

Corbes de Peano i representació conforme[†]

Julia Cufí*

Les corbes de Peano o corbes que omplen un espai tenen una història interessant i van lligades al procés, que va tenir lloc al final del segle passat, de formular amb precisió determinats conceptes matemàtics com ara és la mateixa idea de corba. Aquestes qüestions van impulsar el desenvolupament d'alguns aspectes de la topologia que, en un cert sentit, van culminar amb la caracterització dels espais de Peano deguda a Hahn i Mazurkiewicz cap a l'any 1924. Aquests problemes són més o menys coneguts per la majoria de matemàtics però segurament no ho és tant el fet que bastant més tard, l'any 1945, es reprengué la construcció de corbes que omplen un espai i que fossin analítiques en un cert sentit; de fet, que fossin valors frontera de funcions analítiques d'una variable complexa. Sembla sorprenent d'entrada que funcions tan erràtiques com les que omplen un espai es pugin obtenir per mètodes que tinguin alguna cosa a veure amb la representació conforme o amb les funcions holomorfes en general.

La construcció de corbes de Peano, ja siguin simplement contínues o bé analítiques, es pot fer per mètodes aritmètics o per mètodes geomètrics. Volem insistir aquí en l'aspecte geomètric ja que, a més de basar-se en idees semblants en el cas continu i en el cas analític, ens servirà per il·lustrar com un dels resultats més importants de l'anàlisi complexa, el teorema de representació conforme de Riemann, serveix per construir funcions holomorfes amb un comportament a la frontera prefixat.

L'exemple de Peano d'un arc de corba que omple un quadrat, és a dir, d'una funció contínua sobre un interval tancat de la recta que té per imatge tot un quadrat del pla, apareix històricament relacionat amb un altre problema, que és el de determinar l'àrea d'una corba de Jordan. Al llarg del segle passat, en l'esforç per definir rigorosament els conceptes matemàtics, la idea de corba era un problema considerable. Es considerava com una corba a $\mathbb{R}^2$ el gràfic d'un parell de funcions paramètriques $x = f(t)$, $y = g(t)$, amb $0 \leq t \leq 1$. La qüestió era saber quines condicions havien de satisfer f i g . Exigir la diferenciabilitat era excessiu perquè haurien quedat exclòs configuracions com ara un polígon. Jordan va proposar d'exigir només la continuïtat de f i g i

[†] Conferència Inaugural de la Secció de Matemàtiques del curs 1991-1992.

* Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona.

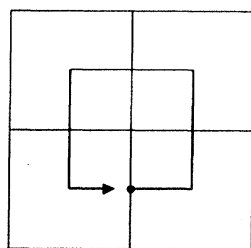
aquesta definició va semblar acceptable fins que Peano, l'any 1890, va publicar al *Math. Annalen* el seu exemple de dues funcions contínues f i g el gràfic de les quals omplia un quadrat i el seu interior. D'aquest exemple sorprenent i gairebé paradoxal per al seu temps prové la denominació d'espai de Peano, que es dona als espais que es poden obtenir com a imatges contínues d'un interval. La idea de corba de Jordan o corba simple va ser formulada amb precisió d'una manera geomètrica per Hurwitz l'any 1897 (en el congrés de matemàtiques de Zuric) dient que «la corba plana contínua més general sense punts múltiples es pot definir com un conjunt de punts que es poden fer correspondre un a un i contínuament amb els punts d'un segment o d'una línia recta, incloent els extrems del segment, si la corba no és tancada, i amb els punts de la circumferència d'un cercle, si la corba és tancada».

Jordan, en el seu *Cours d'analyse*, havia provat que l'àrea d'una corba (de Jordan) rectificable era zero i havia plantejat una qüestió més aviat poc precisa en preguntar si l'àrea d'una corba (de Jordan) podia ser «indeterminada». Peano va respondre referint-se al seu exemple de corba que omple un quadrat; però la corba de Peano té punts múltiples i, per tant, no és una corba de Jordan. Això era el 1896. Tres anys després Jürgens va provar que una regió plana no es pot aplicar de manera bijectiva i bicontínua sobre un segment de la recta (invariància del domini). El problema de saber si l'àrea d'una corba de Jordan qualsevol és necessàriament zero va quedar obert fins l'any 1902, en què Osgood va donar un exemple d'una corba de Jordan, el gràfic de la qual té àrea (mesura de Lebesgue bidimensional) positiva. Cal dir que el concepte d'àrea que es considerava en aquella època era l'anomenada àrea exterior, introduïda per Peano l'any 1887, i que era de fet la mesura exterior. Veurem més endavant que la construcció geomètrica de corbes de Peano i la construcció geomètrica de corbes de Jordan d'àrea positiva estan molt relacionades. De fet, l'exemple d'Osgood dona, en el límit, una corba de Peano.

