Geometria del complement del nus figura vuit*

Carmen Safont

El nus figura vuit és un dels nusos més senzills. S'ha representat a la figura 1.

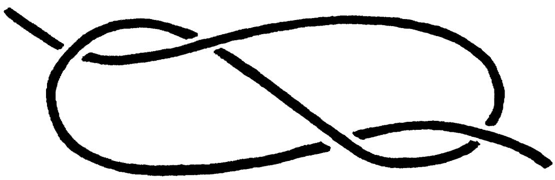

FIGURA 1.

Podem pensar en un nus qualsevol com el resultat de ficar d'una manera qualsevol una corda dins l'espai tridimensional R^3. El tros de corda és, topològicament, un interval. Per a estudiar els nusos matemàticament es comença per fer el següent pas:

— s'uneixen els dos caps de la corda, que es converteix així en un objecte homeomorf a un cercle.

— s'afageix a R^3 un punt a l'infinit. El resultat és un espai homeomorf a l'esfera tridimensional S^3.

D'aquesta manera el nus esdevé una parella (S^3, N) on $N \cong S^1$, i per tant els dos elements són espais compactes. En Topologia, quan es parla d'una parella d'espais es dóna importància a com està posat un dins l'altre. Amb ulls de topòleg, si es modifica la posició de la corda, ja tancada, dins S^3, el nus no ha canviat. Dit d'una altra manera, totes les parelles homeomorfes representen el mateix nus.

Per a visualitzar-lo millor, es sol representar un nus mitjançant el que s'anomena projecció regular plana. La figura 2 representa dues projeccions regulars del nus figura vuit.

* Aquest article recull una xerrada organitzada per la Societat Catalana de Matemàtiques amb motiu de l'inaguració del curs 1990-1991. Agraeixo a la Societat Catalana de Matemàtiques la invitació.

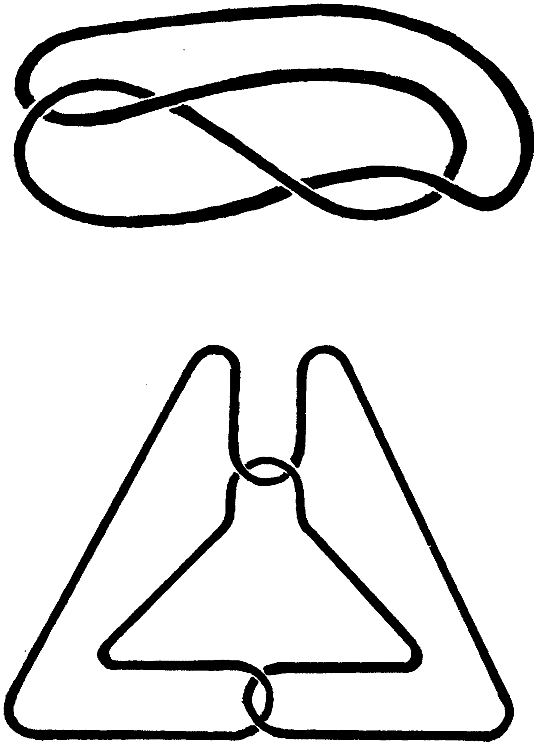

FIGURA 2.

El complement $S^3 \backslash N$ d'un nus N a S^3 és una varietat topològica de dimensió 3 (és a dir, un espai localment homeomorf a R^3), no compacta. En dimensió tres, qualsevol varietat topològica admet estructura diferenciable, única. Llavors, admet mètriques riemannianes. Jo vull fer veure que el complement del nus figura vuit admet una mètrica hiperbòlica.

1. Geometria de H^2 i H^3

Es pot introduir la geometria hiperbòlica comparant-la amb la geometria euclidiana. Fem una revisió dels elements més il·lustratius de la geometria euclidiana i la hiperbòlica: mètrica, rectes, geodèsiques i isometries.

