

Un diàleg sobre les aplicacions de les matemàtiques*

ALFRÉD RÉNYI

Presentació

En el volum 17 número 2 d'aquest *Butlletí* es va publicar *Un diàleg socràtic sobre les matemàtiques* d'Alfréd Rényi,¹ publicat per primer cop en hongarès el 1962. L'èxit que aquesta petita obra mestra va tenir el va animar a escriure un segon diàleg,² que és el que us oferim ara, al qual seguiria un tercer més endavant.

El personatge central del diàleg és Arquimedes,³ matemàtic sicilià, que nasqué i morí a Siracusa en el segle III aC, considerat el més gran dels matemàtics grecs i un dels més notables de tots els temps.

Siracusa és una ciutat de l'illa de Sicília, situada a la costa oest, que mira cap a la península grega. Com d'altres ciutats de Sicília i del sud de la península italiana (l'anomenada *Magna Grècia*), formava part de la civilització i la cultura gregues. Un dels famosos problemes aritmètics d'Arquimedes —el *problema dels bous*— està situat geogràficament a «les planures de l'illa de Tinàcria», l'illa del Trident, és a dir, Sicília; basant-se en els versos 120-126 del cant XII de l'*Odissea* d'Homer, els estudiosos han atribuït a aquest problema un origen homèric.

L'interlocutor d'Arquimedes és el rei Hieró II de Siracusa. Rényi es permet una llicència històrica com a recurs literari, ja que Hieró va morir tres anys abans que Arquimedes. L'autor és conscient d'aquest fet, tal com indica en el

* Traducció de JOSEP MARIA FONT I LLOVET.

Presentació i anotació crítica de JOSEP PLA I CARRERA.

1 Vegeu el breu apunt biogràfic a les pàgines 66-67 de l'esmentat número d'aquest *Butlletí*.

2 Publicat en anglès, per primer cop, el 1964, en l'*Ontario Mathematics Gazette*, revista de l'*Ontario Association for Mathematics Education*.

3 Malgrat que estem molt acostumats a dir «Arquimedes», els criteris filològics més moderns sembla que s'inclinen per la paraula plana «Arquimedes».

Postscript del seu llibre: «L'única excepció en què m'he apartat conscientment dels fets és en el segon diàleg, on el rei Hieró dirigeix la defensa de Siracusa durant el setge de l'any 212 aC quan, de fet, havia mort tres anys abans» [12, 94].

El context històric del diàleg, força important, és el següent. Hieró, tirà de Siracusa, durant la Primera Guerra Púnica⁴ (264-241 aC) s'alià amb Cartago, però després (262 aC) ho féu amb Roma. Durant el seu regnat —vers el 275 aC aconseguí la reialesa— Siracusa assolí una gran prosperitat. L'any 264 la coalició dels cartaginesos i siracusans va aconseguir assetjar l'exèrcit romà del cònsol Claudi Api⁵ a Messina, una ciutat de Sicília. Però un segon exèrcit romà comandat per Valeri (que fou conegut amb el sobrenom de Messala, «el de Messina») i Octilià derrotà la coalició. Hieró demanà la pau, i van signar un acord per a quinze anys. En definitiva, Hieró esdevingué aliat de Roma. El seu fill i hereu Geló, que havia regnat amb ell, morí un any abans que el pare. Per això, a la mort de Hieró (215 aC), el succeí al tron el seu nét Hierònimus, que volgué restablir la grandesa de Siracusa i s'alià amb Cartago. Però ell i tota la seva família foren assassinats l'any 214 aC. Aleshores la ciutat, després d'un temps de convulsió, aconseguí d'imposar la república. S'anomenaren dos estratsers —és a dir, caps de l'exèrcit— partidaris de Cartago, però en canvi els mandataris no volien enfrontar-se a Roma. Tanmateix, l'atac que féu el general Marcel a Leontini, una ciutat al nord-est de Siracusa, que fou d'una gran crueltat, revoltà els siracusans, que decidiren aixecar-se contra Roma. Així fou com, l'any 213 aC, els siracusans es veieren implicats en la Segona Guerra Púnica (219-201 aC) i Marcel assetjà Siracusa; durant el setge morí Arquimedes (212 aC).

Marc Claudi Marcel fou cònsol el 222 aC, vencé els gals a Clastidium, i donà mort a Viridomarus, llur cap. Malgrat el que conta Plutarc a la vida que li dedica, després de la victòria de Siracusa permeté un saqueig brutal i ell mateix tresorejà una munió d'obres d'art gregues que s'emportà a Roma, on fou rebut triomfalment amb els honors de l'*ovatio*, un honor inferior, tanmateix, al *triomf*. De fet, la invasió de Siracusa i, seguidament de l'illa de Sicília, s'emmarca en l'estratègia de conquestes de territoris base en la Segona Guerra Púnica; simplificant molt podem dir que aquesta guerra és la guerra que Roma mantingué amb Anníbal. Aquest militar cartaginès —un dels més famosos de l'antiguitat— provocà aquesta guerra amb l'atac a la ciutat de Sagunt, a la península Ibèrica. Després organitzà la famosa expedició a Itàlia a través dels Pirineus i dels Alps. Mantingué els romans en escac durant molt de temps, i va aconseguir arribar a les portes de Roma. Finalment, vençut i perseguit, acabà amb la seva vida.

En aquest diàleg, Rényi no pretén reconstruir la personalitat d'Arquimedes, de qui se sap molt poc, sinó aprofitar, amb la seva característica habilitat, les circumstàncies històriques (lleument manipulades, com hem assenyalat)

⁴ El nom de «guerra púnica» prové del mot *punicus*, que és com els llatins anomenaven els cartaginesos.

⁵ És el mateix Api que féu construir la via Àpia.

per a posar en boca d'Arquimedes la seva visió personal sobre el debat de matemàtica pura *versus* matemàtica aplicada.⁶ Rényi nega de manera clara que existeixi una «matemàtica aplicada» diferent de la «matemàtica pura», i creu que la diferència rau en l'actitud de l'estudiós. També planteja diverses qüestions entorn de les inversions en la recerca destinada a les descobertes útils per a la guerra (la major facilitat per a obtenir-les dels poders públics, la propietat dels seus resultats), qüestions vigents encara avui.

