

VI Olimpiáda iberoamericana

Primera prova

1. A cada vèrtex d'un cub s'hi assigna el valor $+1$ o -1 , i a cada cara el producte dels valors assignats als seus vèrtexs. Quins valors pot tenir la suma dels 14 nombres obtinguts així?

2. Dues rectes perpendiculars divideixen un quadrat en quatre parts, tres de les quals tenen cadascuna una àrea igual a 1. Demostreu que l'àrea del quadrat és quatre.

3. Sigui F una funció creixent definida per a tot nombre real x , $0 \leq x \leq 1$, tal que

a) $F(0) = 0$

b) $F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$

c) $F(1-x) = 1 - F(x)$

Trobeu $F\left(\frac{18}{1991}\right)$.

Durada 4 h 30 m

Segona prova

4. Trobeu un nombre N de cinc xifres diferents i no nul·les que sigui igual a la suma de tots els nombres de tres xifres diferents que es poden formar amb les cinc xifres de N .

5. Sigui $P(X, Y) = 2X^2 - 6XY + 5Y^2$. Direm que un nombre enter A és un valor de P si hi ha nombres enters B i C tals que $A = P(B, C)$.

- i) Determineu quants elements de $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ són valors de P .
- ii) Proveu que el producte de valors de P és un valor de P .

6. Donats 3 punts no alineats M, N i P , sabem que M i N són punts mitjans de dos costats d'un triangle i que P és el punt d'intersecció de les altures d'aquest triangle. Construïu el triangle.

Durada 4 h 30 m