Les martingales i les seves aplicacions des d'una perspectiva històrica*

David Nualart
Universitat de Barcelona

Segons sembla, el mot «martingala» prové del nom provençal de la ciutat francesa de Martigues. Hi ha una llarga història sobre aquest mot i el seu ús en el context dels jocs d'atzar. No ens proposem aquí d'entrar en els detalls d'aquesta història. Direm només que originalment martingala significava un sistema per a recuperar pèrdues, consistent a doblar l'aposta després de cada pèrdua (en provençal això s'anomenava *jouga a la martingala*). En els apartats següents descriurem el paper que han jugat les martingales en el camp de les matemàtiques i, més concretament, en l'àrea de les probabilitats.

1. La noció de martingala en l'obra de J. Ville

La primera vegada que el mot *martingala* apareix en un text matemàtic és, dins el marc del càlcul de probabilitats, en el llibre de Jean Ville *Etude critique de la notion de collectif.* Aquest llibre, editat l'any 1939, és el fascicle III d'una col·lecció titulada «Monografies de Probabilitats», dirigida per Emile Borel.

La noció de col·lectiu va ésser introduïda pel científic alemany Richard E. von Mises (1883-1953) a l'inici de la dècada dels trenta amb la intenció de fonamentar les probabilitats en una base freqüentista, com a alternativa a la teoria axiomàtica de Kolmogorov. Von Mises creia que la probabilitat no es pot considerar com una disciplina matemàtica, i per això en cap moment no va procedir a una completa formalització de la seva teoria. A causa d'aquest fet va rebre moltes crítiques per part dels matemàtics de la seva època.

Per tal d'explicar breument la idea de col·lectiu, fem com si disposéssim d'observacions x_n, $n \geq 1$, on cada observació és un element d'un cert conjunt M, que per simplificar suposarem que només té dos elements: $M = \{0, 1\}$. Per von Mises, un *col·lectiu* és una successió infinita d'observacions

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),$$

* Conferència organitzada per la societat, pronunciada el 11-2-88.

que satisfà les dues condicions següents:

(i) Les freqüències relatives dels uns en la successió x convergeixen cap a un límit p, $0 < p < 1$, és a dir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = p.$$

(ii) Tota successió parcial $S(x)$ obtinguda a partir de la successió x mitjançant una *selecció* S (que pertany a un sistema $\mathcal{S}$ de selección prefixat) té també freqüències relatives d'uns que convergeixen cap a p, és a dir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S(x)_i = p,$$

per a tot $S \in \mathcal{S}$.

Per definició una *selecció* consisteix en una successió de funcions, $S = \{f_n; n \geq 0, f_n : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}\}$, de manera que la successió parcial $S(x)$ s'obté a partir de la successió original x eliminant els termes x_n que compleixen la condició $f_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$.

La condició (ii) s'anomena *condició d'irregularitat* i serveix per a impedir que un col·lectiu x tingui un cert tipus de regularitat. Per exemple, la successió d'observacions $x = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ compleix la condició (i) amb $p = 1/2$ però no compleix la condició (ii) si el nostre sistema de seleccions conté la selecció: «triar els termes imparells» (obtinguda mitjançant les funcions $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 0, f_3 = 1, f_4 = 0, \ldots$, que en aquest cas són constants).

Si x és un col·lectiu associat a un valor límit p i a un sistema $\mathcal{S}$ de seleccions, escriurem $x \in K(\mathcal{S}, p)$.

És clar que com més gran sigui el sistema de seleccions, més irregulars seran els col·lectius associats a aquest sistema. En els primers treballs de von Mises es prenia com a sistema de seleccions el conjunt de totes les seleccions. Es pot demostrar que en aquest cas la condició d'irregularitat és impossible, és a dir, el conjunt de col·lectius és buit.

Posteriorment, Abraham Wald va imposar que el sistema de selccions fos numerable i va demostrar que en aquest cas hi ha infinits col·lectius per a cada nombre p fixat. En el seu llibre J. Ville va molt més lluny i demostra que si el sistema de seleccions és numerable, aleshores amb probabilitat 1 tota successió d'observacions és un col·lectiu. Per tal de precisar aquest resultat, considerarem l'espai de probabilitat canònic $(\Omega, \mathcal{A}, P_p)$ associat a una successió independent d'observacions, on cada observació pot prendre el valor 1 amb probabilitat p i el valor zero amb probabilitat $q = 1 - p$. És a dir, $\Omega = \{0, 1\}^N$, i P_p és la probabilitat determinada per

$$P_p\{x \in \Omega : x_1 = \epsilon_1, x_2 = \epsilon_2, \ldots, x_n = \epsilon_n\} = p^{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i}(1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i},$$

per a tot $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{0, 1\}^n$, i per a tot $n \geq 1$.

