

Caos i multifractals*

Vicent J. Martínez

1 Introducció

Experiments tan senzills com poden ser l'aigua bullent o el fum d'una cigarrera enfilant l'aire, dels quals tots tenim experiència, són clars exemples de l'existència del caos en la natura. Avui ningú no dubta que els sistemes qualificats de deterministes poden presentar moviment no predicible en el seu futur.

Però, què és el caos? Quan els estudiosos d'un fenomen troben difícil d'establir la relació aristotèlica entre causa i efecte, solen dir que tal fenomen té aleatorietat; en particular per a aquells sistemes que, independentment de la informació que de llur passat puguem conèixer, no som capaços de preveure'n el futur per raons d'aleatorietat, hom ha decidit d'anomenar el seu comportament amb el mot CAOS.

Molts d'aquests sistemes venen descrits, almenys teòricament, per les equacions de la dinàmica dels fluids de Navier-Stokes. Tanmateix, en una gran quantitat de casos no es poden resoldre, o no ho sabem fer. Ara bé, és possible d'obtenir bones aproximacions a llurs solucions tractant de resoldre sistemes d'equacions diferencials no lineals, com ara el sistema de Lorenz. Aquest va introduir en 1963 un model aplicat a problemes de convecció tèrmica meteorològica, que consistia bàsicament en un sistema de tres equacions diferencials amb solucions no estàtiques i no periòdiques. Aquest tipus de solucions serien anomenades més tard atractors estranys, per Ruelle i Takens (1971).

Sembla que el mot caos va ser introduït en la literatura matemàtica per Li i Yorke (1975) per descriure el comportament de certes aplicacions no lineals que aparentment proporcionen resultats aleatoris. Aquestes aplicacions molt fàcils d'estudiar amb l'ordinador reproduïen amb bona precisió les solucions de les equacions anteriors. En un cert sentit fan el paper de "un model del model". Fou Feigenbaum qui, el 1977, popularitzà l'estudi d'aquests tipus d'aplicacions, trobant certes característiques universals que han fet pensar en l'existència d'un cert ordre dins el caos. Els seus descobriments palesaven que una gran quantitat de sistemes no lineals exhibien transicions al caos numèricament mesurables, i allò que resultava més sorprenent, universals.

*Conferència organitzada per la Societat, pronunciada el 3-11-88.

Aquestes característiques d'universalitat descansen moltes vegades en el concepte de dimensionalitat dels sistemes o de la seua representació a l'espai de fases, i això ens porta directament a l'estudi dels conjunts fractals, que bàsicament són conjunts en els quals la dimensió de Hausdorff supera estrictament la dimensió topològica.

A la secció II fem una introducció de les mesures i dimensions més importants que s'utilitzen en la caracterització d'aquests conjunts, tot demostrant les equivalències entre diferents definicions i palesant-ne les diferències. A la secció III presentem alguns exemples de fractals, i expliquem com se'n pot calcular la dimensió. Un nou formalisme per a caracteritzar globalment sistemes amb propietats una mica més complicades que els simples fractals, que s'anomenen multifractals, és presentat a la secció IV; l'aplicació d'aquest formalisme a sistemes dinàmics amb comportament caòtic, tant dissipatius com conservatius, és l'objectiu de la secció V. Finalment, als apèndixs, hi trobem alguns contraexemples matemàtics.

2 Dimensions, mesures i fractals

2.1 Dimensió de Hausdorff

Possiblement d'entre tots els valors i expressions que han estat emprats en la caracterització o mesura dels conjunts estranys, amb comportament caòtic o senzillament cantorià, la dimensió de Hausdorff, també anomenada dimensió fractal, és la que més vegades apareix en la literatura. Malgrat això, llevat d'algunes referències com ara els llibres de Mandelbrot (1977, 1982) o Alder (1981), en la majoria de les aplicacions d'aquest concepte topològic a la física, no s'utilitza la definició rigorosa per considerar-la inoperativa. Això, però, comporta errors en l'ús que es fa d'aquesta mesura. Per aquesta raó hem considerat important afrontar amb rigor les definicions i demostrar, quan es pot, l'equivalència entre aquelles que s'utilitzen més sovint. Comencem per la definició de dimensió que va donar Hausdorff el 1918 (en tot aquest capítol estem parlant de dimensions en espais mètrics).

Definició 1 *Siga A un subconjunt de \mathbf{R}^N , definim la mesura exterior α -dimensional del subconjunt A com segueix:*

Siga $\{B_i\}$ un cobriment de A i anomenem $\varepsilon_i = \text{diam } B_i$; donats $\varepsilon > 0$ i $\alpha \geq 0$ considerem:

$$B_A = \left\{ \{B_i\}_{i=1}^{\infty} / A \subset \bigcup_i B_i : \varepsilon_i \leq \varepsilon \forall i \right\}$$

Considerem:

$$S_{\alpha, \varepsilon}(A) = \inf_{B_A} \sum_i \varepsilon_i^\alpha$$

aleshores anomenem mesura exterior α -dimensional de A :

$$S_\alpha(A) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_{\alpha, \epsilon}(A) .$$

Lema 1 Per a tot conjunt A de \mathbf{R}^N , existeix un únic nombre α^* , que anomenem dimensió de Hausdorff de A ($D_H(A)$) per al qual es verifica:

$$\alpha < \alpha^* \rightarrow S_\alpha(A) = \infty , \quad (1)$$

$$\alpha > \alpha^* \rightarrow S_\alpha(A) = 0 .$$

Aleshores $\alpha^* = D_H(A)$; la prova d'aquest lema pot trobar-se en Alder (1981).

Hasley et al. (1986) proposen una altra definició. Tot seguit provarem que és consistent amb la primera.

Per a cada ϵ -recobriment $\{B_i\}$ del conjunt A hom pot considerar la funció de partició següent:

$$\Gamma_1(q, \tau, \{B_i\}, \epsilon) = \sum_i \frac{p_i^q}{\epsilon_i^\tau}$$

on $p_i = m(B_i)$ és una mesura del conjunt B_i . Eliminant la dependència de B_i amb l'ínfim:

$$\Gamma_2(q, \tau, \epsilon) = \inf_{q \leq 1, \tau \leq 0} \Gamma_1(q, \tau, \{B_i\}, \epsilon)$$

i fent el límit quan $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\Gamma(q, \tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma_2(q, \tau, \epsilon) .$$

Definim ara la funció $\tau(q)$ de forma que es verifiqui la condició següent:

$$\Gamma(q, \tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } \tau > \tau(q) \\ 0 & \text{si } \tau < \tau(q) . \end{cases}$$

A partir d'aquest valor $\tau(q)$ hom pot definir un conjunt infinit de dimensions, que seran rellevants des de l'anàlisi que anem a presentar en aquest treball:

$$\delta_q = (q - 1)^{-1} \tau(q) .$$

Volem fer notar que aquesta definició de dimensions generalitzades és força recent i molt indicada per a allò que nosaltres anem a utilitzar; existeixen, però, altres definicions com veurem més endavant (Hentschel i Procaccia (1983), Grassberger (1983)). A aquestes les denotarem per D_q , i tot el que podem assegurar en general és que $\delta_q \leq D_q$, però en molts casos d'interès veurem que es verifica la igualtat.

Anem a veure com la dimensió de Hausdorff és el límit quan $q \rightarrow 0$ d'aquest conjunt de dimensions δ_q .

Lema 2

$$\delta_0 = D_H .$$

Demostració. $\delta_0 = -\tau(0)$ i $\tau(0)$ està definit perquè verifiquem:

$$\Gamma(0, \tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } \tau > \tau(0) \\ 0 & \text{si } \tau < \tau(0) \end{cases}$$

que és equivalent a:

$$\Gamma(0, \tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } -\tau < \delta_0 \\ 0 & \text{si } -\tau > \delta_0 \end{cases} \quad (2)$$

on

$$\Gamma(0, \tau) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(0, \tau, \varepsilon) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \Gamma(0, \tau, \{B_i\}, \varepsilon) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \frac{p_i^0}{\varepsilon_i^\tau} = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \varepsilon_i^{-\tau} .$$

Fent el canvi de variable: $\alpha = -\tau$, ens queda

$$\Gamma(0, \tau) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_i \varepsilon_i^\alpha = S_\alpha(A) .$$

Aleshores l'expressió (2) és equivalent a:

$$S_\alpha(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < \delta_0 \\ 0 & \text{si } \alpha > \delta_0 \end{cases}$$

i per la unicitat de D_H verificant aquesta condició hom pot assegurar que:

$$\delta_0 = D_H .$$

2.2 Capacitat o dimensió de Kolmogorov

La capacitat d'un conjunt tal i com va ser definida per Komogorov l'any 1958 es construeix com tot seguit expliquem:

Siga A un conjunt de \mathbf{R}^N . Denotem per $N(\varepsilon)$ el mínim nombre de N -cubs d'aresta ε necessaris per a cobrir A ; aleshores la capacitat de A és:

$$D_K(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} .$$

No és cert que aquest nou concepte siga sempre equivalent a la dimensió de Hausdorff. Tot el que hom pot assegurar de forma completament general és la desigualtat següent:

Lema 3

$$D_H \leq D_K .$$

Demostració. Per a demostrar aquesta desigualtat és suficient considerar sense pèrdua de generalitat que, en la definició de dimensió Hausdorff de la secció precedent, tots els conjunts del cobriment $\{B_i\}$ són cubs de la mateixa longitud d'aresta:

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \{B_i\}_{i=1}^{\infty} / A \subset \bigcup_i B_i : B_i \text{ cub de costat } \varepsilon \right\} .$$

Aleshores

$$S_{\alpha, \varepsilon}(A) = \inf_{\mathcal{B}_A} \sum_i \varepsilon_i^\alpha = N(\varepsilon) \varepsilon^\alpha$$

i la mesura α -dimensional de A queda com:

$$S_\alpha(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_{\alpha, \varepsilon}(A) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^\alpha$$

i aquesta darrera expressió és certa per a qualsevol valor de α . En particular anem a utilitzar $\alpha = D_K$.

$$S_{D_K}(A) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^{D_K}$$

De la definició de la capacitat de Kolmogorov hom dedueix que si

$$N(\varepsilon) \approx (\text{constant}) \times \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_K} ,$$

aleshores D_K serà el pendent de la línia de regressió dels punts que resulten en fer la gràfica: $\log N(\varepsilon)$ vs. $\log(\frac{1}{\varepsilon})$. Si anomenem R la constant de proporcionalitat, podem concloure:

$$S_{D_K}(A) \leq R , \quad 0 \leq R < \infty$$

i per l'expressió (1) del primer lema d'aquesta secció la dimensió de Hausdorff no pot ser pas major al valor de D_K i per tant queda: $D_H \leq D_K$ c.v.d. \square

En la majoria dels conjunts que apareixen en aquest treball, veurem que aquests dos conceptes coincidixen. Quede clar, però, que la dimensió de Hausdorff i la de Kolmogorov no són sempre la mateixa cosa i existixen conjunts on la desigualtat és estricta: a l'Apèndix A hom demostra que per al conjunt: $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ el valor de $D_H = 0$, mentre que $D_K = 0.5$.

