El lloc II-5 d'Apol·loni:

un altre exemple de la influència de la *Synogagé* de Pappos en les matemàtiques del segle XVII

Eduard Recasens

Introducció

La geometria grega assoleix un dels seus cims en la figura d'Apol·loni, que visqué entre la segona meitat del segle III a. de C. i la primera meitat del segle següent. Malauradament, de tota la seva obra, només han sobreviscut els set primers llibres dels vuit que formaven les *Còniques* i una versió àrab de *La Secció segons una raó*. Tota la informació que es té de la resta de l'obra geomètrica d'Apol·loni prové essencialment dels comentaris i epítoms que Pappos d'Alexandria escriví sis-cents anys després d'Apol·loni i que, juntament amb altres proposicions dels clàssics, reuní a la seva obra intitulada Συναγωγη (Synagogé).

Aquesta obra de Pappos constava de vuit llibres dels quals el primer, la primera part del segon i unes pàgines finals de l'últim s'han perdut. El setè, però, s'ha conservat íntegre i aquest llibre havia de tenir un paper essencial en la història de la matemàtica.

El setè llibre de la *Synagogé* parla d'allò que tractaven els llibres que formaven part d'una col·lecció anomenada pels grecs «αναλυομενος» (lloc analitzat) traduïda *Domini de l'anàlisi* als llibres d'història.

Els grecs anomenaven mètode de l'anàlisi el procediment per trobar demostracions de teoremes o construccions en el cas de problemes: suposat cert allò que es pretenia demostrar, s'inferien conseqüències fins a arribar a quelcom ja establert i d'aquí, si era possible la inversió del procés, s'obtenia la demostració o síntesi del teorema, sent aquesta última part l'única que apareixia en els textos. A vegades el procés de l'anàlisi posava en evidència la necessitat de certes condicions supletòries per poder realitzar la síntesi, eren els anomenats diorismes, i si el procés d'anàlisi conduïa a una contradicció quedava provada la falsedat de l'enunciat del teorema (*reductio ad absurdum*).[1]

Als llibres que formaven el *Domini de l'anàlisi* hom hi trobava resultats que facilitaven el procés de reducció analítica. En particular, els llocs geomètrics informaven del lloc on es trobava un punt obligat a complir certes condicions; si el lloc era una línia recta o bé una circumferència es deia que es tractava d'un lloc pla, ja que aquestes línies podies ser construïdes sense necessitat d'haver de recórrer a les tres dimensions; si el lloc era una el·lipse, una hipèrbola o bé una paràbola es parlava d'un lloc sòlid, ja que per als grecs les còniques provenien de tallar un con per un pla, i això requeria tres dimensions; per als altres tipus de corbes que podien sortir es parlava de llocs linears.[2]

El *Domini de l'anàlisi* estava format pels llibres següents:

d'Euclides:	*Dades* (1 llibre) *Llocs de superfície* (2 llibres, perduts) *Porismes* (3 llibres, perduts)
d'Apol·loni:	*La Secció segons una raó* (2 llibres) *La Secció segons una àrea* (2 llibres, perduts) *La Secció determinada* (2 llibres, perduts) *Tangències* (2 llibres, perduts) *Neusis* (2 llibres, perduts) *Llocs plans* (2 llibres, perduts) *Les Còniques* (8 llibres, l'últim és perdut)
d'Aristeo el Vell:	*Llocs sòlids* (5 llibres, perduts)
d'Eratòstenes:	*Les Mitjanes* (2 llibres, perduts)

Al segle XVI i dins el corrent humanístic de l'Europa renaixentista, F. Commandino traduí per primera vegada al llatí la *Synagogé* de Pappos amb el títol *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones* (Pisa, 1588). La *Col·lecció Matemàtica* de Commandino donava a conèixer als matemàtics de l'incipient segle XVII una part important de la geometria superior dels grecs que s'havia perdut a través del llarg mil·leni que separa l'edat moderna del món antic. Vieta s'adonà del paral·lelisme que hi havia entre el procés algebraic de reducció d'equacions i el mètode de l'anàlisi dels grecs: ambdós tractaven per igual dades i incògnites fins a arribar a quelcom ja conegut. D'aquí l'interès de Vieta per la geometria dels clàssics.[3] Sorgí llavors un nou tipus d'activitat matemàtica consistent a recuperar la geometria superior dels grecs —en especial les obres d'Apol·loni— per mitjà de reconstruccions conjecturals. S'anomenaren restitucions. Vieta inicià aquest procés restaurador amb *Apollonius Gallus* (París, 1600) sobre el tema de les *Tangències*. Seguiren M. Ghetaldi amb *Apollonius redivivus* (1607) on es treballa les *Neusis* i W. Snell amb *Apollonius Batavus* (1608) que tractava dels llibres de *Seccions*.

L'any 1628 Fermat inicià la restitució de *Llocs plans* que acabà l'any 1636 (o potser una mica abans) però que no es publicaria fin a l'any 1679 amb el recull dels seus treballs a *Varia Opera Mathematica*. Fermat no publicà res en vida, no ho volia, però sí que comunicava els resultats de les seves recerques als seus amics matemàtics.

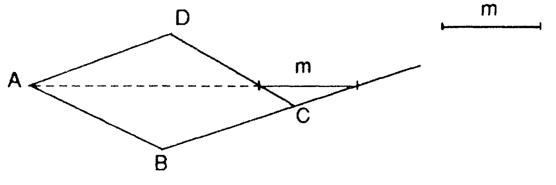
Els treballs de restitució de les obres perdudes dels grecs —ja sigui fent una restitució completa o bé només fent atenció a problemes concrets— continuaria durant els segles XVII, XVIII i XIX. El treball sobre *Porismes* de Chasles (1860) és un dels últims.

La *Synagogé* no tan sols va aportar més informació de tot allò que els grecs havien assolit en el camp de la geometria superior sinó que també va ser punt de partida de rellevants recerques: alguns dels enunciats que Pappos havia donat sense demostració al llibre 7 de la *Synagogé* desafiaven els millors matemàtics del segle XVII.

El més conegut és l'anomenat problema de les tres o quatre rectes de Pappos —es troba a l'epítom de Pappos a les *Cóniques*— per la seva incidència en *La géométrie* de Descartes.[4]

També fou famós l'anomenat problema d'Apol·loni enunciat per Pappos al començament de l'epítom a *Tangències*[5] i també el següent problema tret de l'epítom a *Neusis*.

