

XXIV Olimpíada matemàtica

(Divendres 11 de desembre de 1987 de 4 a 8

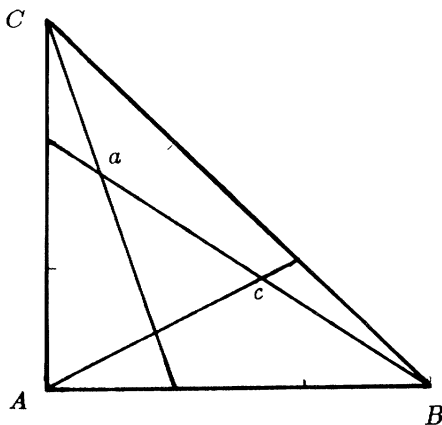
i dissabte 12 de desembre de 1987 de 9 a 1)

1. Determineu les potències de $(1+i)$ que són interiors a la corona circular determinada per les circumferències de centre O i radis respectivament 1.000 i 10.000.
2. Busqueu els nombres primers de la forma $n^4 + 4$ amb n un nombre enter positiu.
3. Demostreu que per a qualsevol polinomi $p(x)$ existeix un nombre real k tal que un dels dos polinomis $p(x) + k$ i $xp(x) + k$ no té cap arrel real i l'altre en té una sola.
4. Donat un triangle rectangle isosceles A, B, C , dividim cada un dels seus costats en tres parts iguals i tracem les rectes de la figura, les quals determinen un triangle a, b, c .

Determineu l'àrea del triangle a, b, c , en funció de l'àrea del triangle A, B, C .

¿Què passa si el triangle rectangle A, B, C no és isosceles?

¿Què passa si el triangle A, B, C és un triangle qualsevol?



5. Demostreu que si dos nombres enters són de la mateixa paritat (tots dos parells o tots dos imparells), la meitat de la suma dels seus quadrats és una suma de dos quadrats.
6. Demostreu que, tret de $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ l'equació

$$3^a + 1 = 5^b + 7^c$$

no té altres solucions enteres.

7. Per un punt de la vora d'un quadrat es tracen dues rectes que divideixen el quadrat en tres trossos de la mateixa àrea. Calculeu l'angle d'aquestes rectes en funció dels punts de la vora.
8. (a) Estudieu els intervals de creixement i de decreixement de la funció

$$F(t) = \frac{\ln t}{t}$$

- (b) Comproveu que si $k \geq 3$ (k enter) l'equació

$$(\ln x)^k = x$$

té exactament dues solucions més grans que e , $r_k < s_k$, i que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = e \qquad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = +\infty$$

(Indicació: per resoldre l'apartat (b) tingueu en compte l'apartat (a))