Així mateix, Rényi proposa una solució a la qüestió, tantes vegades discutida: com és que no ha quedat cap document d'índole pràctica dels treballs d'Arquimedes? Realment, en féu, de treballs d'aquesta mena? De fet, no hi ha cap text seriós d'història de la matemàtica que atribueixi a Arquimedes la mena de ginys que la tradició li atribueix, i que es mencionen en el diàleg. Tanmateix, els textos d'història —quan parlen d'Arquimedes— afirmen que va contribuir a la defensa de Siracusa de la invasió romana, i que hi va morir. L'argument de Rényi —que Arquimedes no volia que quedés cap rastre dels seus enginys destructors perquè se sentia culpable de les morts que havien causat— no explica per què no ha quedat tampoc cap rastre dels enginys que contribueixen a la millora de la qualitat de vida, als quals el text també fa referència. Això no obstant, val la pena indicar que molts dels treballs teòrics d'Arquimedes fan referència a la part teòrica de qüestions aplicades. Per exemple, *De l'equilibri dels plans* o *Sobre els cossos que suren*; vegeu [20, II, 183–204; 238–260]. D'altra banda, podem pensar que Arquimedes, amb la formació grega, havia adquirit el convenciment platònic que l'estudi «era patrimoni dels esperits lliures», en el sentit que era una activitat de la ment. Recordem que Procle diu que Pitàgores de Samos fou el primer a constituir la matemàtica com una disciplina lliure (*παίδεια*) [20, II, 1.154]. Això, segons Aristòtil, significa una «ciència lliure que es cultiva per ella mateixa, no per la seva utilitat, sinó per plaer» [*Metafísica* A 2, 982 b, 25–28].

En definitiva, hem d'admirar una peça literària, no d'erudició històrica, on l'autor construeix dues personalitats molt vives i a través del seu diàleg ens mostra algunes de les seves idees sobre les aplicacions de les matemàtiques. Com en el *Diàleg socràtic*, Rényi atribueix al matemàtic una certa responsabilitat en l'esdevenir de la societat i la solució dels problemes col·lectius.

El diàleg

ARQUIMEDES Majestat! Quina sorpresa, tan tard! A què dec l'honor d'aquesta visita del Rei Hieró a la meua modesta llar?

HIERÓ Benvolgut amic Arquimedes, aquesta nit hem celebrat amb un sopar al meu palau el gran triomf de la nostra petita ciutat, Siracusa, sobre els poderosos romans. T'hi he convidat, però el teu lloc ha romàs buit. Per què no has vingut, precisament tu, a qui devem, més que a ningú, la victòria

⁶ Aquest debat va ser molt viu al seu país a l'època en què va escriure els diàlegs, a mitjan segle XX. Probablement a començament del segle XXI aquest és un debat molt més atenuat.

d'avui? Els teus grans miralls còncaus⁷ han incendiat deu dels vint grans vaixells dels romans; han fugit del port amb el vent del sud-oest, cremant com torxes, però tots s'han enfonsat abans d'arribar a mar obert. No me n'hauria pogut anar a dormir sense agrair-te haver-nos deslliurat de l'enemic.

ARQUIMEDES Poden tornar, i encara estem assetjats per terra.

HIERÓ Ja en parlarem després. Primer permet-me que et faci un regal, el millor que et puc oferir.

ARQUIMEDES Certament, és una meravellosa obra d'art.

HIERÓ Aquesta safata és d'or pur; pots comprovar-ho amb el teu mètode,⁸ no hi trobaràs cap traça de plata.

ARQUIMEDES Suposo que aquests relleus mostren les aventures d'Ulisses.⁹ Al mig hi ha els troians, confiats, arrossegant el cavall de fusta cap a la seva ciutat —sempre m'he preguntat si els troians van emprar algun tipus de politja composta per a aconseguir-ho. Evidentment, el cavall tenia rodes, però la pujada cap a la ciutat devia ser bastant costeruda.

HIERÓ Per Zeus, estimat Arquimedes, deixa estar un moment les teves politges. Ja ho saps que em va sorprendre molt que tu sol aconseguissis fer surar aquell vaixell tan pesant que jo volia regalar al rei Ptolemeu,¹⁰ només fent girar la maneta de la teva politja triple. Però ara fes un cop d'ull a les altres escenes de la safata.

ARQUIMEDES Reconec¹¹ els Cíclops, i Circe transformant els companys d'Ulisses en porcs, i aquí el cant de les sirenes, amb Ulisses que se l'escolta lligat al pal major del seu vaixell: amb la seva expressió n'hi ha prou per a imaginar-se la seductora cançó. I aquí hi ha Ulisses a l'infern, quan troba l'ombra d'Aquilles, i aquí quan espanta la formosa Nausica i les seves donzelles; i al final, naturalment, l'escena on Ulisses, disfressat com un vell captaire, tensa el seu arc i es desfà dels pretendents. Realment és una obra d'art superba. Et regrecio la safata que m'has donat, generós sobirà meu: és realment el regal d'un rei.

HIERÓ Només pel seu valor ja és la millor entre les peces del meu tresor,

⁷ Hi ha molts estudis sobre la possibilitat que els siracusans haguessin aconseguit, pels volts del 212 aC, aquests miralls, anomenats *ustoris*. La qüestió és: els siracusans del segle III aC disposaven d'una tecnologia prou elaborada per a fabricar miralls *ustoris* amb la capacitat d'incendiar les naus romanes? Vegeu, per exemple, [14].

⁸ Vegeu l'apèndix 1.

⁹ Ulisses és un dels herois que van acompanyar el rei Agamèmnon a Troia en la guerra que els grecs van mantenir amb aquesta ciutat, segons conta Homer a la *Illiada*. Hi ha una excel·lent traducció catalana de Miquel Peix, [6].

¹⁰ Es refereix al rei d'Egipte Ptolemeu III, que regnà en el període 246-221 aC. Aquest país, a voltes, s'aliava amb els cartaginesos en contra dels romans. Recordem que a Egipte s'hi trobava la ciutat d'Alexandria amb el Museu, on poc temps abans havien ensenyat Euclides i Apol·loni, i la Biblioteca, de la qual Eratòstenes fou bibliotecari.

¹¹ Aquí Rényi fa una síntesi breu dels episodis més coneguts del retorn d'Ulisses a Ítaca, d'on n'era el rei, i que constitueixen el fil argumental de l'*Odissea* d'Homer. Hi ha una excel·lent traducció catalana de Carles Riba, [7].

però tu la mereixes. No l'he escollida per la seva bellesa, sinó per un tercer motiu. El que has fet avui per Siracusa només es pot comparar al truc d'Ulisses. Una cosa i l'altra suposen el triomf de la intel·ligència sobre la força bruta.

