Teorema 11

Estableix que quan P_1 i P_2 són dos paral·lelograms amb altures h_1 i h_2 i bases b_1 i b_2 (figura 8),[77] llavors

$$O_{P_1}(\square\ l) : O_{P_2}(\square\ l) = (\square\ b_1 : \square\ b_2) \cdot (h_1 : h_2) \text{ (a)}$$

sent la «regula» paral·lela a les bases.

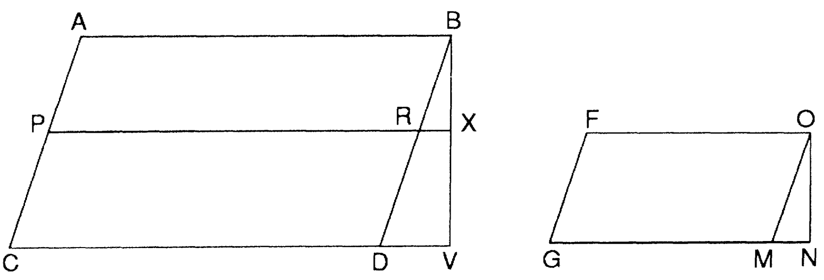


Figura 8

Cavalieri explica així la demostració:

«Siguin AD, FM, paral·lelograms qualsevol, en els quals les "regules" corresponents són CD i GM respectivament. Dic que "tots els quadrats" de AD estan respecta a "tots els quadats" de FM en la raó composta de la del quadrat de CD al quadrat de GM i de la que té l'altura BV a l'altura ON,... Es marca a BV, la XV igual a ON, i es traça per X la XP paral·lela a CD, secant la BD a R. Llavors el paral·lelogram PD estarà sobre la mateixa base que el paral·lelogram AD, però a més a més tindrà la mateixa altura que el paral·lelogram FM; per tant, "tots els quadrats" del paral·lelogram AD (respecte) a "tots els quadrats" de FM estan en la raó composta de la que estan "tots els quadrats" de AD a "tots els quadrats" de DP (això és de la de BV a VX, o bé ON,...), i de la que tenen "tots els quadrats" de DP a "tots els quadrats" de FM, això és de la que té el quadrat CD al quadrat GM.»

Per tant, Cavalieri conclou que és veritat el que volia demostrar. En l'últim pas fa servir el principi de «*com un... tots*».

b) Teorema 22

Estableix que si D_1 i D_2 són dos triangles determinants per diagonals en els paral·lelograms P_1 i P_2, respectivament, llavors

$$O_{P_1}(\square\, l) : O_{\Delta_1}(\square\, l) = O_{P_2}(\square\, l) : O_{\Delta_2}(\square\, l)$$

la qual cosa vol dir que la raó entre la col·lecció de quadrats d'un paral·lelogram i la col·lecció de quadrats d'un triangle determinat per la diagonal és constant. Per fer aquesta demostració utilitza el resultat obtingut en el teorema 11. Per primera i única vegada en tot el llibre Cavalieri no utilitza una demostració directa, sinó que estableix el resultat mitjançant el mètode de reducció a l'absurd. Quan escriu *Exercitationes* ho comenta i fa la demostració directa.

c) Teorema 23

Introdueix uan eina, la qualpodria ser anomenada generalització del prinicpi de «*com un... tots*».

Considera una figura 9[78] i imagina que, per cada $l = BD$ en $O_{ABCD}(l)$, hi ha la mateixa relació entre les parts BE, EF i FD en què és dividida BD per les corbes AC i AI.

$$BF + FD = 2(BE + EF)$$
$$\square BF + \square FD = 2(\square BE + \square EF).^{79}$$

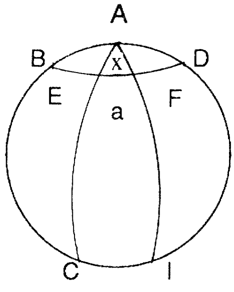


Figura 9

Per exemple, en el cas on la corba AC divideix en dues parts iguals tots els BD o sigui que $BE = ED$, tenim d'acord amb el teorema 9 del llibre II dels *Elements* que:

$$\square BF + \square\ FD = 2(\square\ BE + \square\ EF)$$

per a tots els BD.

La generalització del principi de «*com un... tots*» pot ser aplicada a la relació anterior, resultant.