Donat un rombe $ABCD$, s'ha d'intercalar un segment donat m entre el costat DC i la prolongació del costat BC de manera que la recta que passa per m passi també pel vèrtex A del rombe.



Aquest problema el tracten Ghetaldi, Huygens i l'espanyol Hugo de Omerique.

La llista de problemes sorgits de la *Synagogé*, i en especial del llibre 7, que foren motiu de recerca per als matemàtics posteriors a la traducció llatina de Commandino, és ben llarga i el seu estudi és de gran interès per a tot aquell que s'interessa en l'origen i el desenvolupament de la geometria i de les matemàtiques en general.[6]

En aquest article s'estudia un lloc geomètric que Pappos simplement enuncià i que despertà l'interès de matemàtics com Fermat i Huygens, i també el de l'espanyol J. Zaragozà. Es tracta del lloc geomètric que es troba enunciat en cinquena posició a l'epítom del llibre II de *Llocs plans* d'Apol·loni; l'anomenaré lloc II-5.

L'enunciat del lloc II-5

Segons la versió llatina de Commandino, que és aquella que llegiren els matemàtics del segle XVII, el lloc II-5 diu el següent:

> «*Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ et sint species, quæ ab omnibus fiunt data spatio æquales punctum continget positione datam circumferentiam.*»

Una traducció més o menys literal és com segueix:

> «Si des de punts donats en nombre qualsevol tracem línies rectes cap a un al-

tre punt i les espècies sobre aquestes, totes plegades, igualen una àrea donada, aquest punt es troba en una circumferència donada en posició.»

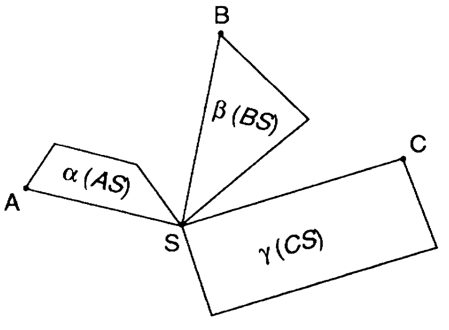
Aquest lloc II-5 fou treballat per diferents matemàtics dels segles XVII i XVIII: Fermat, Schooten, Huygens, Zaragozà, Simson, Stewart, etc. però les dues solucions més belles i interessants es deuen a Fermat i Zaragozà.

La frase que fa especialment fosc l'enunciat del lloc II-5 és:

«et sint species, quæ ab omnibus fiunt data spatio æquales».

La comprensió d'aquesta frase depèn d'una construcció geomètrica que no és explícita a l'enunciat de Pappos. És la següent:

Suposem donats un cert nombre de punts (*si a quotcumque datis punctis*), en prenem tres A, B, C per exemplificar-ho. Sigui S un punt arbitrari i tracem els segments rectilinis AS, BS i CS (*ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ*). Siguin també donats tres polígons arbitraris $\alpha(AS)$, $\beta(BS)$ i $\gamma(CS)$ com indica la figura adjunta.



Llavors, per a cada punt X, $\alpha(AX)$ és el polígon semblant al $\alpha(AS)$ amb els costats AX i AS homòlegs i això mateix per a $\beta(BX)$ i $\gamma(CX)$.

Mitjançant aquesta construcció a cada un dels punts donats, en variar el punt X, li queda associada una classe de polígons semblants que és allò que Pappos vol significar amb el terme specie. Denotaré les espècies amb lletres gregues.

LLavors, donat un polígon $\dot{q}$ arbitrari,[7] si considerem aquells punts X tals que

$$\alpha(AX) + \beta(BX) + \gamma(CX) = \dot{q}$$

(*quæ ab omnibus fiunt data spatio æquales*)
allò que diu Apol·loni és que aquests punts X es troben en una circumferència que queda determinada per les dades (*punctum continget positione datam circumferentiam*).[8]

Fermat i el lloc II-5

Fermat comença la restitució de *llocs plans* el 1628 i el 1630 ja l'hauria finalitzada si no hagués estat pel lloc II-5 la demostració del qual no acabava de trobar. Això ho sabem perquè ho diu el mateix Fermat:

El 26 d'abril de 1636 escriu a Mersenne:

> «...et vous dirai cependant que j'ai rétabli entièrement le Traité d'Apol·lonius: *De locis planis*. Il y a six ans que je donnai à M. Prades, que peut-être vous connoissez, la seule copie que j'en avois, écrire de ma main. Il est vrai que la question la plus difficile et la plus belle, que je n'avois pas encores trouvée, y manquoit. Maintenant le Traité est de tous accompli...»

i quina era aquesta qüestió la més difícil i més bella?

El 22 de setembre de 1636 escriu una carta a Roberval en què fa referència a un nou mètode que ha trobat:

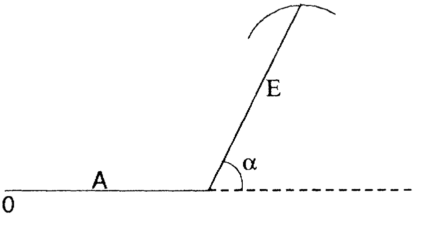
> «J'avois omis le principal usage de ma méthode qui est pour l'invention des lieux plans et solides; elle m'a servi particulièrement à trouver ce lieu que j'avois auparavant trové si difficile: Si a quotcumque datis punctis... etc....»

Per aquesta carta a Roberval sabem que el lloc més difícil i bell era el lloc II-5 però ens assabentem de quelcom més interessant: Fermat havia utilitzat el seu nou mètode d'anàlisi per trobar-ne una demostració.

Fermat explicarà el seu nou mètode en un petit treball (17 pàgines) que intitulà *Ad locos planos et solidos Isagoge* (*Introducció als llocs plans i sòlids*) el qual deuria estar enllestit en algun moment de l'any 1636 o potser un xic abans.

El mètode a què fa referència Fermat es basa en la utilització de l'àlgebra per portar a cap la reducció analítica dels grecs més l'afegitó essencial que Fermat sap atribuir una significació geomètrica a les equacions amb dues indeterminades, així ho explica Fermat en el segon paràgraf de la seva *Introducció als llocs plans i sòlids:*

> «Toutes les fois que dans une équation finale on trouve deux quantités inconnues, on a un lieu, l'extremité de l'une d'elles décrivant une ligne droite ou courbe...»



