Problemes i jocs

Els dos problemes que us presento en aquesta ocasió comparteixen els següents trets essencials:

(1) Enunciat extremadament senzill i suggestiu.
(2) Ofereixen una resistència fèrria als intents naïfs de resolució.
(3) S'obté una resposta ràpida, curta i elegant en adonar-se que cal fer intervenir la periodicitat de la funció exponencial complexa.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{C}, \qquad \exp(t) = e^{2\pi i t} = \sin(2\pi t) + i \cos(2\pi t).$$

Així doncs, si voleu tenir entreteniment per estona haurieu de fer com si no haguèssiu llegit el punt (3). Esteu avisats.

Problema 1.

Donat $x \in \mathbb{R}$ *denotem per* $\{x\}$ la part decimal de x, és a dir, $\{x\} = x - [x]$. Sigui (a_n) una successió de números reals amb la següent propietat:

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \{x a_n\} \qquad \text{existeix i és finit,} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

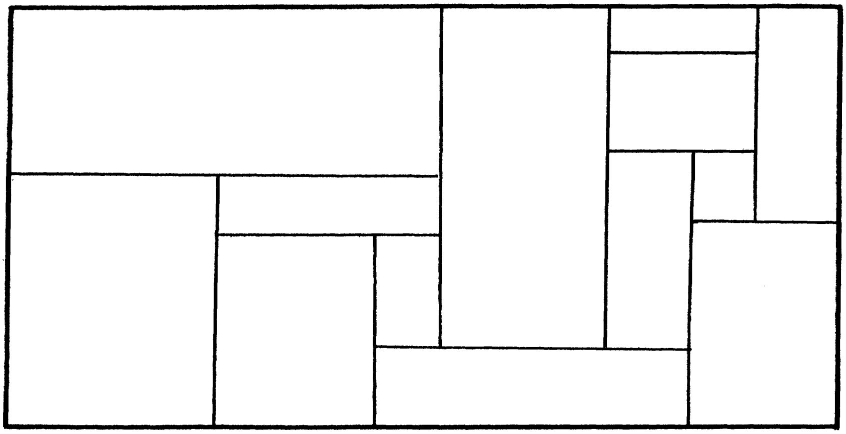
Provar que aleshores $\lim_{n \to \infty} a_n$ també existeix i és finit.

Problema 2.

Imaginem un rectangle subdividit en rectangles més petits, com s'indica en el dibuix. Provar que si tots els subrectangles tenen la propietat:

«un almenys dels dos costats té longitut entera»,

aleshores el rectangle reunió té la mateixa propietat.



Compte amb el Problema 1! La resposta naïf: «Només amb $\{x = 10^r, r \in Z\}$ ja en tenim prou doncs la condició (1) implica que els a_n van tenint cada vegada més xifres decimals en comú», només és correcta si els a_n estan acotats. De fet, si a la condició (1) es substitueix «A $x \in \mathbb{R}$» per «A $x \in \mathbb{Q}$» la conclusió resulta falsa. Penseu-ne un contraexemple.

Solució al problema proposat en el número anterior

Si els jugadors trien els daus A i B es comprova ràpidament que guanyará el dau A en una proporció de 5 a 4, és a dir, la probabilitat de que A guanyi a B és de 5/9. Si comparem ara B amb C veiem que B és «millor» que C també en la mateixa proporció de 5 a 4.

Després d'aquests càlculs triem convençuts el dau A i el nostre amic ens deixa ben escurats en poques jugades perquè tria el dau C, el qual és millor que A en una proporció de 2 a 1 (probabilitat 2/3 de guanyar)!!

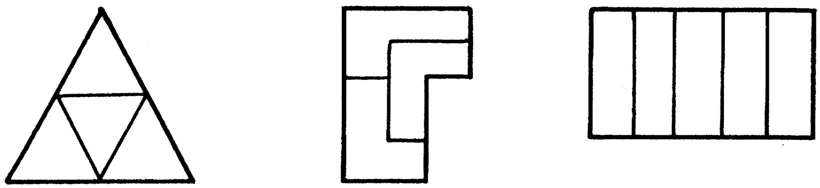
Estàvem, doncs, condemnats a perdre perquè triem el dau que triem sempre n'hi ha un de millor; de manera que el ser «millor que» no és en aquesta situació, ni en moltes d'altres, una relació d'ordre. Es té:

A *millor que* B *millor que* C *millor que* A

En aquesta cadena de comparacions, qui guanya el seu oponent amb més claredat és el dau C. Sembla per tant el millor a escollir si han de jugar els tres daus simultàniament. Altra vegada ens enganyen les aparences doncs es comprova ràpidament que en el joc simultani les probabilitats respectives de guanyar són:

A : 1/3, B : 10/27, C : 8/27.

Solució al joc proposat en el número anterior



Enric Nart i Vinyals