La condició necessària i suficient per a tenir la igualtat és:

$$S_\alpha(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) \varepsilon^\alpha \text{ (finit)} \tag{3}$$

i l'anomenarem condició HK (Hausdorff-Kolmogorov); cal dir que la majoria dels autors (vegeu Farmer, 1983) fan la conjectura que tots dos conceptes són

el mateix en el cas dels atractors estranys, encara que fins ara no s'ha demostrat. A la secció V, apliquem la condició HK a aquest tipus de conjunts (que són bàsicament seccions de Poincaré de sistemes dinàmics). És possible provar (Martínez, 1988) que la condició suficient que han de complir els esmentats conjunts perquè la igualtat siga certa està relacionada amb el fet que siguen autosimilars. Fetes les distincions oportunes, adoptarem el nom de dimensió de Hausdorff (o dimensió fractal) D_H en tots els casos on l'equivalència siga certa.

2.3 Dimensió d'informació

Una de les objeccions que ràpidament podem fer de la capacitat de Kolmogorov a l'hora de caracteritzar un conjunt de punts és que no considera en quina mesura està ocupat cadascun dels cubs o caixes de la partició en \mathbf{R}^N . Tant se val si en una caixa trobem 1 punt del conjunt com 1000. En qualsevol dels casos només compta una vegada. Per a corregir aquest problema i no perdre l'esmentada informació cal dotar el conjunt d'una mesura de probabilitat p_i que expresse el pes relatiu de cadascuna de les celles i aleshores estarem en condicions de definir la precisament anomenada dimensió d'informació:

$$D_I(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=1}^N p_i \log p_i}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

2.4 Dimensió de correlació

Considerem els punts del conjunt $A : \{X_i\}_{i=1}^N$. Siga $M(\varepsilon)$ la fracció de parells de punts que hom troba separats a una distància menor que ε , és a dir:

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \{ \text{nombre de parells } (X_i, X_j) : |X_i - X_j| < \varepsilon \}$$

(com que estem considerant distintes formes d'aparellar N elements sense importar l'ordre i amb repetició, el factor de normalització és N^2). Aleshores la dimensió de correlació és:

$$D_C(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\log M(\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Podem definir aquestes dimensions d'una forma més sistemàtica que ens permetrà trobar fàcilment les relacions entre elles. Per això és convenient considerar les dimensions generalitzades (Hentschel i Procacia, 1983).

2.5 Dimensions generalitzades

Per a tot q positiu i $q \neq 1$ podem definir (Grassberger, 1983) l'expressió següent:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - q)^{-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N (p_i(\varepsilon))^q}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

És important destacar que q no és necessàriament un nombre sencer; per tant, en variar q tenim una família infinita de dimensions que com més avant veurem tenen rellevància física. La discontinuïtat de D_q en el punt $q = 1$, és completament evitable com tot seguit veurem.

- Lema 4**
- a) $D_K = \lim_{q \rightarrow 0} D_q = D_0$
 - b) $D_I = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = D_1$.
 - c) $D_C = \lim_{q \rightarrow 2} D_q = D_2$.

Demostració.

a) és evident: no cal sinó substituir en la definició de dimensions generalitzades $q = 0$ i obtenim trivialment la capacitat de Kolmogorov.

b) Per $q = 1$,

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)^{-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N (p_i(\varepsilon))^q}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} .$$

Fem el límit quan $q \rightarrow 1$ aplicant la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\log \sum_{i=1}^N (p_i)^q}{(1 - q)} = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{\sum_{i=1}^N (p_i)^q \log p_i}{-\sum_{i=1}^N (p_i)^q} = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i .$$

Aleshores,

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sum_{i=1}^N p_i \log p_i}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = D_I .$$

c) Quan $\varepsilon \rightarrow 0$ el nombre de parells (X_i, X_j) per als quals $|X_i - X_j| < \varepsilon$ s'acosta a $\sum_{i=1}^N n_i^2$, on n_i és el nombre de punts del conjunt que són a la caixa i , (és a dir, si ε és suficientment petit, els cubs d'aresta ε es fan independents a l'hora de considerar parells que es troben dins aqueixa distància, i per tant en el cub i hi trobem n_i^2 parells). Aleshores:

$$M(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N n_i^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{n_i}{N}\right)^2 = \sum_{i=1}^N p_i^2$$

i per tant

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{\log M(\varepsilon)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = D_C \quad \square$$

2.6 Dimensió topològica

Tradicionalment hom accepta que l'invariant topològic que caracteritza els espais euclidians és llur dimensió, definida com el nombre mínim de paràmetres que hom necessita per a definir un punt d'aquest espai. Així una recta serà de dimensió 1 perquè per a descriure qualsevol dels seus punts necessitem només un paràmetre: la distància a un origen arbitrari. Un pla és de dimensió 2 ja que necessitem dues coordenades (cartesianes, polars, etc.) per a descriure els seus punts, i així successivament. Aquesta definició serà suficient per a allò que hom utilitza en aquest treball, però és interessant assenyalar que no és completament consistent i pot presentar problemes d'interpretació; en particular a principi de segle, Cantor troba una aplicació 1 a 1 entre els punts d'una línia i els punts d'un pla i poc després Peano presentà una aplicació contínua d'un interval real sobre un quadrat. Es feia necessària, aleshores, una prova més evident de la invariància topològica de la dimensió d'un espai euclidià. Això va ser motiu d'alguns dels treballs de Lebesgue, i es pot trobar al llibre de Hurewicz i Wallman, 1941.

2.7 Fractals

Anomenem fractal qualsevol conjunt en el qual la dimensió de Hausdorff siga estrictament major que la dimensió topològica: $D_T < D_H$.

El nom de fractal ve del fet que aquests conjunts tenen valors per a D_H que són no sencers, és a dir són "fraccions". De fet és condició suficient perquè un conjunt siga fractal que la seua dimensió de Hausdorff siga no sencera, però aquesta característica no serà condició necessària: en particular el moviment descrit per una partícula dins un fluid en equilibri termodinàmic (moviment brownià) és un fractal, com veurem a la secció III, on $D_H = 2$ i per tant, sencer, mentre que la dimensió topològica $D_T = 1$.

Una característica dels fractals que hom pot deduir de la definició i que és de gran utilitat en el cas d'exemples naturals, com ara els agrupaments de certs cristalls, és comprovar que es verifique la relació $M(R)$ proporcional a R^{D_H} , on $M(R)$ és la massa de l'agrupament i R és la distància al centre. Estudiar el comportament de l'exponent d'aquesta llei de potències amb l'escala pot ser un bon procediment per a determinar D_H .

3 Alguns exemples de fractals

3.1 Introducció

Abans de fer referència a alguns dels exemples que il·lustren els conceptes introduïts al capítol anterior, anem a veure que efectivament la dimensió de Hausdorff coincideix amb la dimensió topològica en alguns conjunts elementals que evidentment no són fractals.

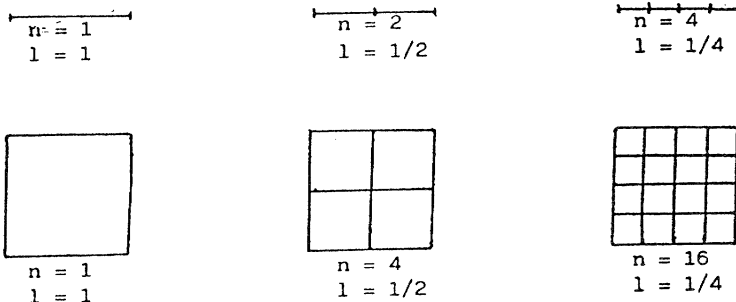


Fig. 1.

Si considerem l'interval de la recta real $[0, 1]$, la seua dimensió topològica és trivialment 1; anem a fer tot seguit particions successives com indica la figura 1. En cada estadi de la partició s'ha de verificar:

$$\{\text{Nombre de trossos}\} = \left(\frac{1}{\text{longitud de la partició}} \right)^{D_H}. \quad (4)$$

El resultat és el següent:

$$1 = \left(\frac{1}{1}\right)^{D_H}, \quad 2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{D_H}, \quad 4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^{D_H}, \quad \text{etc.}$$

Evidentment $D_H = 1$. Si considerem, així mateix, la regió del pla $[0, 1] \times [0, 1]$, la dimensió topològica d'aquesta superfície és evidentment 2 i també es verifica l'expressió (4):

$$1 = \left(\frac{1}{1}\right)^{D_H}, \quad 4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^{D_H}, \quad 16 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^{D_H}, \quad \text{etc.}$$

Ara $D_H = 2$, com era d'esperar. Anem a veure, però, com podem construir conjunts ben senzills que no verifiquen la igualtat $D_H = D_T$, i seran fractals.

3.2 Conjunt de Cantor

Considerem l'interval real $[0, 1]$ i eliminem el subinterval obert de longitud $\frac{1}{3}$ que resta al centre, és a dir, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Ens queden els dos intervals $[0, \frac{1}{3}]$ i $[\frac{2}{3}, 1]$; procedim ara amb cadascun d'ells de la mateixa manera. El resultat seran, (vegeu figura 2) els intervals $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$, i si continuem fins a l'infinit aquesta construcció autosimilar; el conjunt que en resulta s'anomena conjunt de

Cantor C , i té propietats que resulten inicialment sorprenents, com tot seguit veurem.

