Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 19, núm. 2, 2004. Pàg. 7–23

Simetries*

Alain Connes

Resum

El concepte de simetria va més enllà de les simples simetries geomètriques. Des de l'organització de les fases finals de copes de futbol fins a la resolució d'equacions, passant pel joc de l'icosaedre o el teorema de Morley, en aquest article es descobreixen algunes de les múltiples facetes d'aquest concepte.

Paraules clau: grups de simetria, equacions polinòmiques, cicles hamiltonians, teorema de Morley.

Classificació AMS: 12-01, 20-01, 51-01.

1 Introducció

Aquest article es proposa iniciar el lector, a través d'alguns exemples il·lustratius, a la noció de simetria en matemàtiques.

Per posar en evidència la ubiqüitat d'aquest concepte, en el sentit matemàtic, començarem desvetllant el lligam entre la simetria que es pot trobar en

* Traducció a càrrec d'Oriol Serra de l'article aparegut a *Pour la Science* el febrer de 2002, amb l'amable autorització de l'autor i de la revista. Una versió anglesa d'aquest article ha aparegut al número de desembre de 2004 de la *Newsletter* de l'EMS. Els editors volem agrair l'ajut del seu editor en cap, Martin Raussen, en la producció de les figures.
Alain Connes és professor al Collège de France i a l'Institut des Hautes Études Scientifiques de París. Va obtenir la medalla Fields el 1982, el Premi Crafoord el 2001, i el 2004 ha obtingut la medalla d'or del CNRS. L'autor vol agrair la valuosa ajuda d'André Warusfel en la preparació d'aquest article, que originalment va ser una conferència organitzada per Jean-Pierre Bourguignon al Centre Georges Pompidou de París el setembre de 2000.

l'organització de la fase final de les copes de futbol i... la tècnica de resolució de les equacions de quart grau.

En passar a les equacions de grau més gran tindrem ocasió de parlar del joc de l'icosaedre i dels «icosions», definits pel matemàtic irlandès William Hamilton en el segle XIX.

Acabarem amb una reflexió sobre un teorema demostrat per Frank Morley cap al 1899, on la simetria d'un triangle equilàter sorgeix com per miracle d'un triangle arbitrari al considerar la intersecció de les seves trisectrius (les dues rectes que divideixen un angle en tres parts iguals). En vaig donar una formulació i una demostració algèbriques que veurem aquí.

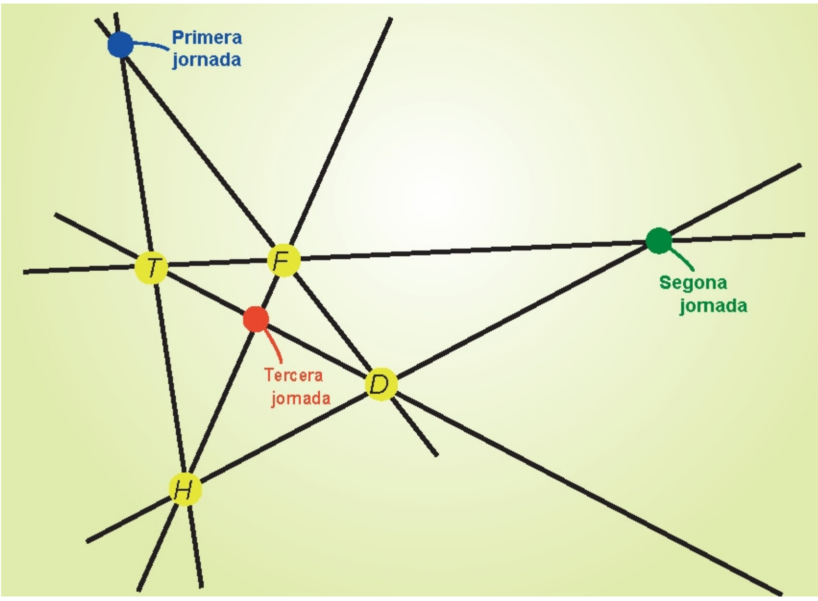


FIGURA 1: Les simetries de la fase final de la copa d'Europa. Les tres jornades són globalment invariants per permutacions de F, D, H, T: l'intercanvi de F i D intercanvia les jornades segona i tercera, l'intercanvi de F i H intercanvia les jornades primera i segona, i l'intercanvi de F i D i de H i T deixa les jornades invariants.

2 Les fases finals de les copes de futbol

Comencem per l'organització de les copes de futbol, per exemple de la darrera copa d'Europa. Durant la fase final, els equips es troben per grups de quatre dins dels quals s'han d'enfrontar. França, per exemple, estava en un grup de quatre equips: Dinamarca, França, Holanda i la República Txeca (que abreujarem D, F, H i T). Per a organitzar de forma equitativa els partits, cal que cadascun dels equips s'enfronti amb cadascun dels altres tres, de manera que calen tres jornades. Quan dos equips s'enfronten, D i F per exemple, els altres dos, H i T, ho fan també al mateix dia de manera que en tres jornades es poden obtenir totes les configuracions possibles.

En l'exemple de la copa d'Europa, els partits per a les tres jornades eren, per a la primera, DF i HT, per a la segona, FT i DH i, per a la darrera, FH i DT. Intuïtivament es veu que aquesta organització és equilibrada ja que cap dels quatre equips és privilegiat. També es pot comprovar que si es permuten arbitràriament alguns equips, per exemple D i H, en resulta simplement una permutació de la primera i tercera jornades.

Podem representar-nos la simetria que actua posant les lletres D, F, H i T en quatre punts del pla com a la figura 1. A un partit entre dos equips li fem correspondre una recta unint aquests dos punts i cadascuna de les tres jornades correspon naturalment al punt d'intersecció de les dues rectes que representen les dues confrontacions de la jornada. Així, als partits DF i HT, hi associem la intersecció de les rectes DF i HT i, de forma similar, la segona jornada es correspon amb la intersecció de les rectes FT i DH i la tercera a la intersecció de les rectes FH i DT.

La figura que resulta, formada de quatre punts i sis rectes, és un quadrilàter complet. És una figura completament simètrica (en sentit abstracte, encara que les simetries geomètriques —simetries respecte a un punt o a una recta— no hi apareguin), ja que cadascun dels quatre punts D, F, H, T juga exactament el mateix paper que els altres, i el mateix es pot dir dels tres punts que representen les jornades.

