

Una demostració del teorema de l'amistat per mètodes elementals

Josep M. Brunat

1. Introducció

En l'àmbit de la combinatòria no és rar de trobar teoremes que tenen interpretació immediata en termes col·loquials i que, per això, duen noms també col·loquials. Pensem, per exemple, en el principi de les caselles, en el teorema matrimonial de Hall o en el teorema dels quatre colors. El teorema de l'amistat és un altre resultat d'aquest tipus, encara que menys conegut que els anteriors. El seu enunciat informal és el següent:

Teorema de l'amistat: *Si en una reunió cada dues persones tenen exactament un amic en comú, aleshores hi ha algú amic de tothom.*

Aquí se suposa que l'amistat és una relació irreflexiva (és a dir, que ningú no és amic d'ell mateix) i simètrica.

Si el nombre n de persones de la reunió és 3 (amb menys de 3 la hipòtesi no es compleix), aleshores cadascú coneix els altres dos i el resultat és trivial. En el que segueix suposarem, doncs, que es tracta d'una reunió de $n \geq 4$ persones. En aquest cas veurem no només que hi ha l'amic universal, sinó també que és únic.

El teorema pertany a la combinatòria, precisament a la teoria de grafs. Biggs l'enuncia a [2] i en dóna una demostració basada en el que anomena «feasible arrays» i fa una referència a un resultat no publicat de G. Higman. Erdős, Rény i Sós també se n'ocupen a [4] i el demostren mitjançant arguments que involucren teoria de grafs i geometries finites, en particular un resultat de Baer [1]. En tots dos casos les demostracions poden ser qualificades de no elementals. El nostre propòsit és oferir-ne una altra amb un mínim de recursos. De fet, el resultat més fort que emprem és que una matriu simètrica és diagonalitzable, i això és matèria d'un primer curs universitari.

Per tal de fer aquest article autocontingut, al següent apartat donarem l'escàs vocabulari que ens cal de teoria de grafs i en fixarem la notació. Per a detalls i definicions més generals ens referim a qualsevol text de teoria de grafs, per exemple [3] o [5].

També formularem el teorema en forma abstracta i en donarem un parell de ver-

sions alternatives. L'apartat 3 conté la demostració. Cal advertir que, amb la intenció d'evitar referències, en alguns punts hem fet arguments locals curts i senzills que són particularitzacions de resultats més generals.

2. Formalització

Si V és un conjunt, representarem per $\mathcal{P}_2(V)$ el conjunt de parts de V de cardinal 2. Per conveniència, si $a = \{x, y\} \in \mathcal{P}_2(V)$, no posarem les claus i escriurem $a = xy$.

Un *graf* és una parella $G = (V, E)$ on V és un conjunt finit i $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$. Els elements de V es diuen *vèrtexs* i els de E *arestes*. Si xy és una aresta, els vèrtexs x i y es diuen *adjacents* i ho indicarem $x \sim y$; l'aresta $a = xy$ es diu *incident* amb els vèrtexs x i y .

Sovint es representa un graf en el pla assignant un punt a cada vèrtex i unint per un segment o un arc de corba cada parella de vèrtexs adjacents.

El *grau* d'un vèrtex x , $g(x)$, és el nombre de vèrtexs y tals que $y \sim x$; equivalentment, és el nombre d'arestes incidents amb x . Si tots els vèrtexs tenen el mateix grau d , aleshores el graf es diu *d-regular*.

Un *cicle* de *longitud* l és una successió de vèrtexs diferents $x_0, x_1, \dots, x_l$ tals que $x_0 \sim x_1 \sim \dots \sim x_l \sim x_0$. Anomenarem *quadrats* els cicles de longitud 4 i *triangles* els de longitud 3.

Donats dos vèrtexs x, y , la *distància* de x a y és el mínim dels enters l tals que hi ha una successió de vèrtexs $x = z_0 \sim z_1 \sim \dots \sim z_l = y$; si no hi ha cap d'aquestes successions, la distància és ∞ .

Sigui $G = (V, E)$ un graf i $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. La *matriu d'adjacència* A de G és la matriu quadrada d'ordre n definida per

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \sim x_j \\ 0 & \text{si } x_i \not\sim x_j \end{cases}$$

Notem que es tracta d'una matriu simètrica (la relació d'adjacència és simètrica) amb zeros a la diagonal (la relació és irreflexiva) i que el nombre de termes no nuls de la fila i és el grau de x_i .