ARQUIMEDES Aconseguiràs que un vell s'enrojoli com una joveneta. Però deixa que et recordi que la guerra no s'ha acabat. T'agradaria escoltar el consell d'un ancià?

HIERÓ Fins i tot t'ordeno, com a rei teu, que em diguis la teva opinió amb franquesa.

ARQUIMEDES Aquest és el moment adequat per a pactar la pau amb els romans; des que va començar la guerra, mai no havíem estat en una posició tan favorable per a negociar. Si Marcel no t'envia el seu missatger abans de mitjanit, li has d'enviar el teu abans de l'alba i heu de firmar la pau abans que el sol es torni a pondre. Marcel estarà disposat a retirar les tropes que estan assetjant la ciutat, perquè les necessita per a atacar Anníbal. A més, si aconsegueix un pacte demà mateix, podrà anunciar a Roma una victòria, encara que sigui diplomàtica, a més de la trista notícia que ha perdut mitja flota. Quan les notícies de la batalla d'avui arribin a Roma, els romans s'enfuriran fins a un punt on només s'acontentaran amb una victòria absoluta.

HIERÓ La teva anàlisi és correcta. De fet, aquesta mateixa nit he rebut un missatge de Marcel en què m'ofereix la pau i la retirada de les tropes sota certes condicions. Si les coneguessis no et deliries tant per fer tractes amb els romans.

ARQUIMEDES Què vol Marcel?

HIERÓ Bé, vol deu vaixells nous a canvi dels deu que li hem enfonsat avui, a més de l'enderrocament de totes les nostres fortificacions excepte una, on s'hi instal·laria una guarnició romana; evidentment vol molt or i plata, vol que declarem la guerra a Cartago,¹² però a més vol el meu fill Geló,¹³ la meva filla Elena, i a tu mateix com a ostatges. Si firmem aquest tractat ell promet no causar cap mal a la ciutat i els seus habitants.

ARQUIMEDES Potser no insistirà en tots els punts. Per descomptat, no renunciarà a la condició que em lliuris a mi.

HIERÓ Parles de tot això amb molta tranquil·litat. Per tots els déus de

¹² Cartago és una ciutat antiga, que es trobava situada a 17 quilòmetres de la Tunísia actual, és a dir, al nord d'Àfrica, gairebé sobre el mateix meridià que Roma. Fou la capital de l'estat cartaginès fins al 146 aC. Després d'aquesta data esdevingué una ciutat romana important. Actualment està destruïda.

¹³ Com ja hem dit, aquest fill i hereu de Hieró havia mort un any abans que el seu pare i, per tant, molt abans que el general Marcel atacés Sicília. Tanmateix Arquimedes el devia conèixer bé, ja que li havia adreçat el seu treball més didàctic, *L'Arenari*, en el qual comptava el nombre de grans de sorra de l'Univers, després de fer un repàs de les dades astronòmiques conegudes, una defensa del sistema heliocèntric d'Aristarc, i d'introduir un sistema numèric propi —les *octades*, els *períodes*, etc.— per a poder expressar breument, amb paraules, nombres grans.

l'Olimp,¹⁴ mentre jo sigui viu no lliuraré els meus fills a mans de l'ene-
mic, ni els lliuraré la teva persona. L'or i els vaixells no m'importen, que
se'ls quedi. Però el que m'agrada menys d'aquestes condicions és que si les
complim estarem totalment al seu albir. Quines garanties tinc que complirà
el tractat? No em dona ostatges.

ARQUIMEDES Procura no posar en dubte que ell complirà la seva paraula;
els romans són molt susceptibles pel que fa al seu honor, almenys en les
negociacions. Potser podràs evitar haver-li de lliurar els teus fills.

HIERÓ I tu què? Estaries disposat a fer aquest sacrifici per la teva ciutat?

ARQUIMEDES És una pregunta o una petició?

HIERÓ Naturalment que és només una pregunta. Vols saber què li he respost
a Marcel?

ARQUIMEDES Ja li has respost?

HIERÓ Sí. He acceptat totes les seves condicions excepte la de lliurar-te a tu
com a ostatge, i acceptaré de lliurar-li els meus fills sempre que ell també
em lliuri dos dels seus com a ostatges. Pel que fa a tu, els he dit que la teva
edat no et permet de viure en un campament. Però com que sé que no et
vol com a ostatge sinó que vol la teva saviesa, li he promès que escriuries
per a ell una descripció completa de tots els teus invents que tinguin algun
interès militar.

ARQUIMEDES No penso escriure mai res sobre els meus invents relacionats
amb la guerra.

HIERÓ Per què? Si arriba la pau no els necessitem per a res. Podries explicar-
me per què refuses d'escriure sobre els teus invents?

ARQUIMEDES T'ho explicaré, si tens paciència per a escoltar les meves raons.

HIERÓ Estic disposat a escoltar-te. Vull estar despert per a esperar que arribi
la resposta de Marcel.

ARQUIMEDES Aleshores tenim prou estona, perquè Marcel necessitarà una
mica de temps per a formular la seva resposta. Sonarà com una fuetada.

HIERÓ Penses que trencarà les negociacions?

ARQUIMEDES Segurament. Has dubtat del seu honor. Això no t'ho perdonarà
mai, i no hi haurà acord.

HIERÓ Potser tens raó.

ARQUIMEDES Sempre he admirat la teva habilitat diplomàtica i la teva pe-
netració en la psicologia dels teus oponents. Però aquest cop has oblidat
aquest art.

HIERÓ Ho he d'admetre. Potser estava massa embriac de vi i de victòria. Però
el que està fet, fet està. Amb tot, segueixo volent escoltar els teus motius.

ARQUIMEDES T'explicaré el meu punt de vista, encara que és un afer intrans-
cendent. Has comparat les meves màquines amb el cavall de Troia. Bé, la te-
va comparació és realment encertada, però en un sentit totalment diferent.

¹⁴ En el món de les creences gregues, el mont Olimp era la residència dels déus.