Aquest espai de probabilitat és l'exemple bàsic d'espai de probabilitat no numerable. L'anomenarem espai de probabilitat de Bernoulli. Aleshores, J. Ville demostra el següent resultat:

Teorema 1: *Per a cada valor de p,* $0 < p < 1$, *i per a cada sistema numerable de seleccions S, el conjunt de col·lectius* $K(S, p)$ *té probabilitat* P_p *igual a* 1.

Després d'aquesta breu presentació de la noció de col·lectiu, ja és hora de parlar de les martingales. El concepte de martingala apareix en el llibre de J. Ville com a mitjà per a generalitzar la condició d'irregularitat de von Mises-Wald. Explicarem tot seguit el que en J. Ville entén per martingala en el seu llibre.

Considerem un jugador A que té un capital inicial C, i que juga contra la banca de la forma següent: suposem que a cada jugada $n \geq 1$, pot sortir un nombre x_n igual a 1 amb probabilitat p i igual a zero amb probabilitat $q = 1 - p$. Aleshores l'estratègia del jugador A a la primera jugada consisteix a escollir dos nombres $\lambda, \mu \geq 0$ tals que $\lambda + \mu \leq 1$, i apostar la quantitat λC a l'1 i la quantitat μC al zero, de manera que guanyarà $\lambda C/p$ si surt un 1 i guanyarà $\mu C/q$ si surt zero. El capital del jugador després d'aquesta primera jugada serà

$$\sigma_1 = (1 - \lambda - \mu)C + \frac{\lambda C}{p}\mathbf{1}_{\{x_1 = 1\}} + \frac{\mu C}{q}\mathbf{1}_{\{x_1 = 0\}}.$$

Aquest joc és equitatiu en el sentit que l'esperança matemàtica del capital del jugador després de la primera jugada és igual al capital inicial. En efecte,

$$E(\sigma_1) = (1 - \lambda - \mu)C + \frac{\lambda C}{p}p + \frac{\mu C}{p}q = C.$$

Suposem ara que el jugador A continua el joc amb la mateixa estratègia. És a dir, si σ_{n-1} representa el seu capital després de la jugada $(n - 1)$-èsima, a la jugada següent apostarà $\lambda\sigma_{n-1}$ a l'1 i $\mu\sigma_{n-1}$ al zero. D'aquesta forma tindrem

$$\sigma_n = (1 - \lambda - \mu)\sigma_{n-1} + \frac{\lambda\sigma_{n-1}}{p}\mathbf{1}_{\{x_n = 1\}} + \frac{\mu\sigma_{n-1}}{q}\mathbf{1}_{\{x_n = 0\}}. \tag{1}$$

Es compleix per tant que

$$E[\sigma_n | x_1, ..., x_{n-1}] = \sigma_{n-1}, \tag{2}$$

on $E[\sigma_n | x_1, ..., x_{n-1}]$ representa l'esperança matemática de σ_n condicionada per $x_1, ..., x_{n-1}$, és a dir, intuïtivament això vol dir l'esperança matemàtica de σ_{n-1} suposant conegut el resultat de les $n - 1$ primeres jugades.

Aleshores, J. Ville anomena martingala a tota successió de funcions

$$\sigma_n(x_1, ..., x_n)$$

que satisfà la propietat (2). Això vol dir que una martingala no és res més que una forma de jugar que produeix un joc equitatiu. El lector observarà que això contradiu el significat corrent del mot martingala com a trampa o engany.

No és difícil comprovar que s'obtenen martingales mitjançant estratègies de joc com la que hem descrit abans, però on les constants λ i μ es canvien a cada jugada i poden dependre de l'evolució del joc fins aquell moment: $\lambda = \lambda_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$, $\mu = \mu_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)$. Recíprocament, J. Ville demostra que tota martingala ha de ser necessàriament d'aquest tipus.