Una mètrica sobre una varietat diferenciable es defineix normalment donant la manera de calcular la longitud de vectors tangents en cada punt. Llavors hi ha fórmules per a calcular la distància entre punts de l'espai, longitud de corbes, angles, àrees. Les geodèsiques són les corbes que minimitzen la longitud. Les isomeries són les

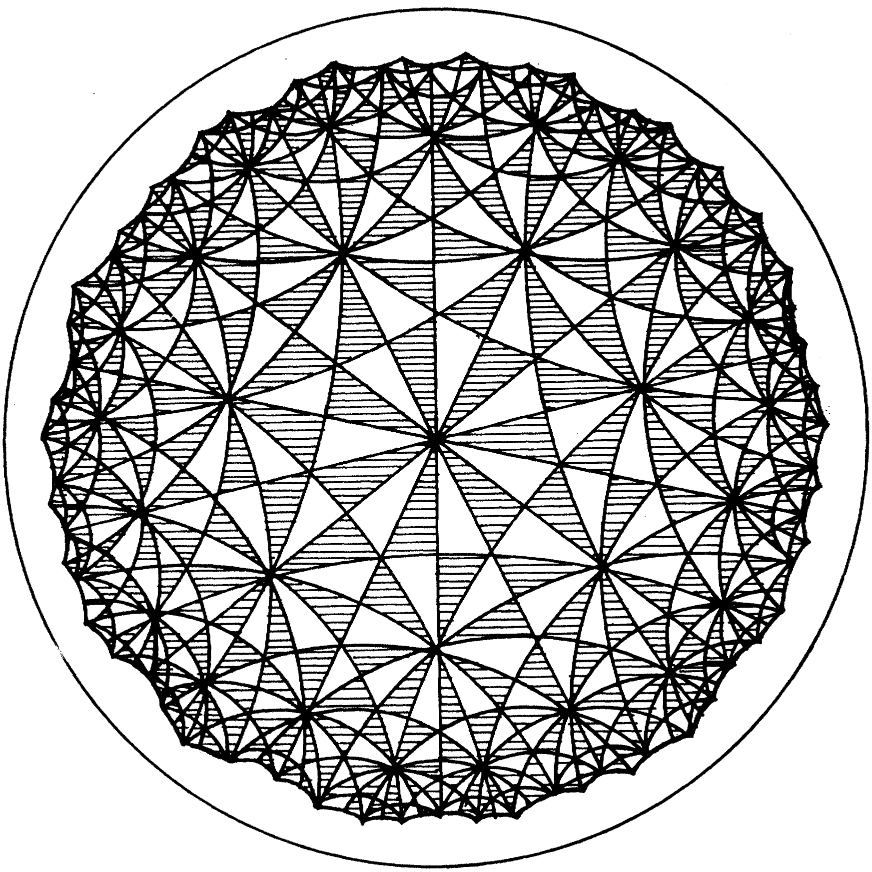

FIGURA 3.

transformacions que preserven la mètrica, les distàncies. També preserven els angles i, per tant, la mida i la forma de les figures.

Geometria euclidiana de E^2. El suport d'aquesta geometria és el conjunt de punts de R^2. La longitud d'un vector de coordenades (x_1, x_2) situat en un punt qualsevol de R^2 és $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$. Donats dos punts, la corba més curta que els uneix és la recta. Les isometries són translacions, rotacions i productes d'aquestes. Si permetem que inverteixin orientació, hem d'afegir les reflexions respecte a rectes.

