

XXIX Olimpíada matemàtica

Primera sessió

Dia 11 de desembre de 1992, de les 4 h a 6 h 30 de la tarda

1. Demostreu que el nombre combinatori $\binom{1992}{1492}$ no és múltiple de 500.
2. Proveu que si els nombres

$$\sin(b+c-a), \sin(c+a-b) \text{ i } \sin(a+b-c)$$

estan en progressió aritmètica, llavors també ho estan els nombres

$$\operatorname{tg} a, \operatorname{tg} b, \text{ i } \operatorname{tg} c.$$

3. En un cercle de centre O i radi 1 trecem una corda i construïm seguidament el semicercle que té com a diàmetre aquesta corda i no està contingut en el cercle inicial. Sigui P el punt d'aquest semicercle que està més lluny del punt O . Quina longitud ha de tenir la corda perquè la distància OP sigui màxima?

Segona sessió

Dia 12 de desembre de 1992, de les 9 h del matí a la 1 h del migdia

4. a) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{(n-1)n})$

b) Calculeu $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt[3]{(n-1)n^2})$

5. Sobre una recta horitzontal construïm triangles equilàters de forma que les respectives bases són segments adjacents de longituds 1, 3, 5, 7, ... Demostreu que els vèrtexs superiors dels triangles estan sobre una paràbola.

6. Un rectangle es pot descompondre en 9 quadrats de costats

1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, i 18.

Calculeu els costats del rectangle.

7. El joc de daus americà es juga de la forma següent: el jugador va tirant successivament dos daus alhora fins que perd o guanya.

A la primera tirada guanya si la suma dels punts dels dos daus és 7 o bé 11 i perd si la suma de punts és 2, 3 o 12.

Altrament anomenarem "*el seu valor*" la suma de punts que ha tret a la primera tirada.

A partir d'aquí tirarà els dos daus fins que tregui un 7, i llavors perdrà, o bé fins que tregui novament "*el seu valor*" i llavors guanyarà.

Calculeu la probabilitat que té un jugador de guanyar en aquest joc.

8. Sigui $A = 66^{66}$.

Sigui B la suma de les xifres del nombre A.

Sigui C la suma de les xifres del nombre B.

Calculeu la suma de les xifres de C.