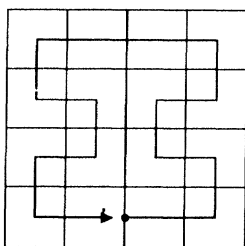
Una de les primeres construccions de corbes de Peano és deguda a Hilbert (*Math. Annalen*, 1891) i es basa en una idea molt senzilla, que és la següent:

11	14	21	22
12	13	24	23
43	42	31	32
44	41	34	33

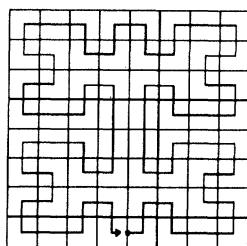
Figura 1



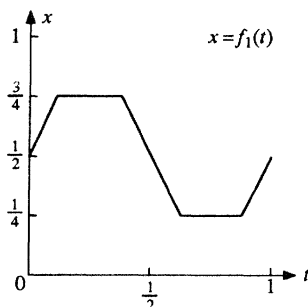
Graf de $x = f_1(t)$, $y = g_1(t)$



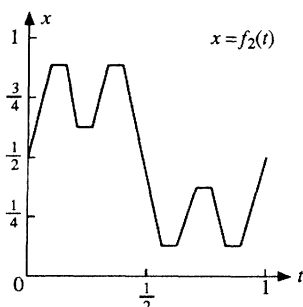
Graf de $x = f_2(t)$, $y = g_2(t)$



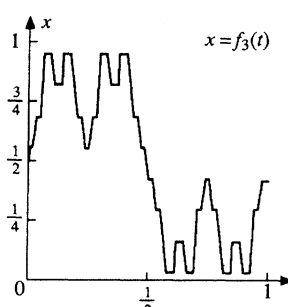
Graf de $x = f_3(t)$, $y = g_3(t)$



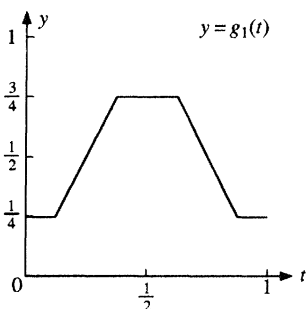
$x = f_1(t)$



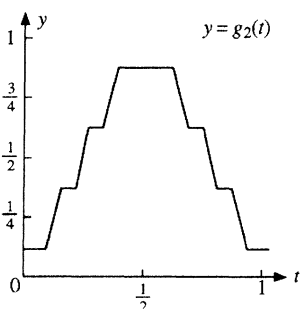
$x = f_2(t)$



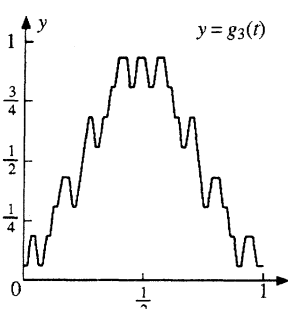
$x = f_3(t)$



$y = g_1(t)$



$y = g_2(t)$



$y = g_3(t)$

Figura 2

Dividim el quadrat unitat en quatre quadrats numerats de manera consecutiva. Si pensem que la funció que busquem ha de transformar l'interval $[0, 1]$ en tot el quadrat, és natural comprovar que, dividint $[0, 1]$ en quatre quarts, transforma cada un d'ells en cada un dels quadrats 1, 2, 3, 4. Si fem una nova divisió de cada quadrat en quatre i de cada quart de $[0, 1]$ en quatre trossos, podem continuar exigint que cada $1/16$ de $[0, 1]$ s'apliqui en un dels setze quadrats resultants. Continuem aquest procés i numerem els quadrats de cada generació de manera que si tenim dos quadrats consecutius de la generació m , l'últim i el primer de la generació $m + 1$ de cada un d'ells

siguin també adjacents. Ara cada punt $t \in [0, 1]$ és el límit d'intervals de longitud 4^{-m} que el contenen i a cada interval li correspon un quadrat de la m -èsima generació. Si fem correspondre a t el punt comú a tots els quadrats que tenen costat 2^{-m} , no és difícil comprovar la continuïtat de la corba que s'obté.

L'esquema de la figura 2 representa els tres primers estadis en la construcció d'una corba de Peano seguint el principi anterior. Les funcions $f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ i $g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t)$ són contínues i el gràfic del parell $x = f(t)$, $y = g(t)$ omple el quadrat unitat.

L'exemple de Peano dóna una transformació contínua que fa augmentar la dimensió, fent-la passar d'1 a 2. Un altre exemple, ben conegut, d'una funció contínua que produeix una variació en la dimensió és la funció ternària de Cantor. És una aplicació contínua del conjunt ternari de Cantor C sobre l'interval unitat $I = [0, 1]$. Aquesta funció es pot estendre a una funció contínua a tot I donant-li valor constant en els intervals complementaris de C . L'esquema següent n'il·lustra la gràfica:

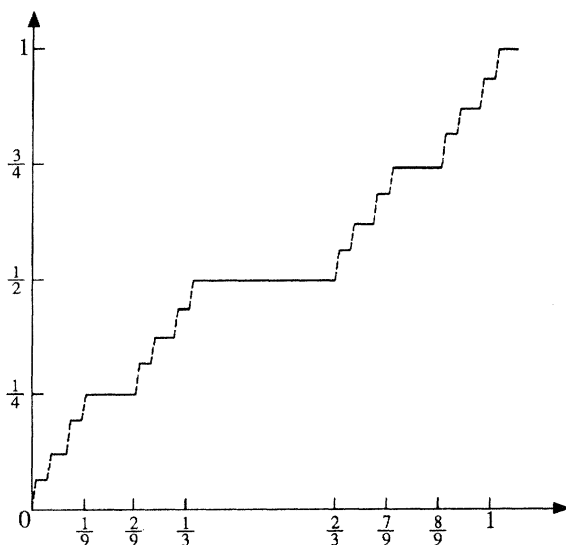


Figura 3

La possibilitat d'obtenir un espai com a imatge contínua del conjunt de Cantor no es redueix a l'interval unitat. És un fet conegut que tot espai mètric compacte és una imatge contínua del conjunt de Cantor.