Ara modelem la reunió del teorema mitjançant un graf $G = (V, A)$, fent correspondre a cada persona un vèrtex i a cada parella x, y de persones una aresta $a = xy$ si, i només si, x és amic de y . El teorema que cal demostrar és, aleshores, el següent:

Teorema *Sigui $G = (V, A)$ un graf amb $n = |V| \geq 4$ i tal que per a cada dos vèrtexs diferents x, y hi ha un únic vèrtex $z = f(x, y)$ tal que $x \sim z$ i $y \sim z$. Aleshores hi ha un únic vèrtex u tal que $x \sim u$ per a tot $x \in V - \{u\}$.*

Aquest enunciat és el que demostrarem a l'apartat següent. Tanmateix en podem donar dues altres versions l'equivalència de les quals amb aquesta es constata fàcilment:

A) Sigui V un conjunt amb $|V| \geq 4$, $E \subseteq \mathcal{P}_2(V)$ i $f: \mathcal{P}_2(V) \rightarrow V$ una aplicació tal que per a cada $s = xy \in \mathcal{P}_2(V)$ es compleix $xf(s) \in E$ i $yf(s) \in E$. Aleshores hi ha un únic $u \in V$ tal que $ux \in E$ per a tot $x \in V - \{u\}$.

B) Si $A = (a_{ij})$ és una matriu quadrada simètrica d'ordre $n \geq 4$ amb tots els termes 0 o 1, amb zeros a la diagonal i tal que per a cada dues files diferents i, j hi ha un únic k tal que $a_{ik} = a_{jk} = 1$, aleshores hi ha exactament una fila completa d'uns.

3. La demostració

Comencem amb dos lemes que emprarem després.

Lema 1.

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & t & 1 & \dots & 1 \\ & & \dots & & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & t \end{vmatrix} = (t-1)^{n-1} (t+n-1)$$

on n és l'ordre del determinant.

DEMOSTRACIÓ

Diguem $\Delta(t)$ al determinant de l'esquerra de la igualtat. Restant a les $n-1$ primeres columnes l'última i traient un factor $t-1$ a aquestes mateixes columnes, obtenim

$$\Delta(t) = (t-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ & & \dots & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & t \end{vmatrix}$$

Sigui $\Delta_n(t)$ aquest segon determinant. Desenvolupant-lo per a la primera columna es veu fàcilment que $\Delta_n(t) = \Delta_{n-1}(t) + 1$. Amb aquesta relació recurrent i el càlcul directe de $\Delta_3(t) = t + 2$, obtenim $\Delta_n(t) = \Delta_3(t) + n - 3 = t + 2 + n - 3 = t + n - 1$. Aleshores $\Delta(t) = (t-1)^{n-1} (t+n-1)$. $\square$

Lema 2. Si d és un enter > 2 , aleshores $d/\sqrt{d-1}$ no és un enter.

DEMOSTRACIÓ

Suposem primer que $d-1$ és un quadrat perfecte. En aquest cas $d-1$ i $\sqrt{d-1}$ tenen els mateixos divisors primers. Com que m.c.d. $(d, d-1) = 1$, també m.c.d. $(d, \sqrt{d-1}) = 1$ i $\sqrt{d-1}$ no divideix d . Per tant, en aquest cas, $d/\sqrt{d-1}$ és un racional no enter.

Suposem ara que $d-1$ no és un quadrat perfecte. Donem per sabut que si $q_1, \dots, q_s$

són primers diferents, aleshores $\sqrt{q_1 \cdots q_s}$ és irracional (la prova és fàcil, similar a la que $\sqrt{2}$ és irracional). Sigui $d-1 = p_1^{2\alpha_1} \cdots p_r^{2\alpha_r} q_1^{2\beta_1+1} \cdots q_s^{2\beta_s+1}$ la descomposició de $d-1$ en producte de primers. Com que $d-1$ no és un quadrat perfect, $s \geq 1$. Aleshores $\sqrt{d-1} = c\sqrt{q_1 \cdots q_s}$, per a cert enter c . Si $\sqrt{d-1}$ fos racional, $\sqrt{q_1 \cdots q_s}$ seria racional, que no és el cas. Per tant $\sqrt{d-1}$ és irracional i això implica que $d/\sqrt{d-1}$ no és enter. $\square$

Passem ara pròpiament a la demostració. Sigui $G = (V, A)$ un graf que compleixi les hipòtesis del teorema, és a dir, amb un mínim de quatre vèrtexs i tal que per a cada dos vèrtexs x, y diferents n'hi ha un altre $f(x, y)$ que és l'únic adjacent a x i a y . Volem demostrar que hi ha un únic $u \in V$ tal que $x \sim u$ per a tot $x \in V - \{u\}$. Dividirem la prova en set parts.