Si prenem els factor λ i μ constants, i suposem que el capital inicial C és igual a 1, s'obté la següent fórmula per a la martingala σ_n:

$$\sigma_n = \left(\frac{\lambda}{p} + 1 - \lambda - \mu\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \left(\frac{\mu}{q} + 1 - \lambda - \mu\right)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

A partir d'aquesta fórmula podem estudiar fàcilment el comportament límit de σ_n quan n tendeix cap a infinit. Recordem que la llei forta dels grans nombres ens diu que la successió de les mitjanes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ convergeix cap a p per a quasi tot x. Aleshores hi ha dos casos possibles:

(a) $\frac{\lambda}{p} + 1 - \lambda - \mu = 1$, aquest és un cas trivial ja que $\sigma_n = 1$ per a tot n.

(b) $\frac{\lambda}{p} + 1 - \lambda - \mu \neq 1$, en aquest cas σ_n es comporta en el límit com α^n, on

$$\alpha = \left(\frac{\lambda}{p} + 1 - \lambda - \mu\right)^p \left(\frac{\mu}{q} + 1\ \lambda - \mu\right)^q$$

és un nombre més petit estrictament que 1. En conseqüència, σ_n convergeix quasi segurament cap a zero quan n tendeix cap a infinit. Això vol dir que encara que el joc sigui equitatiu tal com hem indicat abans,el jugador s'arruinarà amb probabilitat 1 si suposem que la duració del joc és ilimitada. Per exemple, si $\lambda = 1/3$, $\mu = 2/3$, i $p = q = 1/2$, aleshores, σ_n és de l'ordre $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n$.

Per aquest tipus de martingales en l'espai de probabilitat de Bernouilli, J. Ville va establir, entre d'altres, els dos resultats següents:

(I) Fixada una martingala $\sigma = \{\sigma_n(x_1, \ldots, x_n), n \geq 1\}$, es pot definir el següent subconjunt de Ω:

$$H(\sigma, p) = \{x \in \Omega : \sup_n \sigma_n(x_1, \ldots, x_n) < \infty\}.$$

Aquest conjunt representa el conjunt de totes les realitzacions del joc per les quals els guanys del jugador A estan afitats. Aleshores, J. Ville demostra que aquest conjunt té probabilitat 1. Aquesta propietat es dedueix immediatament de la següent desigualtat maximal fent tendir λ cap a infinit:

$$P_p\{x : \sup_{1 \le k \le n} \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) \geq \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda},$$

per a tot $\lambda > 0$.

Demostració de la desigualtat maximal:

Sigui T_n el primer instant on alguna de les quantitats $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ és més gran o igual que λ. Aleshores tindrem:

$$1 = E(\sigma_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{\{T_n = i\}} \sigma_n dP$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(\mathbf{1}_{\{T_n = i\}} E(\sigma_n | x_1, \ldots, x_n))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(\mathbf{1}_{\{T_n = i\}} \sigma_i) \geq \lambda P(\bigcup_{i=1}^{n} \{T_n = i\})$$

$$= \lambda P\{\sup_{1 \le k \le n} \sigma_k \geq \lambda\}.$$

(II) Per a tot sistema numerable de seleccions $\mathcal{S}$ existeix una martingala σ tal que $H(\sigma, p) \subset K(\mathcal{S}, p)$. Això ens diu que si una successió d'observacions x no és un col·lectiu de $K(\mathcal{S}, p)$, aleshores la martingala σ permet d'obtenir guanys infinits amb aquesta realització del joc. És a dir, si utilitzem com a condició d'irregularitat el fet de pertànyer al conjunt $H(\sigma, p)$ (això és: que els guanys estiguin afitats), per a tota successió d'observacions x que no sigui un col·lectiu de $K(\mathcal{S}, p)$, la martingala σ detecta la «regularitat» de x.

2. Els teoremes límit per martingales obtinguts per P. Lévy

El primer volum de la col·lecció «Monografies de Probabilitats» que hem esmentat abans, és el llibre *Théorie de l'addition des variables aléatoires,* de Paul Lévy, publicat l'any 1937. En aquest text bàsic de la teoria de la probabilitat, P. Lévy ens parla dels tres teoremes límit fonamentals del càlcul de probabilitats que descriurem seguidament.

Considerem una successió $\{\xi_n, n \geq 1\}$ de variables aleatòries *independents,* amb esperança zero, i amb la mateixa variància σ^2. Per exemple, el cas més senzill correspon a prendre $\xi_n = x_n - p$ on les x_n són independents i valen 1 ó 0 amb probabilitats p i $q = 1 - p$, respectivament (cas de Bernoulli). Volem estudiar el comportament asimptòtic de la successió de sumes parcials $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Aleshores, els tres teoremes límit fonamentals són els següents:

Llei dels grans nombres:

(LGN) $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$ quasi segurament.