Sabem doncs que el quadrat unitat de $\mathbb{R}^2$ es pot obtenir com una imatge contínua del conjunt de Cantor C . Això és una conseqüència del que acabem de dir o bé de considerar la composició de la funció ternària de Cantor amb una funció de Peano. Suposem que $f: C \rightarrow Q = I \times I$ apliqui contínuament el conjunt de Cantor sobre Q .

Podem estendre f a una aplicació $f^* : I \rightarrow Q$, contínua, de la manera següent: si (a, b) és un interval de $I \setminus C$, a Q hi ha un segment L que uneix $f(a)$ amb $f(b)$. Definim f^* sobre $[a, b]$ com una parametrització del segment L al llarg d'aquest interval. La funció f^* dóna, òbviament, una corba de Peano que, a més a més, és derivable gairebé per a tot, ja que ho és $I \setminus C$ i C té mesura zero.

Aquesta mateixa idea d'interpol·lar linealment els valors d'una funció definida sobre el conjunt de Cantor serveix per demostrar el teorema de Hahn i Mazurkiewicz al qual ens hem referit al començament.

Fent honor a l'exemple de Peano, s'anomena espai de Peano tot espai mètric que sigui compacte, connex i localment connex. Fent servir propietats ben conegudes de les funcions contínues resulta que tot espai de Hausdorff que sigui la imatge per a una funció contínua de l'interval unitat I és un espai de Peano. El teorema de Hahn i Mazurkiewicz afirma que el recíproc també és cert, és a dir, que tot espai de Peano és la imatge contínua de I , i respon així la pregunta, natural després de l'exemple de Peano, de saber quins espais es poden obtenir precisament transformant continuament I .

Pel que fa al problema de determinar l'àrea d'una corba de Jordan, ja hem dit que Osgood va ser el primer a donar un exemple que feia veure que aquesta àrea podia ser positiva i posava també de manifest la relació d'aquesta qüestió amb l'existència de corbes que omplen un quadrat. Tot i que la construcció d'Osgood és interessant i la

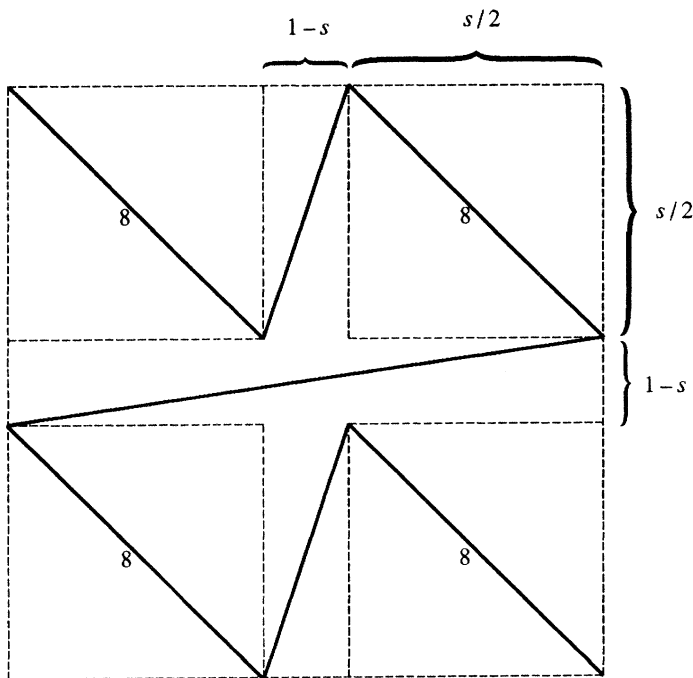


Figura 4

idea en què es basa pot ser d'interès per a altres problemes, potser és preferible de referir-se a un article molt recent (*The Am. Math. Monthly*, febrer de 1991) de T. Lance i E. Thomas, els quals construeixen d'una forma molt senzilla una família uniparamètrica d'arcs de $\mathbb{R}^2$ amb àrea positiva que convergeixen uniformement cap a una corba que omple un espai. Per a cada valor del paràmetre s , $0 < s < 1$ els autors construeixen un arc de Jordan que té àrea s^2 . Per a $s = 1$ la mateixa construcció dóna lloc a un arc que ara no és simple però que a més de tenir àrea 1 omple tot el quadrat unitat. La peça bàsica de la construcció és l'arc que il·lustra el gràfic de la figura 4 i que correspon a una divisió de $I \times I$ en 4 quadrats entre els quals hi ha una separació igual a $1 - s$.

El procés que se segueix és anar introduint més llaços d'aquests tipus en cada un dels quadrats, de manera que la separació entre els 4^m quadrats de la m -èsima generació sigui la separació entre els quadrats de la generació $m - 1$ elevada al quadrat. Per exemple els dos primers passos per a $s = 1/2$ serien

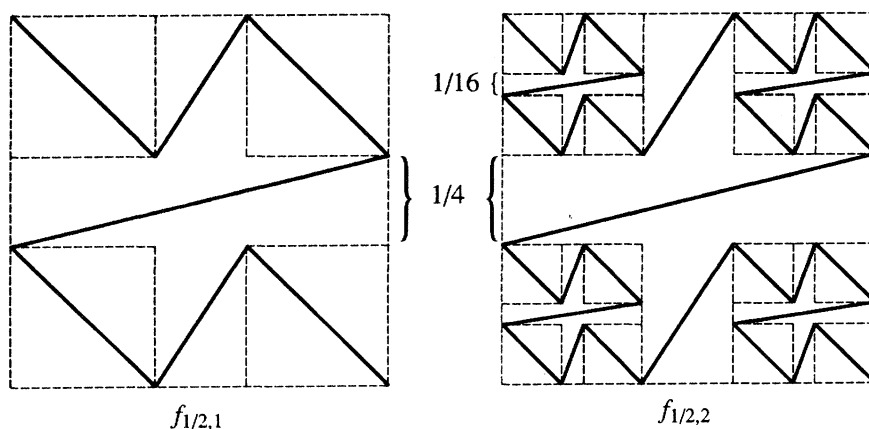


Figura 5

Si $f_{s,m}(t)$, $0 \leq t \leq 1$ descriu el llaç de la generació m corresponent als valors s del paràmetre, $f_s(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{s,m}(t)$ és un arc de Jordan que conté el conjunt de Cantor bi-dimensional determinat pel sistema de quadrats. Com que els 4^m quadrats de la generació m cobreixen una àrea igual a $\left(\frac{1+(2^m-1)s}{2^m}\right)^2$, resulta que la corba límit té àrea s^2 .

