

XXVI Olimpíada matemàtica 1990

(Divendres, 16 de febrer de 4 a 8)

1. Siguin A, B, C els vèrtexs d'un triangle i H l'ortocentre. Demostreu la igualtat dels productes escalars

$$\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{HA}$$

2. Demostreu que si les longituds a, b, c dels costats d'un triangle compleixen $a < b < c$, aleshores l'angle C oposat al costat c compleix $\cos C < \frac{1}{2}$.

3. Sigui

$$A_n = 2^n + 2^{2n} + 2^{3n}$$

a) Demostreu que per a tot nombre natural n el nombre $A_{n+3} - A_n$ és divisible per 7.

b) Calculeu la resta de dividir A_{1990} per 7.

4. Donada la corba

$$y = x + \frac{1}{2x^2}$$

a) Calculeu l'àrea $S(t)$ limitada per la corba, la seva asímptota inclinada i les rectes $x = 1, x = t$. ($t > 1$)

b) Calculeu

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S(t)$$

(Dissabte, 17 de febrer de 9 a 1)

5. Resoleu a l'interval $[0, 2\pi]$ la inequació

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x > 0$$

6. Un triangle rectangle T_1 té els costats en progressió geomètrica i un altre T_2 els té en progressió aritmètica. Un costat del triangle T_1 és igual a un costat del triangle T_2 . Calculeu el valor màxim i el valor mínim de

$$\frac{\text{àrea } T_1}{\text{àrea } T_2}$$

7. Determineu els nombres complexos z de manera que els afixos dels nombres

$$z^{1989}, z^{1990}, z^{1991}$$

siguin els vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles amb l'angle recte en el punt z^{1990} .

8. Esbrineu si és possible tenir un pla P , una esfera E i un tetràedre regular T tals, que els plans paral·lels a P o no tallin ni l'esfera E ni el tetràedre T , o bé els tallin en figures de la mateixa àrea.

Estudieu la mateixa qüestió quan el tetràedre no és regular.