A i E són les lletres amb què Fermat indica les nostres x, y. O és l'origen dels segments A i α és un angle fix amb el qual s'aixequen els segments E. Fermat aconsella que α sigui recte. L'extrem del segment E, en variar A, descriu la corba que correspon al lloc geomètric.

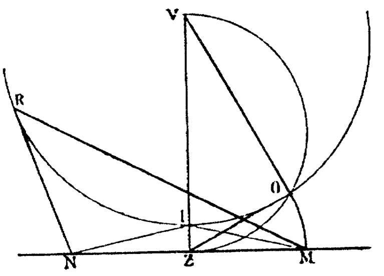
Amb aquesta tècnica Fermat estableix les següents correspondències equació-corba (notació actual)

$ax = by$	recta
$xy = b$	hipèrbola
$x^2 + xy = ay^2$	parell de rectes
$x^2 = ay$	paràbola
$b^2 - x^2 = y^2$	circumferència
$b^2 - x^2 = ay^2$	el·lipse
$b^2 + x^2 = ay^2$	hipèrbola

i demostra que tota equació amb dues indeterminades que no sigui de grau més gran que dos es pot reduir a una d'aquestes formes, de manera que en això consistirà la reducció analítica que constitueix el seu nou mètode: es planteja el lloc geomètric en termes algebraics i l'equació que en resulti es redueix a una d'aquestes formes canòniques.

L'exemple que proposa per il·lustrar-ho és precisament una variant *ad hoc* del lloc II-5 d'Apol·loni. Proposa que, donats dos punts N i M, es trobi el lloc geomètric dels punts I tals que si hom considera els segments rectilinis IN, IM, la raó de la suma des seus quadrats $IN^2 + IM^2$ al triangle INM sigui una raó donada.

Diu Fermat, posem $NM = b$, anomenem e la recta ZI perpendicular des de I a la recta NM i a la recta NZ

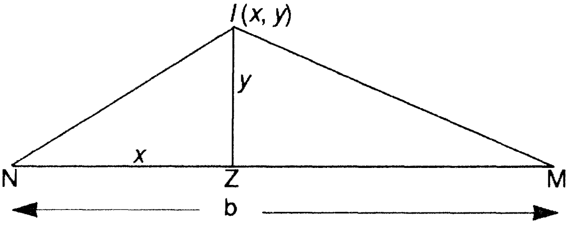


segons les regles de l'art, $\dfrac{2a^2 + b^2 - 2ba + 2e^2}{be}$ és una raó donada[9] i sense cap més explicació afageix:

«La construcció es farà com segueix: Aixequeu en Z, punt mitjà de NM, la perpendicular ZV tal que $\frac{4\,ZV}{NM}$ sigui igual a la raó donada. Dibuixeu el semicercle VOZ i sigui $ZO = ZM$. Considereu la circumferència de centre V i radi VO. Llavors, si des d'un punt R d'aquesta circumferència es traça RN i RM es compleix que la raó $\frac{RN^2 + RM^2}{\Delta RMN}$ és igual a la raó donada.»

Amb la nostra notació actual, si posem $\frac{m}{n}$ per a indicar la raó donada, escriuríem:

$$\frac{x^2 + 2y^2 + (b-x)^2}{\frac{1}{2}by} = \frac{m}{n}$$



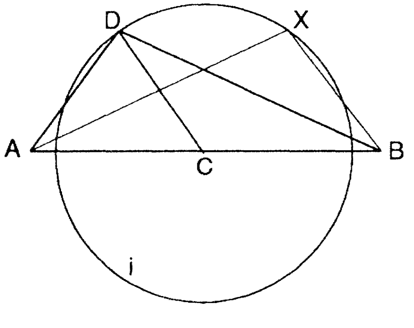
d'on resulta l'equació $(x - \frac{b}{2})^2 + (y - \frac{bm}{8n})^2 = (\frac{bm}{8n})^2 - (\frac{b}{2})^2$, això explica que Fermat mani prendre ZV de manera que $\frac{4ZV}{NM} = \frac{m}{n}$ [10] i dibuixi el semicercle VOZ per construir el radi.

Pel que fa al lloc II-5, tot i que Fermat diu a Roberval (carta del 22/9/36) que ha aplicat un nou mètode per trober-ne una demostració, en la restitució només apareix la síntesi constructiva següent:

Parteix de la proposició 122 del llibre 7 de la *Synagogé* que diu el següent:

Si en un triangle ABD tracem la recta DC que va del vèrtex D fins al punt mitjà del costat oposat AB, es té la relació

$$DA^2 + DB^2 = 2CA^2 + 2CD^2.$$



Després d'aquest resultat de Pappos és immediat que, si des del punt C com a centre es descriu una circumferència de radi CD, per a qualsevol punt R d'aquesta circumferència la suma dels quadrats $RA^2 + RB^2$ és sempre la mateixa. I si es donen dos punts A, B i una àrea Z i es demana per aquells punts X tals que $XA^2 + XB^2 = \dot{Z}$, per la proposició 122 de Pappos s'haurà de complir que $2CA^2 + 2CX^2 = \dot{Z}$ i, per tant, si $\dot{Z} > CA^2 + CB^2$, els punts X es troben en una circumferència de centre el punt C i radi el costat del quadrat d'àrea la meitat del quadrat equivalent a l'àrea $\dot{Z} - 2CA^2$.

Així doncs, la proposició 122 de Pappos resol el lloc II-5 en el cas més senzill de dos punts i dos quadrats com a espècies associades. Per tant, allò que Fermat fa a continuació és estendre la fórmula $DA^2 + DB^2 = 2CA^2 + 2CD^2$ al cas de més de dos punts alineats i per això, donats quatre punts A, B, C, E en línia recta, defineix un punt D mitjançant la igualtat

$$AD = \frac{1}{4}(AB + AC + AE)$$

i utilitzant la fórmula del quadrat d'un binomi obté que per a qualsevol altre punt N de la recta determinada pels punts donats es compleix la igualtat

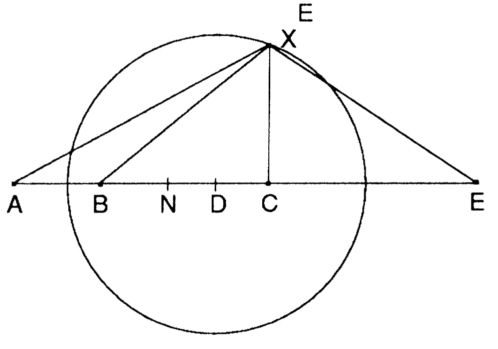
$$NA^2 + NB^2 + NC^2 + NE^2 = DA^2 + DB^2 + DC^2 + DE^2 + 4\,DN^2$$

igualtat que generalitza la $DA^2 + DB^2 = 2\,CA^2 + 2\,CD^2$ de la proposició 122 de Pappos.