Geometria hiperbòlica de H^2. En el model de Poincaré, conforme, H^2 és, com a conjunt de punts, l'interior del disc unitat de R^2. La mètrica no és l'euclidiana. Amb la mètrica euclidiana, la longitud d'un vector de coordenades (x_1, x_2) situat en un punt a distància r de l'origen seria $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2}$. En canvi, amb la mètrica hiperbòlica aquesta longitud és $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} / (1 - r^2)$, cosa que s'expressa $ds = dx \;/ (1 - r^2)$, on

dx denota la mètrica euclidiana i ds denota la mètrica hiperbòlica. Aquesta fórmula permet calcular longituds de corbes a H^2, distància entre dos punts, àrees, La distància entre dos punts és la longitud de la corba més curta que els uneix. Vista per nosaltres, que observem H^2 des de fora, aquesta corba no és en general una recta, sinó un arc de circumferència ortogonal a la vora del disc. La vora del disc no pertany a H^2 i es diu línia de l'infinit. Les isometries de H^2 són ben conegudes. Les que preserven orientació són de tres tipus: el·líptiques, parabòliques i hiperbòliques. Les que inverteixen orientació s'obtenen composant aquestes amb la reflexió respecte a un arc geodèsic de circumferència. La millor manera de comprendre-les és veure-les actuar sobre una tessel·lació. Una tessel·lació s'obté reflectint un polígon repetidament sobre els seus costats. Si és possible omplir H^2 sense que els polígons es superposin, s'haurà tessel·lat H^2. La figura 3 mostra una tessel·lació de H^2 per a triangles d'angles $\pi / 2$, $\pi / 3$, $\pi / 7$. Cada vèrtex és centre d'una isometria el·líptica que preserva la tessel·lació, d'angle π, $2\pi / 3$ o $2\pi / 7$. També hi ha isometries hiperbòliques que la preserven, amb eixos geodèsics que uneixen centres de rotació dels que acabem de citar.

És interessant comparar una propietat dels triangles al pla euclidià i al pla hiperbòlic. Al pla euclidià, per a determinar un triangle a menys de congruència cal conèixer els angles interiors i la longitud d'un costat. Al pla hiperbòlic dos triangles

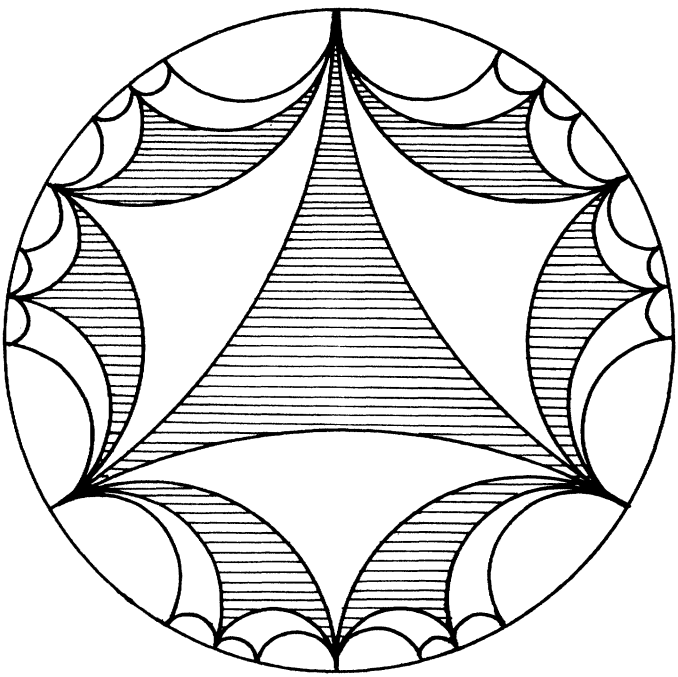

FIGURA 4.

amb els mateixos angles són congruents: I l'àrea d'un triangle és $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$, si α, β i γ són els angles interiors. L'àrea màxima s'assoleix per als triangles que tenen els vèrtexos a la línia de l'infinit. Aquesta àrea és π, aquests triangles es diuen ideals i són tots congruents. A la figura 4 es veu una tessel·lació de H^2 per triangles ideals. Hi ha isometries parabòliques, amb centre els vèrtexos dels triangles, que preserven la tessel·lació.