Teorema 24. Per demostrar-lo necessitarem tots els resultats anteriors.

Sigui $ACGE$ un paral·lelogram i CGE el triangle que resulta en dividir el paral·lelogram per la diagonal (Figura 10).[80] Llavors hem de provar que:

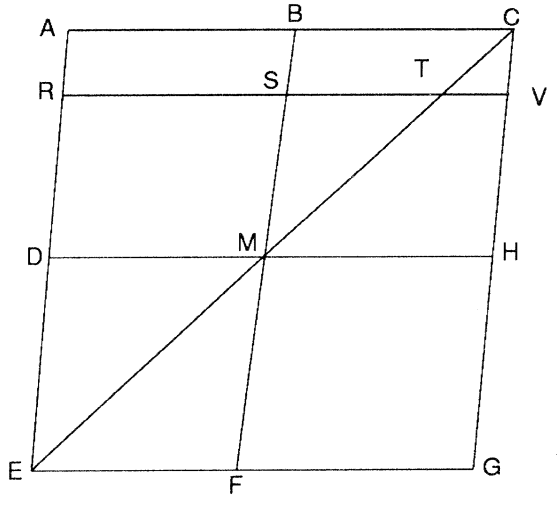


Figura 10

Cavalieri va dibuixar la línia *BF* dividint el paral·lelogram en dues parts iguals en el qual les línies *BF* i *CE* fan el mateix rol que feien les corbes en el generalitzat principi de «*com un... tots*».[81] Quan *RV* és una línia arbitrària paral·lela a *EG*, tallant *BF* en *S* i *EC* en *T*, es verifica una relació anàloga a la que hem vist abans en la nomenclatura següent:

$$\square\, RT + \square\, TV = 2\,\square\, RS + 2\,\square\, ST$$
$$RT^2 + TV^2 = 2(RS^2 + ST^2)$$

Per tot això Cavalieri, sent *M* el punt mitjà del paral·lelogram, conclou el resultat següent:

$$O_{ACE}(\square\, l) + O_{CEG}(\square\, l) = 2\, O_{ABFE}(\square\, l) + 2(O_{BCM}(\square\, l) + O_{MEF}(\square\, l))$$

Utilitzant el resultat «figures congruents tenen igual col·lecció de quadrats», *CA*valieri redueix aquesta igualtat a

$$O_{CEG}(\square\, l) = O_{ABFE}(\square\, l) + 2\, O_{MEF}(\square\, l)$$

ja que

$$2\, O_{CEG}(\square\, l) = 2\, O_{ABFE}(\square\, l) + 4\, O_{MEF}(\square\, l)$$

Una combinació dels resultats dels teoremes 11 i 22 ens porta a[82]

$$O_{CEF}(\square\, l) : O_{MEF}(\square\, l) = (\square EG : \square\, EF).(CG : MF) = 8 : 1$$

Més endavant el teorema 11 implica que:

$$O_{ACGE}(\square\, l) : O_{ABFE}(\square\, l) = \square EG : \square EF = 4 : 1$$

Les relacions anteriors ens porten al teorema 24. Aquest resultat té com a conseqüència immediata que una piràmide amb base quadrada és un terç del corresponent prisma.

1. $CEG = ABFE + 2\,MEF$
2. $CEG : MEF = 8$
3. $ACGE : ABFE = 4$

$ACGE \stackrel{3}{=} 4\, ABFE \stackrel{1}{=} 4(CEG - 2\, MEF) = 4CEG - 8\, MEF \stackrel{2}{=} 4CEG - CEG = 3CEG.$
o sigui: $ACGE = 3CEG.$

$$OA_{CGE}(\square\, l) = 3\ O_{CEG}(\square\, l)$$

Això correspon al resultat actual de: $\int_0^a t^2\, dt = 1/3\, a^3$.

Conclusions

Els estudiosos de Cavalieri, Koyré, Andersen, Giusti, etc. coincideixen a resaltar l'obscuritat dels seus textos. Es fa difícil de llegir i encara més difícil de comprendre. En elaborar el concepte de «totes les línies», el propòsit de Cavalieri era indubtablement clarificar, però probablement va tenir l'efecte de crear més confusió que claredat.

Cavalieri creia que un fonament sòlid podia ser obtingut solament seguint la tradició grega de no utilitzar infinitesimals ni processos infinits en les proves. D'aquí que havia suprimit totes les idees intuïtives sobre com una figura plana és composta i sobre quin paper feien "totes les línies" en la composició.