Quan s val 1 llavors la corba $f_1(t)$ conté cada un dels segments $x = k/2^m$ i $y = k/2^m$ per a $k = 1, 2, \dots, 2^m - 1$ i $m = 1, 2, 3, \dots$ i aquest conjunt de línies és dens a $I \times I$. Per tant $f_1(I) = I \times I$.

Hem deixat de banda altres aportacions a la història de les corbes de Peano com ara algunes construccions més analítiques, la més coneguda de les quals és la de Schoenberg l'any 1938. Però amb el que hem dit ja es pot entendre prou bé què hi ha darrera del problema de cobrir un quadrat amb una corba contínua o de cobrir una

àrea positiva amb un arc de Jordan, i com el teorema de Hahn i Mazurkiewicz i el d'invariància del domini tanquen del tot les qüestions que s'hi relacionen, des d'un punt de vista topològic.

L'any 1945 Salem i Zygmund van considerar la qüestió de l'existència de corbes de Peano que fossin valors frontera de funcions holomorfes de variable complexa. La seva pregunta era si hi ha una corba de Peano $x = F(t)$, $y = G(t)$ de manera que les components $F(t)$, $G(t)$ siguin, respectivament, la part real i la part imaginària dels valors presos per una sèrie de potències sobre el seu cercle de convergència. En altres paraules, hi ha una sèrie de potències $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ de radi de convergència igual a 1, contínua en el disc tancat $|z| \leq 1$, i de manera que els valors $f(e^{i\theta})$ presos per $f(z)$ sobre la circumferència $|z| = 1$ omplin completament un quadrat?

El que busquen, doncs, Salem i Zygmund és una corba de Peano definida per una funció contínua f sobre la circumferència unitat, és a dir, sobre l'interval $[0, 2\pi]$, que sigui a més a més el límit uniforme d'una successió de funcions holomorfes a un entorn de $|z| \leq 1$. Això no implica que f sigui analítica com a funció de $\theta \in [0, 2\pi]$ ni tan sols derivable. El que vol dir exactament és el següent: si $f(\theta)$ és una funció contínua a $[0, 2\pi]$ (i periòdica), aquesta funció té una sèrie de Fourier de la forma $f(\theta) \sim \sum_{-\infty}^\infty a_n e^{in\theta}$, $a_n \in \mathbb{C}$. Doncs bé, les funcions que consideren Salem i Zygmund són les que corresponen a una sèrie de Fourier amb $a_n = 0$ si $n < 0$, és a dir, són de la forma

$$f(\theta) \sim \sum_0^\infty a_n e^{in\theta}.$$

El problema és, doncs, saber si una corba de Peano es pot construir fent servir no totes les funcions contínues, sinó només la *meitat* formada per les que tenen sèrie de Fourier amb la part negativa nul·la. La resposta a aquesta qüestió és afirmativa, però el que sembla més interessant és que tota sèrie de potències lacunar, els coeficients de la qual formen una sèrie que convergeix prou a poc a poc, dóna lloc a una corba de Peano. Recordem que una sèrie de potències $\sum_1^\infty a_\beta z^{n_\beta}$ es diu que és lacunar si hi ha un nombre $\lambda > 1$ de manera que $n_{\beta+1}/n_\beta \geq \lambda$, per a tot β . La funció definida per aquesta sèrie és contínua a $|z| \leq 1$ si, i només si, $\sum_1^\infty |a_\beta| < \infty$. El que Salem i Zygmund van provar és que si la sèrie lacunar compleix la condició: $\lambda |a_1| + \lambda^2 |a_2| + \dots + \lambda^p |a_p| < \lambda_p C(\lambda) [|a_{p+1}| + |a_{p+2}| + \dots]$, on $C(\lambda)$ és una constant que només depèn de λ , llavors els valors de $f(z) = \sum_1^\infty a_\beta z^{n_\beta}$ sobre $|z| = 1$ omplen un cert quadrat.

És evident que una certa restricció al creixement dels coeficients a_n s'ha d'imposar perquè si no $f(e^{i\theta})$ seria, per exemple, una funció amb derivada contínua i en aquest cas no pot omplir un quadrat.

La demostració de Salem i Zygmund és elemental en el sentit que no utilitza altres recursos que no siguin les propietats de les sèries i de les sèries de potències. La prova no és, però, ni de bon tros senzilla. No entrarem en el detall de la demostració perquè ja hem dit que ens volem concentrar més en els mètodes geomètrics, però sí que val la pena dir que la mateixa prova es dedueix que, de fet, el conjunt de valors de

$\theta \in [0, 2\pi]$ que s'utilitzen per omplir un quadrat és de mesura zero. En canvi, i això sembla que pugui anar en un sentit contrari, el conjunt de valors del paràmetre θ que van a parar a un mateix punt del quadrat és perfecte i, per tant, no numerable.