Entesa la geometria de H^2, la de H^3 s'entén per analogia. Un model de H^3 és l'interior del disc o bola unitat de R^3. També la fórmula $ds = dx / (1 - r^2)$ és la que dóna la mètrica. Només vull nomenar una diferència entre la dimensió 2 i la 3: els tetràedres ideals no són tots congruents. Dos tetàedres ideals són congruents si i només si tenen els mateixos angles diedrals. En particular, hi ha el tetràedre ideal amb tots els angles diedrals de 60 graus. Aquest s'anomena tetràedre ideal regular i és únic a menys d'isometries.

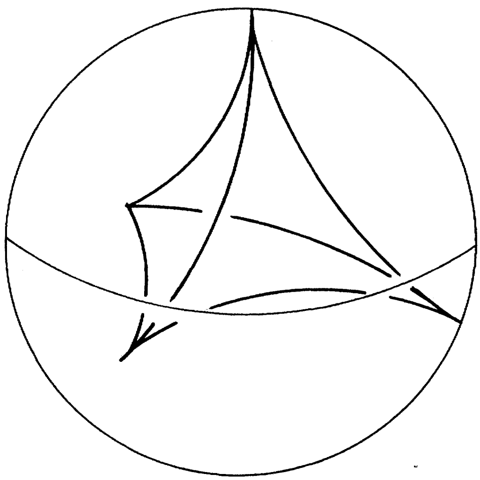

FIGURA 5.

2. El complement del nus figura vuit és unió de dos tetràedres ideals regulars

Pensant en S^3 com $R^3 \cup \infty$ resulta fàcil entendre S^3 com a unió de dues boles: la bola unitat de R^3 i el seu exterior a $R^3 \cup \infty$. Aquest exterior és homeomorf a una bola, i de fet la inversió respecte a l'esfera unitat és un homeomorfisme de S^3 que permuta una bola amb l'altra. Com que una bola és homeomorfa a un tetràedre, un topòleg es permet dir que S^3 és unió de dos tetràedres amb frontera comuna.

La projecció radial des de l'origen dóna un homeomorfisme entre la superfície d'un tetràedre inscrit en l'esfera unitat i la superfície de l'esfera, i indueix una trian-

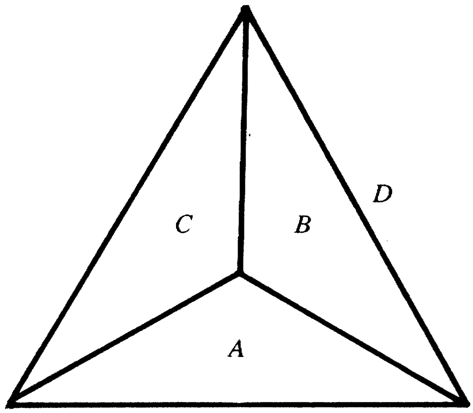

FIGURA 6.

gulació sobre aquesta. Si representem la superfície de la esfera unitat sobre un pla, també hi veiem la triangulació del'esfera amb 4 triangles, (A, B, C, D a la figura 6).

La figura 6 dóna una altra imatge dels dos tetràedres que formen S^3: un d'ells es pot pensar sota la superfície del paper i l'altre a sobre. La superfície del paper $R^2 \cup \infty$ és l'intersecció dels dos tetràedres.

La representació del nus figura vuit a la figura 7 torna a suggerir aquesta imatge de S^3:

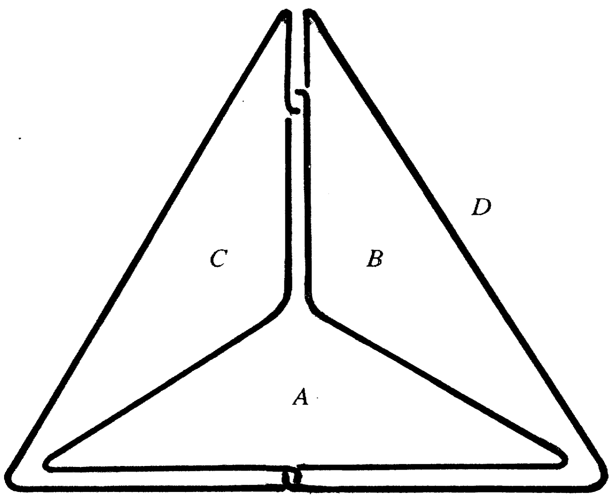

FIGURA 7.