Com entenira Cavalieri els indivisibles?

En cap part del seu llibre explicava què entenia per la paraula indivisible que utilitzava per caracteritzar els elements emprats en el seu mètode. En parlava de la mateixa manera que ho feia Galileu en referir-se a les línies paral·leles representant velocitats. El terme tècnic utilitzat per Cavalieri era «totes les línies de la figura» o «tots els plans del sòlid». Cavalieri mai no declara que la figura *ABC* i «totes les línies de la figura *ABC*» són una mateixa cosa. El lligam entre «totes les línies» i la figura és un lligam indirecte. L'objectiu és comparar dues figures gràcies a una comparació entre les línies o els plans tallats sobre aquestes figures per un pla paral·lel a una «regula» fixada. Cavalieri no va fer com Kepler. Aquest en el seu mètode identificava purament i simple una corba amb la suma de rectes infinitament curtes i la seva àrea amb la suma de rectangles infinitament nombrosos i infinitament petits. A la noció kepleriana d'allò que és infinitament petit, element constituent d'un objecte geomètric que té, malgrat ser infinitament petit, tantes dimensions com l'objecte en qüestió, oposa la de l'indivisible que no és allò infinitament petit i que té una dimensió menys que l'objecte estudiat.

La trajectòria del pensament cavalierià és analítica i no sintètica: ell no parteix del punt, de la línia, del pla per trobar, mitjançant una suma impossible, la línia, el pla, el cos. Al contrari, parteix del cos, del pla, de la línia, per trobar-hi, com elements determinants i fins i tot constitutius, però no components, el pla, la línia i el punt. A més a més, no arriba a aquests elements mitjançant un procés de pas al límit, és a dir, comprimint el cos fins a fer-lo infinitament pla i prement el pla fins a fer-lo infinitament curt; al contrari, troba aquests elements indivisibles tallant els objectes geomètrics en qüestió mitjançant un pla o una recta.

Efectivament, l'ús dels indivisibles en lloc «d'allò infinitament petit» està destinat en la intenció de Cavalieri a alliberar-nos de les dificultats o, més exactament, de les impossibilitats lògiques «d'allò infinitament petit». En el mètode de Cavalieri no hi havia cap procés d'aproximació contínua, ni tampoc cap omissió de termes, ja que el que utilitzava era una estricta correspondència biunívoca entre els elements de les dues configuracions. No menysprea mai cap element sigui quina sigui la seva dimensió.

Per a Cavalieri, tal como deia en la introducció a *Exercitationes,* la funció de «totes les línies» era, sobretot, constituir una eina per les quadratures i, per tant, el seu tractament matemàtic era independent de qualsevol concepció del continu. Cavalieri, sense ser capaç de precisar ni el significat de «totes les línies», ni què cal entendre per raó entre «totes les línies», va ser capaç d'inventar un mètode molt fructuós que resolia problemes nous i clàssics amb resultats que concordaven amb els ja coneguts per altres vies: Euclides, Arquimedes i altres.

Bibliografia

KIRSTI ANDERSEN, 1984/85: «Cavalieri's Method of Indivisibles», AHES, 31, pp. 291-367.

MARGARET E. BARON, 1987: *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Dover, New York, primera edició 1969.

Carl B. Boyer, 1986: *Historia de la matemática*, Alianza Universidad, Madrid.

ETTORE CARRUCCIO, 1971: «Cavalieri», *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C.C. Gillispie), New York, Vol. 3, pp. 149-153.

GUIDO CASTELNUOVO, 1962: *Le origini del Calcolo infinitesimale nell' era moderna*, Fetrinelli, Milano, primera edició, Zanichelli, Bologna 1938.

BONAVENTURA CAVALIERI, 1635: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna, segona edició Bologna 1653.

G. CELLINI, 1966: «Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri», *Periodico di Matematiche*, 4ta ser., 44, pp. 1-21.

G. CELLINI, 1966: «Le dimostrazioni di Cavalieri del suo principio», *Periodico di matematiche*, 4ta ser., 44, pp. 85-105.

FRANÇOIS DE GRANDT, 1987: «Les indivisibles de Torricelli», *L'Oeuvre de Torricelli: Science Galiléenne et nouvelle géométrice*, Nice, pp. 147-206.

