

XXVIII Olimpíada matemàtica

Primera sessió. 22 de novembre de 1991. De 4 de la tarda a 8 del vespre

1. Demostreu que el número que escrit en base n , $n \geq 8$, és 1367631 és un cub perfecte.

En particular, calculeu l'arrel cúbica d'aquest número en base 10 i en base 1991.

2. Sigui S el conjunt de rectes que uneixen un punt del conjunt

$$A = \{(0, \frac{1}{a}) \mid a \in \mathbb{N}\}$$

i un punt del conjunt

$$B = \{(b+1, 0) \mid b \in \mathbb{N}\}.$$

Demostreu que un nombre natural m és compost si i només si el punt $M = (m, -1)$ està sobre una recta del conjunt S .

Determineu també el nombre de rectes del conjunt S que passen per un punt $M = (m, -1)$ en funció del nombre natural m .

3. L'abscissa d'un punt que es mou sobre la part positiva de l'eix de les x ve donada per

$$x(t) = 5(t+1)^2 + \frac{a}{(t+1)^3}$$

on a és una constant positiva.

Quin és el mínim valor de a pel qual $x(t) \geq 24$ per a tot $t \geq 0$?

4. Tenim dues circumferències S_1 i S_2 , iguals, de radi R , i tangents. Considerem una tangent comuna r , paral·lela a la recta que uneix els centres de S_1 i S_2 .

Siguin C_1 la circumferència tangent a r , S_1 i S_2 ,
 C_2 la circumferència tangent a C_1 , S_1 i S_2 ,
 C_3 la circumferència tangent a C_2 , S_1 i S_2 , etc.

Així obtenim una família de circumferències

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$$

Demostreu que el diàmetre de la circumferència C_n és $d_n = \frac{R}{n(n+1)}$

Segona sessió. 23 de novembre de 1991. De 9 del matí a 1 del migdia

5. Per a cada nombre natural n escrivim

$$(1 + \sqrt{2})^{2n+1} = a_n + b_n\sqrt{2}$$

i així tenim dues successions de nombres enters

$$a_1, a_2, a_3, \dots \quad \text{i} \quad b_1, b_2, b_3, \dots$$

a) Demostreu que a_n i b_n són imparells per a tot $n \in \mathbb{N}$.

b) Demostreu que b_n és la hipotenusa d'un triangle rectangle de catets $\frac{a_n+1}{2}$ i $\frac{a_n-1}{2}$.

6. a) Si z_1, z_2 i z_3 són tres nombres complexos d'igual mòdul tals que $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, ¿què podeu dir de la figura formada pels afixos d'aquests tres nombres complexos?

b) Si z_1, z_2, z_3 i z_4 són quatre nombres complexos d'igual mòdul tals que $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, ¿què podeu dir de la figura formada pels afixos d'aquests quatre nombres complexos?

7. Sigui $p(n)$ el nombre de factors primers del nombre natural n . Demostreu que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0$.

8. Sigui ABC un triangle qualsevol. Exteriorment a ell es construeixen dos quadrats $BAEP$ i $ACRD$ de costats AB i AC respectivament. Sigui M i N els punts mitjans de BC i ED .

Demostreu que AM és perpendicular a ED i que AN és perpendicular a BC .