Llavors, utilitzant el teorema de Pitàgores demostra que, donada una àrea Z, el lloc geomètric dels punts X d'un pla que passa per la recta determinada pels punts donats A, B, C, E i que compleixen la igualtat

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XE^2 = \dot{Z}$$

és una circumferència de centre el punt D i radi el costat d'un quadrat d'àrea la quarta part de l'excés de $\dot{Z}$ sobre la suma mínima $DA^2 + DB^2 + DC^2 + DE^2$ (primera proposició).



La pregunta és: d'on ha tret Fermat la definició del punt D? Fermat no ens ho diu però, desprès de veure'n la síntesi que fa, és fàcil deduir-ne l'anàlisi algebraica que el devia conduir cap a la definició del punt D: Fermat vol una fórmula com la $DA^2 + DB^2 = 2CA^2 + 2CD^2$ de Pappos per a més de dos punts alineats, la qüestió és, però, quan hi ha més de dos punts, qui fa el paper del punt mitjà C de A i B?

Fermat suposaria que ja té un punt D com el de la figura anterior que compleix la igualtat

$$NA^2 + NB^2 + NC^2 + NE^2 = DA^2 + DB^2 + DC^2 + DE^2 + 4DN^2$$

i calcularia la suma del primer membre fent-hi jugar el punt D,

$$\begin{aligned}&NA^2 + NB^2 + NC^2 + NE^2 =\\&(AD - DN)^2 + (BD - DN)^2 + (CD + DN)^2 + (ED + DN)^2 =\\&DA^2 + DB^2 + DC^2 + DE^2 + 4DN^2 + 2CD \cdot DN +\\&2ED \cdot DN - 2DA \cdot DN - 2DB \cdot DN\end{aligned}$$

de manera que es feia necessària la igualtat

$$DA + DB = DC + DE.$$

Prenent ara el punt A com a origen de segments es té

$$AD + (AD - AB) = (AC - AD) + (AE - AD)$$

d'on resulta la condició $AD = \frac{1}{4}(AB + AC + AE)$ que defineix el punt D.

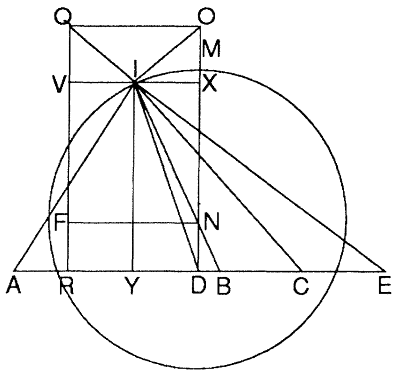
Procedint al revés s'obté la síntesi que Fermat dóna en aquesta part de la restitució del lloc II-5.

La restitució de Fermat continua amb la següent observació important:

El mateix resultat de la primera proposició serveix per resoldre el cas en què donats, per exemple, tres punts A, B, E es demani de trobar una circumferència tal que per a qualsevol punt M de la mateixa la suma $2AM^2 + BM^2 + EM^2$ sigui igual a una àrea donada. En aquest cas el punt A s'ha de comptar dues vegades i llavors el punt D és tal que $AD = \frac{1}{4}(AB + AE)$ i de manera similar per a qualsevol altra multiplicitat.

L'observació de Fermat és essencial pel que fa a la proposició que segueix (i que ja és l'última que demostra):

Suposa donats quatre punts alineats A, B, C, E i un cinquè punt Q que no pertany a la recta per ells determinada.



Es tracta de construir una circumferència tal que per a qualsevol punt I d'aquesta, la suma $AI^2 + BI^2 + CI^2 + EI^2 + QI^2$ sigui igual a una àrea donada.

Fermat dóna les següents regles de construcció i després demostra que són vàlides (una vegada més la pregunta és: com ho ha trobat?):

> «Baixeu sobre la recta AE la perpendicular QR i preneu $AD = \frac{1}{5}(AR + AB + AC + AE)$. Aixequeu la perpendicular DO i baixeu sobre ella la perpendicular QO. Preneu $DN = RF = \frac{1}{5}QR$ i sigui l'àrea donada igual a la suma $AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 + \dot{Z}$. Sigui M un punt tal que $\dot{Z} = 4DN^2 + ON^2 + 5NM^2$ (4 són els punts donats sobre la recta AE i 5 el nombre total de punts). Jo dic que la circumferència de centre N i radi NM satisfà la qüestió.»

La demostració és com segueix:

Sigui I un punt arbitrari de la circumferència que acabem de descriure, comptant D com a punt quàdruple i tenint en compte que $DN = \frac{1}{5}DO$, per la primera proposició es té

$$4DI^2 + OI^2 = 4DN^2 + NO^2 + 5NM^2 \ (= \dot{Z} \text{ per construcció})$$

o bé, projectant I ortognonalment sobre DO i utilitzant Pitàgores,

$$4DX^2 + XO^2 + 5XI^2 = \dot{Z}$$

i també

$$4DX^2 + XO^2 + 5XI^2 + AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2 =$$
$$\dot{Z} + AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2.$$

El segon membre d'aquesta igualtat és, per construcció, l'àrea donada i el primer es pot escriure

$$4IY^2 + VQ^2 + 5DY^2 + AD^2 + RD^2 + BD^2 + CD^2 + ED^2$$

el qual, utilitzant la primera proposició, és igual a

$$4IY^2 + VQ^2 + AY^2 + RY^2 + BY^2 + CY^2 + EY^2$$

i utilitzant la relació pitagòrica,

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 + IE^2 + IQ^2.$$

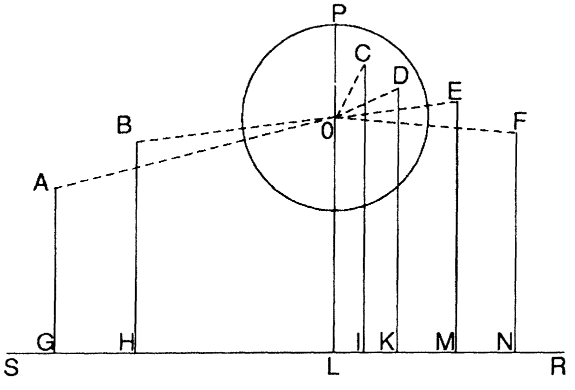
Procedint al revés es descobreix la possible anàlisi de Fermat a aquesta segona proposició. Ara bé, cal adonar-se del fet que Fermat ha introduït un origen de segments per a la construcció del punt D tal que $DA + DB = DC + DE$ (primera proposició), que en aquesta segona proposició descompon els segments donats i els segments incògnites a través de les dues rectes ortogonals AE i DO i que, tot i la presentació clàssica de la seva restitució del lloc II-5,[11] aquesta té un caràcter palesament algebraic. Amb tot, falta l'esglaó que li permeté d'enunciar el principi bàsic del seu mètode.