1. G no té quadrats.

DEMOSTRACIÓ

Si x, z_1, z_2, y és un quadrat, aleshores z_1 i z_2 són, tots dos, adjacents a x i a y , en contra de la unicitat de $f(x, y)$. $\square$

2. Cada aresta pertany, exactament, a un triangle.

DEMOSTRACIÓ

Una aresta $a = xy$ pertany al triangle $x, y, f(x, y)$. Si, d'altra banda, una aresta $a = xy$ pertany a dos triangles x, y, z_1 i x, y, z_2 , aleshores x, z_1, y, z_2 és un quadrat, en contradicció amb 1. $\square$

3. Tot vèrtex té grau parell ≥ 2 .

DEMOSTRACIÓ

Cada vèrtex z és adjacent als vèrtexs $f(z, x)$ amb $x \in V - \{z\}$, per tant $g(z) \geq 1$. Per a cada aresta $a = zx$ incident amb z n'hi ha una altra $a' = zx'$ de l'únic triangle al qual pertany a incident amb z . Així, les arestes incidents amb z es poden agrupar per parelles del mateix triangle i z té grau parell. $\square$

4. Hi ha un vèrtex de grau ≥ 4 .

DEMOSTRACIÓ

Sigui $a = xy$ una aresta i x, y, z el triangle al qual pertany. Els graus de x, y, z són ≥ 2 . Com que $n \geq 4$, hi ha un altre vèrtex v diferent dels anteriors. Si $f(x, v) = y$, aleshores $g(y) \geq 3$; si $f(x, v) = z$, aleshores $g(z) \geq 3$; finalment, si $f(x, v) \neq y, z$, aleshores $g(x) \geq 3$. En tot cas, doncs, algun dels vèrtexs x, y, z té grau ≥ 3 . Com que els graus són tots parells, entre $g(x), g(y), g(z)$ n'hi ha algun ≥ 4 .

5. Cada dos vèrtexs diferents estan a distància 1 o 2.

DEMOSTRACIÓ

Donats $x, y \in V$, tenim $x \sim f(x, y) \sim y$, d'on la distància de x a y és com a màxim 2. $\square$

6. G no és regular.

DEMOSTRACIÓ

Suposem que G és regular de grau d . Per 4, $d \geq 4$.

Segui $v \in V$. Calcularem el nombre de vèrtexs n com a funció de d classificant-los per la seva distància a v . Hi ha 1 vèrtex a distància 0 de v , que és el mateix v ; n'hi ha d a distància 1, que són els d vèrtexs adjacents a v ; per a cada vèrtex x adjacent a v n'hi ha $d-2$ a distància 2 de v , perquè entre tots els adjacents a x cal descomptar v i el vèrtex que forma triangle amb x i v . A causa de l'absència de quadrats, això fa un total de $d(d-2)$ vèrtexs a distància 2 de v . Així, el total de vèrtexs és $n = 1 + d + d(d-2) = d^2 - d + 1$.

Segui $A = (a_{ij})$ la matriu d'adjacència de G . Com que a cada fila hi ha d uns i $n-d$ zeros, resulta:

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

és a dir, d és un valor propi de A . Notem que A és simètrica i, per tant, diagonalitzable. Per a certa matriu M regular i certs nombres reals $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tenim $MAM^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. També es compleix $M A^2 M^{-1} = MAM^{-1} MAM^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$. Calculem explícitament A^2 i els seus valors propis. $(A^2)_{ii} = d$ perquè la fila i i la columna i coincideixen i tenen els d uns en les mateixes posicions. D'altra banda, si $i \neq j$, i (suposat que $V = \{x_1, \dots, x_n\}$) $f(x_i, x_j) = x_k$, aleshores $\sum_{l=1}^n a_{il}a_{lj} = a_{ik}a_{kj} = 1$. Això prova que A^2 és una matriu amb d als termes diagonals i 1 a la resta. N'obtenim el polinomi característic $c(A^2, x)$ aplicant el lema 1 amb $t = d - x$ i posant $n = d^2 - d + 1$: $c(A^2, x) = (d-1-x)^{n-1} (d+n-1-x) = (d-1-x)^{n-1} (d+d^2-d+1-1-x) = (d-1-x)^{n-1} (d^2-x)$. Els valors propis de A^2 són, doncs,