Ulisses va fer servir el cavall de fusta per a infiltrar-se ell i uns quants soldats grecs dins de Troia. Jo he fet servir les meves màquines per a infiltrar una idea en la mentalitat de la societat grega: la idea que les matemàtiques —no solament les beceroles, també les parts més subtils— es poden aplicar amb èxit per a finalitats pràctiques. He de confessar que vaig dubtar molt abans de fer-ho, perquè odio la guerra i la mort. Però de tota manera la guerra ja era aquí, i era l'única manera de fer-me entendre. Ho havia intentat d'altres formes, però va ser inútil. Recorda que fa uns anys, quan vaig inventar una bomba per a buidar l'aigua de les teves mines, perquè els que hi treballen no ho fessin amb l'aigua fins als genolls,¹⁵ la màquina no et va interessar. El capatàs de les teves mines em va dir que no li preocupava que els esclaus es mullessin les cames —«no són de sucre», això va dir. I recordes quan vaig proposar la construcció d'una màquina per a regar els teus camps? Em van dir que el treball dels esclaus era més barat. I quan vaig proposar al rei Ptolemeu que emprés la força del vapor¹⁶ per a impulsar els seus molins, què em va dir? Que els molins que havien servit per als seus avantpassats li servien a ell també. T'he de recordar més exemples? N'hi ha com a mínim una dotzena. Tots els meus intents de mostrar a la gent el que les matemàtiques poden fer per ells en temps de pau van ser en va. Però quan va venir la guerra, aleshores tu vas recordar de cop les meves politges, les meves rodes dentades, les meves palanques. En temps de pau tothom considerava els meus invents com joguines impròpies d'un ciutadà culte i seriós, i encara més d'un filòsof. Ni tu, que sempre m'havies donat suport i m'havies ajudat a fer realitat les meves idees, no te les prenies gens seriosament; les mostraves als teus convidats per a entretenir-los i res més. Aleshores va venir la guerra i els vaixells romans van bloquejar el port; jo em vaig atrevir a fer un comentari casual, que llençant-los pedres amb la catapulta els podríem allunyar, i tu et vas aferrar a aquesta idea. No em vaig poder fer enrere del que havia dit, i vaig haver de seguir. Un cop iniciat aquest camí, no l'he pogut deixar. Però des del començament he tingut una barreja de sentiments. Per descomptat, estava content que els meus invents ja no fossin ridiculitzats, i per fi tenia una oportunitat per a mostrar al món què són realment les màquines matemàtiques en acció. Però aquest no era el tipus d'acció que jo hauria desitjat per a provar la vàlua de les idees matemàtiques a la pràctica. Vaig veure homes morts per les meves màquines, i em vaig sentir culpable. Vaig jurar solemnement a Atena¹⁷ que mai no explicaria a ningú el secret de les meves màquines de guerra, ni de paraula ni per escrit. Vaig intentar apaivagar la meva consciència dient-me que les notícies sobre Arquimedes derrotant els romans amb

¹⁵ Probablement fa referència al famós *cargol d'Arquimedes*, un giny que permet poar l'aigua. Pel que fa als possibles invents d'Arquimedes, vegeu [1, 126–138].

¹⁶ Moltes de les màquines atribuïdes a Arquimedes eren conegudes per Heró d'Alexandria. Vegeu [20, II, 606–607].

¹⁷ Deesa de la saviesa i de la intel·ligència, de les arts i de les ciències, i també de la guerra i de la pau.

les matemàtiques arribarien a tots els racons del món de parla grega, i que això es recordaria fins i tot un cop acabada la guerra, quan els secrets de les meves màquines de guerra romanguessin enterrats amb mi.

HIERÓ Certament, estimat Arquimedes, he rebut cartes de reis amics meus que em pregunten pels teus invents.

ARQUIMEDES I què els respons ?

HIERÓ Els dic que aquestes coses són secret d'estat mentre duri la guerra.

ARQUIMEDES Espero que hauràs entès que tinc altres raons per a no esbombar els meus secrets. He aconseguit guardar el secret fins dels que hi han treballat. Cada persona en coneix només alguns detalls. M'alegra que mai no m'hagis fet preguntes perquè m'hauria negat a respondre-les.

HIERÓ Doncs ara te'n faré algunes. No temis, no et preguntaré els teus secrets, només els principis generals que els sostenen.

ARQUIMEDES Em penso que podré respondre a aquestes preguntes sense trencar el meu jurament.

HIERÓ Abans et vull preguntar una altra cosa. Per què t'importa tant l'acceptació de les teves idees sobre la utilitat de les matemàtiques ?

ARQUIMEDES Potser era un foll, però creia que podria canviar el curs de la història. Em preocupava el futur del nostre món grec. Vaig pensar que si aplicàvem les matemàtiques a gran escala —al cap i a la fi, les matemàtiques són un invent grec,¹⁸ penso que la creació més gran de l'esperit grec— podríem salvar el nostre estil de vida grec.¹⁹ Ara m'adono que ja és massa tard. Els romans no conqueriran solament Siracusa, també les altres ciutats gregues; el nostre temps ja ha caducat.

HIERÓ Jo crec que fins i tot en aquest cas la nostra cultura grega no es perdrà; els romans l'adoptaran. Fixa't com ja intenten imitar-nos. Copien les nostres estàtues, tradueixen la nostra literatura —i ja veus, Marcel s'interessa per les teves matemàtiques aplicades.

ARQUIMEDES Els romans no les arribaran a entendre mai del tot. Tenen una mentalitat massa pràctica, i les idees abstractes no els interessen.

HIERÓ De fet, les seves aplicacions pràctiques sí que els interessen.

ARQUIMEDES Aquestes coses no es poden separar. Cal ésser un forjador de somnis per a aplicar les matemàtiques amb veritable èxit.

HIERÓ Això és més aviat paradoxal. Jo creia que per a aplicar les matemàtiques s'havia de tenir, en primer lloc, un gran sentit pràctic. La meua primera pregunta anava per aquí: quin és realment el secret d'aquesta nova ciència que has inventat —diguem-ne matemàtica aplicada—, i quina és la

¹⁸ Aquesta afirmació, expressada de forma tan taxativa, és incorrecta. El que podem afirmar és que els grecs van introduir, també en la matemàtica, la *racionalitat*, heretada dels seus grans pensadors i filòsofs. Potser és en aquest sentit que Rényi fa una afirmació tan rotunda, però tant Tales com Pitàgores, entre d'altres, havien après matemàtiques a Egipte i Mesopotàmia.