> «Sempre que en una equació final apareixen dues quantitats incògnites es té un lloc geomètric en descriure l'extrem d'una d'elles una línia recta o corba.»

Aquest esglaó, però, no se sap pas amb certesa on es troba. No deu ser errat de pensar que Fermat devia tenir molt present la *symptome* imtjançant la qual Apol·loni descriví les còniques.[12]

Fermat ja no dóna cap altra demostració, però, i això és significatiu, acaba donant la recepta següent:

> «Pel cas en què els punts donats A, B, C, D, E, F estiguin situats arbitràriament en un pla, preneu una recta SR que els deixi tots d'un mateix costat



abaixeu, llavors, les perpendiculars AG, BH, CI, DK, EM, FN, preneu $GL = \frac{1}{6}(GH + GI + GK + GM + GN)$ i aixequeu la perpendicular $LO = \frac{1}{6}(AG + BH + CI + DK + EM + FN)$.
Si P és tal que $AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 + EO^2 + FO^2 + 6OP^2 =$ àrea donada, llavors la circumferència de centre O i radi OP satisfà la qüestió; la demostració no ha de ser difícil per a qui coneix el que s'ha dit anteriorment» (*Nec difficilis est inventio ei qui superiores noverit*).

Zaragozà i el lloc II-5

L'encontre de Zaragozà amb el lloc II-5 donarà resultats ben diferents dels de Fermat.

Josep Zaragozà, professor de matemàtiques al Colegio Imperial de Madrid en la dècada que va del 1670 al 1680 (Zaragozà mor l'any 1679), és un geòmetra en la línia tradicional d'Euclides i seguint aquest cànon escriu els seus treballs. De les seves obres n'hi ha una que sobresurt en escreix de les altres ja que conté resultats, mètodes i conceptes que són nous i d'una certa rellevància. Es tracta d'una obra, dividida en tres parts, intitulada *Geometria Magna in Minimis* (Toledo, 1674).[13]

En aquesta obra Zaragozà introdueix el concepte de centre mínim. El centre mínim és un punt que, de manera unívoca, s'associa a una sèrie de punts i espècies donats, i les seves propietats són les del centre de gravetat d'un sistema discret de pesos. Ens trobem davant d'una teoria interna a la geometria que permet servir-se de propietats baricèntriques sense postulats de tipus físic. Una conseqüència d'aquesta teoria i en relació amb el càlcul de certes raones entre segments determinats en una figura en ser tallada per rectes concurrents és la introducció d'una metodologia que és un clar precedent del càlcul baricèntric.[14]

En particular descobreix la relació avui coneguda com a teorema de Ceva quatre anys abans que Ceva la publiqués al *De lineis rectis se invicem secantibus: statica constructio*.

La *Geometria Magna in Minimis* té un petit pròleg i en aquest pròleg Josep Zaragozà ens diu que la idea del centre mínim li vingué suggerida pel lloc II-5 d'Apol·loni. La definició del centre mínim es troba al començament del capítol II de la primera part:

> «Centrum Minimum, dicitur punctum, ex quo prodeunt rectæ ad quolibet data puncta, utcumque disposita, supra quas figuræ constitutæ, licet interse dissimiles, datis tamen similes, minimam omnium similium summam eficiunt.»

Utilitzant la notació introduïda al paràgraf 2:

Donats n punts-espècies $A_1\ \alpha_1, \ldots, A_n\ \alpha_n$ es diu que el punt M és el seu centre mínim si i solament si per a qualsevol altre punt X es verifica la desigualtat

$$\alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n) < \alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n)$$

Per a qualsevol sèrie de punts-espècies, Zaragozà dóna un método per construir el seu centre mínim i aquest mètode es fonamenta en les propietats d'alineació i acumulació de què gaudeix aquest punt i que diuen el següent:

Si M és el centre mínim dels punts-espècie $A_1\ \alpha_1,\dots, A_j\ \alpha_j, A_{j+1}\ \alpha_{j+1},\dots, A_n\ \alpha_n$, S el centre mínim de $A_1\ \alpha_1,\dots, A_j\ \alpha_j$ i T el centre mínim de $A_{j+1}\ \alpha_{j+1},\dots, A_n\ \alpha_n$, llavors

a) els tres punts M, S, T estan alineats
b) M és també el centre mínim dels dos punts S i T havent associat les espècies $\alpha_1 \dots \alpha_j$ al punt S i havent associat les espècies $\alpha_{j+1},\dots, \alpha_n$ al punt T.

Aquestes dues propietats d'alineació i acumulació (que són característiques del càlcul baricèntric) es demostren utilitzant la fórmula bàsica de la *Geometria Magna in Minimis* que diu així:

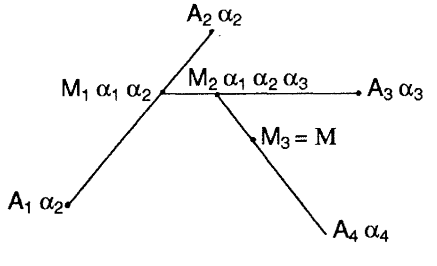
Donats n punts-espècie $A_1\ \alpha_1,\dots, A_n\ \alpha_n$, per a qualsevol punt X es compleix la igualtat

$$\alpha_1(XA_1) + \dots + \alpha_n(XA_n) =$$
$$[\alpha_1(MA_1) + \dots + \alpha_n(MA_n)] + [\alpha_1(MX) + \dots + \alpha_n(MX)]$$

on M és el centre mínim de $A_1\ \alpha_1,\dots, A_n\ \alpha_n$.[15]