Després d'haver visualitzat aquest quadrilàter complet també podem formular algèbricament la simetria en qüestió. La funció α que als quatre nombres a, b, c i d associa $\alpha(a, b, c, d) = ab + cd$ només pren tres valors diferents quan es permuten de totes les maneres possibles els valors a, b, c i d: els altres dos possibles valors són $ac + bd$ i $ad + bc$.

3 La resolució per radicals de les equacions de quart grau

Aquest fet sorprenent és a la base del mètode general que permet resoldre *per radicals* les equacions de quart grau. Aquesta resolució consisteix a expressar els zeros a, b, c i d del polinomi $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$, és a dir, els valors de x que anul·len el polinomi, en funció dels coeficients n, p, q, r i l'extracció d'arrels.

Per tal de comprendre aquesta afirmació cal tornar una mica enrere a la història i examinar la resolució de les equacions de grau menor que quatre.

Si la tècnica de resolució de les equacions de segon grau es remunta a la més alta antiguitat (babilonis, egipcis...), aquesta tècnica no es va poder estendre a la resolució de les de tercer grau fins bastant més tard, i no serà publicada per Girolamo Cardano fins al 1545 en els capítols 11 a 23 del seu llibre *Ars magna sive regulis algebraicis*. Tot i que no va ser reconegut fins en el segle XVIII, la clau de la resolució de les equacions de tercer grau $x^3 + nx^2 + px + q = 0$ de zeros a, b i c (les *arrels*) rau en l'existència d'una funció polinomial $f(a,b,c)$ de a,b,c que només pren dues determinacions diferents per l'acció de les sis permutacions de a,b,c.

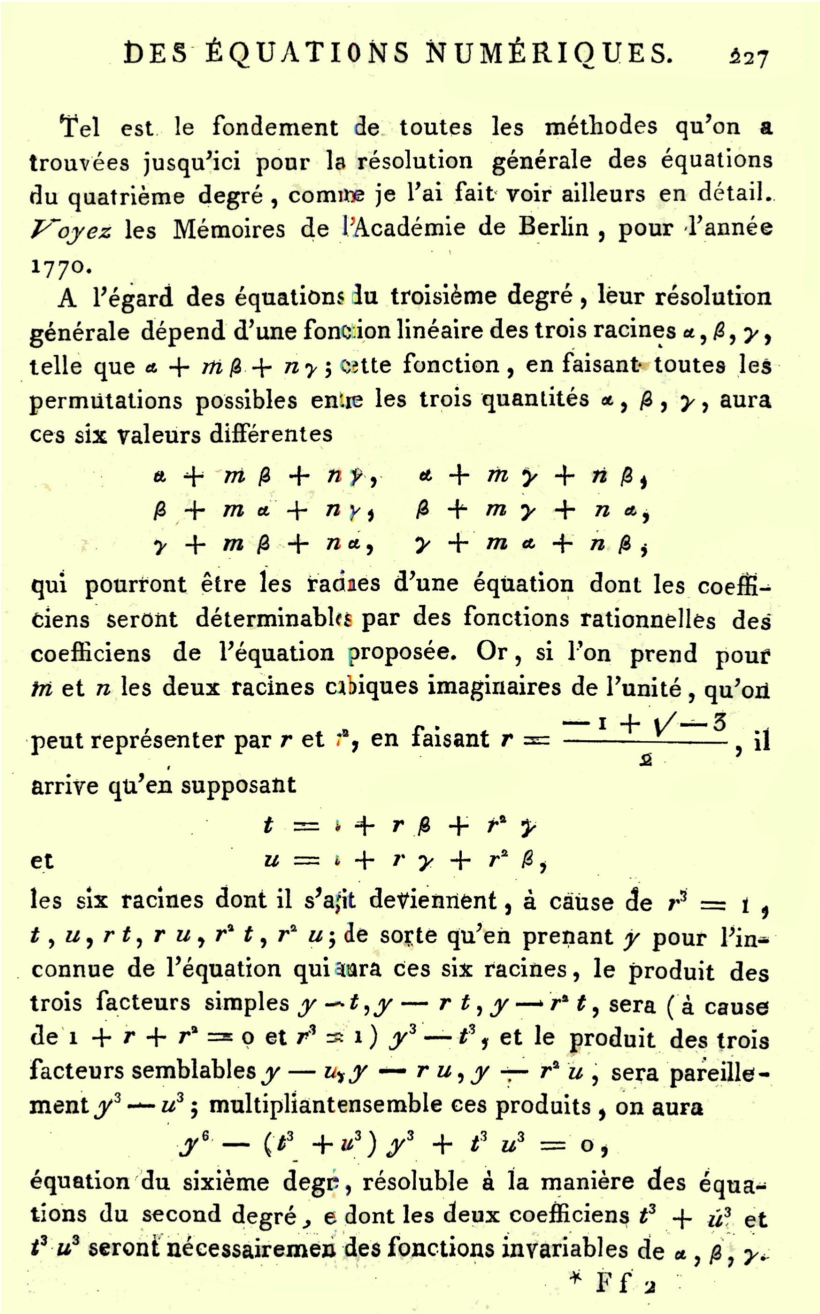
El mètode de Cardano consisteix a posar $\alpha = ((1/3)(a+bj+cj^2))^3$, essent j la primera arrel cúbica de la unitat, és a dir, $(-1+i\sqrt{3})/2$, on i denota una arrel quadrada de -1. La permutació circular que transforma a en b, b en c i c en a, deixa invariant la funció α i l'altra única determinació de α per l'acció de les sis permutacions de a,b,c s'obté transposant b i c, per exemple, cosa que dóna $\beta = ((1/3)(a+cj+bj^2))^{1/3}$.

Com que el conjunt d'aquests dos nombres α i β és invariant per totes les permutacions de a,b,c, el polinomi de segon grau del qual α i β són les arrels és fàcil de calcular en funció dels coeficients de l'equació inicial; $x^3 + nx^2 + px + q = 0$ és $x^2 + 2qx - p^3 = (x+q+s)(x+q-s)$, on s és una de les arrels quadrades de $p^3 + q^2$ i on, per simplificar les fórmules, s'escriu l'equació inicial de la forma equivalent $x^3 + 3px + 2q = 0$ alliberada del terme de segon grau gràcies a una translació convenient de les arrels i on s'han introduït els coeficients 2 i 3.