¹⁹ Compareu amb el final del *Diàleg Socràtic*, on Rényi, per boca de Sòcrates, defensa la necessitat d'estendre el rigor del pensament matemàtic a la conducció dels afers públics.

diferència principal amb el tipus de matemàtiques —diguem-ne matemàtiques pures— que s'ensenya a l'escola?

ARQUIMEDES Sento haver-te de decebre. No existeix un tipus de matemàtiques diferent de les que et van ensenyar els teus mestres, crec jo que no sense èxit.²⁰ Les matemàtiques aplicades, com a art diferent i separat de les matemàtiques com a tal, no existeixen. El meu secret està tan ben guardat perquè no ho és, en absolut: la seva mateixa obvietat és la seva millor disfressa. Està tan amagat com una moneda d'or al bell mig d'un carrer ple de pols.

HIERÓ Vols dir que les teves meravelloses màquines es basen en la mena de matemàtiques que totes les persones cultes coneixen?²¹

ARQUIMEDES Ara t'acostes a la veritat.

HIERÓ Me'n podries donar algun exemple?

ARQUIMEDES Bé, prenguem per exemple els miralls que tant ens han ajudat avui. El que he fet, simplement, és recordar una propietat de la paràbola: que si prenem un punt P de la paràbola, l'unim amb el focus, i dibuixem per P una recta paral·lela a l'eix, aquestes dues rectes formen el mateix angle amb la tangent a la paràbola en el punt P . Aquest teorema el pots trobar als llibres dels meus distingits col·legues d'Alexandria.²²

HIERÓ Costa de creure que hagis destruït mitja flota de Marcel amb aquest teorema, un més entre centenars de proposicions geomètriques semblants. El recordo vagament, encara que he oblidat la seva demostració.

ARQUIMEDES Quan vas veure una de les seves enginyoses demostracions, probablement la vas entendre, fins i tot, potser, vas admirar la seva bellesa i elegància, però això fou tot. Alguns matemàtics han donat un pas més, explorant algunes de les seves conseqüències geomètriques i inventant-ne demostracions noves, però s'han aturat aquí. Jo senzillament he donat un nou pas endavant, he buscat també les seves conseqüències no matemàtiques.²³

HIERÓ Jo m'havia pensat que havies descobert alguna nova llei de l'òptica.

²⁰ A Grècia els xicots que es preparaven per al govern aprenien, entre d'altres moltes disciplines, matemàtiques, com podem veure, per exemple, en la *República* de Plató. Això no ens ha d'estranyar. També a la Xina imperial, a partir del segle VI aC, els que es formaven per a ser funcionaris tenien, en el seu currículum, juntament amb l'escriptura, el tir amb arc, el domini del tir dels carros i els cavalls, etc., les matemàtiques.

²¹ A Grècia els ciutadans eren pocs. La resta eren esclaus, servents, etc. I, d'entre els ciutadans, les persones cultes n'eren aproximadament una desena part.

²² Arquimedes devia tenir contacte amb els savis d'Alexandria. S'ha conjecturat que havia estudiat amb els deixebles d'Euclides, en particular, amb Conó de Samos. A la mort de Conó, mantingué correspondència amb un dels seus deixebles, Dositeu, com palesen alguns dels seus treballs, com ara *Sobre l'esfera i el cilindre*. No sabem, però, si Arquimedes va arribar a llegir les *Còniques* d'Apolloni, que era més jove que ell, però en tot cas havia de conèixer els textos de còniques dels matemàtics que havien precedit Apolloni en el seu estudi, com ara Menecm, Aristeu el Vell, Euclides, etc. Cal assenyalar que el teorema citat, en el cas de la paràbola, no es troba a les *Còniques* d'Apolloni, sinó als *Miralls ustoris* de Diocles.

²³ En boca d'Arquimedes, Rényi assenyala les tres possibilitats del quefer matemàtic: l'aprenentatge, la descoberta, les aplicacions.

ARQUIMEDES L'òptica, al capdavant, no és més que una branca de la geometria. El que vaig fer servir de l'òptica, la llei de la reflexió d'un raig de llum, és una cosa que fa molt de temps que es coneix.²⁴

HIERÓ Vols dir que per a aplicar les matemàtiques no cal obtenir resultats matemàtics nous, sinó només fer coincidir una situació real amb la seva imatge matemàtica, una proposició matemàtica ja coneguda?

ARQUIMEDES No, la cosa no és tan senzilla. Sovint passa que el teorema que necessites no existeix, i aleshores l'has de trobar i demostrar tu mateix. Però encara que no calgui, trobar la imatge matemàtica d'una situació real —com dius tu, jo preferiria anomenar-ho *model matemàtic*— no és el mateix que aparellar guants.²⁵ Per una banda, és possible construir molts models matemàtics diferents d'una mateixa situació real, i cal escollir el més apropiat, el que reproduïx la situació real amb la màxima aproximació dins dels requeriments de l'aplicació pràctica (perquè del tot no encaixarà mai) i, al mateix temps, que no sigui massa complicat, que sigui tractable matemàticament. Són exigències oposades, i normalment caldrà establir un equilibri entre elles, un equilibri molt delicat. Has d'aproximar molt bé la situació real en tots els sentits rellevants per als teus propòsits, però has d'oblidar tot el que no tingui importància per als teus veritables objectius. Un model no té per què assemblar-se a la realitat modelada en absolutament tots els sentits, sinó només en els que compten de veritat. D'altra banda, un mateix model matemàtic pot adaptar-se a diverses situacions reals. Per exemple, les propietats de la paràbola també les vaig fer servir per a construir les catapultes, perquè fins a cert punt la trajectòria d'una pedra llançada per una catapulta es pot aproximar per una paràbola.²⁶ També vaig fer servir paràboles per a calcular quant s'enfonsaria a

²⁴ En la demostració que fa Euclides de la *llei de la reflexió*, a la *Catòptrica*, usa el principi que «el camí recorregut ha de ser mínim». Aquesta premissa li permet establir la llei usant solament principis geomètrics del triangle.