FRANÇOIS DE GANDT, 1991: «Cavalieri's Indivisibles and Euclid's Canons», *Studies in Philosophy and the History of Philosophy*, Volum 24, The Catholic University of America Press, Washington, D. C., pp. 157-182.

E. J. DIJSTERHUIS, 1987: *Archimedes*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

CH, JR, EDWARDS, 1979, *The Historical Development of the Calculus*, Springer-Verlag, New York, Cap. 4.

ENRICO GIUSTI, 1980: *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles*, Edizioni Cremonese, Bologna.

SIR THOMAS HEATH, 1981: *A History of Greek Mathematics*, Dover, New York, primera edició 1921.

JOHANNES KEPLER, 1960: *Nova stereometria doliorum vinariorum*, Linz, 1615, pp. 8-133, Gesammelte Werke (22 volums), Volum 9 Mathematische Schriften. Editorial C.H. Beck'sche. Editat per Franz Hammer. München.

A. KOYRE, 1977: «Cavalieri y la geometria de los contínuos», *Estudios de Historia del pensamiento científico*, Siglo XXI, Madrid.

LUCIO LOMBARDO-RADICE, 1966: *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*, Torino. Aquest llibre conté una traducció italiana amb moltes notes, del li-

bre *Geometria indivisibilium* i *Exercitationes*, llibre III. També conté la traducció de les cartes de Cavalieri a Galileo des de 1621 a 1639.
ANTONI MALET, 1989: «Studies on James Gregorie (1638-1675)», Ph. D. Diss., Princeton University, Cap. 4, pp. 216-283.
EVELYN WALKER, 1932: *A Study of the Traité des indivisibles of Gilles Persone de Roberval*, New York, Columbia Univ., pp. 1-9, 33-71, 124-141 i 169-189.
D. T. WHITESIDE, 1960-62: «Patterns of mathematical thought in the later 17th century.», *Arch. Hist. Exact. Sci.*, 1, Cabridge, pp. 179-388.

NOTES

1. En aquestes pàgines s'analitza solament el primer mètode. En un futur treball s'analitzarà anàlogament el segon mètode.

2. Paulo Guldin (1577-1643), matemàtic italià. La seva obra més important fou: *Centrobaryca seu de centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae*, (Viena, 1635-1641). Aquesta obra està composta de quatre volums. En el quart volum Guldin critica Kepler durament per la seva falta de rigor en l'ús dels infinitesimals, acusa Cavalieri dient que havia copiat el mètode de Kepler i, a més a més, ataca els fonaments del mètode de Cavalieri.

3. *Geometria indivisibilium*. La traducció italiana a càrrec de Lombardo-Radice també inclou l'*Ecercitatione* tercera i correspon a l'apèndix segon. Pàg. 771.

4. *The origins of the Infinitesimal Calculus*. Baron. Pàg. 35.

5. Aquest valor de B ha estat determinat d'antuvi per mètodes mecànics i força intuïció. Per tant, no es calcula directament sinó que sabent el seu valor es demostra que A és igual a ell. Aquesta manera de fer és característica de la matemàtica grega que es preocupa més de la demostració rigorosa que del càlcul per mètodes heurístics.

6. Vegeu, per exemple «The quadrature of the parabola», a *A History of Greek Mathematics* (volum I), Sir Thomas Heath (Oxford, 1921), pàg. 90-91.

7. *Geometria indibisibilium*. Traducció italiana de Lombardo-Radice. Pàg. 652. Les traduccions al català són de l'autora i intenten respectar el pensament de Cavalieri.

8. *Opere*. Torricelli. Vol. I, part I, pàg. 139. Traducció del llatí d'E. Carruccio. El text i aquesta referència es troben en l'article de De Gandt: «Les indivisibles de Torricelli» que es troba en el llibre: *L'Oeuvre de Torricelli: Science Galiléenne et nouvelle géométrie* (Nice, 1987).

9. *Opere*. Torricelli. Vol. I, part I, pàg. 160-161. Text i referència en el llibre de De Gandt, pàg. 157.

10. La *Nova Stereometria Doliorum vinariorum* va ser publicada per Giovanni Keplero a Linz el 1615. El motiu d'aquest llibre va ser comprovar si la mesura de la bóta de vi que utilitzaven els venedors era correcta.