Un càlcul simple fa veure que cadascuna de les arrels a, b i c de l'equació inicial s'expressa com la suma d'una de les tres arrels cúbiques d'α i d'una de les de β, i cadascuna d'aquestes dues eleccions està lligada al fet que el seu producte ha de ser igual a $-p$ (per tant hi ha només tres parelles d'aquestes eleccions a tenir en compte en lloc de les nou eleccions que hauríem pogut imaginar d'entrada, un fet reconfortant).

Són aquesta mena de fórmules les que van acabar imposant l'ús dels nombres complexos: fins i tot en el cas que les tres arrels siguin reals, pot passar que $p^3 + q^2$ sigui negatiu i aleshores α i β han de ser nombres complexos.

Tot i que la resolució de les equacions de tercer grau que acabem d'exposar va trigar molt a ser posada a punt (sens dubte, almenys, un dels seus casos particulars que va donar Scipione de Ferro entre 1500 i 1515), la de quart grau la va seguir ben aviat, ja que figura igualment a l'*Ars Magna* (capítol 39), on Cardano l'atribueix al seu secretari, Ludovico Ferrari, qui l'hauria trobat entre 1540 i 1545 (René Descartes en publicaria una altra el 1637). Aquesta resolució és la que ens porta a la primera simetria que hem trobat, la de l'organització de les finals de futbol, del quadrilàter complet i de la funció $ab + cd$. En aquest cas podem també partir d'un polinomi alliberat del coeficient de x^3 que es pot fer nul amb la mateixa tècnica que abans, és a dir, escrivint $x^4 + px^2 + qx + r = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. El conjunt dels tres nombres $\alpha = ad + bc$, $\beta = ac + bd$ i $\gamma = ad + bc$ és invariant per cadascuna de les 24 permutacions de les quatre lletres a, b, c i d. Aquests nombres són les arrels d'una equació de tercer grau els coeficients de la qual s'expressen fàcilment en termes de p, q i r. El càlcul fa veure que el polinomi $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ és $x^3 - px^2 - 4rx + (4pr - q^2)$. Aquest polinomi pot ser descompost com hem descrit abans per a obtenir les arrels α, β i γ. De fet només cal calcular-ne una d'aquestes arrels, diguem α, per a deduir el valor d'a, b, c i d (coneixem



DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES. 227

Tel est le fondement de toutes les méthodes qu'on a trouvées jusqu'ici pour la résolution générale des équations du quatrième degré, comme je l'ai fait voir ailleurs en détail. *Voyez* les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1770.

A l'égard des équations du troisième degré, leur résolution générale dépend d'une fonction linéaire des trois racines α, β, γ, telle que $\alpha + m\beta + n\gamma$; cette fonction, en faisant toutes les permutations possibles entre les trois quantités α, β, γ, aura ces six valeurs différentes

$$\begin{array}{ll} \alpha + m\beta + n\gamma, & \alpha + m\gamma + n\beta, \\ \beta + m\alpha + n\gamma, & \beta + m\gamma + n\alpha, \\ \gamma + m\beta + n\alpha, & \gamma + m\alpha + n\beta; \end{array}$$

qui pourront être les racines d'une équation dont les coefficiens seront déterminables par des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation proposée. Or, si l'on prend pour m et n les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, qu'on peut représenter par r et r^2, en faisant $r = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, il arrive qu'en supposant

$$t = \alpha + r\beta + r^2\gamma$$

et

$$u = \alpha + r\gamma + r^2\beta,$$

les six racines dont il s'agit deviennent, à cause de $r^3 = 1$, t, u, rt, ru, r^2t, r^2u; de sorte qu'en prenant y pour l'inconnue de l'équation qui aura ces six racines, le produit des trois facteurs simples $y - t, y - rt, y - r^2t$, sera (à cause de $1 + r + r^2 = 0$ et $r^3 = 1$) $y^3 - t^3$, et le produit des trois facteurs semblables $y - u, y - ru, y - r^2u$, sera pareillement $y^3 - u^3$; multipliant ensemble ces produits, on aura

$$y^6 - (t^3 + u^3)y^3 + t^3u^3 = 0,$$

équation du sixième degré, résoluble à la manière des équations du second degré, et dont les deux coefficiens $t^3 + u^3$ et t^3u^3 seront nécessairement des fonctions invariables de α, β, γ.

* Ff 2

FIGURA 2: El text de Lagrange sobre l'equació de 3r grau (1772).

aleshores la suma α i el producte r dels dos nombres ab i cd, d'on obtenim aquests nombres per una equació de segon grau, i queda només explotar les igualtats $(a + b) + (c + d) = 0$ i $ab(c + d) + cd(a + b) = -q$ per a obtenir el valor de $a + b$ i $c + d$, i d'aquí finalment el de a, b, c i d).

El paper fonamental que juguen les permutacions de les arrels a, b, c i d i les quantitats auxiliars α, β i γ va ser posat en evidència per Joseph Louis Lagrange en una publicació apareguda el 1772, (vegeu la figura 2) i en menor mesura també per Alexandre Vandermonde, en una memòria publicada el 1774, així com Edward Waring en les seves *Meditationes algebraicae* de 1770 i Francesco Malfatti de manera que avui en dia s'anomenen, amb tota justícia, *resolvents de Lagrange*.

Aquestes resolvents no són pas úniques (hauríem pogut triar també $\alpha = (a + b - c - d)^2$ en el cas de l'equació de quart grau, la qual cosa es correspon amb la resolució de Descartes), però donen la clau de *totes* les resolucions per radicals.

4 Abel i Galois

Era normal de voler anar més enllà: Descartes va provar-ho certament i amb ell molts altres investigadors. L'etapa següent és evidentment la de les equacions de cinquè grau. Aquestes han posat sempre obstacles infranquejables, i després d'Abel i de Gaulois (que obtenen els seus resultats sobre el 1830) sabem per què aquesta recerca havia de resultar estèril.

En tots els casos precedents havíem pogut associar a una família de n nombres $a, b, c, d, \ldots$ (amb n inferior a quatre) una família de $n - 1$ nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ que es poden expressar com polinomis en $a, b, c, d, \ldots$ i que és globalment invariant per a cadascuna de les permutacions de les n lletres inicials. Més precisament, denotem per S_n el grup de les bijeccions del conjunt $\{a, b, c, d, \ldots\}$ en ell mateix; el que és possible per a n estrictament inferior a cinc és definir una aplicació de S_n en S_{n-1} que respecta la composició de permutacions.