Teorema central del límit:

(TCL) $\quad \lim_{n\to\infty} P\{a < \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}} < b\} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx.$

Llei del logaritme iterat:

(LLI) $\quad \limsup_{n\to\infty} (\liminf_{n\to\infty}) \frac{S_n}{\sigma\sqrt{2n \log\log n}} = 1(-1).$

La idea intuïtiva que hi ha darrera aquests resultats asimptòtics és la següent. Les variables aleatòries S_n tenen esperança zero, però tenen una llei de probabilitat cada cop més dispersa quan n augmenta. En efecte, la variància de S_n val $\sigma^2(S_n) = n\sigma^2$. D'altra banda, la llei de les variables S_n/n tendeix a concentrar-se en el zero quan n augmenta, ja que $\sigma^2(\frac{S_n}{n}) = \frac{\sigma^2 n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$. La desigualtat de Tchebyshev ens diu aleshores que els valors de S_n/n que cauen fora d'un interval $(-\epsilon, \epsilon)$ són cada cop més improbables si n creix:

$$P\{ | \frac{S_n}{n} | > \epsilon \} \leq \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Aquest argument constitueix la idea fonamental que hi ha darrera la LGN, i ens dóna la convergència en probabilitat de la successió S_n/n cap a zero quan n tendeix a infinit. Per tal d'obtenir la convergència quasi segura cal treballar una mica més. La LGN, en la versió que hem enunciat, és deguda a Kolmogorov (1930). En el cas de variables de Bernoulli ($\xi_n = x_n - p$), i si considerem només la convergencia en probabilitat, aquest resultat límit és molt més anterior i va ser trobat per J. Bernoulli (1713). Aquest exemple particular té un cert interès perquè ens diu que les freqüències relatives d'uns $(1/n) \sum_{i=1}^n x_i$ s'aproximen al valor real p de la probabilitat.

La idea bàsica en el TCL és que el quocient $S_n/(\sigma\sqrt{n})$ té una llei de probabilitat que manté una dispersió constant (la variància d'aquest quocient és igual a 1) i s'acosta a una llei normal $N(0,1)$ quan n tendeix a infinit. En el cas particular de variables aleatòries de Bernoulli $\xi_n = x_n - p$, el TCL va ser establert per A. de Moivre l'any 1756, i es pot interpretar com l'aproximació de la llei binomial per la normal. Situacions més generals foren estudiades per Liapunov (1901) i per Lindeberg (1922) i requereixen condicions addicionals sobre la successio ξ_n com l'afitació uniforme o la idèntica distribució.

En el cas de la llei del logaritme iterat, la idea fonamental consisteix en la recerca de denominadors $\phi(n)$ que tendeixin cap a infinit al més ràpidament possible i de manera que el quocient $S_n/\phi(n)$ estigui afitat. Direm només que el cas de Bernoulli va ser trobat per M. Khintchine (1924), i el cas idènticament distribuït va ser estudiat per Kolmogorov (1929).

En el llibre que hem esmentat abans, P. Lévy estén aquests teoremes límit al cas de successions de variables aleatòries integrables $\{\xi_n, n \geq 1\}$ que no siguin necessàriament independents, i que compleixin la condició següent:

$$E(S_n | \xi_1, ..., \xi_{n-1}) = S_{n-1}, \qquad \text{(C)}$$

on $S_n = \xi_1 + ... + \xi_n$. En primer lloc cal observar que aquesta condició (C) és equivalent a dir que $E(\xi_n \mid \xi_1, ..., \xi_n) = 0$, i si les variables ξ_n són centrades (tenen esperança zero) la condició (C) és més feble que la independència, ja que en el cas independent tindríem

$$E(\xi_n | \xi_1, ..., \xi_n) = E(\xi_n) = 0.$$

Si comparem la condició (C) de P. Lévy amb la propietat (2) de les martingales de Jean Ville, veurem que es tracta de condicions anàlogues. Malgrat això, P. Lévy no utilitza en cap moment el mot martingala en el seu llibre i parla sempre de successions que compleixen la condició (C), o de successions encadenades (és a dir, no necessàriament independents).

