

Estudis sobre el nim

Antoni Magaña

«És fàcil formular una estratègia perfecta utilitzant el sistema binari.» M. GARDNER, *Carnaval Matemático*, pàg. 234.

El nim és un joc senzill en el qual es disposa d'un conjunt finit de *bastonets* col·locats en files. El joc, en què participen dos jugadors, consisteix a retirar, alternativament, un nombre qualsevol de bastonets amb l'única condició que siguin de la mateixa fila. Perd qui retira l'últim bastonet.

Definició: Direm que una formació del nim és *guanyadora* si qui juga en aquell moment, després de diverses jugades, acaba guanyant la partida. Direm que una formació és *perdedora* si no és guanyadora.

L'objectiu d'aquest estudi és caracteritzar, mitjançant el sistema binari, les formacions guanyadores i perdedores del nim.

Els casos més fàcils d'analitzar són aquells en què cada fila consta únicament d'un bastonet. D'aquests casos en direm *formacions trivials*, i són els que primer caracteritzarem.

Proposició: Una formació trivial és guanyadora si, i només si, el nombre de files que tenim és parell.

Demostració: És evident; tot i així, la farem per inducció sobre el nombre de files. Si tenim només un bastonet, és clar que la formació és perdedora. Suposem ara que tenim un nombre parell qualsevol de files amb un bastonet cada una. Si traiem un bastonet, ens queda un nombre imparell de files, que, per hipòtesi d'inducció, és una formació perdedora. Aleshores, la formació inicial era guanyadora.

Per fer un estudi de totes les formacions (trivials i no trivials) del nim, introduïrem ara uns elements nous.

A cada formació del nim li associarem un conjunt de nombres escrits en sistema binari, de la manera següent: comptem el nombre de bastonets que hi ha a cada fila i

Exemple: nim 1-2-4-6

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Demostració: La matriu de les representacions binàries és de la forma:

[illegible]

Cada a_{ij} val 0 o 1.

Estem suposant que la suma d'algunes d'aquestes columnes és imparella (per exemple, la suma de n columnes):

$$\sum_i a_{ik_1}, \quad \sum_i a_{ik_2}, \quad \dots, \quad \sum_i a_{ik_n} \text{ són imparells,}$$

i els tenim ordenats, $k_1 < k_2 < \dots < k_n$.

Sigui j una de les files on hi ha un 1 a la posició k_n (de segur que en trobarem algun: si a cap fila no tenim un 1 a la posició k_n , la suma de la columna k_n seria zero i, per tant, no imparella). Això vol dir que a la fila del nim corresponent, la fila j , hi ha com a mínim 2^{k_n} bastonets. D'aquesta fila j és d'on retirarem algun o alguns bastonets.

En aquesta fila j , però a la matriu de les representacions binàries, mirem si a les posicions corresponents a les columnes de suma imparella tenim més 1 a part del que hi ha a la posició k_n . Si a una certa posició k_i d'aquesta fila tenim un 1, retirem de la fila j del nim 2^{k_i} bastonets; i repetim el procés tantes vegades com 1 haguem trobat. D'aquesta manera, la suma de la columna k_i corresponent deixarà de ser imparella, en substituir 1 per 0 a la posició k_i de la fila j .

Si a una certa posició de suma imparella k_i de la fila j tenim un 0, col·loquem 2^{k_i} bastonets, i iterem el procés tants cops com 0 tinguem a les posicions imparelles. Aconseguirem aleshores que la suma de la columna k_i sigui parella, ja que tindrem un 1 on abans hi havia un 0.

És clar que el nombre de bastonets que hem de col·locar és inferior al nombre de bastonets que hem de treure, a causa del fet que

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_{n-1}} < 2^{k_n} \quad \text{si} \quad k_1 < k_2 < \dots < k_n.$$

De fet, sabem que

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k_n-1} = 2^{k_n} - 1 < 2^{k_n}.$$

Per tant, podem retirar el nombre adequat de bastonets que faci que la paritat canviï a les columnes $k_1, k_2, \dots, k_n$. Després de la jugada, tindrem una formació parella (potser trivial o potser no trivial).

Exemples:

1) Nim 3-4-14-14-16-18

				1	1							1	1	
				1	0	0						1	0	0
		1	1	1	0							1	1	1
		1	1	1	0							1	0	1
1	0	0	0	0	0					1	0	0	0	0
1	0	0	1	0						1	0	0	1	0
2	2	3	4	1						2	2	2	4	2
fig. a						fig. b								

La figura *a* mostra la formació imparella sobre la qual hem d'actuar. I la figura *b* mostra com quedaria després de la jugada. De la quarta fila, per exemple, hem de treure'n 2^2 bastonets, i posar-n'hi 2^0 ; és a dir, hem de treure un total de 3 bastonets.

2) Nim 13-22-36-72-91

				1	1	0	1					1	1	0	1	
				1	0	1	1	0				1	0	1	1	0
		1	0	0	1	0	0					1	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	0			1	0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	0	1	1			1	0	1	1	0	1	1	
2	1	2	3	3	2	2			2	0	2	4	2	2	2	

Hem de treure $2^5 + 2^2 - 2^3 = 28$ bastonets de la tercera fila.

Demostrem ara el teorema.

Acabem de veure que una formació imparella es pot convertir en una formació parella; aquesta pot ser trivial o no. Si fos trivial, seria guanyadora i, per tant, no ens convé (guanyaria el nostre adversari). Hem de treure també l'únic bastonet que queda. És a dir, si el resultat de la jugada és una formació parella trivial, el que s'ha de fer és treure tots els bastonets de la fila, i deixar així una formació imparella trivial (que és perdedora).

Raonant per inducció s'acaba la demostració: la formació parella no trivial del començament es convertirà en jugar en una formació imparella no trivial; aquesta, la podem convertir en una formació parella no trivial o imparella trivial, i així successi-

vament. Com que el nombre de bastonets és finit, de segur que en un nombre finit de jugades podrem aconseguir una formació imparella trivial, que és perdedora.

Referències bibliogràfiques

GARDNER, M., *Carnaval matemático*. Alianza Editorial.

MOULIN, H., *Fondation de la théorie des jeux*. Ed. Hermann.