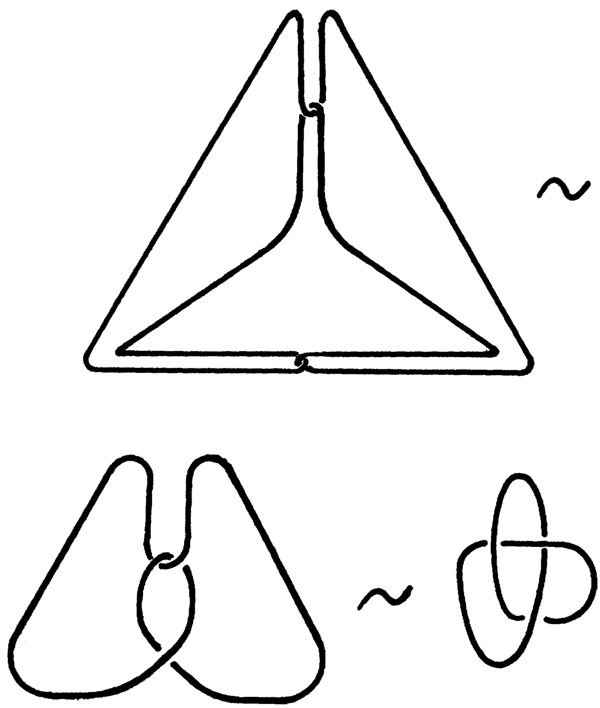

FIGURA 8.

Però encara no és gens clar que el complement del nus sigui unió de dos tetràedres sense vèrtexs. De fet, només cal canviar un creuament per a que el nus figura vuit passi a ser el nus trèvol (figura 8), i l'exterior d'aquest no és unió de dos tetràedres sense vèrtexos.

Ara bé, sobre la figura 7 podrem veure una altra descomposició de $R^3 \cup \infty$ en dues peces. Per tal de veure-la, posem dues arestes suspeses del nus, com a la figura 9. D'aquesta manera s'obté un complexe de dimensió 1 a R^3. Ara es poden afegir quatre cel·les 2-dimensionals, la vora de les quals jeu sobre aquest complexe. La figura 9 mostra dues d'aquestes cel·les.

Hem format així un complexe de dimensió 2 dins S^3, el complement del qual té dues components, que anomeno i i f, que són cel·les obertes, és a dir, homeomorfes a l'interior de la bola unitat de dimensió 3. Amb una mica d'observació es veu que en cada una de les dues arestes incideixen sis cares (veure figura 10). Dit d'una altra manera, podem pensar en dues boles de dimensió 3 a la vora de les quals hi ha marcada una certa descomposició cel·lular. Doncs bé, hem obtingut S^3 pegant les dues boles, no per un homeomorfisme de la vora però sí per una llei que respecta les cel·lulacions. El pegat és un homeomorfisme sobre l'interior de les cares de dimensió 2. Si

