Problemes i jocs

L'Enric Nart ens ha proposat de fer-nos càrrec d'aquesta secció.

Hem cregut convenient canviar el seu estil, no perquè no ens agradés com s'anava desenvolupant, sinó amb l'esperit que els lectors del Butlletí hi participin de forma més activa.

L'enfocament que proposem és el següent: A cada número apareixerà un recull de problemes i jocs sobre un tema que s'haurà proposat al número anterior. També hi apareixerà la solució dels problemes i jocs del número anterior.

Pretenem que tant els problemes i jocs proposats com els temes que es tractin surtin dels lectors de la secció. Per això us demanem que ens envieu els vostres problemes i jocs (amb les solucions, si les sabeu). El tema del següent número serà:

«Problemes de pesos i mesures»

*Com a exemple de com voldríem que fos la secció hem preparat per a aquest número alguns jocs sobre «**Problemes amb peces i taulers**».*

Animeu-vos a enviar-nos els vostres jocs i problemes, així com les respostes als jocs plantejats! Esperem els vostres suggeriments.

Armengol Gasull i Enric Ventura
Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Bellaterra
Barcelona

La invasió de les granotes

Considerem una quadrícula no acotada per cap costat, com la de la figura 1. Haurem de col·locar-hi una col·lecció de «granotes» que es podran moure pel tauler segons les següents regles:

i) mai no pot haver-hi més d'una granota en una mateixa casella.

ii) quan dues granotes estan tocant-se una pot saltar per damunt de l'altra menjant-se-la i quedant-se al costat contrari (suposant que no estigués ocupat).

iii) no es permeten salts en diagonal; només en horitzontal i en vertical.

iv) una granota aïllada no pot moure's.

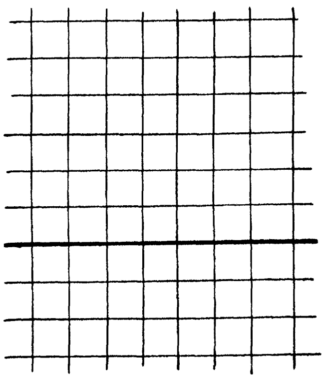


Figura 1

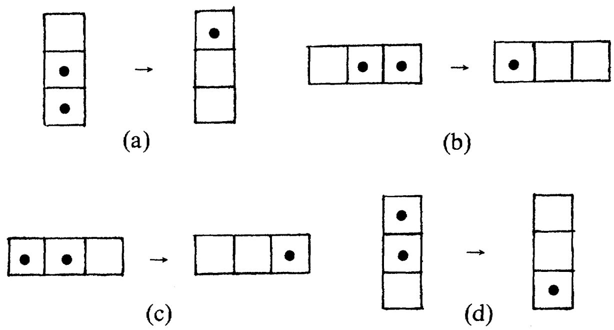


Figura 2

A la figura 2 es resumeixen els quatre moviments possibles. El problema consisteix en trobar col·locacions inicials estratègiques de granotes sota la línia horitzontal de manera que fent successius salts puguin envair la zona superior del tauler arribant alguna granota el més amunt possible.

A les figures 3a i 3b es mostren estratègies inicials que permeten llençar una granota fins la primera i segona fila respectivament (els moviments que cal fer són obvis, oi?). Com es poden envair les files superiors?

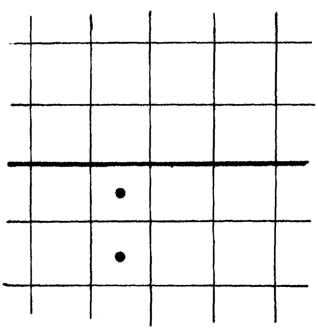


Figura 3a

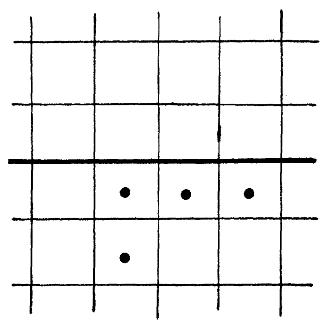


Figura 3b

a) Trobeu una estratègia inicial formada per 8 granotes que permeti envair la tercera fila.

b) Trobeu-ne ara una de 20 inicials que llenci una granota fins la quarta fila.

c) Trobeu els nombres mínims de granotes inicials necessàries per poder arribar a colocar-ne una a la primera, segona, tercera i quarta files.

d) Demostreu que no hi ha col·locació inicial possible d'un nombre finit de granotes que permeti envair la cinquena fila.

