XXX Olimpíada matemàtica fase catalana

Primera sessió. Divendres, 14 de gener, de 4 a 8

1. Dues circumferències C_1 i C_2 es tallen en els punts A i B. Es pren un punt M de C_1, exterior a C_2, i es tracen les rectes MA i MB. Anomenem A' i B' els punts (diferents d'A i de B) en què aquestes rectes tallen respectivament la circumferència C_2. Demostreu que la longitud del segment A'B' no depèn de la posició de M.

2. Demostreu que la funció $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x + \operatorname{arc\,sin} \dfrac{2x}{1+x^2}$ és constant en el conjunt de nombres reals tals que $x \geq 1$.

3. El número 9687600 es pot escriure com a producte de nombres enters consecutius, un dels quals és primer. Calculeu quins són aquests factors.

4. En una bossa hi ha n boles numerades amb els nombres enters de l'1 a l'n.

a) Si traiem tres boles d'aquesta bossa, totes alhora, calculeu la probabilitat que no surti cap parella de nombres consecutius.

b) Si traiem m boles d'aquesta bossa, totes alhora, demostreu que la probabilitat que no surti cap parella de nombres consecutius és igual a

$$\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}$$

Segona sessió. Dissabte, 15 de gener, de 9 a 1

5. Quina relció hi ha d'haver entre les arestes d'un tetràedre perquè les seves cares siguin triangles semblants no tots iguals?

6. Una successió de terme general a_n compleix $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n > 2$. Se sap que la suma dels 1000 primers termes és 500 i que la suma dels 1000 següents és 2000. Calculeu la suma dels 1993 primers termes i el terme a_{1994}.

7. Sigui $P(x)$ un polinomi amb coeficients enters.

a) Comproveu que si m i n són nombres enters, llavors $P(m) - P(n)$ és divisible per $m - n$.

b) Demostreu que, si hi ha tres nombres enters, a, b i c tals que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$, llavors $P(x) \neq 3$ per a tot x enter.

8. Calculeu totes les arrels complexes de l'equació

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$