Per trobar el centre mínim M de n punts-espècie $A_1\ \alpha_1, A_2\ \alpha_2,\dots, A_n\ \alpha_n$ Zaragozà dóna el següent mètode recurrent:

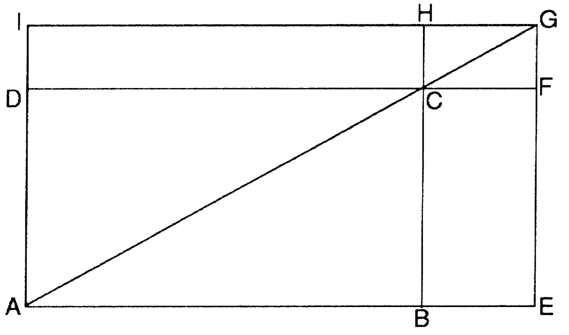
Primerament es busca el centre mínim M_1 de $A_2\ \alpha_1$ i $A_2\ \alpha_2$, en segon lloc es busca el centre mínim M_2 de $M_1\ \alpha_1\ a_2$ i $A_3\ \alpha_3$, després el centre mínim M_3 de $M_2\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ i $A_4\ \alpha_4$ i així successivament fins a esgotar els punts-espècies donats. L'últim centre mínim M_{n-1} que s'ha trobat és el centre mínim M.



La construcció es redueix, doncs, a saber trobar el centre mínim de dos punts amb una o més espècies associades a cadascun d'ells. Per a polígons en general això dóna lloc a una construcció geomètrica que no és pas difícil però que tampoc és immediata.

Ara bé, per utilitzar la teoria del centre mínim es prova que és suficient considerar rectangles com a espècies i això simplifica notablement l'ús d'aquesta teoria.

Per a un rectangle $ABCD$, si es prolonga la base AB un tros BE i es considera el rectangle de base AE semblant al donat, s'obté la descomposició $AEGI = ABCD + \{BEFC + DCHI\} + CFGH$.



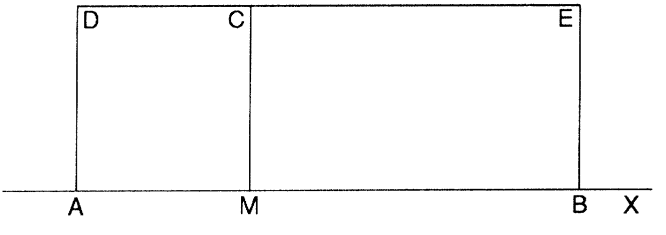
A la suma dels rectangles $BEFC$, $DCHI$ se l'anomena el complement del rectangle $ABCD$ relatiu a l'increment BE.

Llavors, definició:

Dos rectangles són equicomplementats si i solament si a increments iguals corresponen iguals complements.[16]

És immediat veure que el rectangle $BEFC$ és igual al rectangle $DCHI$; per tant, el complement només depèn d'un d'ells, per exemple el $BEFC$, i d'aquí el següent senzill criteri d'equicomplementació:

Dos rectangles són equicomplementats si i solament si tenen la mateixa altura.



Llavors, el teorema bàsic sobre el qual es recolza tota la part constructiva de la teoria del centre mínim és el següent:

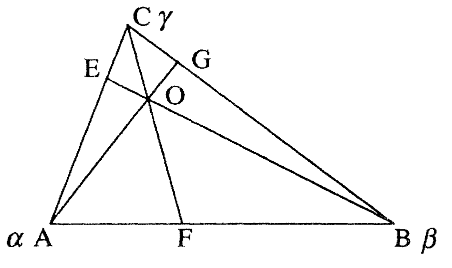
Si dos rectangles $AMCD$, $MBEC$ com els de la figura anterior són equicomplementats, per a tot punt X de la recta AB es compleix la igualtat

$$\alpha(XA) + \beta(XB) = [\alpha(MA) + \beta(MB)] + [\alpha(MX) + \beta(MX)]$$

on α és l'espècie un representant de la qual és el rectangle *AMCD* i β és l'espècie un representant de la qual és el rectangle *MBEC* i recíprocament. Així doncs, *M* és el centre mínim dels punts-espècie $A\alpha$, $B\beta$.

Un exemple d'aplicació d'aquesta teoria és el següent:

Considerem el triangle *ABC* i les tres rectes concurrents *AG, BE* i *CF*.



Associem al vèrtex *C* l'espècie dels quadrats γ i al vèrtex *A* l'espècia α un representant de la qual és el rectangle de base *AE* i altura *EC*. Amb aquesta assignació d'espècies *E* esdevé el centre mínim de $A\alpha$, $C\gamma$. Associem ara al vèrtex *B* l'espècie β un representant de la qual és el rectangle de base *BH* i altura *GC*. D'aquesta manera el punt *G* esdevé el centre mínim de $B\beta$, $C\gamma$.

Per la propietat d'alineació del centre mínim i a causa de la seva unicitat, el centre mínim dels punts-espècie $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ és el punt *O*, intersecció de les rectes *BE* i *AG*.

Aplicant altra vegada la propietat d'alineació, el punt *F* serà el centre mínim de $A\alpha$ i $B\beta$; per tant, hi ha un rectangle de l'espècie α de base *AF* i altura *h* que és equicomplementat amb un rectangle de l'espècie β de base *FB* i altura *h*, i per la semblança dels rectangles d'una mateixa espècie es podrà escriure que

$$\frac{CE}{EA} = \frac{h}{AF} \quad \text{i} \quad \frac{CG}{GB} = \frac{h}{FB}$$

d'on òbviament s'obté la relació entre segments que dóna el teorema de Ceva.[17]

A la *Geometria Magna in Minimis* es troben molts altres resultats de la teoria de transversals obtinguts per aquest procediment del centre mínim, si bé no tots aquells que de si dóna la teoria per ell construïda; la limitació prové del fet que Zaragozà només utilitza allò que li permet la geometria clàssica: regla, compàs i proporcions entre magnituds geomètriques.[18]

Pel que fa al lloc II-5, la fórmula bàsica que ha demostrat amb tot rigor li permet resoldre el lloc II-5 amb tota generalitat per a punts no necessàriament coplanaris i espècies.