Una qüestió interessant que es planteja un cop se sap que hi ha funcions *analítiques*, és a dir, valors frontera de funcions analítiques, que omplen un quadrat, és saber quina és la màxima regularitat que poden tenir aquestes funcions. Suposem que $x = F(t)$, $y = G(t)$ és una representació paramètrica d'una corba de Peano que, de moment, només suposem que és contínua. Si la funció $F(t)$ compleix una condició de Lipschitz d'ordre α i $G(t)$ una condició de Lipschitz d'ordre β , és fàcil de veure que ha de ser $\alpha + \beta \leq 1$. D'altra banda, només cal analitzar, per exemple, la construcció de Hilbert d'una corba de Peano per veure que, en aquest cas, $\alpha = \beta = 1/2$ i que, per tant, el màxim valor 1 es pot assolir. Si $F(t) + iG(t) = f(e^{it})$ és una funció analítica a $|z| < 1$ que compleix una condició de Lipschitz d'ordre γ a $|z| \leq 1$, és sabut que $F(t)$ i $G(t)$ han de ser de Lipschitz del mateix ordre γ . Per tant del que hem dit es desprèn que, en el cas analític, és $\gamma \leq 1/2$. La construcció de Salem y Zygmund posa de manifest que és possible obtenir una corba de Peano *analítica* $f(e^{it}) = F(t) + iG(t)$ que compleix una condició de Lipschitz d'ordre γ , per a algun $\gamma > 0$. El problema de saber si hi ha una funció $f(z)$ que és analítica a $|z| < 1$ i de Lip $1/2$ a $|z| \leq 1$ de manera que els valors de $f(z)$ per a $|z| = 1$ omplen un quadrat o, en tot cas, determinar el valor màxim de γ de manera que una d'aquestes funcions pugui ser de Lip $_\gamma$ és, ara per ara, obert.

Entre l'any 1950 i 1955 van publicar-se diversos articles que presentaven variacions del resultat de Salem i Zygmund. Alguns donaven construccions més senzilles de funcions *analítiques* que omplien un quadrat i d'altres en milloraven el comportament però sota hipòtesis més restrictives. Citarem només el resultat de Schaeffer (1953), el qual va establir que una sèrie lacunar $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n^2}$, amb $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ i una restricció convenient al decreixement dels a_n , té la propietat que cada valor $f(z)$ que f pren sobre el disc $|z| < 1$ el pren també sobre la circumferència $|z| = 1$.

Si es fan servir resultats sobre l'àlgebra de les funcions que són contínues al disc tancat $|z| \leq 1$ i holomorfes al disc obert $|z| < 1$, obtinguts per Rudin i Carleson l'any 1956, es pot provar d'una manera molt ràpida l'existència de corbes de Peano *analítiques*. El teorema de Rudin i Carleson diu que si E és un subconjunt tancat i de mesura zero de la circumferència $|z| = 1$ i f una funció contínua sobre E , llavors hi ha una funció F contínua a $|z| \leq 1$ i analítica a $|z| < 1$ que interpola F sobre E , és a dir, que F restringida a E coincideix amb f . Doncs bé, n'hi ha prou d'agafar com a E el conjunt de Cantor ordinari i com a f una funció contínua que transformi E en un quadrat per obtenir, mitjançant una interpolació, la funció de Peano *analítica* que volem.

En qualsevol d'aquestes construccions, que són essencialment aritmètiques o analítiques, hom es queda amb la incògnita de saber quina és la geometria d'una funció analítica tan sorprenent que, sobre la frontera del disc, pugui omplir tot un espai. L'any 1954 G.R. MacLane va donar un exemple d'una funció que té les mateixes propietats que les construïdes per Schaeffer, és a dir, tot valor de $f(z)$ pres a $|z| < 1$ és pres a sota de $|z| = 1$, per mètodes geomètrics, construint la superfície de Riemann

de la funció de manera que es pot veure, ben clarament, quina és la corba de Peano corresponent. La corba de Peano que resulta és diferent de les dels exemples habituals perquè és formada, en un cert sentit, per segments, però la idea de la construcció no s'allunya gaire de la idea bàsica que ja va utilitzar Hilbert.

L'eina que fa servir MacLane i que és usada, en general, per construir una funció analítica amb un comportament determinat és el teorema de representació conforme de Riemann. El resultat clàssic de Riemann diu, com és ben sabut, que per a qualsevol domini del pla D que sigui simplement connex i diferent de tot el pla, hi ha una representació conforme de D sobre el disc unitat $|z| < 1$. Tot i que és, possiblement, el teorema més important de la teoria de funcions analítiques d'una variable complexa, val la pena insistir en el fet que el que té importància sobretot és que es tracta d'un teorema d'existència. És un teorema d'existència de funcions analítiques, univalents amb un comportament determinat per la geometria del domini D . La limitació del teorema de Riemann ve del fet que només permet de construir funcions univalents. Per això cal acudir, si es vol tenir un instrument per construir funcions analítiques més generals, a una versió del teorema de Riemann, deguda a Koebe i coneguda amb el nom de teorema d'uniformització, la qual assegura que qualsevol superfície de Riemann simplement connexa i hiperbòlica és conformement equivalent al disc $|z| < 1$. La hipòtesi d'hiperbolicitat fa aquí el mateix paper que el fet que D no sigui tot el pla en el teorema de Riemann, i evita que la superfície sigui el pla o bé l'esfera de Riemann.