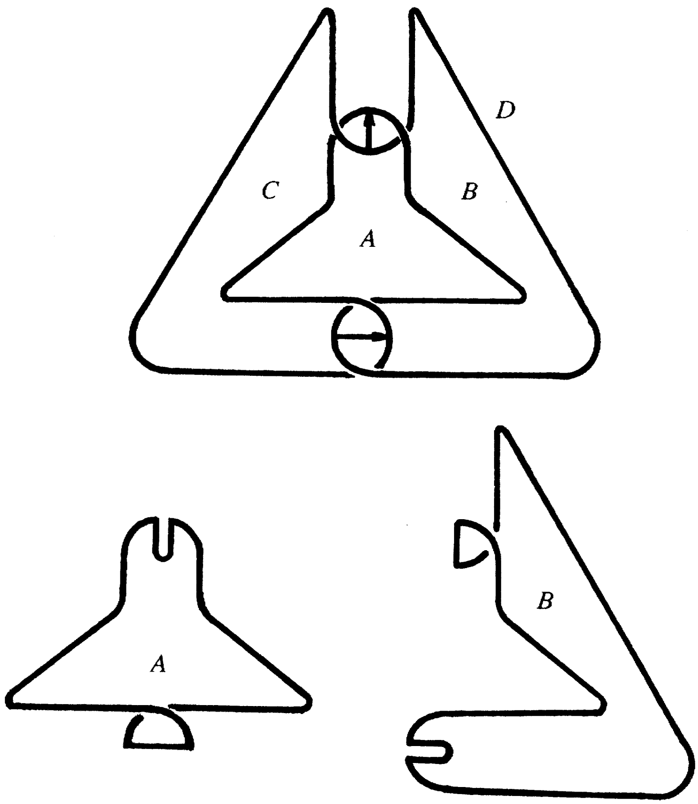

FIGURA 9.

volem entendre com hem fet el pegat, potser el més clar és fer la dissecció, és a dir, anar despegant el que s'ha pegat. És això el que es fa seguint la seqüència de la figura 10. Llavors es veu precisament la cel·lulació de la vora d'una de les 3-cel·les.

Ara bé, què ens queda si traiem el nus? Si considerem els complement del nus, del 1-esquelet del complexe queden només dues arestes, sense els vèrtexs. Les cares de dimensió 2 han perdut part de la vora, i el que queda de la cara és homeomorf a un triangle sense vèrtexs.

Les arestes marcades al 1-esquelet són les que queden quan es treu el nus figura vuit, unió de les arestes no marcades. Treiem, doncs, aquestes arestes no marcades. El resultat és el mateix que s'obté si es col·lapsa primer cada una d'aquestes arestes a un punt i després es treuen aquests (quatre) punts. Ara bé, com es veu a la figura 10, aquesta segona operació dóna lloc a un tetràedre sense vèrtexs. La conclusió, per tant, és que S^3 menys el nus figura vuit és unió de dos tetràedres sense vèrtexs, cada un dels quals hi és inclòs homeomòrficament.