Sabem des de principi del segle XIX que no existeix una aplicació amb aquesta propietat del grup S_n sobre S_{n-1}, o fins i tot del grup A_n de les permutacions parelles en un grup S_m amb m inferior a n, per a n més gran que quatre. Això fa veure que el mètode de Lagrange no es pot estendre a n igual a cinc ni als valors més grans de n, però naturalment no n'hi ha prou per demostrar que una resolució general per radicals de l'equació general de grau superior a quatre sigui impossible —podria passar que altres mètodes, més generals, se'n sortissin allà on Lagrange hauria fracassat. Avui sabem, sempre gràcies a Abel i Gaulois, que aquesta generalització és de fet impossible. Aquest problema fonamental i complex va atreure molts dels matemàtics més cèlebres, entre els quals Leonhard Euler, que hi tornarà repetidament, i sobretot Karl Friederich Gauss (1801) i Louis-Agustin Cauchy (1813).

Aturem-nos al cas de grau cinc, pel qual Descartes, convençut que no existia cap fórmula anàloga a la de Cardano, havia proposat el 1637, a *La geo-*

metrie, un mètode gràfic de resolució que fa servir la intersecció de cercles i corbes cúbiques i que va inventar expressament per a aquest problema. Entre 1799 i 1813 (data de l'edició de les seves *Riflessioni intorno a la solutione delle equazioni algebraiche generali*), Paolo Ruffini va publicar diverses temptatives de demostració, cada vegada més afinades, dirigides a establir la impossibilitat de resoldre l'equació de cinquè grau per radicals. A cada funció racional de les arrels, va tenir la idea encertada d'associar-li el grup de permutacions d'aquestes arrels que deixen la funció invariant, però es va equivocar en creure que els radicals que intervenen en la resolució de l'equació, com passa en el cas de les arrels cúbiques per a la de tercer grau, eren necessàriament funcions racionals de les arrels.

Caldrà esperar el 1824 que Niels Abel justifiqui la intuïció de Ruffini en la seva *Mémoire sur les équations algébriques*. Abel, després d'haver cregut contràriament haver trobat un mètode de resolució general, prova la impossibilitat de resoldre l'equació general de cinquè grau per radicals el 1826 a la *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, on esbossa una teoria que no s'establirà fins als escrits de Galois, cap al 1830. Els treballs de Galois inauguren una nova era de les matemàtiques, on els càlculs deixen lloc a la reflexió sobre la seva potencialitat i els conceptes, com el de grup abstracte o d'extensió algèbrica, ocupen el primer pla de l'escena.

La idea lluminosa de Galois consisteix d'entrada a associar a una equació arbitrària un grup de permutacions que defineix en els termes següents:

> Sigui una equació donada de la qual $a, b, c, \ldots, m$ són les arrels. Existeix un grup de permutacions de les lletres $a, b, c, \ldots, m$ amb les següents propietats:
>
> 1. Qualsevol funció de les arrels invariant per les substitucions d'aquest grup és una funció racional.
> 2. Recíprocament, qualsevol funció racional de les arrels és invariant per aquestes substitucions.

A continuació Galois estudia com aquest grup *d'ambigüitats* es modifica quan se li adjunten quantitats auxiliars considerades des d'aleshores com *racionals*. Resoldre una equació per radicals es redueix llavors a resoldre el seu grup de Galois.

La impossibilitat de reduir l'equació de cinquè grau a equacions de grau inferior prové llavors de la *simplicitat* del grup A_5 de les seixanta permutacions parelles (producte d'un nombre parell de transposicions) de les cinc arrels a, b, c, d i e d'una equació. Un grup abstracte és *simple* si no es pot definir una aplicació no constant en un grup d'ordre més petit que conservi la llei del grup. El grup A_5 és el grup simple més petit no commutatiu i apareix sovint en les matemàtiques. Aquest grup es pot presentar de manera molt econòmica: està generat per dos elements u i v que compleixen les relacions $u^2 = 1, v^3 = 1$ i $(uv)^5 = 1$, cosa que ens dóna l'oportunitat de parlar dels icosions de Hamilton.

5 Els icosions de Hamilton

Després d'haver descobert els quaternions, William Hamilton va provar de construir el 1857 una nova àlgebra formada per nombres generalitzats que anomenava *icosions*. Dos d'aquests icosions, denotats per u i v, que Hamilton anomenava arrels no commutatives de la unitat, havien de complir $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ i $(uv)^5 = 1$. Un càlcul infantil fa veure que si $uv = vu$, aleshores tenim $v = u^5v^5v = u^5v^6 = (u^2)^2u(v^3)^2 = u$ i aleshores $u = v = vu^2 = v^3 = 1$. Així doncs, no es pot representar u i v a cap dels grups S_n amb n com a molt quatre. Per a representar u i v en el grup A_5 de les permutacions parelles de cinc lletres a, b, c, d, e només cal posar $u = (b, a, d, c, e)$, permutació que deixa fixa e i permuta a amb b i c amb d, i $v = (e, b, a, d, c)$, la permutació que deixa fixos b i d i que canvia a en e, c en a i e en c. El producte uv és aleshores la permutació cíclica (e, a, b, c, d), que efectivament és d'ordre cinc. Així doncs, es pot representar u i v de 120 maneres diferents (isomorfes dues a dues) en el grup A_5.

El grup A_5 és isomorf al grup de rotacions que conserven un icosaedre o, el que ve a ser el mateix, un dodecaedre (aquests dos són els més interessants dels cinc sòlids platònics, que amb el tetraedre regular, el cub i l'octaedre —format pels sis centres de les cares d'un cub— són els únics políedres convexos regulars que poden existir en el nostre espai habitual).

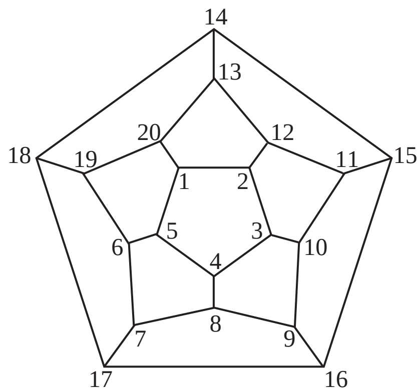


FIGURA 3: El joc de l'icosió. Sainte-Lagüe en el seu llibre *Avec des nombres et des lignes* va fer reviure el joc de l'icosió inventat pel matemàtic irlandès Hamilton (1805–1865). El joc consisteix a completar un cicle passant per tots els vèrtexs de l'icosaedre una única vegada; d'entrada es donen els cinc primers vèrtexs. El següent n'és un exemple: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20.