La idea de la construcció geomètrica d'una funció $f(z)$ analítica a $|z| < 1$, contínua a $|z| \leq 1$ de manera que transforma $|z| = 1$ en tot el quadrat $Q = I \times I$ i $|z| < 1$ en el seu interior, és muntar sobre Q una superfície de Riemann simplement connexa (i hiperbòlica) de manera que puguem veure d'una forma prou clara quina és la projecció de la seva frontera, o almenys d'una part de la seva frontera.

La peça bàsica per construir la superfície de Riemann és el resultat d'enganxar dos discos plans o bé dos quadrats a través d'un tall fet en cadascun d'ells. El model resultant és el que correspon a la superfície de Riemann de la funció $\sqrt{z}$ a $|z| < 1$ i és

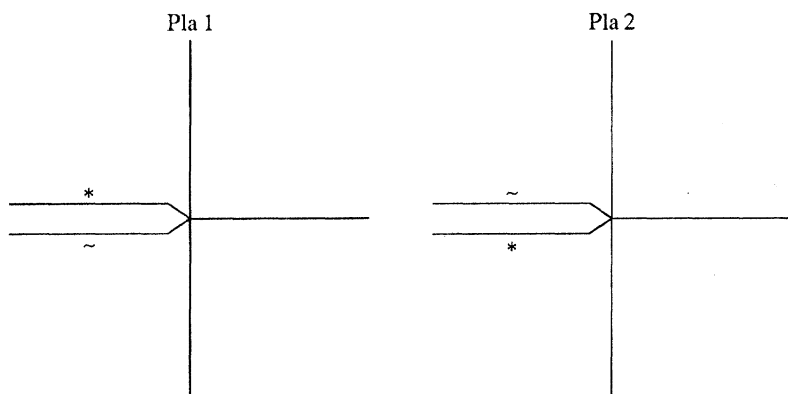


Figura 6

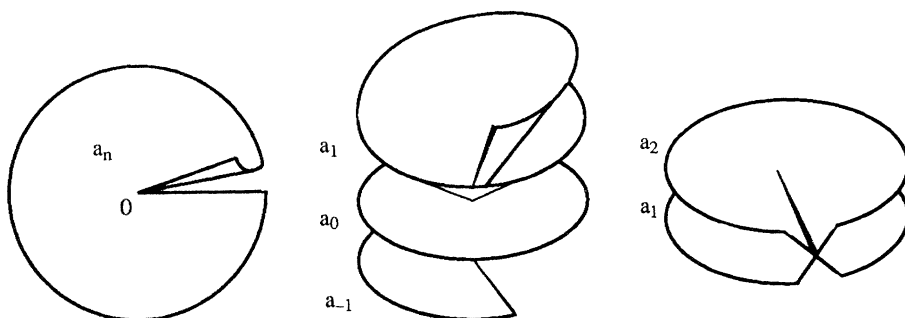


Figura 7

prou conegut. Recordem només que, un cop fets els talls, les arestes obtingudes s'enganchen de manera creuada i que la superfície que en resulta és a $\mathbb{C}^2$, per tant, més enllà de la nostra intuïció geomètrica. Els gràfics de les figures 6 i 7 poden servir per il·lustrar com és aquesta superfície de Riemann.

A partir d'aquest model la construcció és la següent:

Dividim el quadrat unitat Q en quatre punts oberts Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 numerats, per exemple, seguint l'ordre dels quadrants. Sigui Q_{ij} el quadrat que és el quart obert de Q_i que està situat respecte de Q_i com Q_j ho és respecte de Q . I així successivament. La superfície de Riemann es construeix fent servir cada quadrat $Q_{i_1, i_2, \dots, i_p}$, $p \geq 1$ una vegada. Fem quatre talls al quadrat Q seguint els segments que van de $1/2 + i/2, -1/2 + i/2, -1/2 - i/2 - i/2$ i $1/2 - i/2$ fins a $1/2 + i, -1/2 + i, -1/2 - i$ i $1/2 - i$, respectivament. En els quatre quadrats Q_j $1 \leq j \leq n$ fem els talls corresponents (un a cada un d'ells) i els enganxem amb Q seguint aquests talls. Repetim el procés fent a cada Q_i quatre talls, des del centre de cada quart fins a la vora, i els quatre quadrats Q_{ij} $1 \leq j \leq n$ s'enganchen als Q_i seguint aquests talls. L'esquema corresponent als dos primers passos és el representat en la figura 8.

Els quadrats de les divisions successives es van enganxant de la mateixa manera i s'obté una superfície de Riemann S que és simplement connexa, hiperbòlica i que té per projecció sobre el pla el quadrat unitat obert. La superfície S es pot convertir en una superfície amb vora (només parcialment perquè queda la frontera ideal) substituint els quadrats de S pels quadrats tancats corresponents. La part de vora que s'introdueix d'aquesta forma consisteix en segments la projecció dels quals cobreix els punts de Q que tenen coordenades racionals diàdiques. La funció $f(z)$ que volem obtenir resulta de representar conformement el disc $|z| < 1$ sobre S (fent servir el teorema d'uniformització) i després projectar-lo sobre Q . Suposant demostrat que la funció $f(z)$ estén contínuament a tot el disc $|z| \leq 1$, resulta que per a cada segment de la frontera de S hi ha un arc de $|z| = 1$ que s'aplica sobre ell i, per continuïtat, les imatges d'aquests arcs han de cobrir tot Q , perquè els diàdics racionals són densos a Q .