Així, donat un polígon *q*, la igualtat geomètrica que defineix el lloc II-5

$$\alpha_1(XA_1) + \cdots + \alpha_n(XA_n) = \dot{q}$$

equival a la igualtat

$$[\alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n)] + [\alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX)] = \dot{q}$$

de la qual ja es dedueix que el lloc en qüestió té solució si i solament si l'àrea donada $\dot{q}$ és major que la suma mínima $\alpha_1(MA_1) + \cdots + \alpha_n(MA_n)$. En aquest supòsit el lloc geomètric és una esfera de centre, el centre mínim M (que ja sabem construir) i de radi el segment MX que s'ha d'aïllar de l'anterior igualtat. Per això últim Zaragozà dóna el mètode següent:

Sigui c^2 el quadrat d'àrea equivalent al polígon q donat.
Sigui m^2 el quadrat d'àrea equivalent a la suma mínima.
Sigui t^2 el quadrat d'àrea equivalent a la diferència $c^2 - m^2$.

Llavors queda la igualtat

$$\alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX) = t^2$$

Sobre un segment arbitrari b es construeixen polígons $\alpha_1(b), \ldots, \alpha_n(b)$ i per la semblança entre si dels polígons d'una mateixa espècie es té que

$$\frac{\alpha_1(MX)}{MX^2} = \frac{\alpha_1(b)}{b^2}, \ldots, \frac{\alpha_n(MX)}{MX^2} = \frac{\alpha_n(b)}{b^2}$$

i, per tant,

$$\frac{\alpha_1(MX) + \cdots + \alpha_n(MX)}{\alpha_1(b) + \cdots + \alpha_n(b)} = \frac{MX^2}{b^2}.$$

Si s^2 és el quadrat equivalent a la suma $\alpha_1(b) + \cdots + \alpha_n(b)$, el radi MX es resoldrà mitjançant la quarta proporcional

$$\frac{t}{s} = \frac{MX}{b}.$$

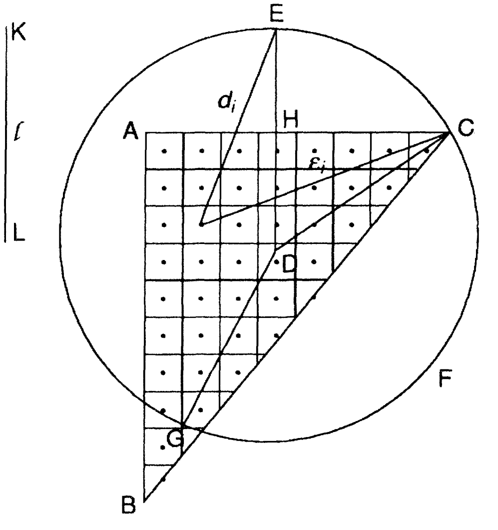
Huygens i el lloc II-5

Una interessant aplicació del lloc II-5 d'Apol·loni (versió per quadrats) es troba a un dels llibres més notables de la mecànica del segle XVII: es tracta de *L'Horologium Oscillatorium* de C. Huygens que es publica l'any 1673. A la proposició 12 de la pars quarta d'aquest llibre, Huygens utilitza la geometria coordenada, pràcticament com ho faríem avui dia, per demostrar que:

«Donats en un pla punts en nombre qualsevol, si des del seu centre de gravetat[19] es descriu una circumferència i des d'un punt d'aquesta es tiren segments rectilinis als punts donats, la suma dels quadrats d'aquests segments és constant, qualsevol que sigui el punt de la circumferència descrita.»[20]

I a la següent proposició 13 enuncia que:

Quan una figura plana o una línia que es troba en un pla se suspèn des de diversos punts d'aquest pla igualment distants del centre de gravetat d'aquesta figura, aquesta figura o línia és isòcrona a ella mateixa en oscil·lació lateral.
Per tal de demostrar-ho, considera un triangle *ABC* que representa una figura plana suspesa d'un punt *E* (punt de suspensió). *D* és el centre de gravetat d'aquest triangle.



Divideix el triangle en *n* parts iguals suficientment petites[21] i des de llurs centres de gravetat traça segments rectilinis a l'eix d'oscil·lació que és perpendicular per E al pla que conté el triangle *ABC*. El resultat enunciat, l'obté a partir de la fórmula

$$\frac{\sum d_i^2}{n \cdot DE} = l$$ que ha demostrat a la prop. 6 de *L'Horologium Oscillatorium* on

l és la longitud del pèndol simple isòcron al pèndol compost *ABC* suspès del punt *E*,
d_i és la distància del centre de gravetat d'un tros *i*–èsim de *ABC* al punt de suspensió *E*,
n és el nombre de trossos *i*–èsims,
DE és la distància del centre de gravetat del triangle *ABC* al punt de suspensió *E*.

Si el mateix triangle és suspès pel punt C situat en una circumferència centrada en el centre de gravetat D i de radi DE, llavors

$$\frac{\sum \varepsilon_i^2}{n \cdot DC} = j$$ per la proposició 6 de *L'Horologium Oscillatorium* on

j és la longitut del pèndol simple isòcron al pèndol compost ABC suspès del punt C,
ε_i és la distància del centre de gravetat d'un tros i–èsim de ABC al punt de suspensió C,
DC és la distància del centre de gravetat de ABC al punt de suspensió C.

Per l'anterior prop. 12 (el lloc II-5 d'Apol·loni) es té:

$$\sum d_i^2 = \sum \varepsilon_i^2$$

i com $DC + DE$, resulta $j = l$.

Bibliografia

BOYER, CARL B. *History of Analytic Geometry.* The Scholar's Bookshelf 1988.

CHASLES, MICHEL. *Aperçu historique sur l'origine et le dèveloppement des mèthodes en gèometrie.* Bruxelles 1837.

COTARELO, ARMANDO. «El P. José de Zaragoza y la Astronomía de su tiempo» (1935). Estudios sobre la ciencia española del siglo XVII. Asociación Nacional de Historiadores de la Ciencia Española. Madrid.

DOU, ALBERT. «Las matemáticas en la España de los Austrias». Actas del segundo simposio sobre Rey Pastor. Editor Luis Español. Logroño, 1988.

FERMAT, PIERRE DE. *Oeuvres*, P. Tannery, C. Henry eds. 4 vols. París, 1891-1912.

JONES, ALEXANDER. *Pappus of Alexandria,* Book 7 of the Collection, 2 vols, Springer-Verlag 1986.

HEATH, THOMAS L. *A History of Greek Mathematics.* Dover, 1981.

HUYGENS, CHRISTIAAN. *Oeuvres Complètes.* Vol. 18.

MAHONEY, M. S. *The Mathematical Career of Pierre de Fermat.* Princeton University Press, 1973.