Per a obtenir l'isomorfisme en qüestió, n'hi ha prou amb associar a u una de les quinze rotacions d'ordre dos (una simetria amb eix una de les quinze mediatrius comunes a dues arestes paral·leles) i a v una de les vint rotacions d'ordre tres (l'eix de la qual uneix un dels deu parells de vèrtexs diametralment oposats del dodecaedre o els centres de dues cares paral·leles de l'icosaedre); les 60 rotacions que conserven aquest sòlid es poden expressar totes simplement com a productes dels generadors u i v.

Tot i que els icosions u i v generen el grup A_5 i satisfan les relacions $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ i $(uv)^5 = 1$, no és pas immediat que aquestes relacions constitueixen una presentació del grup, és a dir, que qualsevol altra relació entre u i v se'n pugui deduir. Hi ha dues maneres de convèncer-se'n, algèbrica i geomètrica (vegeu els apèndixs 1 i 2).

Va ser pel graf de les arestes del dodecaedre, que té les mateixes simetries que el de l'icosaedre, que Hamilton va posar a punt el *joc de l'icosió*, que anomenava també *joc de les arrels no commutatives de la unitat*. Aquest joc és el primer exemple del que s'anomena avui la cerca d'un cicle hamiltonià, concepte molt important en la moderna teoria de grafs (vegeu la figura 3). Es tracta d'un desafiament sobre els vint vèrtexs d'un dodecaedre, que es tracta de resseguir seguint les arestes del políedre de manera que es passi per cada vèrtex una i només una vegada, i que el vèrtex de partida i el d'arribada estiguin també units per una aresta que permeti tancar el cicle. Sobre aquest tema es pot llegir l'assaig ben remarcable de 1937 d'André Sainte-Laguë *Avec des nombres et des lignes* (vegeu la figura 4).[1]

6 El triangle de Morley

No hi ha un *àngel de la geometria* que rivalitza amb el *diable de l'àlgebra*, sinó una connivència fructífera entre les àrees visuals del cervell, que copsen d'un cop d'ull l'harmonia d'una configuració, i les del llenguatge que la destil·len en escriptures algèbriques.

Acabarem aquesta iniciació al concepte de simetria amb un bonic exemple d'aquesta connivència evocant el teorema de Morley. Aquest teorema constitueix també un tema en el qual les simetries concretes, d'origen geomètric, i abstractes i algèbriques, quan es miren d'un angle diferent, es conjuguen de manera forta i deixen una impressió real de bellesa.

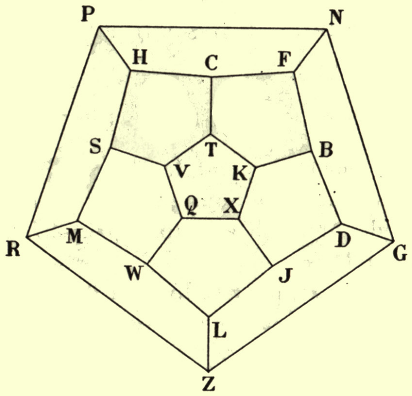
El matemàtic britànic Frank Morley va ser un dels primers professors de les universitats americanes. En el tombant del segle precedent i amb motiu de les investigacions sobre les famílies de cardioides tangents als tres costats d'un triangle donat, va desprendre'n la propietat següent: els tres parells de trisectrius interiors dels tres angles (és a dir, les rectes que divideixen aquests angles en tres angles iguals, a la manera de les ben conegudes bisectrius) es tallen en sis punts tres dels quals formen un triangle equilàter.

La demostració original, força difícil, està basada en càlculs enginyosos a base d'un domini superb de la geometria analítica. Hi ha nombroses demostracions d'aquest resultat, així com diverses generalitzacions donant fins a 18, fins i tot 27 (i més encara) triangles equilàters que es poden despendre a partir

1 Aquest assaig ha estat reeditat en llengua francesa el 1994 per Vuibert.

Les 5 pentagones en étoile étant relevés autour du fond pentagonal forment une corbeille à cinq panneaux latéraux ayant vers le haut 5 pointes. Si l'on prend une deuxième corbeille identique à la première mais retournée, il suffit de les emboîter de manière que les dents de l'une viennent dans les creux de l'autre, et inversement, pour avoir un dodécaèdre parfait.

L'icosien. — On peut à la rigueur se dispenser de faire un tel dodécaèdre et il n'y a qu'à prendre une planchette sur laquelle on a dessiné la figure ci-contre ou toute autre



analogue, à l'imitation d'un jeu anglais appelé jeu icosien et qui se prête fort bien aux recherches du problème d'Hamilton. Avec un peu d'imagination on y reconnaît la forme du dodécaèdre précédent. Supposons en effet que notre dodécaèdre soit formé d'une feuille de caoutchouc vide à l'intérieur et que la face du fond ZRPNG ait été supprimée et réduite à son contour. Mettons la main dans le trou ainsi formé et agrandissons-le considérablement de façon à former avec tout notre dodécaèdre creux en caoutchouc une grande plaque plane pentagonale qui est justement celle que nous venons de représenter. On voit qu'à tout voyage autour du monde représenté sur le dodé-

FIGURA 4: El joc de l'icosió i el camí hamiltonià segons Sainte-Laguë.

de 108 punts de les interseccions de 18 trisectrius obtingudes de les trisectrius interiors per rotacions d'angle $\pi/3$. Entre aquestes demostracions n'hi ha que fan servir càlcul trigonomètric, però també n'hi ha que fan servir pura geometria, com la que va donar Raoul Bricard el 1922.

