

OLIMPIADA MATEMÀTICA 1986

(Divendres 28 de novembre de 4 a 8
i dissabte 29 de novembre de 9 a 1)

1. Elevant el nombre $3 + \sqrt{5}$ a la n -sima potència s'obté un nombre de la forma $a + b\sqrt{5}$ amb a i b enters. Proveu que

$$0 < a - b\sqrt{5} < 1$$

2. Determineu per quins valors de a la successió $a_1 = a$, $a_2 = a + a_1^2$, $a_3 = a + a_2^2$, ..., $a_n = a + a_{n-1}^2$, ..., és creixent.

3. En un triangle de vèrtexs A , B i C i costats oposats a , b i c siguin m_a , m_b , m_c les mitjanes que passen pels vèrtexs A , B , C respectivament. Se sap que $b/a = \sqrt{17/5}$ i que $m_c = 2m_b$. Calculeu l'angle que formen aquestes dues mitjanes i les relacions c/a i c/b .

4. Els canvis de rasant de les autopistes es fan amb un perfil parabòlic $y = -ax^2$ (amb $a > 0$).

i) ¿Quin és el màxim valor de a perquè un observador de 1 m d'alçària amb visual tangent al punt més alt vegi un objecte de 0,1 m d'alçària situat a 100 m de distància? (fig. 1).

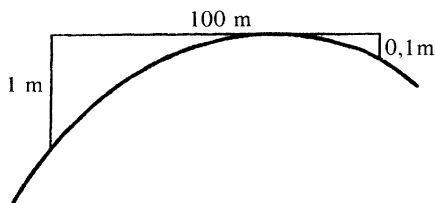


Figura 1.

ii) ¿Quin és el màxim valor de a perquè un observador de 1 m d'alçària, situat a qualsevol lloc, vegi un objecte de 0,1 m d'alçària situat a 100 m de distància? (fig. 2).

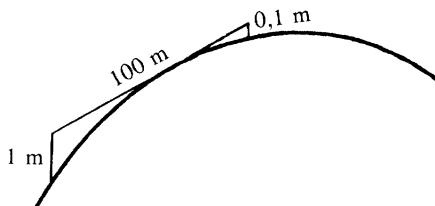


Figura 2.

5. Estudieu la continuïtat de la funció $f(x) = x E(1/x)$ i representeu gràficament la seva restricció al conjunt $]-\infty, -1/4] \cup [1/4, +\infty[$. ($E(a)$ = part entera de a .)

6. Digueu si es pot saber la data de naixement d'una persona sabent que ha nascut al segle XX i que la diferència entre l'any de naixement i 1900, més 100 vegades la suma del número del mes multiplicada per 40 i el número del dia és 13442.

7. Un tren té 88 m de longitud i un altre 92 m. Quan circulen en direccions oposades tarden 7,5 segons en creuar-se i quan circulen en la mateixa direcció en tarden 45. Trobeu les velocitats dels dos trens.

8. Busqueu dos nombres complexos a i b tals que els afixes dels nombres a , b , a/b i b/a siguin els vèrtexs d'un quadrat de diagonals a , b/a i b , a/b .