La mesura de Lebesgue de C és zero; efectivament, per a tot $\varepsilon > 0$, existeix un estat de la partició on la suma de les longituds dels intervals és menor que ε ; això ens assegura que la dimensió topològica és 0, ($D_T = 0$). Ara bé, podem establir una aplicació 1 a 1 entre C i $[0, 1]$, sense més que per a qualsevol x de $[0, 1]$, considerar la seua expressió binària (base 2) $x = x_1x_2x_3\dots$ i fer-li correspondre y de C , $y = y_1y_2y_3\dots$ (base 3) si es verifica:

$$x \longleftrightarrow y \text{ sii } \begin{cases} x_i = 0 \rightarrow y_i = 0 \\ x_i = 1 \rightarrow y_i = 2 \end{cases} .$$

D'aquesta aparent contradicció: un conjunt de dimensió topològica 0, que té tants punts com hi trobem a l'interval $[0, 1]$, podem concloure que la dimensió topològica D_T no és una bona mesura per a ser aplicada al conjunt C . No ens dóna una informació real de la seua dimensionalitat. En canvi la dimensió de Hausdorff sí que serà una bona caracterització d'aquest conjunt, com tot seguit anem a veure. Aplicant el procediment que s'ha explicat en la secció anterior per al seu càlcul, obtenim:

$$2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{D_H} \rightarrow D_H = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 ,$$

$$4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{9}}\right)^{D_H} \rightarrow D_H = \frac{\log 4}{\log 9} = 0.6309 ,$$

i invariablement, en ser la construcció del conjunt completament autosimilar, aquest càlcul ens donarà: $D_H = \frac{\log 2}{\log 3}$ per a qualsevol estadi de la partició.

3.3 Corbes de Koch

Un dels exemples clàssics de fractals de construcció geomètrica similar en totes les escales són les corbes de Koch (Mandelbrot, 1977). Considerem un triangle equilàter de base b , a continuació afegim al centre de cada aresta un nou triangle de base $\frac{b}{3}$ com s'indica en la figura 3, ara tenim l'estrella de David. En cadascun dels nous costats afegim un altre triangle de base $\frac{b}{9}$ i continuem aquest procediment fins a l'infinit. En aquest punt (teòric) tenim una corba de longitud il·limitada, contínua i no diferenciable en cap punt (tot són pics). És una corba de Koch.

Tractant-se d'una línia és evident que la seua dimensió topològica serà 1. Quina és, però, la seua dimensió de Hausdorff? Aplicant la fórmula (4) obtenim:

$$4 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^{D_H} \rightarrow D_H = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2617 .$$

Com $D_H > D_T$ aquesta corba de Koch és un fractal.

3.4 Fractals aleatoris: moviment brownià i DLA

Els dos exemples que hem vist fins ací són construccions artificials que tenen en comú el caràcter autosimilar en llur geometria. Tanmateix existeixen fractals en física que reproduïxen estructures observades en la natura i que verifiquen la desigualtat: $D_H > D_T$; en molts dels models que la física de la matèria condensada ha elaborat per a simular aquestes estructures hi ha una important component d'aleatorietat i no és clar que siguin autosimilars.

3.5 Moviment brownià

El moviment d'una partícula microscòpica en un fluid en equilibri s'anomena moviment brownià. La trajectòria descrita per aquesta partícula sembla completament aleatòria en el sentit següent: la direcció de la recta que uneix dues posicions en dos instants de temps pròxims varia d'una forma absolutament no regular si fem cada volta més petit l'interval temporal que les separa.

Al gràfic de la dreta, hom pot veure com totes les cel·les són visitades per la partícula.

El camí descrit per aquesta partícula en un fluid de 2 dimensions és fàcil de simular en l'ordinador (figura 4) i es tracta d'una corba de dimensió topològica $D_T = 1$, capaç, però, de cobrir totalment el pla. Aleshores la seua dimensió de Hausdorff serà $D_H = 2$; és per tant un fractal. Per a veure que per al moviment brownià $D_H = 2$, és prou considerar que, per a qualsevol partició que fem de la regió del pla on queda atrapat el moviment, totes les cel·les seran visitades per la partícula en algun moment de la seua trajectòria ergòdica i aleshores:

$$\text{nombre de cel·les ocupades} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2 = N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{D_H} \rightarrow D_H = 2.$$

3.6 Agregats per difusió limitada

Molts dels agrupaments (clusters) que s'observen en la natura, i en particular en alguns experiments de la física de la matèria condensada, s'han format seguint un procés que hom anomena "agregació per difusió limitada" (DLA, de l'anglès diffusion limited aggregation). En realitat, i per a ser precisos, DLA és un model que representa molt bé les característiques de dimensionalitat d'alguns agrupaments, com ara dipòsits de zinc en experiments d'electròlisi, injecció de fluids en medis porosos i en general una gran varietat de cristalls.

Aquest model va ser introduït per Sander i Witten el 1981 i és de fàcil construcció; considerem una secció limitada del pla, per exemple un cercle de radi R , que correspon al radi màxim de l'agrupament, i situem una partícula precisament al centre. Una segona partícula apareix en algun punt de la superfície acotada i comença un camí aleatori seguint un moviment brownià, tal i com

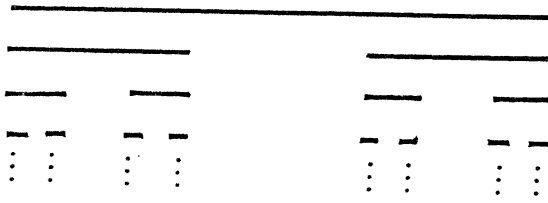


Fig. 2: El conjunt ternari de Cantor

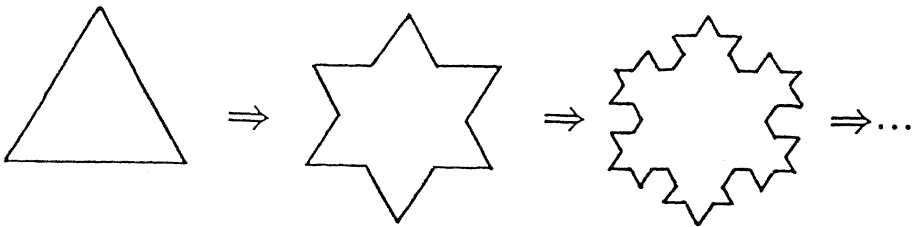


Fig. 3: Construcció d'una corba de Koch

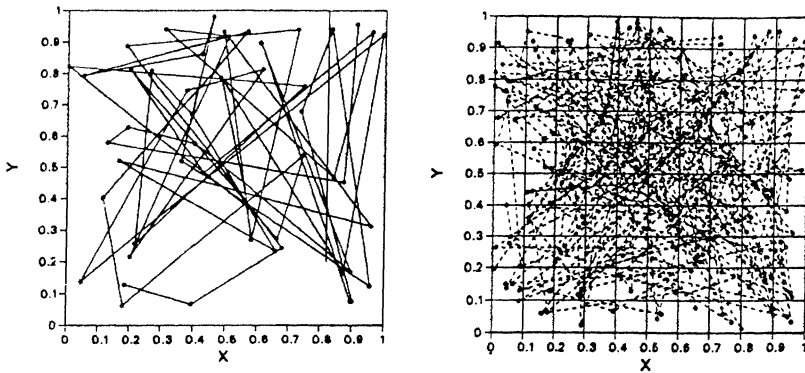


Fig. 4: Moviment brownià

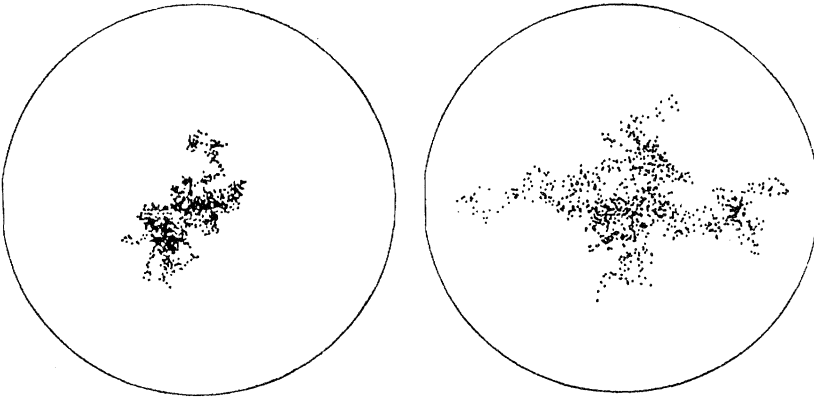


Fig. 5: Agregats per difusió limitada. Dos exemples simulats amb l'ordinador.

s'ha descrit en la secció anterior; aquesta segona partícula finalitzarà el seu moviment quan es trobe en un lloc suficientment pròxim a la partícula precedent; en particular, quan la distància entre les dues siga menor que un valor previament establert ε_0 . Una tercera partícula inicia ara el seu camí aleatori que anàlogament finalitzarà quan es trobe a una distància menor que ε_0 de qualsevol de les anteriors, i així hom continua en principi indefinidament la construcció (figura 5). El resultat, fàcil de simular amb l'ordinador, ens dóna una imatge que podíem no esperar inicialment i que correspon a les estructures observades en molts agrupaments naturals que s'han esmentat abans.

Cal fer notar que el fet de considerar una secció limitada de pla suposa que cadascuna de les partícules que realitzen el camí aleatori no pot mai escapar d'aquesta regió, és a dir, en arribar al límit donat pel cercle de radi R , "rebota" i continua el seu camí aleatori dins el cercle. En la pràctica i donat que l'experiment ha de reproduir experiments reals i les partícules són sòlides, ocupen volum, hom sol utilitzar una xarxa poligonal, sobre la qual està limitada la trajectòria aleatòria. En definitiva es tracta de discretitzar l'espai.

Els agrupaments obtinguts amb aquest procediment semblen un fractal, i anem a calcular la seua dimensió de Hausdorff. La forma de calcular D_H és fer particions de talla ε (ε petit, però $\varepsilon > \varepsilon_0$) de la secció limitada on tenim el fractal i comptar per a cada ε el nombre de cel·les ocupades per punts del conjunt, $N(\varepsilon)$. Fent aquest recompte per a diferents valors de ε , la dimensió fractal serà el pendent de la recta de regressió dels punts que resulten en graficar $\log(N(\varepsilon))$ vs. $\log(\frac{1}{\varepsilon})$. El resultat que obtenim és $D_H = 1.70 \pm 0.01$. Aquesta dimensió, com s'ha explicat en les definicions de la secció II, és equivalent a la capacitat de Kolmogorov, D_K , i normalment és denotada en la literatura per

dimensió fractal, d_f ; tanmateix, si aquests conjunts són autosimilars, com així sembla que són (Stanley, 1987), verificaran la condició HK i per tant $D_K = D_H$.