N'hi ha una d'una naturalesa completament diferent que dóna llum des d'un angle interessant ja que permet d'estendre aquest resultat *a priori* fortament euclidià a la geometria de la recta afí sobre un cos k arbitrari. El resultat de geometria pura que conté (i que estén) la propietat de les trisectrius és d'una generalitat tal que la seva demostració acaba sent una simple verificació (un enunciat general és sovint més simple de demostrar que un cas particular, ja que el nombre d'hipòtesis que cal fer servir és també més reduït). S'enuncia així:

Si G és el grup afí d'un cos commutatiu k (és a dir, el de les aplicacions g de k en k que es poden escriure de la forma $g(x) = ax + b$, on a, denotat per $a(g)$ és no nul), aleshores per a qualsevol triple (f, g, h) d'elements de G tals que $j = a(fgh)$ és diferent de 1 i que fg, gh i hf no són translŀlacions, les dues afirmacions següents són equivalents:

1. $f^3g^3h^3 = 1$ (transformació identitat).
2. $j^3 = 1$ i $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, on α és l'únic punt fix de fg, β el de gh i γ el de hf.

Queda per provar que aquesta propietat algèbrica tan abstracte permet comprendre millor (i al mateix temps demostrar) el teorema de Morley. Prenem com a k el cos dels nombres complexos, pel qual el grup afí és el de les semblances directes, i del qual un subgrup és el de les rotacions (és necessari i suficient que a sigui de mòdul 1 per tal que g sigui una rotació). Prendrem com a f, g i h les tres rotacions al voltant dels tres vèrtexs del triangle amb angle dos terços dels angles de cada vèrtex. Així, amb la notació de l'apèndix 3, f és la rotació de centre A i angle $2a/3$, g la de centre B i angle $2b/3$ i h la de centre C i angle $2c/3$. El producte dels cubs $f^3g^3h^3$ és igual a 1, ja que f^3, per exemple, és el producte de dues simetries respecte dels costats de l'angle a A, de manera que aquestes simetries es simplifiquen dues a dues en el producte $f^3g^3h^3$.

D'acord amb l'equivalència anterior, tenim $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, on α, β i γ són els punts fixos de fg, gh i hf i on $j = a(fgh)$ és la primera arrel cúbica de la unitat, que ja ens hem trobat abans en aquest article. La relació $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ és una caracterització ben coneguda dels triangles equilàters (que es pot escriure també de la forma $(\alpha - \beta)/(\gamma - \beta) = -j^2$, que indica que es passa del vector $\beta\gamma$ al vector $\beta\alpha$ per una rotació d'angle $\pi/3$).

Una vella recepta, coneguda per aquells que han rebut una forta impregnació de geometria clàssica, fa veure que el punt α definit per $f(g(\alpha)) = \alpha$ és justament la intersecció de les trisectrius que surten de A i de B més pròximes al costat AB. El lector s'en pot convèncer comprovant que la rotació g de centre B i angle $2b$ transforma aquest punt d'intersecció en el seu simètric respecte del costat AB, i que la rotació f de centre A i angle 2α el torna exactament al seu lloc original. El mateix passa amb els punts β i γ. Hem demostrat, doncs, que el triangle (α, β, γ) és equilàter. Veiem a més que, en aquest ordre, el triangle està descrit en sentit positiu (oposat al de les agulles del rellotge). Aquesta demostració s'aplica igualment als altres triangles equilàters de Morley: les 18 trisectrius obtingudes a partir de les trisectius interiors per rotacions d'angle $\pi/3$ permeten modificar f, g i h sense canviar el producte dels seus cubs i donen noves solucions de l'equació $f^3g^3h^3 = 1$ i sengles triangles equilàters! La dualitat entre l'àlgebra i la geometria, evident en els exemples anteriors, permet posar més lluny els límits dels nostres conceptes geomètrics, ja alliberats de la carcassa euclidiana per la introducció de les geometries no euclidianes (vegeu l'apèndix 2).

El descobriment de la mecànica quàntica i de la no-commutativitat de les coordenades en l'espai de fases d'un sistema atòmic han generat en els darrers vint anys una evolució igualment radical dels conceptes geomètrics, alliberant la noció d'espai de la commutativitat de les coordenades.

En geometria no commutativa la noció de simetria esdevé més subtil, i els grups mencionats en aquest article es substitueixen per àlgebres inventades pel matemàtic Heinz Hopf que il·lustren la bella definició de Herman Weyl extreta del seu llibre *Simetria i matemàtica moderna*:

> La simetria no està restringida de cap manera als objectes que ocupen un cert espai. Simètric vol dir quelcom ben proporcionat, ben equilibrat, i la simetria indica llavors aquesta mena d'harmonia entre les diverses parts gràcies a la qual s'integren en un tot: la bellesa està lligada a aquesta simetria.

Apèndix 1: Estudi dels grups A_4 i A_5

A) El grup A_4

1) El grup A_4 és el de les permutacions parelles de quatre lletres a, b, c, d. Aquest grup està generat per les permutacions $s = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$, que transforma a en b, b en a, c en d i d en c i, $s = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{pmatrix}$, que transforma b en c, c en d i d en b. Aquestes dues permutacions compleixen les relacions $s^2 = 1$, $t^3 = 1$ i $(st)^3 = 1$.

2) Existeix una representació geomètrica del grup A_4: és el grup de les rotacions que conserven el tetraedre a, b, c, d. (Vegeu la figura 5.)

La permutació s està representada per la simetria respecte de la mediatriu comuna a ab i cd. La permutació t està representada per la rotació d'angle $2\pi/3$ al voltant de l'eix del tetraedre que passa per a. La permutació

$st = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$ és la rotació d'angle $2\pi/3$ al voltant de l'eix del tetraedre que passa per c. El lector pacient pot comprovar que les regles de simplificació $s^2 = 1$, $t^3 = 1$ i $(st)^3 = 1$ són una presentació del grup, és a dir, són suficients, combinades amb la llei del grup, per veure que hi ha només dotze paraules diferents formades per les lletres s i t.

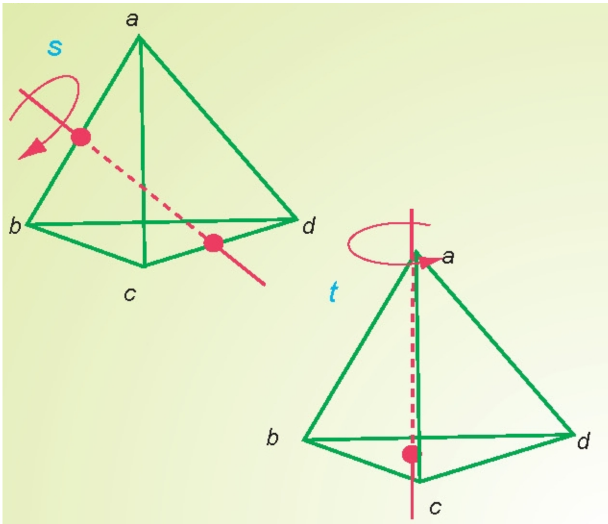


FIGURA 5: Simetries del tetraedre.