²⁵ La tasca de la matemàtica aplicada és, segons les paraules que Rényi atribueix a Arquimedes, la recerca de *models matemàtics*. Recordem que els grecs havien aconseguit un model paradigmàtic: el del moviment dels planetes, usant solament moviments circulars uniformes. Calien cercles virtuals en els quals es movien els centres de cercles en els quals es movien els planetes i la Lluna. Assolí el màxim desenvolupament i perfecció en el model que Claudi Ptolemeu ofereix a la *Sintaxis Matemàtica*, batejada pels matemàtics àrabs amb el nom d'*Almagest* («Obra gran»). És molt creïble que els astrònoms grecs fossin conscients que no era pas aquest el comportament «real» del sistema planetari però que, en canvi, n'era un bon model. Copèrnic, quan el 1514 tregué la Terra del centre de l'Univers per a posar-hi el Sol, mantingué el model ptolemaic pel que fa a les trajectòries planetàries. Caldrà esperar l'obra de Kepler (1609) perquè el model de Ptolemeu quedi definitivament superat.

²⁶ Aquesta afirmació és molt discutible, perquè a Grècia una corba no és mai una trajectòria. Recordem que, en la física grega, solament hi ha dues menes de moviments: el circular uniforme, o supralunar, i el rectilini uniforme, o sublunar. En aquest sentit és molt interessant la lectura de [3, capítols 1, 2 i 3]. Les corbes gregues, com podem veure consultant el *Tractat de l'espiral* d'Arquimedes adreçat a Dositeu, s'obtenen com el lloc geomètric dels punts que es troben en moviment rectilini i circular alhora. I les còniques s'obtenen tallant un con i un pla. Les trajectòries constitueixen una de les grans innovacions dels astrònoms dels segles XVI-XVII, Johannes Kepler i Galileo Galilei.

l'aigua un vaixell sota el pes de la seva càrrega. Naturalment, la secció d'un vaixell no té la forma exacta d'una paràbola, però un model més realista no hauria resultat tractable matemàticament. De tota manera, els resultats van concordar amb els fets francament bé. En particular, vaig poder trobar les condicions perquè un vaixell es mantingui dret quan les ones i el vent l'inclinin, ja que el centre de gravetat té tendència a situar-se en la posició més baixa possible.²⁷ Quan hom intenta descriure una situació tan complicada, fins i tot un model molt esquemàtic pot ser útil, perquè com a mínim ens donarà resultats qualitativament correctes, que a la pràctica poden ser, fins i tot, més importants que els resultats quantitius. L'experiència m'ha ensenyat que fins el model matemàtic més groller ens pot ajudar a entendre millor una situació real, perquè quan intentem bastir un model matemàtic ens veiem obligats a tenir en compte totes les possibilitats lògiques, a definir totes les nocions sense ambigüitats i a distingir els factors importants dels secundaris. I encara que un model matemàtic doni resultats que discrepin dels fets, això ens serveix per a ajudar-nos a buscar-ne un altre de millor.

HIERÓ Em sembla que aplicar les matemàtiques és semblant a fer la guerra: de vegades una derrota té més valor que una victòria, perquè ens ajuda a adonar-nos de les debilitats de les nostres armes o de la nostra estratègia.

ARQUIMEDES Ara sí que has copsat el punt clau.

HIERÓ Digue'm alguna cosa més dels teus miralls.

ARQUIMEDES Ja t'he explicat la idea bàsica. Per descomptat que, després d'haver tingut la idea d'usar les propietats de les paràboles que t'he dit abans, vaig haver de resoldre el problema de donar forma i polir un mirall metàl·lic en forma de paràbola còncaua de revolució; però prefereixo no parlar d'això.²⁸ A més, vaig haver d'escollir un aliatge apropiat.

HIERÓ Sense ficar-me en els teus secrets, està clar que a més de les propietats de la paràbola també haves de saber molt de metalls i de l'art de treballar-los. Em sembla que això mostra que si hom vol aplicar les matemàtiques no n'hi ha prou amb saber-ne moltes. Qui vol aplicar les matemàtiques, no està en una posició semblant a la de qui vol muntar dos cavalls alhora?

ARQUIMEDES Jo canviaria lleugerament la teva comparació: qui vol aplicar les matemàtiques és com un home que vol enganxar dos cavalls al seu carro. No és molt difícil, evidentment cal saber quelcom de cavalls i de carros, però qualsevol dels teus cotxers sabia fer-ho.

HIERÓ Ara sí que m'has confós completament. Quan penso que aplicar les matemàtiques és quelcom molt misteriós, tu em dius que en realitat és molt senzill; però quan ja m'he convençut que tot això és realment simple, aleshores tu insinues que és molt més complicat del que jo m'imaginava.

²⁷ És un dels resultats implícits de *Sobre els cossos que suren*.

²⁸ Sembla que la dificultat tècnica rau en el fet que, per tal que sigui efectiu, cal recobrir la superfície parabòlica amb miralls molt petits, i això, tècnicament, és complex. Es planteja la qüestió de la multidisciplinarietat. Vegeu [15, capítol 1].

ARQUIMEDES Els principis són obvis, però de vegades els detalls són bastant complexos.²⁹

HIERÓ Encara no he entès el que tu anomenes un *model matemàtic*. Parla'm més d'això.

ARQUIMEDES Recordes l'esfera que vaig construir, fa anys, per a imitar el moviment del Sol, la Lluna i els cinc planetes, i que mostrava com es produeixen els eclipsis de Sol i de Lluna?

HIERÓ Ja ho crec, és una de les coses del meu palau que sempre mostro als meus convidats; tothom opina que és meravellós. Això és un model matemàtic de l'Univers?

ARQUIMEDES No, això seria un model físic. Els models matemàtics són invisibles, existeixen només en la nostra ment, i es poden expressar amb fórmules. Un model matemàtic de l'Univers és el que tenen en comú l'Univers real i el model físic. En el model físic a cada planeta li correspon una petita bola de la mida d'una taronja. En el meu model matemàtic de l'Univers els planetes es representen simplement per punts.

HIERÓ Em penso que ja començo a entendre el que significa un model matemàtic. Però tornem al símil dels cavalls. L'art d'enganxar cavalls a un carro i de conduir-lo és molt diferent de l'art de criar i educar cavalls. L'art d'aplicar les matemàtiques, no és molt diferent del de fer matemàtiques, és a dir, trobar i demostrar teoremes?

ARQUIMEDES Tens raó en això dels cavalls, per descomptat, encara que en general l'home que ha criat un cavall ho sap gairebé tot d'aquest i podrà menar-lo millor que ningú. Pel que fa a les matemàtiques, ja t'he dit abans que per a poder-les aplicar amb èxit cal entendre-les molt a fons, i qui vulgui aplicar-les de manera original ha de ser un matemàtic creatiu. I a la inversa, el treball amb aplicacions pot ajudar les investigacions en matemàtiques pures.