Per tal de fer una breu anàlisi de com es poden estendre els teoremes límit al cas de martingales, observem primer que en el cas de variables de quadrat integrable, la condició (C) implica la ortogonalitat entre cada parell de variables de la successió, ja que si $n < m$ es compleix

$$E(\xi_n \xi_m) = E(\xi_n E(\xi_m | \xi_1, ..., \xi_{m-1})) = 0.$$

En conseqüència, $\sigma^2(S_n) = n\sigma^2$, i el mateix argument que hem utilitzat abans ens donaria la convergència en probabilitat en la llei dels grans nombres. La convergència quasi segura es basa en la desigualtat maximal per martingales que hem presentat abans, i requereix una de les dues condicions addicionals següents:

(C_1) Afitació uniforme de les variables ξ_n.

(C_2) Variàncies condicionals constants $\sigma_n^2 = E(\xi_n^2 | \xi_1, ..., \xi_{n-1})$ que compleixin la condició $\sum_n \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$

En el cas del TCL indicarem només que és cert si se suposa la condició (C_2) i la condició addicional següent:

(C_3) $\quad |\xi_n| < \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2}.$

3. La contribució de J. L. Doob

La teoria de les martingales adquireix interès i utilitat matemàtica, sortint d'aquest marc clàssic que acabem de descriure, a partir dels treballs de J. L. Doob. Les referències bàsiques són l'article «Regularity properties of certain families of chance variables», publicat a *Trans. Amer. Math. Soc.* (1940) i el seu llibre *Stochastic Processes* de l'any 1953, on el capítol VII està dedicat íntegrament a la teoria de les martingales.

La definició de martingala donada per Doob i que després tothom ha utilitzat és la següent:

Definició 2: *Una successió de variables aleatòries* $\{X_n; n \geq 1\}$ *definides en un espai de probabilitat* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *direm que és una martingala si en aquest espai de probabilitat disposem d'una successió creixent de σ-àlgebres* $\mathcal{F}_n$ *(en particular podem prendre* $\mathcal{F}_n = \sigma\{X_1, ..., X_n\}$*) de manera que cada* X_n *és una variable integrable i* $\mathcal{F}_n$*-mesurable, i es compleix la condició següent:*

$$E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1},$$

per a tot $n \geq 2$.

Per exemple, les successsions σ_n de J. Ville i la successió S_n de Paul Lévy són martingales, d'acord amb aquesta definició, respecte les famílies de σ-àlgebres $\sigma\{x_1, ..., x_n\}$ i $\sigma\{\xi_1, ..., \xi_n\}$, respectivament.

Tot seguit descriurem les dues contribucions fonamentals en el treball de Doob, que han donat lloc al posterior desenvolupament de la teoria de les martingales. Aquestes dues constribucions són el teorema d'atur i els teoremes de convergència.

(I) *La noció de temps d'atur i el teorema d'atur de Doob.*

Un temps d'atur és una variable aleatòria $T: \Omega \to \{1, 2, ..., \infty\}$ tal que $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$ per a tot n. És a dir, un temps d'atur és un instant aleatori tal que, per a cada n, podem decidir exactament si l'instant d'atur és igual a n a partir de la informació continguda en la σ-àlgebra $\mathcal{F}_n$.

Aleshores el teorema d'atur de Doob ens diu que si X_n és una martingala, la successió $X_{T\wedge n}$ (és a dir la successió X_n aturada a l'instant aleatori T) és també una martingala respecte a la successió de σ-àlgebres $\mathcal{F}_{T\wedge n}$. En termes de jocs d'atzar, això ens diu que si X_n representa la fortuna a l'instant n d'un jugador que juga a un joc equitatiu, el fet de permetre que el jugador es retiri quan vulgui segueix mantenint el caràcter equitatiu del joc.

Aquest concepte pot donar lloc a certes contradiccions. Per exemple, considerem el temps d'atur T_C definit com el primer instant en què el jugador arriba a tenir un capital igual o superior a un cert valor C. És a dir $T_C = \inf\{n \geq 1 : X_n \geq C\}$. Suposem que el temps d'atur T_C és finit amb probabilitat 1. Aleshores, a causa de la propietat de martingala i al teorema d'atur, l'esperança matemàtica $E(X_{T_C \wedge n})$ no depèn de n ni de C i és igual a $E(X_1)$, mentre que la successió $X_{T_C \wedge n}(\omega)$ convergeix per a tot ω cap a $X_{T_C}(\omega)$ quan n tendeix a infinit. La variable X_{T_C} és més gran o igual que la constant C que s'ha agafat de forma arbitrària, però això no dóna lloc a cap contradicció, ja que la convergència puntual de la successió $X_{T_C \wedge n}$ cap a X_{T_C} no implica la convergència de les esperances.