4 Multifractals: la corba $f(\alpha)$

4.1 Introducció

Un multifractal és un fractal que en compte d'un únic exponent característic en té tota una distribució contínua. De fet, la idea que hi ha sota aquest nou concepte és la caracterització d'aquelles regions amb la mateixa densitat local, amb la seua pròpia dimensió fractal. Suposem que el conjunt estrany que volem estudiar és un conjunt de punts en un cert espai mètric de dimensió euclidiana d . Aquest serà el cas que ens interessarà caracteritzar quan treballem amb sistemes dinàmics amb moviment caòtic, com veurem a la secció V, però la situació és similar en altres aplicacions físiques.

4.2 La corba $f(\alpha)$

Siga N el nombre de punts de l'esmentat conjunt: $\{X_i\}_{i=1}^N$. Hem de començar dotant-lo d'una mesura de probabilitat; podem trobar moltes formes de definir aquesta mesura, però una de les més simples perquè és basada en la funció de correlació de dos punts, és la següent: per a cadascun dels X_i comptem el nombre de punts del conjunt que hom troba dins un cercle de radi ε (petit), és a dir, el nombre de veïns dins aqueixa distància, i el representem per $n_i(\varepsilon)$. Aleshores la probabilitat que associem a X_i serà,

$$p_i(\varepsilon) = \frac{n_i(\varepsilon)}{N}.$$

Imposant tot seguit una condició de normalització per tal que es tracte realment d'una mesura de probabilitat,

$$\sum_{i=1}^N p_i(\varepsilon) = 1,$$

aleshores podem fer la hipòtesi físicament raonable (Jensen et. al. 1985) que aquestes probabilitats estan relacionades amb ε mitjançant una llei de potències,

$$p_i \approx \varepsilon^{\alpha_i}, \quad (5)$$

on α_i seran els exponents característics del conjunt. Podem considerar ara l'aplicació que associa a cada punt el seu exponent:

$$A : X_i \rightarrow \alpha_i .$$

Estudiar com estan distribuïts aquests valors ens proporcionarà una informació molt interessant a l'hora de caracteritzar el mateix conjunt, des del punt

de vista de la seua dimensionalitat. El procés és com segueix: el nombre de vegades que α pren un valor dins l'interval $[\alpha', \alpha' + d\alpha']$ pot expressar-se com,

$$n(\alpha')d\alpha' = \varepsilon^{-f(\alpha')}d\alpha', \quad (6)$$

on $f(\alpha)$ serà la dimensió fractal del subconjunt de punts que tenen el mateix valor per a l'exponent α , és a dir, del subconjunt: $A^{-1}(\alpha)$ on $\alpha \in [\alpha', \alpha' + d\alpha']$, i es tracta d'una funció contínua de α com veurem més avant.

Considerem la funció de partició que hem definit a la secció II i que coincideix amb les funcions de partició (moments) que s'utilitzen clàssicament a la física estadística,

$$\Gamma(q, \tau, \varepsilon) = \varepsilon^{-\tau} \sum_{i=1}^N (p_i(\varepsilon))^q, \quad (7)$$

on q i τ són reals. Per a tots els valors de q , el comportament d'aquesta funció en el límit, $\varepsilon \rightarrow 0$ i $N \rightarrow \infty$ és sempre el següent:

$$\Gamma(q, \tau) = \begin{cases} \infty & \text{si } \tau > \tau(q) \\ 0 & \text{si } \tau < \tau(q). \end{cases} \quad (8)$$

Aleshores, trobar aquesta transició serà el procediment per a establir la relació entre les variables τ i q introduïdes en la definició de la funció de partició. Com ja vàrem veure a la secció II, $\tau(q)$ és una funció generadora de les dimensions generalitzades D_q ,

$$D_q = (q - 1)^{-1} \tau(q),$$

on recordem

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (q - 1)^{-1} \frac{\log \sum_{i=1}^N (p_i(\varepsilon))^q}{\log \varepsilon}.$$

En les figures 6 i 7 hem graficat les funcions $\tau(q)$ i D_q corresponents a un conjunt arbitrari, en particular a un atractor estrany, per tal que hom en puga reconèixer el comportament característic.

Anem a relacionar les variables (q, τ) amb (α, f) . El procediment s'inicia expressant la funció de partició Γ de forma contínua amb una integral sobre α ,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \varepsilon^{-\tau} \sum (p_i(\varepsilon))^q = \varepsilon^{-\tau} \int n(\alpha) p(\alpha)^q d\alpha = \varepsilon^{-\tau} \int \varepsilon^{-f(\alpha)} \varepsilon^{\alpha q} d\alpha = \\ &= \varepsilon^{-\tau} \int \varepsilon^{-f(\alpha) + \alpha q} d\alpha = \varepsilon^{-\tau} \int e^{(f(\alpha) - \alpha q) \log(\frac{1}{\varepsilon})} d\alpha = \varepsilon^{-\tau} \int e^{\nu \gamma(\alpha)} d\alpha, \end{aligned}$$

on $\nu = \log(\frac{1}{\varepsilon})$ i $\gamma(\alpha) = f(\alpha) - \alpha q$. La darrera integral pot ser aproximada amb el teorema d'aproximació integral de Laplace (Copson, 1967). Imposem les hipòtesis d'aquest teorema: $\gamma'(\alpha) = 0$, $\gamma''(\alpha) < 0$. La primera condició ens dóna,

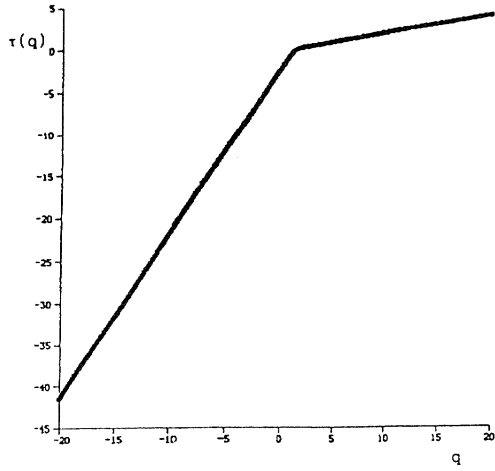


Fig. 6: La funció $\tau(q)$

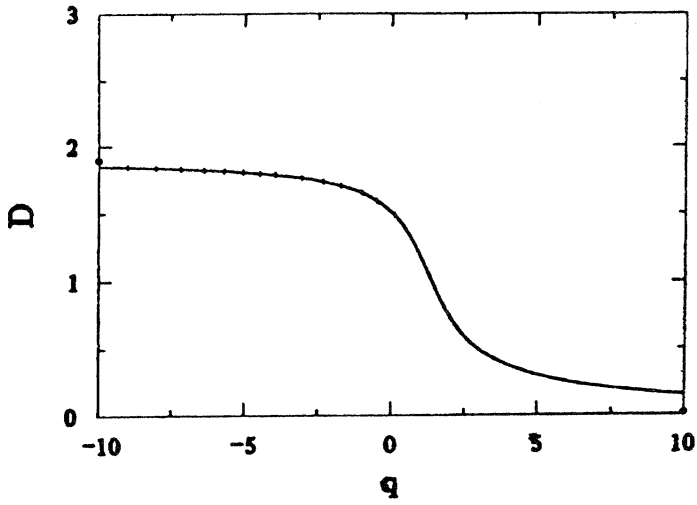


Fig. 7: Dimensions generalitzades: D_q

$$\gamma'(\alpha) = \frac{df}{d\alpha} - q = 0 \rightarrow \frac{df}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha(q)} = q$$

i la segona condició,

$$\gamma''(\alpha) = \frac{d^2f}{d\alpha^2} < 0 .$$

Aleshores la tesi del teorema diu,

$$\int e^{\nu\gamma(\alpha)} d\alpha = e^{\nu\gamma(\alpha(q))} \left(\frac{-\pi}{2\nu\gamma''(\alpha(q))} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{(\alpha(q)q - f(\alpha(q)))} \left(\frac{\pi}{2 \log \varepsilon f''(\alpha(q))} \right)^{\frac{1}{2}}$$

i finalment ens queda per a la funció de partició (fent $\alpha = \alpha(q)$ per comoditat),

$$\Gamma = \varepsilon^{-\tau + \alpha q - f(\alpha)} \left(\frac{\pi}{2 \log \varepsilon f''(\alpha(q))} \right)^{\frac{1}{2}} . \quad (9)$$

Per tal d'evitar la dependència del primer factor en τ i q , i poder fer $\Gamma =$ constant, tal i com prescriu l'expressió (1), imposem:

$$\tau(q) = q\alpha - f(\alpha), \quad \alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} . \quad (10)$$

Aquest parell de fórmules formen allò que hom anomena una transformació de Legendre, i que consisteix en el fet que per a qualsevol punt de la corba $f(\alpha)$, el pendent de la tangent a la corba a l'esmentat punt és q i l'ordenada a l'origen de la recta tangent és $-\tau(q)$ (figura 8). És interessant fer notar que l'expressió que resta entre parèntesis per a Γ en (9) no és independent de τ i q . De fet, de (10) hom pot deduir fàcilment que $f''(\alpha) = \frac{1}{\tau''(q)}$ i aleshores,

$$\left(\frac{\pi}{2 \log \varepsilon f''(\alpha(q))} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\pi \tau''(q)}{2 \log \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

És a dir, la dependència que resta està en funció de la segona derivada de τ , però en qualsevol cas aquest factor està acotat. Per tant en el límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ tot el factor tendeix a 0.

De la transformació de Legendre (10), es desprèn el procediment per a obtenir la corba de multifractalitat $f(\alpha)$, senzillament calculant l'envolupant de la família de rectes $y = qx - \tau(q)$ variant q de $-\infty$ a ∞ , com s'indica a la figura 9.