11. Ambdós antecedents de Cavalieri mantenen les parts d'un continu de la mateixa dimensió que tot el continu, cosa que no succeeix a Cavalieri.

12. *Stereometria Doliorum* Johannes Kepler. Gesammelte Werke. Teorema II. Pàg. 15.

13. Aquesta figura es troba en el llibre de Kepler. Teorema II. Pàg 15. *Stereometria Doliorum*.

14. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 52.

15. Distingirem elements infinitesimals d'infinitèsims i indivisibles. Els elements infinitesimals els considerem de la mateixa dimensió que el continu.

16. He utilitzat el text de Kirsti Andersen: «Cavalieri's Method of Indivisibles», AHES, 31, 1984/85, pàg. 299-300.

17. Malgrat que Euclides dóna el concepte com una definició, en general s'està d'acord a pensar que, per a la seva geometria, totes les magnituds de la mateixa espècie tenien raó. Tanmateix Proclus, gairebé cinc segles després, menciona el cas d'angles rectilinis i curvilinis que no estan en proporció.

18. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 665.

19. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 191.

20. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 652.

21. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 192.

22. Utilitzem la mateixa nomenclatura que K. Andersen. «Cavalieri's Method of Indivisibles», AHES, 31, 1984/85, pàg. 291-367.

23. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 201.

24. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 208.

25. Cavalieri, com veurem, arriba a establir la raó entre figures planes a través d'un ens intermedi «totes les línies» i la raó entre «totes les línies»a través de la raó entre línies.

26. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 209.

27. *Exercitationes Geometricae Sex*, B. Cavalieri, Bologna 1647, pàg. 3-4. Referència i text de l'article «Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri» de G. Cellini que es troba en la revista *Periodico di Matematiche,* 4ta ser, 44, 1966, pàg. 1-21.

28. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 201.

29. Aquest múltiple el podríem pensar com el màxim dels que multipliquen cada línia. Aquest nombre pot esdevenir infinit en algun cas però Cavalieri no se n'adona i si ho fa no diu res.

30. La figura de l'esquerra és la mateixa que es troba en l'original, la de la dreta és per entendre millor la demostració. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 202.

31. De Gandt, «Cavalieri's Indivisibles and Euclid's Canons», article del volum 24 de la revista *Studies in Philosophy and the History of Philosophy.* Washington, D.C. 1991.

32. Aquestes nocions són les que hem enunciat dins l'apartat: «Influència dels grecs».

33. «Appendice prima. La discussione con Galileo.» Pàg. 723-770, dins de la traducció italiana de Lombardo-Radice. Pàg. 727.

34. Aquest text es troba en una nota a peu de pàgina en la traducció italiana de Lombardo-Radice de *Geometria.* Pàg. 728.

35. Per a més referències sobre l'infinit absoult i relatiu dins l'obra de Cavalieri, llegiu l'article: «Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri» *Periodico di Matematiche,* 4ta ser, 44, 1966, pàg. 1-21. També dins la traducció italiana de *Geometria* de Lombardo-Radice. Pàg. 25.

36. «Appendice seconda. La polemica con Guldino». Pàg. 771-860, dins de la traducció italiana de Lombardo-Radice. Pàg. 785.

37. «Appendice prima.» Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 731.

38. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 205

39. Les paraules de Cavalieri són semblants a les que va utilitzar Leibniz per defensar els seus diferencials. Es troben en una carta de Leibniz a Varignon del desembre de 1701. *Journal des Savans de l'année 1702.*

40. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 49.

41. *Centrobaryca.* Paulo Guldino. 1641.

42. «Appendice Seconda». Correspon a la «Sezione XXII» de *Centrobaryca,* pàg. 341. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 812.

43. «Appendice seconda. Capitolo VIII». Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 814.

44. Posició atomística: un continu està compost dels seus indivisibles (àtoms) i la suma dels seus indivisibles. Posició antiatomística: un continu no és la suma dels seus indivisibles. Es poden sumar tants punts com vulguin però mai s'obtindrà un segment. Posició semiatomística: un continu és generat pel moviment d'un indivisible seu, l'indivisible, movent-se deixa com a traç del seu pas la infinitat dels indivisibles existents en el continu. Lombardo-Radice defensa que Cavalieri té aquesta posició. Més referències a la traducció italiana de Lombardo-Radice. Pàg. 187.

45. «Appendice prima». Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 767.