HIERÓ Com pot ser, això? Pots donar-me un exemple?

ARQUIMEDES Potser recordaràs que fa un cert temps em vaig interessar molt per un problema de mecànica, el de trobar el centre de gravetat d'un sòlid. Els resultats que vaig obtenir sobre centres de gravetat em van ajudar a construir màquines, però també em van ajudar a demostrar noves proposicions geomètriques. He desenvolupat un mètode peculiar³⁰ que consisteix a investigar problemes geomètrics per mitjà de consideracions mecàniques relatives als centres de gravetat. Aquest mètode té un caràcter heurístic, és a dir, no subministra proves rigoroses. Usant aquest mètode de raonament vaig descobrir molts teoremes. Evidentment, com que el mètode no dóna veritables demostracions,³¹ vaig haver de demostrar després amb els mè-

²⁹ Els models matemàtics juguen, en molts casos, amb un nombre força gran de principis que, per separat, són simples i aparentment inconnexos; això que fa que sigui difícil de copsar llur necessitat en l'obtenció del model.

³⁰ Vegeu l'apèndix 2.

³¹ Vegeu l'apèndix 3.

todes geomètrics tradicionals tots els teoremes que havia conjecturat amb el meu mètode mecànic. De tota manera, és molt més fàcil trobar una demostració quan s'ha adquirit un cert coneixement de la qüestió gràcies al mètode de les analogies mecàniques, i sabent, per tant, què és el que cal demostrar, que sense aquest coneixement previ.

HIERÓ Digue'm algun teorema que hagi trobat d'aquesta manera estranya.

ARQUIMEDES Aquell que diu que l'àrea d'un segment de paràbola és igual a quatre terços de l'àrea del triangle de la mateixa base i la mateixa altura.³² Un cop trobat el resultat amb el meu mètode, també vaig trobar una demostració en la línia tradicional.

HIERÓ Si vas trobar el resultat per la mecànica, per què et vas preocupar de la demostració geomètrica?

ARQUIMEDES Al començament d'haver descobert el mètode, no tots els resultats que obtenia amb el seu ajut eren correctes;³³ més endavant, analitzant els casos on el mètode no havia funcionat, el vaig anar desenvolupant fins a un punt on ja no ha fallat més. Però encara no he pogut demostrar que tots i cadascun dels resultats que es puguin obtenir d'aquesta manera seran realment certs; potser algú ho demostrarà algun dia, però fins aquell moment no tindrè una confiança absoluta en el mètode.³⁴

HIERÓ Les demostracions rigoroses són realment necessàries en matemàtica aplicada? Al cap i a la fi, tu has dit que el model matemàtic només és una aproximació a la realitat. Si fas servir fórmules aproximadament correctes els teus resultats seguiran essent aproximadament propers a la realitat, i de tota manera tampoc no poden ser mai absolutament correctes...

ARQUIMEDES T'equivoques, rei meu. Precisament com que el model matemàtic només és una aproximació i sempre subsisteix una certa discrepància amb els fets, cal guardar-se de no augmentar aquesta discrepància amb un ús poc acurat de les matemàtiques, i cal ser tan rigorós com sigui possible. Per cert, parlant d'aproximacions, et vull dir que hi ha una confusió bastant comú de creure que l'ús d'aproximacions comporta un allunyament de la precisió matemàtica. Existeix una teoria rigorosa de les aproximacions,³⁵ i els resultats sobre aproximacions —per exemple les desigualtats— s'han de provar amb el mateix rigor que les identitats. Potser recordaràs les aproximacions que vaig trobar per a calcular l'àrea del cercle

³² Vegeu l'apèndix 3.

³³ Arquimedes, a *Sobre l'espiral*, diu que havia enviat problemes als matemàtics alexandrins per tal que els resolguessin i que, malgrat que eren erronis, com descobrí després, mai no va rebre dels matemàtics d'Alexandria cap indicació en aquest sentit. Ell ofereix la correcció d'aquests teoremes a *Sobre l'esfera i el cilindre*. Vegeu [1, 87-89].

³⁴ Vegeu l'apèndix 2.

³⁵ No és correcte parlar d'una teoria de les aproximacions a la matemàtica grega. Només van aproximar $\sqrt{2}$ (Teó d'Esmirna, segle II) i π . De fet, el que nosaltres anomenem *nombres irracionals*, no eren considerats en el seu aspecte numèric, sinó que eren representats per magnituds.

de radi unitat;³⁶ doncs bé, les vaig demostrar amb el rigor usual de la geometria.

HIERÓ Quins resultats més has obtingut amb el teu mètode mecànic?

ARQUIMEDES Aquest mètode m'ha dut a descobrir que el volum d'una esfera és igual a dos terços del volum del cilindre circumscribit.

HIERÓ Et vaig sentir dir que quan moris vols que gravin aquest teorema a la teva làpida.³⁷ És que el consideres el teu resultat més destacat?

ARQUIMEDES Jo penso que el mètode en si mateix és més important que qualsevol dels resultats particulars que he trobat amb el seu ajut. Recordes que et vaig dir, parlant de palanques, que si em donaves un punt de recolzament, jo aixecaria el món? Evidentment un punt com aquest no existeix en tot l'Univers. Però quan fem matemàtiques tenim un punt fix on recolzar-nos, els axiomes, i la lògica ens és indispensable. Aplicar les matemàtiques és moure la terra des del punt de recolzament de les matemàtiques.

