

32 Olimpíada Matemàtica Internacional

*Primer dia
17 de juliol*

1. Sigui I el centre de la circumferència inscrita en el triangle ABC . Les bisectrius interiors dels angles $\angle CAB$, $\angle ABC$ i $\angle BCA$ intersecten els costats oposats a A' , B' i C' respectivament. Demostreu que

$$\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}.$$

2. Sigui n un enter més gran que 6 i siguin $a_1, a_2, \dots, a_k$ tots els nombres naturals més petits que n i relativament primers amb n . Si

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_k - a_{k-1} > 0$$

demostreu que n és un nombre primer o una potència entera de 2.

3. Sigui $S = \{1, 2, 3, \dots, 280\}$. Trobeu el nombre natural n més petit tal que en qualsevol subconjunt de S amb n elements hi hagi 5 nombres que siguin primers entre si dos a dos.

*Temps 4 h 30 m
Cada problema val 7 punts*

*Segon dia
18 de juliol*

4. Sigui G un graf connex amb k arestes. Demostreu que és possible numerar les arestes de G de 1 a k de tal manera que, per a cada vèrtex de G que pertanyi a dos o més arestes, el màxim comú divisor dels nombres assignats a aquestes arestes és 1.

[Un *graf* és un conjunt de punts anomenats vèrtexs i un conjunt d'*arestes* que uneixen parells de vèrtexs diferents. Cada parell de vèrtexs diferents x, y té com a màxim una aresta que els uneix. El graf G és *connex* si per a cada parell x, y de vèrtexs diferents hi ha una successió de vèrtexs $x = v_0, v_1, v_2, \dots, v_m = y$ tal que per a cada parell $v_i, v_{i+1}, 0 \leq i < m$, està unit per una aresta de G .]

5. Sigui ABC un triangle i P un punt interior al triangle. Demostreu que almenys un dels angles $\angle PAB, \angle PBC$ o $\angle PCA$ és menor que 30° o igual.

6. Una successió infinita $x_0, x_1, x_2, \dots$, de nombres reals és *acotada* si hi ha una constant C tal que $|x_i| \leq C$ per a tot $i = 0, 1, 2, \dots$

Donat un nombre real a arbitrari més gran que 1, construïu una successió infinita i acotada $x_0, x_1, x_2, \dots$, tal que es compleixi

$$|x_i - x_j| \geq |i - j|^a, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (i \neq j).$$

Temps 4 h 30 m

Cada problema val 7 punts