Una aplicació interessant del teorema d'atur es troba en el càlcul de determinades probabilitats que apareixen en el problema de la ruïna del jugador. Considerem una martingala $\{X_n; n \geq 1\}$ tal que $X_1 = 0$ i tal que els increments $X_n - X_{n-1}$ prenen els valors 0, 1 i -1. Fixats dos nombres $a < 0 < b$ definim el temps d'atur $T_{a,b} = \inf\{n \geq 1 : X_n = a \text{ o } b\}$. En termes de jocs d'atzar, $b - X_n$ i $X_n - a$ representen les fortunes de dos jugadors que juguen un joc equitatiu, i b i $-a$ són, respectivament, els capitals inicials d'ambdós jugadors. Suposarem, com a hipòtesi addicional, que el temps d'atur $T_{a,b}$ és finit amb probabilitat 1.

Volem calcular la probabilitat $p_1 = P\{X_{T_{a,b}} = b\}$ que el primer jugador s'arruïni, és a dir, en llenguatge de martingales, la probabilitat que la martingala X_n arribi a la frontera b abans de tocar la frontera a. El teorema d'atur ens diu que

$$E(X_{T_{a,b} \wedge n}) = E(X_1) = 0.$$

D'altra banda aquesta esperança convergeix, quan n tendeix cap a infinit, cap a $E(X_{T_{a,b}}) = bp_1 + a(1 - p_1)$. D'aquí es dedueix que $p_1 = \frac{-a}{b-a}$. Observi's que en aquest cas podem prendre límits de les esperances sense cap problema perquè les successions amb les que treballem estan afitades.

(II) *Els teoremas de convergència.*

Doob estudia el comportament asimptòtic de la successió X_n i troba el següent resultat:

Teorema 3: *Si una martingala X_n està afitada en L^1 (és a dir, $\sup_n E(|X_n|) < \infty$) aleshores la successió X_n convergeix quasi segurament cap a una variable aleatòria X.*

Per exemple, la martingala σ_n de J. Ville compleix la condició del teorema de Doob ja que les variables σ_n són positives i d'esperança igual a 1 (en el cas d'un capital inicial igual a 1). Ja hem vist que el límit és igual a zero excepte en casos trivials (cas (a)). Observem que en aquest exemple no hi ha convergència de les esperances.

Per tenir convergència de les esperances (o encara més, convergència en L^1) cal imposar una condició més forta que l'afitació en L^1: La integrabilitat uniforme (o compacitat relativa respecte de la topologia feble $\sigma(L^1, L^\infty)$).

D'altra banda, la successió S_n de P. Lévy (sumes parcials de variables independents centrades i idènticament distribuïdes) no compleix, en general, la condició del teorema de convergència de Doob, ja que les esperances $E(|S_n|)$ poden créixer cap a infinit. Per això aquesta successió no és convergent, a menys que la dividim per un factor normalitzador $\phi(n)$.

Indicarem per acabar aquest apartat que el teorema de convergència de Doob es pot demostrar molt fàcilment a partir de la següent desigualtat:

$$E(K_{a,b}) \leq \frac{1}{b-a}(|a| + \sup_n E(|X_n|)),$$

on $a < b$, i $K_{a,b}$ designa el nombre de vegades que la successió X_n travessa l'interval $[a,b]$ en sentit creixent (de baix a dalt). Aleshores la condició d'afitació en L^1 ens diu que la variable aleatòria $K_{a,b}$ és finita, quasi segurament, i d'aquí es dedueix la convergència quasi segura de la successió X_n, ja que

$$\begin{aligned} &P\{X_n \text{ no convergeix}\} \\ &= P\{\text{existeixen } a,b \in \mathbf{Q} : \liminf_n X_n < a < b < \limsup_n X_n\} \\ &\leq \sum_{a,b \in \mathbf{Q}} P\{K_{a,b} = \infty\} = 0. \end{aligned}$$

4. Algunes aplicacions de les martingales

No és la nostra intenció en aquest apartat de fer una presentació exhaustiva de l'aplicació de la teoria de martingales a diferents camps de la probabilitat i de l'anàlisi matemàtica. En el Capítol V de la referència [1] hi ha un recull de curioses i interessants utilitzacions de les martingales. D'altra banda en diversos textos d'anàlisi estocàstica, com el llibre de Durrett [4], es posa de manifest la potència i la utilitat de les martingales com a eina de treball en diferents branques de l'anàlisi matemàtica i de les probabilitats, El que farem a continuació és descriure molt breument tres aplicacions de les martingales que poden servir d'il·lustració de les possibilitats d'aquesta teoria.