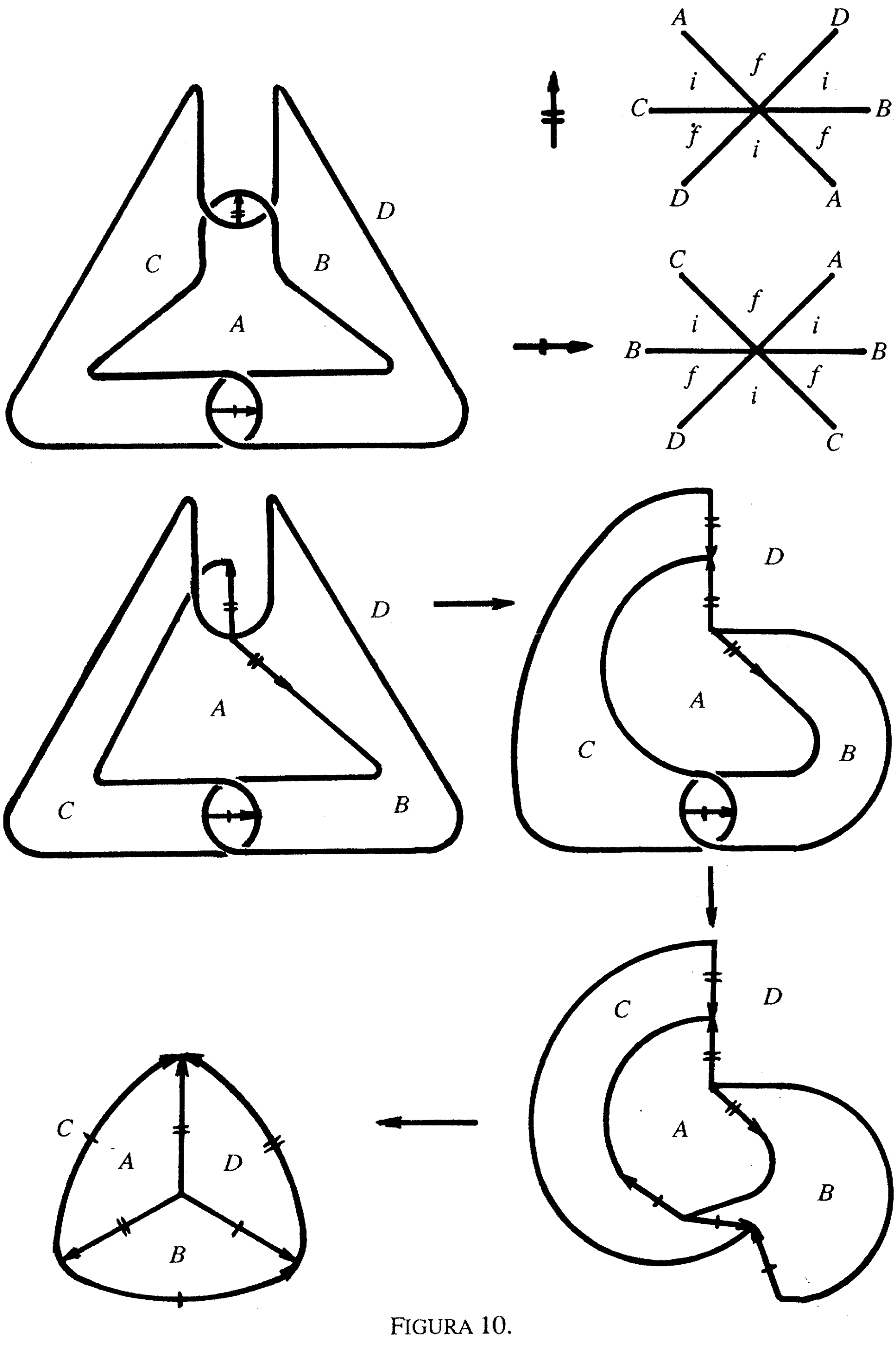

FIGURA 10.

3. L'estructura hiperbòlica

Cal entendre què implica la descomposició del complement del figura vuit com a unió de dos tetràedres sense vèrtexs. Un tetràedre del qual s'han tret els vèrtexs és topològicament equivalent a un tetràedre hiperbòlic ideal.

En un tetràedre ideal regular tots els angles diedrals són de 60 graus. Com que 60 x 6 = 360, podem tessel·lar H^3 amb tetràedres ideals regulars de manera que en cada aresta incideixin 6 tetràedres. Un teorema de Poincaré dóna suport a aquesta afirmació.

Ara resulta que les identificacions explicades a la secció anterior es poden realitzar per un grup d'isometries de H^3 que traslladen una parella de tetràedres adjacents d'aquesta tessel·lació omplint tot H^3. De manera que a H^3 veiem una família de rèpliques del complement del figura vuit obert. Totes aquestes rèpliques són isomètriques. En particular, tenen el mateix volum, igual al volum de 2 tetràedres ideals regulars,

$$2 \cdot 3\Pi(\pi / 3)2.029883\ldots$$

on Π denota el que s'anomena funció de Lovachevski, definida per

$$\Pi(\theta) = -\int_0^\theta \log|2 \sin u|\, du$$

Estem dient que H^3 és el recobridor universal del complement del nus figura vuit, i que aquest és el quocient de H^3 per l'acció d'un cert grup d'isometries. Es diu que el complement del nus figura vuit té estructura hiperbólica.