$$\lambda_1^2 = d^2, \lambda_2^2 = d-1, \dots, \lambda_n^2 = d-1.$$

Ja hem vist que d és valor propi de A , per tant $\lambda_1 = d$. Els altres valors propis de A són $\sqrt{d-1}$ o $-\sqrt{d-1}$, diguem que n'hi hagi p iguals a $\sqrt{d-1}$ i q iguals a $-\sqrt{d-1}$. La traça de A és $0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = d + (p-q)\sqrt{d-1}$, d'on obtenim $d = (q-p)\sqrt{d-1}$ i que $d/\sqrt{d-1}$ és un enter. Això contradiu el lema 2 i demostra que, en efecte, G no és regular. $\square$

Així doncs, no tots els vèrtexs tenen el mateix grau. En el punt següent veurem que un vèrtex de grau màxim és adjacent a tots els altres, la qual cosa demostra l'existència del vèrtex singular.

7. Si u és un vèrtex de grau màxim i x és un vèrtex de grau no màxim, aleshores $x \sim u$.

DEMOSTRACIÓ

Suposem que x no és adjacent a u . Sigui $u_1 = f(u, x)$, $u_2, \dots, u_d$ els vèrtexs adjacents a u i $x_1 = f(u, x)$, $x_2, \dots, x_l$ els adjacents a x . Sabem que d i l són parells i que $l \leq d-2$. A més, per l'absència de quadrats, $\{u_1, \dots, u_d\} \cap \{x_1, \dots, x_l\} = \{f(u, x)\}$. x no és adjacent a cap dels vèrtexs $u_2, \dots, u_d$ perquè altrament hi hauria algun quadrat. Per a cada u_i , $i = 2, \dots, d$, $f(x, u_i)$ és un dels x_j . Com que $l \leq d-2$, hi ha u_i, u_j diferents tals que $f(x, u_i) = f(x, u_j) = x_k$. Aleshores hi ha el quadrat u, u_i, x_k, u_j , fet que és contradictori. $\square$

Finalment, la unicitat:

8. Hi ha exactament un vèrtex de grau màxim.

DEMOSTRACIÓ

Primer provem que hi ha almenys dos vèrtexs de grau no màxim. En efecte, si només hi ha un vèrtex x de grau no màxim i tots els altres $u_1, u_2, \dots, u_n - 1$ són de grau màxim, aleshores, segons 7, $x \sim u_i$ i resulta $g(x) = n - 1$, que és el màxim grau possible, i obtenim una contradicció.

Siguin, doncs, x_1, x_2 dos vèrtexs diferents de grau no màxim. si hi hagués dos vèrtexs de grau màxim u_1, u_2 , aleshores, per 7, $x_1 \sim u_1, x_1 \sim u_2, x_2 \sim u_1, x_2 \sim u_2$ i tindríem el quadrat x_1, u_1, x_2, u_2 , fet que és contradictori. $\square$

El teorema està, doncs, demostrat.

En la interpretació col·loquial, el punt 6 garanteix que en la peculiar reunió no tothom té el mateix nombre d'amics, el 7, que existeix «l'amic universal» i el 8, que és únic.

Agraïment

Reconec gustosament que no hauria escrit aquestes ratlles sense la intervenció de Joan Trias, cap del Departament de Matemàtica Aplicada II de la UPC, que em va donar a conèixer el teorema i les referències bibliogràfiques que el tracten i em va desvetllar l'interès per trobar una demostració amb recursos elementals.

Referències

- [1] BAER, R., «Polarities in Finite Projective Planes». *Bulletin of the American Math. Soc.* **52** (1946), 77-93.
- [2] BIGGS, N., *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1974.
- [3] CHARTRANA, G., LESNIAK, L., *Graphs & Digraphs*. Wadsworth & Brooks, 1986.
- [4] ERDŐS, P.; RÉNI, A.; SÓS, V.T. , «On a Problem of Graph Theory». *Studia Scientiarum mathematicarum Hungarica*. (1966), 215-235.
- [5] GOULD, R., *Graph Theory*. The Benjamin/ Cummings Publishing Company, Inc., 1988.