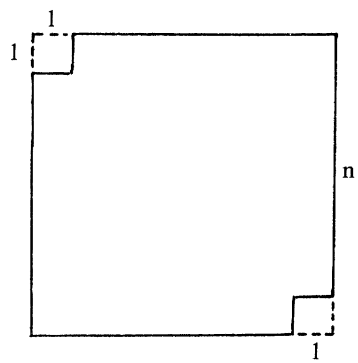
És fàcil provar diferents posicions inicials i anar fent saltar granotes cap aquí i cap allà, però ja observareu que la cosa es complica cada cop més, com més amunt volem fer arribar la invasió (de fet el límit teòric és la quarta fila, segons *d*!!).

Però les preguntes de l'estil de *c*) i *d*) requereixen una altre mena d'arguments més sofisticats que el simple joc d'anar fent salts. Si voleu alguna indicació, us podria dir que és útil posar un pes a cada casella de forma que cada salt varii en un únic sentit el pes total de les caselles ocupades.

Ànim... A l'atac!

Enrajolant un tauler

Tenim un tauler $n \times n$ al qual li hem tret dos quadradets com a la figura. És possible enrajolar-lo només amb peces de dominó (rectangles 2×1)?



Reines que ho veuen tot

(Proposat per en Carles Casacuberta)

Diem $Q(n)$ al nombre mínim de reines que cal col·locar damunt un tauler de n per n caselles per tal que totes les caselles del tauler siguin atacades (o ocupades) per alguna reina. Estudieu la successió $Q(n)$. Per exemple, $Q(3) = 1$, $Q(4) = 2$, $Q(5) = 3$. Per a quins $n \leq 12$ es compleix $Q(n) = Q(n - 1)$?

Per als qui els agradi complicar (en realitat, simplificar!) un xic el problema: enganxeu mentalment els costats del tauler dos a dos, cadascun amb el seu oposat, de manera que el tauler es transformi en la superfície d'un tor. Reviseu la successió $Q(n)$ en aquesta nova situació.

Un problema sorprenent d'escacs

A un tauler d'escacs l'única peça que no ocupa la seva posició inicial és el peó de l'alfil del rei blanc que està avançat una casella.

En quants moviments com a mínim s'ha pogut arribar a aquesta situació, tenint en compte que toca moure a les peces blanques?

Cavalls saltadors

Suposem que a un tauler 3×3 hi tenim 4 cavalls, 2 de blancs i 2 de negres, col·locats com s'indica a la figura.

Si els cavalls es mouen com als escacs, intercanvieu la posició dels cavalls blancs i negres.

Quin és el nombre mínim de moviments que cal fer?

CAVALL BLANC		CAVALL BLANC
CAVALL NEGRE		CAVALL NEGRE

Solució als problemes proposats en el Butlletí anterior

La successió $a_n = n!$ és lluny d'ésser convergent i en canvi satisfà:

$$\lim_{n \to \infty} \{xa_n\} = 0, \qquad \mathrm{A}\, x \in Q,$$

on recordem que $\{\cdot\}$ denota la part decimal d'un nombre reals i.e. $\{x\} = x - [x]$. Ara, si suposem que $r(x) = \lim_{n \to \infty} \{xa_n\}$ existeix i és finit, per a tot nombre *real* x, podem raonar de la manera següent: Denotem $\exp(t) = e^t$. Les funcions:

$$f_n(x) = \exp(2\pi i x a_n) = \exp(2\pi i \{xa_n\}),$$

són contínues i convergeixen puntualment a $f(x) = \exp(2\pi i r(x))$. Com que $|f_n(x)| = 1$, el teorema de la convergència dominada ens permet concloure que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^b f_n(x)dx = \int_0^b f(x)dx, \qquad \mathrm{A}b \in \mathbb{R}.$$

Ara bé, per $a_n \neq 0$ es té:

$$\int_0^b f_n(x)dx = (\exp(2\pi i b a_n) - 1)/2\pi i a_n.$$

Prenent b tal que $\int_0^b f(x)dx \neq 0$, tenim:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ a_n \neq 0}} \frac{f_n(b) - 1}{a_n}$$

existeix i és no-nul.

Com que el numerador és també una successió convergent, la subsuccessió dels a_n no nuls té un límit finit. Per acabar, si fos $a_n = 0$ per a infinits valors de n, la hipòtesi ens diria que $f(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$; per tant $\lim_{n \to \infty}(f_n(b) - 1) = 0$ i la successió dels a_n ha de convergir també a zero.

La solució del segon problema era encara més fàcil: La propietat «un rectangle R té al menys un costat de longitud entera» equival a:

$$\iint_R \exp(2\pi i(x + y))\, dxdy = 0.$$

Ara, si el rectangle R és reunió de subrectangles R_i tenim:

$$\iint_R \exp(2\pi i(x + y))\, dxdy = \sum \iint_{R_i} \exp(2\pi i(x + y))\, dxdy,$$

i de tota la vida, si tots els sumands d'una suma finita són nuls, la suma total és zero.