Tenir estructura hiperbòlica a un espai de dimensió 3 com el nostre permet utilitzar la mètrica per a estudiar la topologia de l'espai, gràcies al teorema de rigidesa de Mostow, una versió del qual ens diu el següent:

Teorema. Si una varietat de dimensió $n \geq 3$ admet alguna estructura hiperbòlica completa amb volum finit, aquesta és única a menys d'isometria.

Com a conseqüència, el número 2.029883 és un invariant topològic del complement del figura vuit. Així, si en qualsevol context trobem un nus desconegut amb volum diferent d'aquest, concloem que el nus no és el figura vuit.

El teorema de Mostow té altres conseqüències. Per exemple, implica que el grup de difeomorfismes, mòdul isotopia, d'una varietat hiperbòlica completa amb volum finit, de dimensió $n \geq 3$, és un grup finit.

L'exemple del figura vuit té interès històric. R. Riley va trobar en 1975 una representació injectiva del grup fonamental del complement del nus figura vuit en el grup d'isometries de H^3. Thurston va mostrar [1], amb la construcció geomètrica que jo he descrit, l'estructura, hiperbòlica del complement del nus figura vuit. Provava també que el complement del figura vuit és el recobridor doble de la varietat de Gieseking, varietat no orientable que s'obté identificant cares d'un tetràede ideal regular, coneguda des de 1912. Açò va ser la punta d'un iceberg. Va representar l'inici d'un gran desenvolupament de la geometria hiperbòlica. Thurston va estudiar a partir d'aquest exemple estructures hiperbòliques en varietats de dimensió 3. El complement de l'enllaç de Whitehead i dels anells de Borromeo admeten estructures que es poden veure directament com en el cas del figura vuit. Hi ha més nusos i enllaços que admeten estructura hiperbòlica. Thurston va provar que un nus K de S^3 admet estructura hiperbòlica si i només si no és satèl·lit d'un nus no trivial ni és un nus toroïdal.

El trèvol és un nus toroïdal. Com a conseqüència del teorema de Thurston se segueix que el seu complement no admet estructura hiperbòlica.

Abans de Thurston ningú no havia sospitat que les varietats de dimensió 3 podien admetre una classificació geomètrica, com passa en dimensió 2. Ell va formular l'anomenada conjectura de geometrització: tota varietat de dimensió 3 posseeix un sistema de tors que la descomponen en peces amb estructura geomètrica. Ell va proposar vuit geometries. La conjectura de geometrització és encara una conjectura (inclou la conjectura de Poincaré). Està provada per a varietats amb certes propietats.

Thurston va rebre una medalla Fields el 1982. Els seus descobriments han canviat la manera d'estudiar la topologia de les varietats, en especial les de dimensió baixa. Han intervingut de manera decissiva en la prova d'un bon nombre de resultats. Citaré dos teoremes d'enunciat molt senzill que han estat oberts durant molt de temps.

1) La conjectura de Smith, plantejada el 1940 i resolta el 1979 combinant resultats d'uns quants matemàtics de primera fila: Thurston, Bass, Meeks-Yau, Gordon-Litherland, ... [2]. La conjectura ja provada diu el següent: Tot difeomorfisme de S^3 que té ordre finit, té punts fixes i preserva l'orientació, és conjugat a una rotació d'angle $2\pi / n$.

2) Si el complement d'un nus és homeomorf al complement d'un altre nus, hi ha una isotopia de S^3 que porta un nus a l'altre. (C. Gordon-J. Luecke, 1989 [3].)

Referències

[1] W. Thurston, *Geometry and Topology of Three-Manifolds*, «Notes, Princeton University».

[2] H. Bass-J. Morgan, editors, «The Smith Conjecture», Academic Press, 1984.

[3] C. Gordon-J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, Bull. A.M.S. 20 (1989).