4.3 Característiques de $f(\alpha)$

La corba $f(\alpha)$ té un únic màxim, i el valor que la funció pren en aquell punt és la dimensió de Hausdorff del conjunt; efectivament, per la mateixa construcció

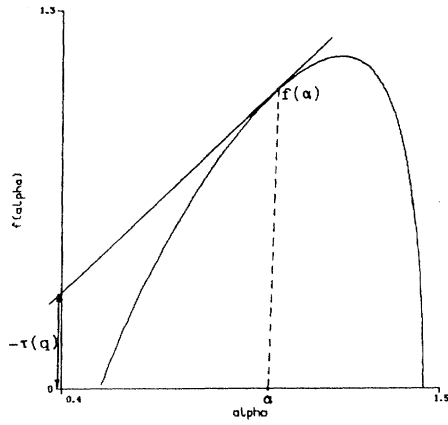


Fig. 8: Transformació de Legendre

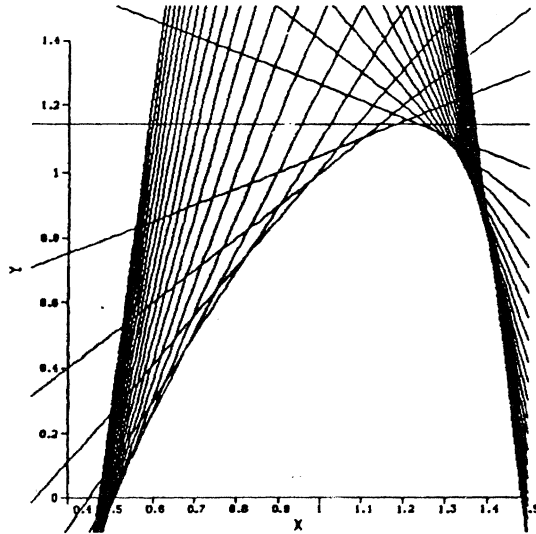


Fig. 9: Tangents de $f(\alpha)$

$f'(\alpha) = q$ i l'extrem que s'ateny quan $q = 0$ és un màxim ($f'' < 0$) i correspon a $f(\alpha_H) = -\tau(0) = \delta_0 = D_H$, com hem vist a la secció II.

Hom pot observar que α pren valors en un rang particular $[\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, on:

$$\alpha_{\min} = \lim_{q \rightarrow \infty} D_q,$$

$$\alpha_{\max} = \lim_{q \rightarrow -\infty} D_q,$$

α_{\min} correspon a la regió del conjunt on la concentració de punts és màxima i α_{\max} a les parts més rarificades. Açò és obvi, perquè si $\varepsilon < 1$ aleshores ε^α és decreixent i tenint en compte que $f''(\alpha) = \frac{1}{\tau''(q)} = \frac{dq'}{d\alpha} < 0$ aleshores $\alpha(q)$ també decreix; per tant podem concloure:

$$\text{si } q > q' \rightarrow \alpha(q') > \alpha(q) \rightarrow \varepsilon^{\alpha(q')} < \varepsilon^{\alpha(q)},$$

i ε^α és la mesura del conjunt, aleshores quan $q \rightarrow \infty$ la mesura és màxima i correspon a les parts de major densitat del conjunt. En canvi si $q \rightarrow -\infty$, ens referim a les parts del conjunt on la mesura és baixa, és a dir, a les de densitat més petita.

5 Multifractals aplicats a la caracterització de sistemes caòtics

5.1 Introducció

Un sistema dinàmic és un conjunt d'equacions diferencials que descriu l'evolució temporal d'un sistema físic coneixent les condicions inicials. La solució dels sistemes és una trajectòria en l'espai de fases (cada punt d'aquesta trajectòria representa un estat de moviment del sistema). Aquests poden ser conservatius, si verifiquen el teorema de Liouville, per exemple els sistemes hamiltonians, i també poden ser no conservatius o dissipatius. La primera classe preserva el volum a l'espai de fases; en canvi, la segona el va deformant de forma contínua. Als dos tipus, però, és possible observar moviment caòtic o estocàstic.

De fa poc fins ara, alguns sistemes dissipatius han esdevingut molt populars per llur comportament, en el qual les trajectòries són atretes dins una regió particular de l'espai de fases amb un tipus de moviment que sembla caòtic. Aquests sistemes han estat anomenats atractors estranys, i més específicament són el producte entre una varietat regular i un conjunt de Cantor. També sabem que alguns sistemes conservatius poden presentar solucions estocàstiques. En aquest cas no hi ha atractors, però sí que hi podem observar un cert tipus de repulsors.

En les dues classes de sistemes la transició de l'ordre al caos té lloc en un precís moment en el qual un dels paràmetres del sistema pren un valor particular,

per exemple, en els sistemes hamiltonians aquesta transició ocorre quan l'energia excedeix d'un determinat valor.

Fins ara no s'ha trobat un procediment que caracteritzi globalment les propietats d'estocasticitat del moviment caòtic, és a dir alguna mesura global de l'aleatorietat. Importants paràmetres, com la dimensió de Hausdorff, àdhuc altres dimensions com la d'informació o de correlació, són insuficients per a caracteritzar aquests conjunts estranys, en el sentit que solucions completament diferents de sistemes dinàmics poden tenir els mateixos valors per a aquestes mesures.

En aquesta secció anem a aplicar el formalisme dels multifractals, en particular l'estudi de l'espectre $f(\alpha)$, als dos tipus de sistemes, conservatius i dissipatius. En primer lloc, però, anem a presentar algunes modificacions del procediment per a fer-lo aplicable.

5.2 La corba $f(\alpha)$ per a sistemes dinàmics

Si el nombre de punts que tenim a l'espai de fases representant un moviment caòtic no és molt gran, trobarem problemes pràctics a l'hora d'aplicar el formalisme que hem presentat a la secció anterior; en particular el comportament de la funció de partició Γ no serà tan escalonat com teòricament s'esperava, ($\Gamma = \infty$ si $\tau < \tau(q)$ i $\Gamma = 0$ si $\tau > \tau(q)$) perquè aquest comportament és cert solament al límit quan $\varepsilon \rightarrow 0$ i $N \rightarrow \infty$, en canvi, si N és finit i no molt gran, resulta complicat trobar un mecanisme per a definir $\tau(q)$ i així poder continuar la construcció de $f(\alpha)$. La raó fonamental és que, essent N el nombre de punts de què disposem, resulta impossible d'extraure informació del conjunt definint la mesura de probabilitat per a valors de $\varepsilon < L_{\max}/N^{1/d}$ on L_{\max} és la distància màxima entre punts i d és la dimensió euclidiana de l'espai de fases. Aleshores el comportament de $\tau(q)$ és molt més suau, aproximadament exponencial, com hom pot apreciar a la figura 10.

Aleshores procedirem assumint que donats el nombre de punts N i la distància ε , podem trobar una constant efectiva que manté fixa la funció de partició,

$$\Gamma = C(\varepsilon, N), \quad (11)$$

on C és independent de q . Açò en realitat és una imposició, perquè com hem vist a la secció anterior utilitzant la integral de Laplace, C depèn de $\tau''(q)$, però com a primera aproximació podem suposar que aquesta segona derivada, relacionada amb la curvatura de $f(\alpha)$ és constant i el seu valor efectiu serà ja contingut a C . A l'apèndix B, hom dóna un exemple que justifica l'aplicació d'aquesta aproximació, que sempre serà bona per a valors de q pròxims a 0.

Si variem aquesta constant de normalització i continuem el procediment de construcció de $f(\alpha)$, hom pot comprovar que la corba $f(\alpha)$ és senzillament traslladada paral·lelament a l'eix vertical. Això vol dir que serà suficient fixar un punt de l'espectre com una condició inicial, per a obtenir la representació

multifractal, tot respectant la condició $\tau(1) = 0$. La forma més fàcil és fixar per exemple el màxim, és a dir, la dimensió de Hausdorff, $D_0 = -\tau(0)$. Aleshores,

$$\Gamma(0, \tau(0)) = \varepsilon^{-\tau(0)} \sum_{i=1}^N (p_i(\varepsilon))^0 = C(\varepsilon, N)$$

i així podem definir un valor efectiu per a $\tau(q)$, sense fer res més sinó aïllar τ de l'expressió (11) tot recordant la definició de la funció de partició Γ ,

$$\tau_{\text{eff}}(q) = \frac{\log \sum_{i=1}^N (p_i)^q - \log C(\varepsilon, N)}{\log \varepsilon}.$$

Necessitem per tant calcular prèviament la dimensió de Hausdorff D_0 . Per fer-ho utilitzarem un mètode de recompte de cel·les ocupades, estadísticament corregit. La idea és la següent: com s'ha explicat en les seccions anteriors, la dimensió de Hausdorff es calcula fent una partició de cel·les de costat ε (quadrícula) de la regió on es troben els punts. Denotem per $N(\varepsilon)$ el nombre de caixes ocupades corresponents a ε . La dimensió serà el pendent de la recta de regressió dels punts que resulten en grafiar $\log N(\varepsilon)$ vs. $\log(\frac{1}{\varepsilon})$, però si el nombre de punts del conjunt N no és molt gran, el càlcul de $N(\varepsilon)$ depèn en gran mesura de la posició de la quadrícula i aquest fet produeix grans errors en l'estima de D_0 . Per evitar aquest problema calcularem la mitjana $\overline{N}(\varepsilon) = \langle N(\varepsilon) \rangle$ sobre diferents realitzacions, entenent cadascuna d'elles com el resultat del procés de recompte desplaçant la quadrícula de talla ε d'una realització a l'altra amb un vector aleatori \vec{a} de components $|a_i| < \varepsilon$, tal com indica la figura 11. Aleshores D_0 serà:

$$D_0 = \frac{d(\log \overline{N}(\varepsilon))}{d(\log(\frac{1}{\varepsilon}))}.$$

5.3 Caracterització dels atractors de sistemes dissipatius

En aquesta secció apliquem el formalisme dels multifractals a dos dels atractors estranys més coneguts. El primer és l'aplicació de Hénon; és sorprenentment senzilla, $x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2$, $y_{n+1} = bx_n$; amb $a = 1.4$, $b = 0.3$ i les condicions inicials $x_0 = 1, y_0 = 0$, però proporciona una bona aproximació al sistema de Lorenz. El seu comportament cantorià pot ser observat graficant successives ampliacions (figura 12). En cadascuna d'elles es repeteix la mateixa estructura de línies paral·leles; el jacobinià d'aquesta transformació és constant, $-b$, i segons Hénon està relacionat amb la constància de la divergència de les equacions de Lorenz,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X - \sigma Y \\ \dot{Y} &= bX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= XY - aZ. \end{aligned}$$

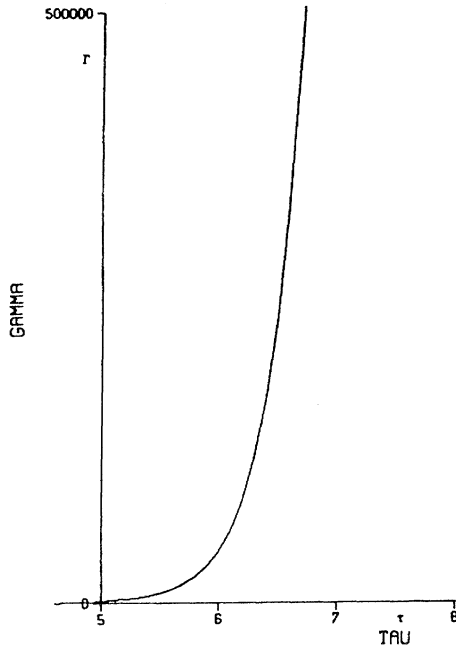


Fig. 10: Comportament de la funció de partició per a un nombre finit de punts. (La gràfica s'ha obtingut a partir de l'aplicació de Hénon, 1000 punts i $q = 3$.)