La funció obtinguda per aquest mètode és analítica a través de tots els arcs de $|z| = 1$ que van a parar a segments de la vora de S . De fet, el conjunt de singularitats

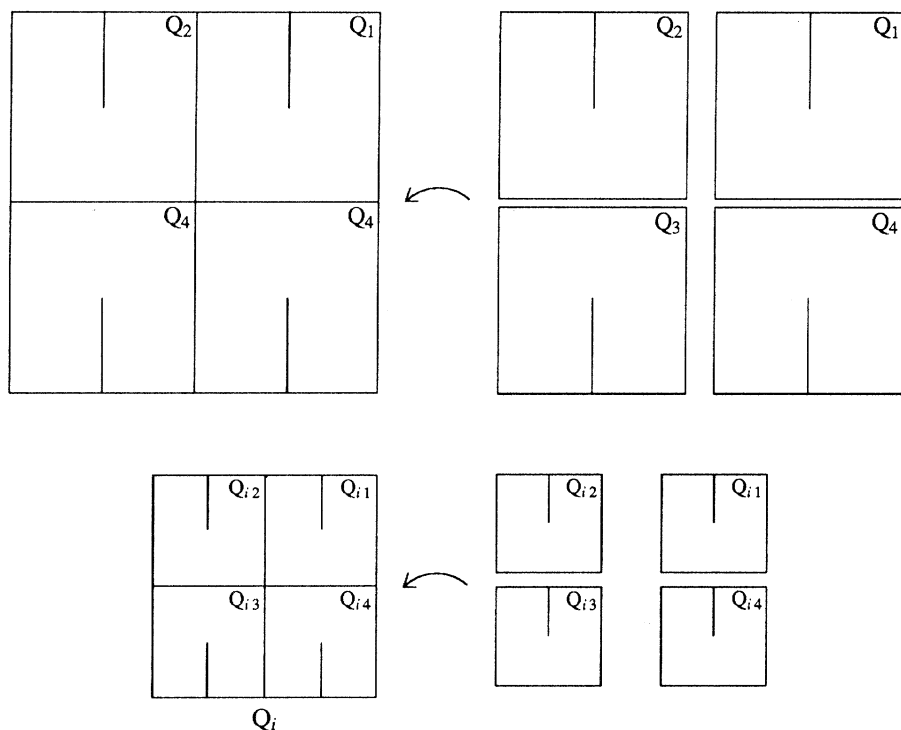


Figura 8

de f és de mesura zero, a diferència del cas de les sèries lacunars per a les quals $|z| = 1$ és la frontera natural. Tot i que l'ús dels quadrats en la construcció de S recorda l'exemple de Hilbert, hi ha algunes diferències notables. En la corba de Peano contínua construïda per Hilbert els punts múltiples són, com a màxim, quàdruples i la construcció es pot modificar de manera que siguin només triples. És interessant el fet, establert per Hahn (1913), que els conjunts de punts triples o de multiplicitat superior d'una corba de Peano han de ser densos a Q . En la construcció geomètrica de MacLane si un punt $(x, y) \in Q$ té coordenades que no són, cap de les dues, racionals diàdics, llavors (x, y) és un punt simple. En els altres casos (x, y) té multiplicitat numerable, la qual cosa estableix una altra diferència amb les funcions de Salem-Zygmund on, recordem-ho, cada punt de Q tenia multiplicitat no numerable.

Hem vist com fent servir funcions contínues i també funcions contínues que són els valors a la frontera de funcions analítiques es pot passar d'un segment a un quadrat, augmentant la dimensió d'1 a 2. Ens podem plantejar també si amb funcions sobre $|z| = 1$ que siguin també valors a la frontera de funcions analítiques es poden produir variacions de la dimensió més grosses, per exemple de 0 a 2, és a dir, passar d'un punt a un disc o a un quadrat. Naturalment que això no es podrà fer amb una funció contínua que sempre transforma un punt en un punt, però volem fer veure ara

que sí que és possible, si s'utilitzen unes funcions que, en un cert sentit, són les més properes a les funcions contínues.

Suposem que $f(z)$ és una funció analítica en el disc unitat $|z| < 1$ de la qual no sabem quin comportament té sobre la frontera $|z| = 1$. Si α , $|\alpha| = 1$ és un punt d'aquesta circumferència, quin sentit podem donar al valor de f en un punt α ? Una manera de fer-ho és introduir el concepte de valor generalitzat de f al punt α , $C(f, \alpha)$, entès com el conjunt de números $w \in \mathbb{C}$ per als quals hi ha una successió (z_n) de punts del disc amb $(z_n) \rightarrow \alpha$ i $(f(z_n)) \rightarrow w$. És obvi que dir que f és contínua fins al punt α és el mateix que dir que el valor generalitzat, $C(f, \alpha)$, es redueix a un punt.

El problema que volem considerar és el de buscar funcions analítiques $f(z)$ a $|z| < 1$ que siguin *gairebé contínues* sobre $|z| = 1$ i que el seu valor generalitzat a cada punt α , $|\alpha| = 1$ sigui tot un quadrat. Aquestes funcions transformaran, en el sentit que hem dit, cada punt de $|z| = 1$ en un quadrat.

Perquè el problema quedi ben plantejat només cal precisar què volem dir quan parlem d'una funció «gairebé contínua».