46. Les paraules agregats i agregar han de ser enteses en el sentit modern conjuntístic.

47. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 205-206.

48. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 208.

49. E. Giusti en el seu llibre *Bonaventura Cavalieri and the theory of Indivisibles.* Edizioni Cremonese. Bologna 1980, pàg. 237 anomena la demostració «rather weak».

50. Aquesta figura es troba a la pàgina 208 de la traducció italiana de Lombardo-Radice de *Geometria.*

51. *Geometria.* Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 200.

52. En aquest «imaginem» rau la clau de la demostració, ja que encara que les figures siguin iguals no està clar que es puguin superposar.

53. O sigui dues figures iguals que es poden superposar o bé són congruents entre elles o bé una part és congruent a una part.

54. Euclides, *Elements* llibre I, Axioma 7.

55. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 208.

56. Text i referència a la pàg. 179 de l'article: «Cavalieri's Indivisibles and Euclid's Canons.» *Studies in Philosophy and the History of Philosophy*, volum 24, Washington D. C., 1991, pàg. 157-182.

57. «Appendice Seconda». Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 821.

58. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 209.

59. Aquestes figures es troben en *Geometria*. Traducció italiana de Lombardo-Radice. Pàg. 210.

60. Aquesta unió de «totes les línies» de les figures com un múltiple de «totes les línies» d'una altra figura queda justificada pel teorema 1.

61. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 211.

62. Com fa notar Lombardo-Radice en una nota a peu de pàgina se sol identificar el *Principi de Cavalieri* amb un altre enunciat que correspondria més al teorema 4. Però com Cellini i Lombardo fan notar s'ha de tenir en compte el que diu Cavalieri en les seves explicacions a *Exercitationes*.

63. Bonaventura Cavalieri, *Exercitationes Geometricae Sex*, Bologna 1647, núm. 1-2-3-4-5, pàg. 3-4-5. Referència i text a: «Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri», *Periodico di Matematiche*, 4ta ser, 44, 1966, pàg. 2-3.

64. Text i referència en la nota a peu de pàgina de la traducció italiana de Lombardo-Radice. Pàg. 784.

65. *Geometria*. Nota a peu de pàgina. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 212.

66. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 212.

67. Figura del llibre *Geometria*. En la traducció italiana de Lombardo-Radice es troba a la pàg. 212.

68. K. Andersen fa notar que aquesta igualtat implicaria que les corbes ABC i CDE tenen similar curvatura en aquests punts «Cavalieri's Method of Indivisibles» (1984), pàg. 316.

69. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 213.

70. B. Cavalieri, *Exercitationes Geometricae Sex*, Bologna, 1647, núm. 1-2-3-4-5, pàg. 3-4. Referència i text a l'article: «Gli indivisible nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri», *Periodico di Matematiche*, 4ta sèrie, 44, 1966, pàg. 2.

71. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 250.

72. La figura es troba a la pàg. 251 del llibre *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice.

73. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 265.

74. *Geometria*. Traducció italiana Lombardo-Radice. Pàg. 221.

75. *Ídem*, pàg. 255.

76. *Ídem*, pàg. 262.

77. La figura es troba en el llibre *Geometria*, traducció italiana Lombardo-Radice, pàg. 222.

78. La figura es troba a la pàg. 262 del llibre *Geometria*, traducció italiana Lombardo-Radice.

79. Per entendre el que fa Cavalieri ho posaré amb notació actual. Anomenarem $BE = a = ED$ i $EF = x$. Llavors $BF = a + x$ i $FD = a - x$. Per tant:

$$(a+x)^2 + (a-x)^2 = 2(a^2 + x^2).$$

80. La figura es troba en el llibre *Geometria*, traducció italiana Lombardo-Radice, pàg. 266.

81. Aquí Cavalieri comenta que encara que la línia DH no sigui dividida en parts desiguals per les línies BF i CE es verifica el resultat del teorema 23.

$$(\square DM + \square MH = 2(\square DM + \square 0)$$

82. Igual que abans, utilitzant notació moderna seria: EF = a, EG = 2a, MF = b, CG = 2b, llavors

$$((2a)^2 : a^2) \cdot ((2b) : b) = 8a^2b : a^2b = 8 : 1$$

I aplicant el teorema 11:

$$(2a)^2 : a^2 = 4a^2 : a^2 = 4 : 1$$