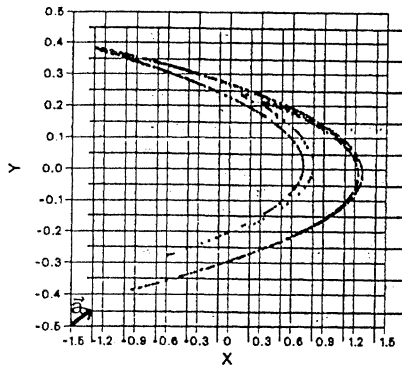


Fig. 11: Desplaçament de la xarxa per a calcular la dimensió de Hausdorff aplicant el mètode de recompte estadísticament corregit.

I la divergència ens dona,

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(a + 1 + \sigma) = \text{constant}.$$

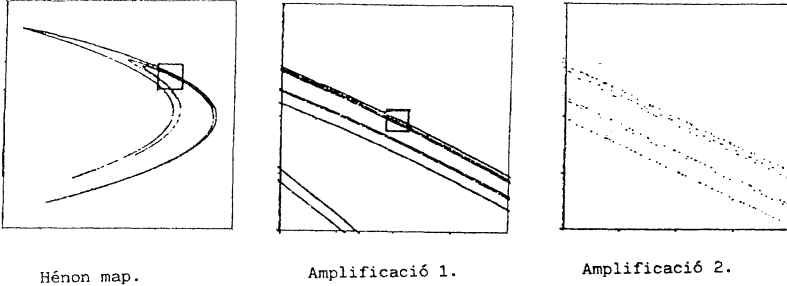


Fig. 12: Successives ampliacions de l'aplicació d'Hénon, incrementant el nombre de punts.

El segon atractor amb què anem a treballar, es tracta ja no d'una aplicació sinó d'un flux, definit per un sistema d'equacions diferencials ordinàries no lineal, conegut amb el nom de sistema de Rössler (1976),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + 0.2y \\ \dot{z} &= 0.2 + xz - 5.7z. \end{aligned}$$

Resolent numèricament aquest sistema (ací s'ha fet un procediment de Runge Kuta de quart ordre), hom troba un atractor periòdic en 3 dimensions, com s'aprecia a la figura 13. Anem a considerar la projecció en el pla $X - Y$. Aquest sistema, però, no té divergència constant,

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = 0.2 + x - 5.7.$$

Per a aquests atractors hi ha dos procediments per a definir la mesura de probabilitat p_i :

a) Probabilitats espacials. Com s'ha explicat a la secció anterior, generant N punts de l'atractor, les probabilitats de cada punt es defineixen com: $p_i(\varepsilon) = n_i(\varepsilon)/N$ on $n_i(\varepsilon)$ és el nombre de veïns dins la distància ε del punt X_i .

b) Probabilitats temporals. Si els punts de l'atractor són generats en sèries temporals, i el sistema és ergòdic, podem comptar per a cada punt X_i , el nombre d'escalons temporals, (punts entremig) que hi ha entre el moment en què el punt apareix a l'espai de fases i el moment en què un altre punt arriba dins una distància ε del primer, m_i ; aleshores la probabilitat de X_i serà $p_i = m_i^{-1}$.

En ambdós casos, per a tenir una mesura de probabilitat cal imposar la condició de normalització,

$$\sum_{i=1}^N p_i(\varepsilon) = 1.$$

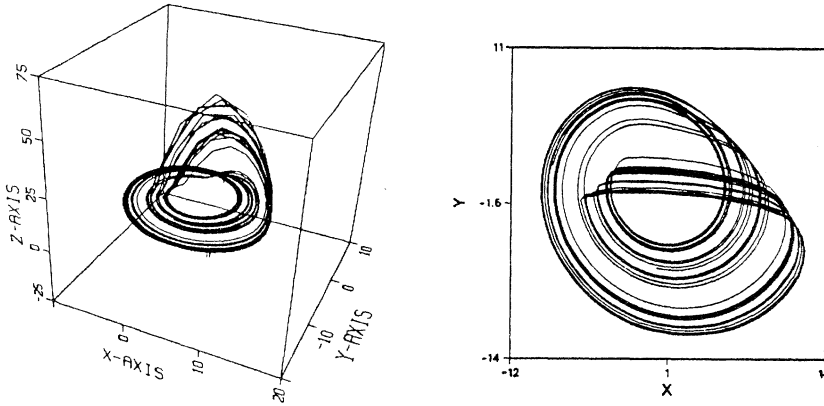


Fig. 13: L'atractor de Rössler en 3 dimensions i la seua projecció al pla $X \rightarrow Y$.

Aconseguides les probabilitats per dos procediments diferents podem obtenir la corba $f(\alpha)$ corresponent a cadascun d'ells; si el sistema és ergòdic hom espera que per a un nombre de punts suficientment gran tots dos procediments ens donen la mateixa $f(\alpha)$, esdevenint aquest procediment com una mena de test numèric d'ergodicitat. Ací hem calculat l'espectre $f(\alpha)$ per a l'aplicació d'Hénon utilitzant un nombre reduït de punts, 1000, amb les dues classes de probabilitats. Com podem veure a la figura 14, la corba $f(\alpha)$ obtinguda utilitzant probabilitats temporals (línies puntejades) resta ben lluny de coincidir amb l'obtinguda utilitzant probabilitats espacials. La raó és que per tal d'aconseguir mesures de probabilitat precises per a un sistema utilitzant la seua dinàmica (dependència temporal), hom necessita una gran quantitat d'informació, és a dir, molts més punts. De fet, com s'aprecia en la figura, incrementant el nombre de punts, podem relaxar la corba puntejada aproximant-la a la línia sòlida.

La figura 14 mostra també $f(\alpha)$ per a la projecció del sistema de Rössler, i en la taula 1 podem trobar els principals valors de l'espectre de singularitats,

$$(D_0, D_1, \alpha_{\max} \text{ i } \alpha_{\min}),$$

per als dos atractors, Hénon i Rössler. És interessant destacar que la corba $f(\alpha)$ corresponent al sistema de Rössler queda dins la que correspon al sistema de Hénon. Això pot estar relacionat amb el fet de la no constància de la divergència per al sistema Rössler, car, tenint en compte el comportament asimptòtic de $f(\alpha)$ que hem vist a la secció anterior, hom pot argumentar que els valors de α_{\max} i α_{\min} , depenen dels valors de les probabilitats mínim i

màxim, respectivament, i aquests seran més extrems com més dissipatiu siga el sistema. És per això que ho són més per a l'aplicació de Hénon.

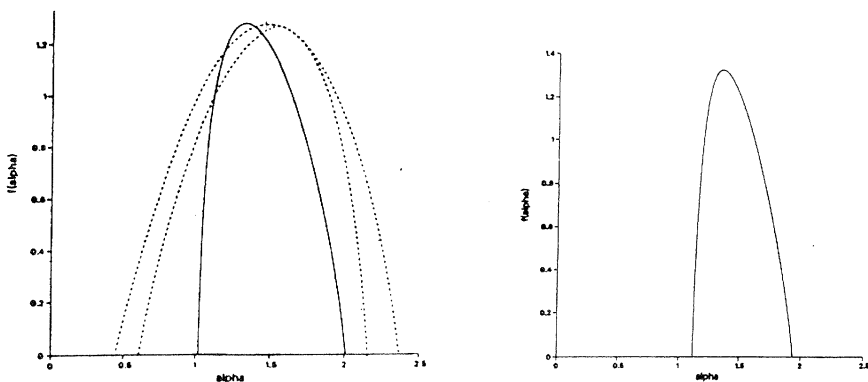


Fig. 14: La corba $f(\alpha)$ per a l'aplicació de Hénon. La línia contínua és el resultat d'utilitzar probabilitats espacials, i les puntejades probabilitats temporals. A la dreta, la corba calculada per a l'atractor de Rössler.

Tornant a la taula 1, és remarcable el fet que la dimensió Hausdorff de l'aplicació de Hénon obtinguda amb el procediment de recompte corregit estadísticament que hem presentat abans, utilitzant fins tot un nombre petit de punts, està d'acord amb els resultats més exactes obtinguts recentment per a aquest valor (Grassberger, 1983), però aquest procediment és computacionalment més econòmic.