Considerem sobre la circumferència $|z| = 1$ les funcions anomenades quasicon-tínues. Aquestes funcions són, per definició, la suma d'una funció contínua amb la conjugada d'una funció contínua. Però la conjugació s'ha d'entendre aquí que és la conjugació de les funcions harmòniques. És a dir, si $u(e^{i\theta})$ és una funció contínua (i real) sobre $|z| = 1$, considerem la seva extensió harmònica $u(z)$ al disc $|z| < 1$. Ara prenem la seva conjugada harmònica $\tilde{u}(z)$ (vol dir que $u(z) + i\tilde{u}(z)$ és holomorfa) i la conjugada de $u(e^{i\theta})$ és la funció $\tilde{u}(e^{i\theta})$ igual al valor a la frontera del disc, $|z| = 1$, de la funció $\tilde{u}(z)$. Si la funció $u(e^{i\theta})$ és una mica millor que les contínues, llavors $\tilde{u}(e^{i\theta})$ és contínua; si la u només és contínua, la $\tilde{u}$ és gairebé contínua.

Vegem com el teorema de Riemann i les corbes de Peano es poden combinar per provar que hi ha funcions $f(z)$ que són holomorfes al disc $|z| < 1$, quasi-contínues a $|z| = 1$ i tenen la propietat que el seu valor generalitzat $C(f, \alpha)$ a cada punt α amb $|\alpha| = 1$ és tot un quadrat del pla.

Prenem un domini pla D_1 que consisteix en una banda enrotllada a dintre d'un disc D de manera que formi una espiral que es va acostant a la circumferència C del disc D ; és un domini simplement connex.

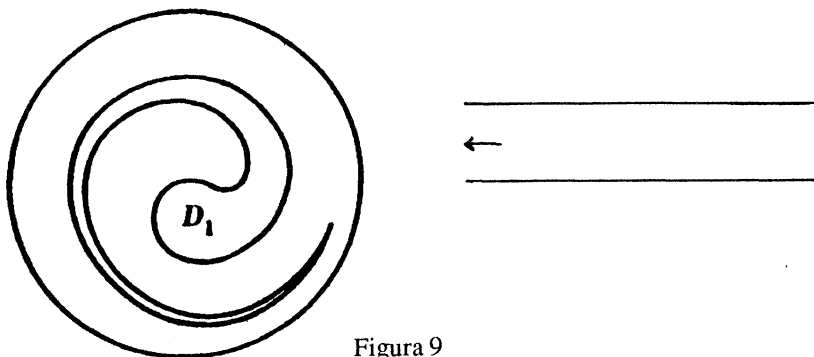


Figura 9

La representació conforme $\varphi(z)$ del disc $|z| < 1$ sobre D_1 només té un punt singular, per exemple $z = 1$, de manera que mitjançant una successió de punts del disc que tendeix cap a 1 ens podem acostar a qualsevol punt de la circumferència C cap a la qual s'acosta l'espiral. El resultat és que $f(z)$ és contínua a tots els punts de $|z| = 1, z \neq 1$ i el valor generalitzat $C(\varphi, 1)$ és tota la circumferència C . És fàcil veure que aquesta funció és quasi-contínua. Si ara considerem una funció g com les construïdes abans, és a dir, contínua en el disc D , holomorfa a D i que transforma C en el quadrat Q , la funció composta $f = g \circ \varphi$, que també és quasi-contínua, té com a valor generalitzat $C(f, 1)$ el quadrat Q .

Aquesta construcció dóna, doncs, una funció com la que volíem, però la condició que el valor generalitzat sigui Q només es compleix en un punt. Per aconseguir-ho a tots els punts de $|z| = 1$ hem de fer quelcom de semblant però substituint l'espiral D_1 per un domini més complicat. La idea de considerar el domini que ens convé és de Cartheodory i el seu exemple és el següent:

Partim d'un domini D_1 format per una espiral com la d'abans. Ara dividim la frontera de D_1 (tret de la part formada per la circumferència C) en arcs de diàmetre més petit que $1/2$ i substituïm cada un d'aquests arcs per un parell de corbes situades fora de D_1 i que facin espiral cap a $|z| = 1$. Això es pot fer de manera que cap parell de corbes de la nova família es tallin fora del punt inicial. Obtenim així un domini ampliat D_2 . Cada una de les noves corbes es divideix ara en arcs de diàmetre més petit que $1/4$ i cada un d'ells se substitueix per un parell de corbes que facin espiral cap a $|z| = 1$ augmentant D_2 a un domini D_3 . Continuant aquest procés indefinidament obtenim un domini $D_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ que és simplement connex.

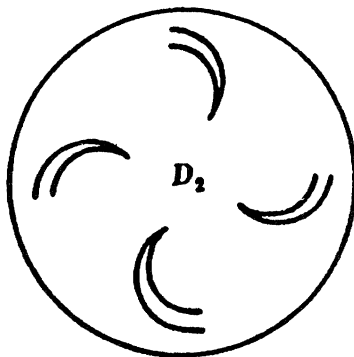


Figura 10

Ara la representació conforme de $|z| < 1$ sobre D_∞ és singular a tots els punts de $|z| = 1$ i té valor generalitzat igual a la circumferència C a cada punt, és a dir $C(\varphi, \alpha) = C$ per a tot $|\alpha| = 1$, i aquesta funció φ és, encara, quasi-contínua. Component φ

amb una funció de Peano analítica com la g d'abans aconseguim ara la funció $f = g \circ \varphi$ analítica a $|z| < 1$ que és quasi-contínua a $|z| = 1$ i que transforma cada punt d'aquesta circumferència, mitjançant el seu valor generalitzat, en tot un quadrat Q .

Potser hem anat a parar una mica lluny de les idees inicials de Peano en construir el seu exemple, però esperem que hagi servit per il·lustrar com la consideració de l'aspecte geomètric de les funcions, del qual el teorema de Riemann és un exemple excel·lent, permet moltes vegades de trobar el camí per construir funcions analítiques amb el comportament que es desitja.