B) El grup A_5

1) El grup A_5 és el de les permutacions parelles de cinc lletres, a, b, c, d, e. Aquest grup està generat per les permutacions $u = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & d & c & e \end{pmatrix}$, que transforma a en b, b en a, c en d i d en c, i $v = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ e & b & a & d & c \end{pmatrix}$, que transforma a en e, c en a i e en c. Aquestes transformacions satisfan les relacions $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ i $(uv)^5 = 1$ (per descomptat, u i v no commuten).

2) Aquest grup té 60 elements i és isomorf al grup de rotacions del dodecaedre regular (vegeu la figura 6). Així, u és una de les 15 simetries respecte de la mediatriu comuna a dues arestes simètriques respecte del centre. D'altra banda, v és una de les 20 rotacions d'angle $2\pi/3$ al voltant d'una recta que uneix dos vèrtexs simètrics amb relació al centre del dodecaedre.

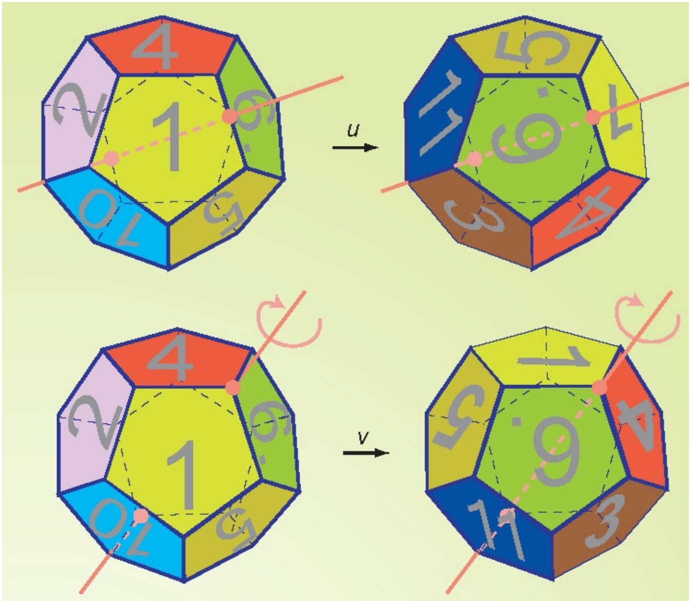


FIGURA 6: Simetries del dodecaedre.

C) Presentació de A_5

El lector pacient pot verificar que n'hi ha prou amb les regles de simplificació $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ i $(uv)^5 = 1$ i la llei del grup per veure que hi ha només 60 paraules diferents formades per les lletres u i v. Comencem posant $s = u$, $t = k^{-2}uk$, on $k = uv$, per veure que s i t satisfan la presentació de A_4, és a dir, les regles de simplificació $s^2 = 1$, $t^3 = 1$ i $(st)^3 = 1$. A continuació es veu que qualsevol paraula amb les lletres u i v s'escriu, gràcies a les regles de simplificació, en la forma $k^m h$, on m és $0, 1, 2, 3$ o 4 i h és un mot escrit amb les lletres s i t. Com que n'hi ha 12, d'aquestes paraules h, veiem que el grup A_5 està efectivament presentat per les relacions en qüestió.

D) A_5 com a grup de matrius

1) Posem $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ el cos dels enters mòdul 5. En aquest cos $4 + 2 = 1$, $3 + 2 = 0$, $4 \times 2 = 3$, $3 \times 2 = 1$, etc.

2) Representem u i v com les transformacions següents de l'espai projectiu $P_1(\mathbb{F}_5)$. Aquest espai projectiu conté, a més dels cinc elements de $\mathbb{F}_5$, un punt *a l'infinit* denotat com $1/0$. Posem $u(z) = -1/z$ per a z un element de $P_1(\mathbb{F}_5)$. Tenim clarament que $u^2(z) = z$, és a dir, $u^2 = 1$. Posem ara $v(z) = -1/(z+1)$ i podem comprovar que $v^3 = 1$. Verifiquem ara la presentació de A_5 ja que $k = uv$ està donada per $k(z) = z + 1$ i $k^m(z) = z + m$ de manera que $k^5 = 1$.

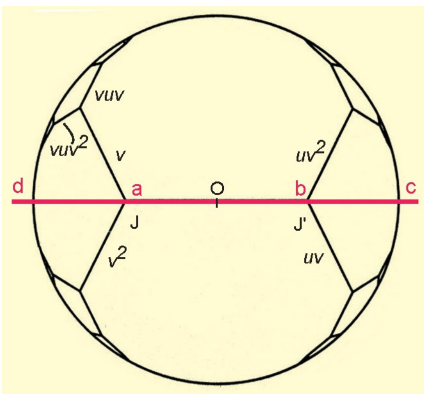
3) Donem una representació matricial dels elements u i v. Donats quatre elements a, b, c, d de $\mathbb{F}_5$ que compleixen $ad - bc = 1$, s'associa a la matriu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la transformació f de $P_1(\mathbb{F}_5)$ donada per $f(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$. El grup de transformacions que s'obté d'aquesta manera es denota per $PSL(2, \mathbb{F}_5)$, el grup especial lineal projectivitzat de $\mathbb{F}_5$. D'aquesta manera els elements u, v, k i t es representen per les matrius:

$$u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \; k^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; t = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

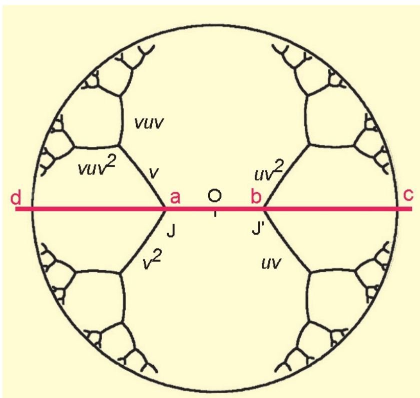
Apèndix 2: Recobriment universal i geometria no euclidiana

Per a comprendre geomètricament el grup generat per dos elements u i v presentat per les relacions $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ i $(uv)^5 = 1$, comencem considerant només les dues primeres relacions $u^2 = 1$ i $v^3 = 1$. El grup que s'obté és $PSL(2, \mathbb{Z})$, que es pot entendre visualitzant la seva acció sobre un arbre infinit T del qual de cada vèrtex surten tres arestes. La tercera relació $(uv)^5 = 1$ s'entén llavors identificant l'arbre T amb el recobriment universal del graf de la figura 3 (aquest recobriment universal, en el sentit de Poincaré, s'obté considerant tots els camins que segueixen les arestes del dodecaedre regular). L'arbre infinit T està representat segons dos models de la geometria no euclidiana, el model de Klein (A) i el model de Poincaré (B) (vegeu la figura 7).