(I) *Demostració de les lleis fortes dels grans nombres mitjançant el teorema de convergència de Doob.*

Considerem una successió $\{\xi_n; n \geq 1\}$ de variables aleatòries independents, centrades i amb la mateixa variància σ^2. Posem, com abans, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$. Volem demostrar que $S_n(\omega)/n$ convergeix cap a zero per quasi tot ω. Aleshores, el lema de Kronecker ens diu que aquesta convergència és certa si la sèrie

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_k(\omega)}{k}$$

és convergent. Es fácil comprobar que X_n és una martingala que satisfà la condició següent

$$E(|X_n|) \leq \sqrt{E(X_N^2)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{k^2}}$$

Això implica que $\sup_n E(|X_n|) < \infty$, i pel teorema de convergència de Doob, la successió X_n és convergent quasi segurament. Observi's que no podem aplicar directament el teorema de convergència de Doob a la successió S_n/n perquè aquesta successió no és una martingala (encara que la successió S_n si que ho és), i per això hem hagut d'introduir una nova successió X_n que fos martingala i hem hagut d'aplicar el lema de Kronecker.

(II) *Aplicació de les martingales a la teoria de la derivació.*

Suposem que $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ és una funció integrable Lebesgue. Fixem una partició π de l'interval $[0,1]$ formada pels punts $\{0 = x_0 < x_1 < ... < x_{h+1} = 1\}$. Designarem per $\mathcal{F}(\pi)$ l'àlgebra finita de parts de l'interval $[0,1]$ generada pels intervals (x_k, x_{k+1}), $0 \leq k \leq h$. Podem considerar l'interval $[0,1]$ com un espai de probabilitat, on la probabilitat ve donada per la mesura de Lebesgue. Amb aquesta interpretació, es pot calcular l'esperança condicionada $E[f|\mathcal{F}(\pi)]$ que coincideix amb la següent funció esglaonada

$$E[f|\mathcal{F}(\pi)](x) = \sum_{k=0}^{h} \frac{1}{x_{k+1} - x_k} \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(y)dy \right) \mathbf{1}_{(x_k, x_{k+1})}(x).$$

Aquesta funció esglaonada és constant en cada interval de la partició π, i pren un valor igual al promig de la funció f en aquest interval. Intuïtivament aquesta funció esglaonada es pot interpretar com una aproximació de la funció f. Si la funció f és de quadrat integrable, l'esperança condicionada $E[f|\mathcal{F}(\pi)]$ és la millor aproximació $\mathcal{F}(\pi)$-mesurable, en el sentit que és l'única solució del següent problema d'optimització:

$$\min \{ \int_0^1 |f-g|^2 dx, \quad g \quad \mathcal{F}(\pi) - \text{mesurable} \}.$$

Suposem ara que en lloc d'una única partició, prenem una successió de particions π_n cada cop més fines. Escriurem $\mathcal{F}(\pi_n) = \mathcal{F}_n$. En aquesta situació, $\{\mathcal{F}_n; n \geq 1\}$ és una successió creixent de σ-àlgebres (en realitat són àlgebres finites) i és fàcil veure que $E\{f|\mathcal{F}_n\}$ és una martingala respecte aquesta successió de σ-àlgebres.

Aquesta és una manera típica de construir martingales. En general, si Y és una variable aleatòria integrable en un espai de probabilitat qualsevol, i $\{\mathcal{F}_n; n \geq 1\}$ és una familia creixent de σ-àlgebres, aleshores $\{E[Y|\mathcal{F}_n]; n \geq 1\}$ és una martingala. A més aquesta martingala és uniformement integrable i convergeix quasi segurament i en L^1 cap a l'esperança condicionada de la variable Y respecte la σ-àlgebra generada per la unió de les $\mathcal{F}_n$. Observi's que això és un refinament del teorema de convergència de Doob.

Tornant a l'exemple de l'interval [0,1], si hi afegim la hipòtesi $\lim_n |\pi_n| = 0$ (on $|\pi_n| = \sup_k(x_{k+1} - x_k)$), aleshores la σ-àlgebra generada per la unió de les $\mathcal{F}_n$ és la σ-àlgebra de Borel, i el resultat de convergència que acabem d'esmentar ens diu que les esperances condicionades $E[f|\mathcal{F}_n]$ convergeixen quasi per tot i en L^1 cap a la funció f.