NAVARRO BROTONS, VICTOR. *Tradició i canvi científic al país Valencià Modern.* 1985. Eliseu Climen Editor. Valencia.

PLA, JOSEP. 1988. La *Geometrie* como ejemplo de *La Méthode* de René Descartes. Actes del tercer congrés de Llenguatges naturals i llenguatges formals. Vol. 2, pàgs. 821-863. Barcelona, 1988.

—, 1990. La *Geometrie* com un exemple de *La Méthode* de René Descartes: L'anàlisi-síntesi. Conferència ICE Universitat de Barcelona 17-1-1990.

RECASENS, EDUARD. *La Geometria Magna in Minimis de J. Zaragozà. El Centre Mínim i el lloc cinquè d'Apol·loni.* Tesi Doctoral 1991. Universitat Autònoma de Barcelona.

VER EECKE, PAUL. *Pappus d'Alexandrie. La Collection Mathematique.* 2 vols. París-Bruges, 1933.

ZARAGOZÀ, JOSEP. *Geometria Magna in Minimis*, 1674

Notes

1. Per a una més completa informació sobre l'anàlisi i la síntesi dels grecs podeu consultar T. L. Heath 1981, Ver Eecke 1933, M. Mahoney 1973, J. Pla 1990.

2. Sobre el concepte de lloc geomètric segons els grecs podeu consular A. Jones 1986.

3. Vegeu Mahoney 1973, Boyer 1988.

4. Si són donades tres (o quatre) rectes r, s, t (v) i des d'un punt P es tracen rectes que tallen les donades en punts respectius A, B, C (D) segons uns angles donats i la raó $\dfrac{PA \cdot PB}{PC^2}$ (o bé $\dfrac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD}$) és, també, donada, el punt P s'ha de trobar en un lloc sòlid (és a dir, una de les tres còniques). Vegeu J. Pla 1989.

5. Donats tres objectes (punts, rectes o circumferències) es demana de traçar una circumferència tangent a tres dels objectes donats. Dels deu casos possibles, aquell en què els tres objectes donats són circumferències s'anomena problema d'Apol·loni.

Aquest problema el tracten matemàtics com Vieta, A. Romano, Descartes, Newton, L'Hôpital, T. Simpson, R. Simson, Euler i molts d'altres. Vegeu Ver Eecke 1933.

6. Un dels primers llibres en aquesta línia és el de M. Chasles 1837.

7. Posant un punt sobre una lletra indicaré que es tracta d'una àrea, això és fonamental sota un punt de vista històric ja que les igualtats geomètriques han de ser homogènies. Descartes serà el primer que trencarà amb la necessitat de mantenir aquesta homogeneïtat. Vegeu J. Pla 1988.

8. Podeu observar que donat un punt A i una espècie α, en variar el punt X, el quocient $\dfrac{\alpha(AX)}{AX^2}$ és constant. Anomenant amb la mateixa lletra α aquest coeficient numèric, donats n punts-espècies $A_1\ \alpha_1, \ldots, A_n\ \alpha_n$, l'equació geomètrica que descriu el lloc II-5 d'Apol·loni

$$\alpha_1(XA_1) + \ldots + \alpha_n(XA_n) = \dot{q}$$

esdevé l'equació algebraica

$$\alpha_1 \cdot XA_1^2 + \ldots + \alpha_n \cdot XA_n^2 = q.$$

9. A l'obra de Fermat apareix així escrit:

«Recta *NM* æquetur *B*, et recta *ZI*, ad angulos rectos, dicatur *E* terminus, *NZ* dicatur *A*, ergo ex artis præceptis *Aq bis* + *Bq* – *B in A bis* + *Eq bis* ad rectangulum *B* in *E* habebit rationem datam.»

10. Fermat s'oblida del $\frac{1}{2}$ de l'àrea del triangle i això fa que surti un 4 en comptes del 8.

11. Vegeu el facsímil que correspon a aquesta demostració (en la versió de Tannery) de la restitucio del lloc II-5 de Fermat.

12. Podeu veure un estudi conjectural sobre el paper que podien haver jugat el lloc II-5 d'Apol·loni, les còniques d'Apol·loni i el problema de les tres o quatre rectes de Pappos en la invenció de la geometria analítica per Fermat durant els anys 1635-1636 a Mahoney (1973) cap. III.

13. Sobre la biografia de J. Zaragozà i el seu context històric podeu veure Cotarelo (1935), Dou (1988) i Navarro Brotons (1985).

14. Em refereixo al càlcul que es troba en el *De lineis rectis se invicem secantibus: statica constructio* de J. Ceva (Milà, 1678) i al *Der barycentrische Calcul* de M. Möbius (Leipzig, 1827).

15. Interpretant les espècies a través del coeficient numèric introduït a la nota 8, la fórmula bàsica enunciada esdevé

$$\alpha_1 \cdot XA_1^2 + \cdots + \alpha_n \cdot XA_n^2 = (\alpha_1 \cdot MA_1^2 + \cdots + \alpha_n \cdot MA_n^2) + (\alpha_1 \cdot MX^2 + \cdots + \alpha_n \cdot MX^2)$$

que en el cas particular de ser $\alpha 1 = \cdots = \alpha n$ o bé nombres enters positius és la relació quadràtica que Fermat utilitza en la seva restitució del lloc II-5.

16. Aquí per igualtat s'entén, com és habitual a la geometria clàssica, igualtat d'àrees. I l'equicomplementació s'entén sempre respecte de la base.

17. És interessant de fer notar que Ceva fa el mateix raonament que Zaragozà, però Ceva utilitza pesos en comptes d'espècies i es fonamenta en l'estàtica.

18. Si voleu més detalls sobre la *Geometria Magna in Minimis* de Josep Zaragozà podeu consultar E. Recasens (1991).

19. Huygens pensa els punts com esferes igualment pesants i molt petites; és en aquest sentit que parla de centre de gravetat de punts.

20. Huygens havia après l'ús de la geometria coordenada del seu mestre F. Schooten qui li posava com a exercicis perquè els resolgués segons el nou mètode de Descartes, precisament, els llocs plans d'Apol·loni i d'altres trets del llibre 7 de la *Synagogé*.

F. Schooten publicà l'any 1656 una restitució de *Llocs plans* segons aquesta nova metodologia de Descartes.

21. *«Intelligatur figura ABC divisa in particulas minimas æquales...»*