5.4 Caracterització de seccions de Poincaré de sistemes conservatius no harmònics

El hamiltonià de Hénon-Heiles (1969) ens permetrà estudiar com hom pot aplicar el formalisme dels multifractals a sistemes conservatius amb comportament estocàstic. El hamiltonià és:

$$H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + q_1^2 q_2 - \frac{1}{3} q_2^3 .$$

Té un origen astronòmic. Es tracta d'un potencial en coordenades cilíndriques on la component vertical del moment angular és una constant del moviment, a més a més de l'energia. Les corresponents equacions de Hamilton són,

$$\begin{aligned}
\frac{dq_j}{dt} &= p_j & j &= 1, 2, \\
\frac{dp_1}{dt} &= -q_1 - 2q_1q_2, \\
\frac{dp_2}{dt} &= -q_2 - q_1^2 + q_2^2.
\end{aligned}
\tag{12}$$

El hamiltonià és definit en un conjunt obert M en la varietat \mathbf{R}^4 i verifica per a valors petits de l'energia les condicions del teorema de KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser):

$$H = H_0 + V \quad \text{on} \quad H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2).$$

La part corresponent a la pertorbació és petita: $O(3)$ i H_0 és integrable:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial p_i} = p_i, \\
\dot{p}_i &= \frac{\partial H_0}{\partial q_i} = -q_i.
\end{aligned}$$

Fent la transformació canònica:

$$\begin{aligned}
P_i &= \frac{1}{2}(p_i^2 + q_i^2), \\
Q_i &= C_i \quad i = 1, 2,
\end{aligned}$$

ara $\bar{H}_0 = P_1 + P_2$ i $\{Q_i\}$ han esdevingut variables cícliques i les corresponents equacions hamiltonianes canòniques són trivialment integrables:

$$\begin{aligned}
\dot{Q}_i &= \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial P_i} = 1 = \Omega_i && \text{(freqüències angulars)} \\
\dot{P}_i &= \frac{\partial \bar{H}_0}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2)}{\partial(P_1, P_2)} = 0 && \text{(condició de no ressonància)}.
\end{aligned}$$

Les freqüències estan racionalment connectades, $1\Omega_1 - 1\Omega_2 = 0$, aleshores el teorema de KAM afirma que el moviment a l'espai de fases està acotat en un tor de 2 dimensions, excepte, com a màxim, un conjunt de punts de la trajectòria amb mesura de Lebesgue zero.

Si restringim el nostre estudi a les superfícies d'isoenergia de 3 dimensions contingudes a \mathbf{R}^4 ,

$$M_E = \{(p_1, p_2, q_1, q_2) \in M : H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E\}.$$

Resolent les equacions de Hamilton numèricament, amb un mètode de Runge-Kuta, hom considera la secció de Poincaré que resulta de graficar en el pla $q_1 - p_1$

els punts per als quals $q_2 = 0$ i $p_2 > 0$ (és a dir, marquem els punts de la trajectòria a l'espai de fases quan travessen aquesta superfície només en un sentit particular, el que correspon a velocitats positives). La figura 15 mostra algunes d'aquestes òrbites per a diferents valors de l'energia E . En cadascuna de les gràfiques s'han dibuixat diverses òrbites, corresponents a diferents condicions inicials. Podem apreciar que per a $E = \frac{1}{12}$ les òrbites són totes periòdiques. Incrementant l'energia al voltant de $E = \frac{1}{8}$ es produeix la transició al caos. Trobem en aquest punt, tant òrbites periòdiques com d'altres que semblen punts aleatoris amb certes formes característiques. Fent l'energia $E = \frac{1}{6}$ el moviment sembla completament caòtic, però encara hi trobem regions que no són visitades (repulsors), les quals ens fan pensar que el moviment no és completament ergòdic dins la superfície de secció. Aquests repulsors corresponen sens dubte als forats del tor de KAM on hi ha la trajectòria. Aquest, però, sembla estar plegat sobre ell mateix, almenys eixa és la impressió que donen les òrbites si les grafiquem separadament incrementant l'exactitud del mètode de resolució numèrica del sistema d'equacions diferencials no lineal (12).

Anem a triar dues òrbites particulars amb la mateixa energia: $E = \frac{1}{8}$, que han estat seleccionades per Bender i Orszag (1978) i corresponen a les condicions inicials

$$I. - \quad p_1(0) = \frac{1}{3}, \quad p_2(0) = 0.1293144, \quad q_1(0) = \frac{1}{4}, \quad q_2(0) = \frac{1}{5},$$

$$II. - \quad p_1(0) = 0.1, \quad p_2(0) = 0.467618, \quad q_1(0) = 0.1, \quad q_2(0) = 0.1.$$

La figura 16 mostra el comportament diferent d'ambdues òrbites. L'estocasticitat pot apreciar-se en totes dues, en la primera mirant els extrems laterals, en la segona l'aleatorietat s'ha incrementat considerablement. Nosaltres creiem que l'espectre $f(\alpha)$ pot ser utilitzat per mesurar d'una forma relativa la difusió de l'òrbita. Hom pot veure la corba $f(\alpha)$ per a les dues òrbites.

La dimensió de Hausdorff és més gran en l'òrbita I (els valors numèrics poden trobar-se a la taula 1), perquè la difusió ha fet que la trajectòria ocupe més espai en la secció de Poincaré, però resulta més interessant fixar l'atenció en els valors de D_∞ o α_{\min} i $D_{-\infty}$ o α_{\max} , que representen la dimensió fractal de les parts més concentrades i les parts més rarificades del conjunt respectivament. Mentre que D_∞ pren més o menys el mateix valor per a les dues òrbites, podem observar que $D_{-\infty}$ és molt més gran en la II que en la I, proporcionant una bona mesura relativa de l'aleatorietat o difusió. Concloem, doncs, destacant que $f(\alpha)$ reflecteix quantitativament diferents distribucions de les regions de més alta i més baixa densitat que s'observen en les dues aplicacions de Poincaré.

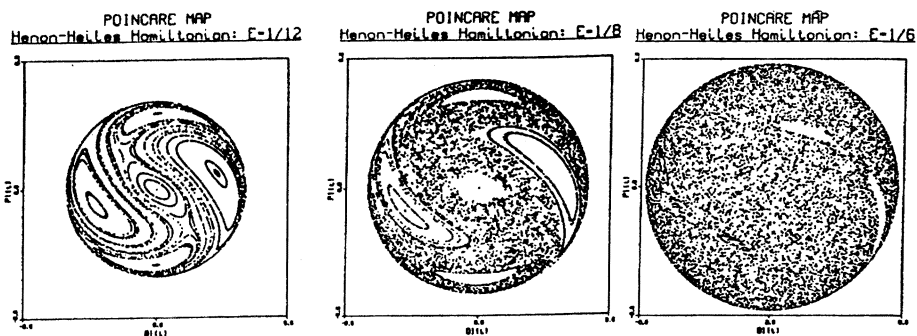


Fig. 15: Seccions de Poincaré del hamiltonià de Hénon-Heiles per a diferents valors de l'energia.

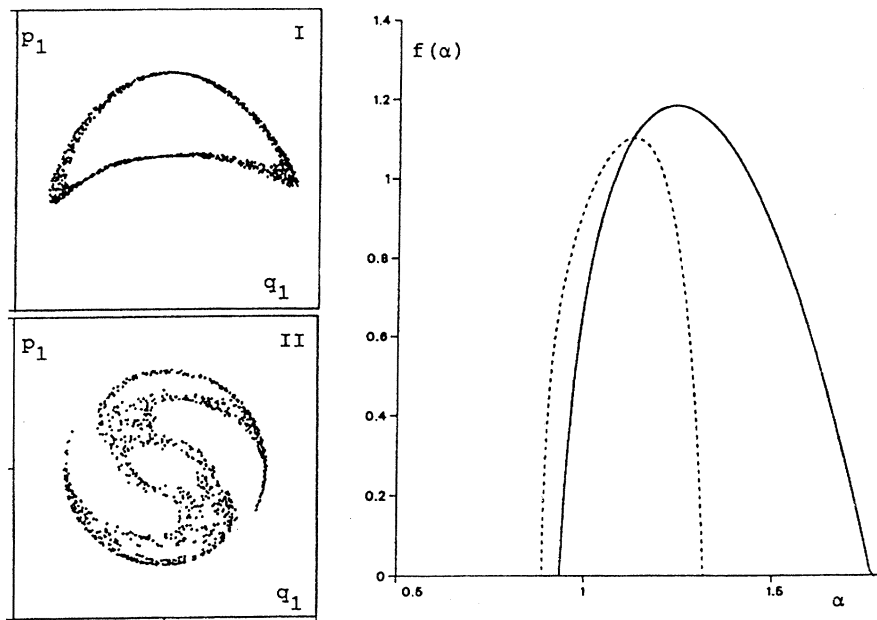


Fig. 16: Comportament de les dues òrbites. A l'esquerra podem veure l'efecte de la difusió estocàstica. A la dreta tenim la corba $f(\alpha)$: òrbita I, línia puntejada, òrbita II, línia contínua.

	D_0	D_1	$D_{-\infty}$	D_{∞}
Hénon (aplicació)	1.278	1.237	2.006	1.021
Rössler (projecció)	1.323	1.298	1.871	1.095
Hénon-Heiles.				
òrbita I	1.102	1.077	1.317	0.891
òrbita II	1.192	1.156	1.795	0.929
	dimensió Hausdorff	d'informació	α_{\max}	α_{\min}

Taula 1

5.5 Procés d'inversió

Hom pot preguntar-se si la corba contínua $f(\alpha)$ és realment una caracterització global del conjunt estrany; si això és de veres, hauria d'ésser possible reproduir el conjunt, almenys en un cert sentit estadístic, a partir de $f(\alpha)$. Per a un atractor particular, per exemple, ja sabem com obtenir l'espectre $f(\alpha)$. Invertint ara el procés, hom pot obtenir conjunts de punts amb la mateixa distribució per als exponents característics que té l'atractor. El procés és com segueix: nosaltres coneixem que per a qualsevol valor de α , els punts de l'atractor que tenen α com a exponent formen un subfractal de dimensió $f(\alpha)$. En eixos punts el valor de la mesura de probabilitat és $p_i \approx \varepsilon^{\alpha_i}$, el nombre de punts que formen el subfractal va com $N(\alpha) \approx \varepsilon^{-f(\alpha)}$.

Discretitzant l'espectre en intervals, $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ i calculant $N(\alpha)$ per a cada interval hom pot reproduir estadísticament conjunts de punts amb la mateixa corba $f(\alpha)$ que el mateix atractor, fent que el nombre de veïns de cada punt en el nou conjunt siga $N \cdot \varepsilon^\alpha$ i el nombre de punts que tenen exactament eixa quantitat de veïns siga $N(\alpha)$, on N és el nombre total de punts.

6 Conclusions

En aquest treball hem presentat les definicions de les mesures i dimensions que s'utilitzen per a caracteritzar el moviment dels sistemes dinàmics amb comportament caòtic. Hem resolt alguns problemes relatius a possibles equivalències entre aquestes definicions. En les demostracions de la secció II i a l'Apèndix A, hem tractat de posar "ordre" a les diferents mesures del "desordre".