En els dos models, el conjunt de punts de la geometria plana són els interiors a un disc. En el model de Klein, el segment que uneix dos punts no és altre que el de la geometria euclidiana. Només canvia la llargada d'aquest segment.



Model de Klein
(A)



Model de Poincaré
(B)

FIGURA 7: Models de geometria no euclidiana.

En aquest model, la llargada d'un segment ab ve donada pel logaritme de la relació (ab, cd) de ab amb les interseccions c i d de la recta ab amb el cercle C. Així, $[ab] = \log \frac{ac\times bd}{ad\times bc}$. Les arestes de l'arbre T són segments de recta de la mateixa llargada.

En el model de Poincaré, les rectes són els arcs de cercles ortogonals al cercle C, i la noció d'angle és la mateixa que en la geometria euclidiana. Les distàncies vénen donades per $2\log(ab, cd)$, on la relació (ab, cd) es calcula sobre el cercle que passa per a, b, c, d i on el factor 2 es fa visible al comparar (A) i (B).

El grup $PSL(2,\mathbb{Z})$ ve representat per les isometries de la geometria no euclidiana. Aquest grup té per presentació les relacions $u^2 = 1$ i $v^3 = 1$. L'element u ve donat per la simetria respecte de l'origen O, i l'element v per la rotació no euclidiana de centre J i angle $2\pi/3$. A l'aplicar a l'aresta JJ' les operacions representades per les paraules formades per les lletres u i v (com $uvvuuuvuv\ldots$, s'obté exactament l'arbre T del recobriment universal del joc de l'icosió de Hamilton. En particular, cadascun dels camins hamiltonians és un punt d'aquest recobriment universal.

El dodecaedre s'obté identificant les arestes de l'arbre T que són congruents mòdul 5. Aquesta congruència significa que es passa de l'una a l'altra d'aquestes arestes per una isometria no euclidiana donada per un element $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ del grup $PSL(2,\mathbb{Z})$ que compleix $a \equiv 1 \pmod 5$, $b \equiv 0 \pmod 5$, $c \equiv 0 \pmod 5$ i $d \equiv 1 \pmod 5$. D'aquesta manera la presentació del grup A_5 que imposa la relació suplementària $(uv)^5 = 1$ ve a ser fer el quocient del grup $PSL(2,\mathbb{Z})$ pel subgrup normal G generat per $(uv)^5$. El quocient de T per G no és res més que el graf format per les arestes del dodecaedre. El grup quocient $PSL(2,\mathbb{Z})/G$ és el grup $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ de l'apèndix 1.

Apèndix 3: El teorema de Morley

El teorema de Morley estableix que els tres punts α, β, γ d'intersecció de les trisectrius d'un triangle qualsevol ABC com el del dibuix formen un triangle equilàter. Anomenem f, g, h les tres rotacions al voltant dels tres vèrtexs del triangle amb angle dos terços de l'angle en el vèrtex corresponent.

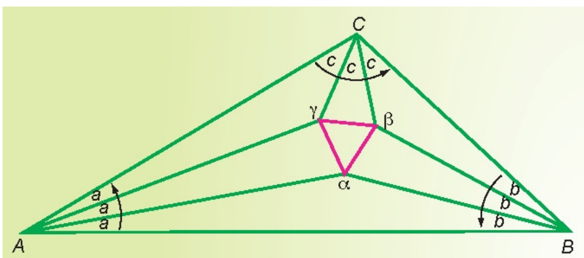


FIGURA 8: El teorema de Morley.

Així f és la rotació de centre A i angle $2a$, g és la rotació de centre B i angle $2b$ i h és la rotació de centre C i angle $2c$. Estudiem les propietats d'aquestes rotacions.

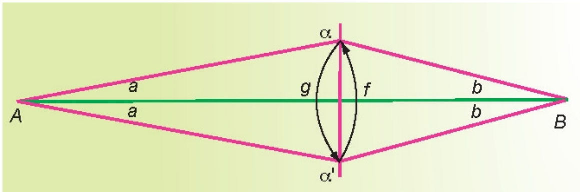


FIGURA 9: Les rotacions f i g.

La rotació g transforma el punt α en α', simètric de α respecte de la recta AB. La rotació f retransforma α' en α, de manera que α és el punt fix del producte de rotacions fg. De manera semblant, β és el punt fix del producte de rotacions gh i γ és el punt fix del producte de rotacions hf.

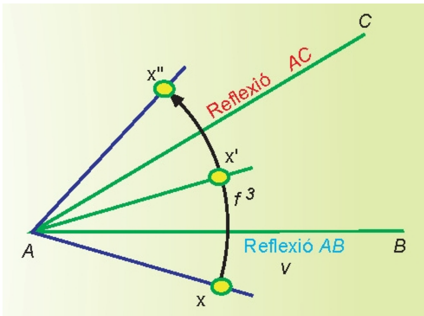


FIGURA 10: $f^3g^3h^3 = 1$.

Considerem ara el producte de rotacions $f^3g^3h^3$. La rotació f^3 de centre A i angle $6a$ és el producte $s(AC)s(AB)$ de la simetria $s(AB)$ respecte del costat AB i la simetria $s(AC)$ respecte del costat AC. Semblantment, g^3 és el producte $s(AB)s(BC)$ i h^3 és el producte $s(BC)s(AC)$.

Com que el quadrat d'una simetria respecte d'una recta és la identitat, tenim, doncs, que $f^3g^3h^3 = 1$, cosa que prova, gràcies al resultat algèbric, que el triangle α, β, γ és equilàter.

COLLÈGE DE FRANCE
3, RUE D'ULM
75231 PARIS, CEDEX 05
FRANCE
alain@connes.org