Aquest resultat que acabem de trobar fent servir els teoremes de convergència de les martingales es pot considerar com una versió feble (per successions) del teorema de derivació de Lebesgue que ens diu:

$$f(x) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)dy,$$

quasi per tot x.

Suposem que en lloc d'una funció f prenem una mesura μ en l'interval [0,1], que sigui absolutament contínua respecte la mesura de Lebesgue, és a dir, tal que $\mu(B) = 0$ per a tot borelià B de mesura de Lebesgue nul·la. En aquest cas es pot veure com abans que

$$\sum_{k=0}^{h^{(n)}} \frac{\mu((x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}))}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} \mathbf{1}_{(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})}$$

és una martingala, i el seu límit ens dóna la densitat de la mesura μ respecte la mesura de Lebesgue. Aquest argument permet de demostrar, en tota generalitat, el teorema de Radon-Nikodym (veure [1] per a més detalls).

(III) *Relació de les martingales amb l'anàlisi harmònica.*

Considerem una successió $\{\xi_n; n \geq 1\}$ de variables aleatòries independents i reals, amb la mateixa llei de probabilitat ν. Ens podem preguntar la següent qüestió: Per a quines funcions $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la successió $f(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ és una martingala? Suposant que totes aquestes variables són integrables, la condició de martingala exigeix que

$$E[f(\xi_1 + \ldots + \xi_n) \mid \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}] = f(\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1}),$$

i això es tradueix en la propietat següent

$$\int_{I\!R} f(x+y)\nu(dy) = f(x), \qquad (H)$$

per a tot x fora d'un conjunt de mesura ν zero.

Una funció f ν-integrable, que compleixi la condició (H) es diu que és ν-harmònica.

El teorema de Choquet-Dény estableix que les funcions harmòniques contínues i afitades són exactament les que admeten com a període tot punt del suport de la mesura ν. En el llibre de Dellacherie-Meyer [1] hi ha una demostració d'aquest resultat que utilitza la teoria de martingales.

Per exemple, si les variables ξ_n són centrades, la funció $f(x) = x$ és ν-harmònica. El següent exemple és força interessant:

Suposem $\nu = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. En aquest cas $\xi_1 + \ldots + \xi_n$ és l'anomenat passeig aleatori de Bernoulli. El suport de la mesura ν és el conjunt dels nombres enters, i una funció f és ν-harmònica si compleix la següent propietat

$$f(k) = \frac{1}{2}f(k+1) + \frac{1}{2}f(k-1),$$

per a tot k en Z.

La versió a temps continu d'aquest exemple consisteix en prendre el moviment brownià $\{B_t;\, t \geq 0\}$ en lloc del passeig aleatori de Bernouilli. Aleshores, si f és una funció dues vegades contínuament diferenciable amb derivades afitades, el procés estocàstic $f(B_t)$ és una martingala (a temps continu) si, i només si, $f'' = 0$. Es pot trobar un resultat semblant en dimensió més gran que 1, prenent un moviment brownià en el pla o en l'espai i, aleshores, es troba la condició $\Delta f = 0$. És a dir, les funcions que compostes amb un moviment brownià donen lloc a martingales són precisament les funcions harmòniques en el sentit de l'anàlisi. Aquesta relació ha estat molt fecunda i ha permès interpretar resultats d'anàlisi, com la resolució del problema de Dirichlet, en termes de probabilitats. Com a mostra de la utilització de les martingales i del moviment brownià en anàlisi harmònica, el lector pot consultar la monografia de K. E. Petersen [10].

Referències

[1] C. Dellacherie i P. A. Meyer: *Probabilités et Potentiel.* Hermann, París, 1980.

[2] J. L. Doob: «Regularity properties of certain families of chance variables». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1940.

[3] J. L. Doob: *Stochastic Processes.* John Wiley, Nova York, 1953.

[4] R. Durrett: *Brownian Motion and Martingales in Analysis.* Wadsworth Advanced Books, Belmont, California, 1984.

[5] G. A. Hunt: *Martingales et Processus de Markov.* Dunod, París, 1966.

[6] K. Krickeberg: *Teoría de la probabilidad.* Teide, Barcelona, 1973.

[7] P. Lévy: *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, París, 1937.

[8] L. E. Maistrov: *Probability theory, a historical sketch.* Academic Press, 1974.

[9] J. Neveu: *Martingales à temps discret.* Masson et Cie, París, 1972.

[10] K. E. Petersen: *Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation.* Cambridge Univ. Press, 1943.

[11] J. Ville: *Étude critique de la notion de collectif.* Gauthier-Villars, París, 1939.