Relacionant aquests sistemes amb els fractals, dels quals hem vist alguns exemples a la secció III, hom conclou que la dimensió de Hausdorff o dimensió fractal no és suficient per a descriure globalment molts conjunts fractals. Tan-

mateix, la conclusió més important d'aquesta anàlisi és que el formalisme dels multifractals ens proporciona un bon instrument per a analitzar el comportament dels conjunts estranys que apareixen en treballar en sistemes dinàmics complexos. Hom troba en aquesta nova teoria una mesura relativa de caoticitat del sistema. Molts d'aquests sistemes no resulten completament caracteritzats si són entesos com a simples fractals. De fet és ben possible que s'observen variacions de la dimensió de Hausdorff en funció de l'escala utilitzada per al seu càlcul, esdevenint possiblement multifractals; aleshores el formalisme que hem presentat aquí ens permetrà desenvolupar un nou intent de caracterització, si no global, almenys més complet.

Queden, però, alguns problemes per resoldre, com ara el procés d'inversió, és a dir, des de la corba $f(\alpha)$ obtenir conjunts discrets de punts amb la mateixa multifractalitat, del qual hem parlat a la secció V. Fins ara, els programes que s'han fet en la línia de restaurar els conjunts primitius no resulten globalment satisfactoris.

Una altra qüestió fa referència als problemes numèrics per a fer el càlcul de l'espectre $f(\alpha)$; de fet l'aproximació que hem presentat a la secció V, pot no ser suficientment bona en tot el rang de definició. Això, doncs, mereix més atenció i pot considerar-se un problema obert.

7 Agraïments

Vull agrair al professor Bernard Jones els interessants comentaris i orientacions fets durant la supervisió d'aquest treball. Ha estat el professor Mogens H. Jensen qui m'ha introduït en el formalisme dels multifractals.

He d'agrair les discussions que sobre el contingut d'aquest treball hem tingut amb Jorge López, Liu Xiang Dong i Enn Saar; han influït considerablement en la redacció final del manuscrit.

L'ajuda de Jorge López des del punt de vista informàtic ha estat veritablement molt valuosa, així com les indicacions bibliogràfiques del meu tutor del departament de Matemàtica Aplicada i Astronomia de la Universitat de València, J. Martínez Alfaro.

Finalment haig d'agrair les pacients correccions del català fetes sobre el primer esborrany per Ramon A. Martínez i Vicent Marco.

Aquest treball ha estat realitzat íntegrament a l'institut NORDITA, a Copenhaguen (Dinamarca), l'hospitalitat del qual mereix ser reconeguda.

Referències

- [1] Alder, R.J., 1981, *The Geometry of Random Fields*. ed. John Wiley.
- [2] Bender, C.M. i Orszag, S.A. (1978) *Advanced Mathematical Methods for scientists and Engineers*. McGraw-Hill.

- [3] Copson, T.E., 1967, *Asymptotic Expansions*. Cambridge University Press.
- [4] Farmer, J.D., 1982, *Physica* 4D, 366.
- [5] Grassberger, P. 1983 *Phys. Lett.* 97A 224.
- [6] Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Lipchaber, A., Procaccia, I., i Stavans, J., 1985 *Phys. Rev. Lett.* 55, L25.
- [7] Hasley, T.C., Jensen, M.H., Kadanoff, L.P., Procaccia, I., i Shraiman, B.I. 1986, *Phy. Rev. A* 33, 1141.
- [8] Hénon M. i Heiles, C. 1969, *Astron. J.* 73 964
- [9] Hénon, M. *Commun. Math. Phys.* 1976, 50 69
- [10] Hentschel, H.G.E. i Procaccia, I. 1983, *Physica*. 8D, 435.
- [11] Hurewicz i Wallman, 1941, *Dimension theory*. Princeton University Press.
- [12] Lebesgue, H. 1972, *Œuvres Scientifiques* vol. IV
- [13] Mandelbrot, B.B., 1977, *Fractals: form, chance, dimension*. San Francisco, ed. W. H. Freeman & co.
- [14] Mandelbrot, B.B. 1982, *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco, ed. W.H. Freeman & co.
- [15] Martínez, V J. 1988 en preparació.
- [16] Rössler, O.E. , 1976 *Phys. Lett* 57A 397.
- [17] Stanley, H.E. comunicació privada.
- [18] Witten, T.A. i Sander, L.M. 1981, *Phys. Rev. Lett.* 47, 1400.

A Càlcul de la dimensió de Hausdorff i de la capacitat de Kolmogorov per al conjunt $\left\{\frac{1}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$

Anem a veure en aquest apèndix la no equivalència estricta entre els conceptes de dimensió de Hausdorff, D_H i la capacitat de Kolmogorov, D_K , fent el càlcul analític d'aquestes mesures per al conjunt, $A = \left\{\frac{1}{m}\right\}_{m=1}^{\infty}$. Provarem que el valor de $D_H = 0$, mentre que $D_K = 0.5$.

Calcularem primer la capacitat de Kolmogorov: per a començar, fem una partició de l'interval $[0, 1]$ (on A és inclòs) de talla $1/n$. Aleshores tindrem n subintervalls i anem a trobar el nombre de subintervalls o cel·les d'aquesta partició, que estan ocupats per punts del conjunt A . Anomenarem aquest nombre $N(1/n)$. Necessitem conèixer el punt de $A, 1/m$, on la distància entre aquest i

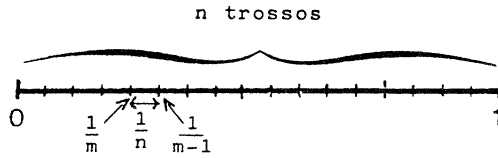


Fig. 17.

l'anterior $1/(m-1)$, siga exactament de la talla de la partició $1/n$, (vegeu figura 17)

$$\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} = \frac{1}{n},$$

ens queda

$$\frac{m - (m-1)}{m(m-1)} = \frac{1}{m(m-1)} = \frac{1}{n} \rightarrow m(m-1) = n.$$

Per a valors de m i n grans podem considerar

$$m(m-1) \approx m^2 = n \rightarrow m = \sqrt{n}.$$

A l'esquerra de $1/m$ totes les cel·les estaran ocupades perquè la talla de cadascuna d'elles és menor que la distància entre dos punts consecutius. Quantes d'aquestes cel·les hi ha per a l'esmentada partició? Exactament, la distància de 0 a $1/m$ dividit per la talla de la partició, $1/n$,

$$\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{m} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

A la dreta de $1/m$ cadascun dels punts de A es troba sol dins un dels sub-intervals. Aleshores hi haurà tantes cel·les ocupades com punts, m . Concloent, el nombre total de cel·les ocupades serà:

$$N\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n}} + m = \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n}.$$

Fent logaritmes en aquesta darrera igualtat ens queda:

$$\log\left(N\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \log 2 + \frac{1}{2} \log(n).$$

i finalment la capacitat de Kolmogorov és:

$$D_K(A) = \frac{d(\log N(\frac{1}{n}))}{d(\log n)} = \frac{1}{2}.$$

Anem a veure ara com la dimensió de Hausdorff és 0. Per a fer això, recordant la definició que hom ha donat a la secció II, considerem els conjunts de la forma

$$B_m = B_{\frac{1}{2^n}}\left(\frac{1}{m}\right) = \left[\frac{1}{m} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{m} + \frac{1}{2n}\right],$$

amb els quals podem construir la família de cobriments de A , com ara

$$B_A = \left\{ \{B_m\}_{m=1}^\infty / A \subset \bigcup_{m=1}^{2n} B_m : \text{diàmetre}(B_m) = \frac{1}{n} \right\}.$$

Amb aquesta construcció i sense pèrdua de generalitat calclem la mesura exterior α -dimensional de A com:

$$S_\alpha(A) = \lim_{\frac{1}{n} \rightarrow 0} \left\{ \sum_{m=1}^{2n} \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^{1-\alpha}) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

i per la unicitat en la definició de dimensió de Hausdorff ens queda que

$$D_H(A) = 0.$$

B Càlcul de la corba $f(\alpha)$ per a una distribució rarificada de Poisson

Amb aquest càlcul anem a veure el significat de l'aproximació que hem fet a la secció V per a trobar $\tau(q)$, tot justificant la utilització de la dimensió de Hausdorff com a condició inicial per a calcular $\tau_{\text{eff}}(q)$ i obtenir així la posició correcta de la corba $f(\alpha)$.

Suposem que tenim M punts situats amb una distribució de Poisson en el quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$; quan la talla de la partició ε és suficientment petita, tenim com a màxim un punt per cel·la i aleshores la probabilitat de cadascuna de les cel·les serà:

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{si és buida} \\ M^{-1} & \text{si conté un punt.} \end{cases}$$

La funció de partició quedarà com

$$\Gamma = \varepsilon^{-\tau} \sum_{i=1}^M p_i^q = \varepsilon^{-\tau} M M^{-q} = \varepsilon^{-\tau} M^{1-q} = C(\varepsilon, M).$$

Fent logaritmes,

$$-\tau \log \varepsilon + (1 - q) \log M = \log C(\varepsilon, M).$$

Aleshores,

$$\tau(q) = \frac{(1-q) \log M - \log C(\varepsilon, M)}{\log \varepsilon} = (q-1) \left(- \left(\frac{\log C(\varepsilon, M)}{q-1} + \frac{\log M}{\log \varepsilon} \right) \right).$$

L'expressió analítica que ens queda per a les dimensions generalitzades és

$$D_q = - \left(\frac{\log C(\varepsilon, M)}{q-1} + \frac{\log M}{\log \varepsilon} \right)$$

i la dimensió de Hausdorff serà (fent $q = 0$),

$$D_0 = \log C(\varepsilon, M) + \frac{\log M}{\log \varepsilon}.$$

Evidentment per a aquest conjunt rarificat de punts la dimensió de Hausdorff és $D_0 = 0$ (vegeu l'Apèndix A); si la constant de normalització per a Γ fóra per exemple 1, com s'utilitza en alguns casos (Hasley i al. 1986), $C(\varepsilon, M) = 1$, arribaríem a una contradicció: la darrera expressió ens donaria

$$\frac{\log M}{\log \varepsilon} = 0,$$

la qual cosa evidentment no és certa. Necessitem per tant, una constant no arbitrària que en aquest cas verificarà,

$$\log C(\varepsilon, M) = \frac{-\log M}{\log \varepsilon}.$$

(Nota: en aquest exemple trivial l'espectre $f(\alpha)$ degenera només en el punt $(0, 0)$).

*Departament de Matemàtica Aplicada i Astronomia.
Universitat de València i NORDITA, Copenhagen.*