HIERÓ Sempre parles d'aplicar les matemàtiques, però tots els exemples que dones són aplicacions de la geometria. Pel que fa a aquesta, ara ja veig com es pot aplicar. Per exemple, el funcionament d'una màquina depèn de la forma i mida dels seus components, la trajectòria d'una pedra llançada per una catapulta és una corba, aproximadament una paràbola, com tu has dit. Però, què hi ha de les altres branques de les matemàtiques, per exemple, la teoria dels nombres? Dificilment puc imaginar que pugui tenir alguna importància pràctica. Evidentment no m'estic referint a les beceroles de l'aritmètica, és clar que es fan servir en tots els càlculs; em refereixo a coses com la divisibilitat, els nombres primers, el mínim comú múltiple i coses així.³⁸

ARQUIMEDES Bé, en l'engranatge de dues rodes dentades amb diferent nombre de dents, el mínim comú múltiple apareix inevitablement. Et convenç aquest senzill exemple? Fa poc vaig rebre una carta del meu amic Eratòstenes de Cirene,³⁹ que em parlava d'un mètode simple però enginyós

³⁶ Aquí Arquimedes fa referència al seu treball *Mesura del cercle* on, usant polígons regulars de 6, 12, 24, 48 i 96 costats, inscrits i circumscribits en una circumferència amb una tècnica recurrent totalment correcta i generalitzable, estableix que $3\frac{10}{71} < \frac{L}{d} < 3\frac{1}{7}$, on L designa la longitud de la circumferència de diàmetre d . Cal remarcar que també és en aquest treball —un dels més curts de tots— on Arquimedes lliga la longitud de la circumferència amb l'àrea del cercle a través del teorema que diu: «L'àrea d'un cercle de radi r és igual a la d'un triangle rectangle els catets del qual són el radi r i la longitud L de la circumferència». De fet, estableix que $\frac{L}{d} = \frac{A}{r^2}$, on A és l'àrea del cercle i r el radi.

³⁷ Ciceró explica que ell, quan va ser procònsol de Sicília, va trobar el lloc on hi havia la tomba d'Arquimedes, que va reconèixer perquè contenia la figura d'una esfera inclosa en un cilindre. «El lloc era ple d'esbarzers... Vaig fer-lo netejar i obrir-hi un camí per tal que fos fàcilment accessible.» Avui aquest indret és desconegut, malgrat que a Sicília indiquen als turistes una tomba, al mig d'un cementiri, com la tomba d'Arquimedes, però de ben segur que no ho és.

³⁸ Recordem que la ciència grega de tipus matemàtic es dividia en quatre arts: aritmètica, música, geometria i astronomia. Les dues primeres eren de tipus discret, i les segones, continu. L'aritmètica i la geometria no tenien en compte el moviment; les altres dues, sí.

³⁹ Fou el primer que féu un càlcul molt acurat del diàmetre de la Terra. Aquí Rényi es refereix al famós garbell d'Eratòstenes, que trobem explicat en l'*Aritmètica* de Nicòmac de Gerasa.

—ell l'anomena el *garbell*— per a trobar nombres primers. Meditant sobre aquest mètode, vaig fer un esbós d'una màquina que fa realitat aquest procediment.⁴⁰ Aquesta màquina funciona amb rodes dentades de diferents mides. Si se la fa girar un cert nombre de vegades, diguem n , i després es mira per un forat que hi ha, resulta que si a través d'aquest forat s'hi veu, és que el nombre n és primer, i si està tapat és compost.

HIERÓ És realment divertit. Si s'acaba la guerra has de construir aquesta màquina. Als meus convidats els encantarà.

ARQUIMEDES Si sóc viu ho faré, per descomptat. Això mostrarà que les màquines poden resoldre problemes matemàtics. Potser això ajudarà els matemàtics a adonar-se que fins i tot des del seu punt de vista hi poden guanyar estudiant les relacions entre les matemàtiques i les màquines.⁴¹

HIERÓ Parlant de guanyar, recordo una anècdota que s'explica d'Euclides. Diuen que un dels seus alumnes li va preguntar: «Quant guanyaré estudiant aquestes coses?». Aleshores Euclides va cridar el seu esclau i li va dir: «Dóna-li una moneda, ja que vol guanyar alguna cosa amb el que aprèn». Em sembla que aquesta anècdota mostra que Euclides considerava superflu que un matemàtic es preocupés per la utilitat pràctica dels seus resultats.⁴²

ARQUIMEDES L'anècdota ja la sabia, evidentment, però et sorprendrà que et digui que estic completament d'acord amb Euclides; jo en el seu lloc hauria fet alguna cosa semblant.

HIERÓ Ara m'has tornat a confondre. Fins ara havies parlat amb entusiasme sobre les aplicacions de les matemàtiques, i ara coincideixes amb els puristes que pensen que l'única recompensa que el científic hauria d'esperar pel seu treball en matemàtiques és el plaer del coneixement.

ARQUIMEDES Em sembla que molta gent, i tu mateix, interpreteu malament l'anècdota sobre Euclides. No vol dir que no l'interessessin les conseqüències pràctiques dels resultats matemàtics, i que les considerés indignes d'un filòsof. Això seria un disbarat, senzillament; tu saps bé que Euclides va escriure un llibre anomenat *Phaenomena* sobre astronomia, un llibre sobre òptica, i probablement és també l'autor del llibre anomenat *Catòptrica*, que vaig fer servir per a construir els meus miralls; i també l'interessava la mecànica. Tal com jo entenc l'anècdota, Euclides volia cridar l'atenció sobre el fet notable que les matemàtiques només recompensen els que s'hi

⁴⁰ Literàriament molt enginyós, però històricament no té cap mena de fonament. Aquí Rényi fa l'ullet a la tècnica de còmput amb ordinadors, quelcom molt important tenint en compte l'any del seu diàleg: el 1964.

⁴¹ Punt de vista absolutament modern, que no cal molestar-se a justificar històricament en Arquimedes: Rényi juga descaradament a posar en boca d'Arquimedes les seves pròpies opinions, amb ànim decididament polèmic.

⁴² A banda de les interpretacions que es donin a l'anècdota, la pregunta de l'alumne és inadequada en el seu context, ja que a la Grècia alexandrina els que estudiaven eren fills de famílies acomodades o poderoses, de prohoms de Grècia.

interessen per elles mateixes, i no únicament per les seves recompenses.⁴³ Les matemàtiques són com la teva filla Elena, que cada vegada que apareix un pretendent, sospita que no està enamorat d'ella sinó que s'hi interessa només perquè vol esdevenir el gendre del rei. Ella vol un marit que l'estimi per la seva bellesa, la seva intel·ligència, el seu encant, i no per la riquesa i el poder que aconseguirà quan es casi amb ella. Anàlogament, les matemàtiques només revelen el seu secret als que s'hi acosten amb amor pur, per la seva pròpia bellesa. Els que ho fan així, evidentment, són recompensats també amb resultats d'utilitat pràctica. Però un que a cada pas es demani «Què puc guanyar amb això?» no anirà molt lluny en matemàtiques. Recordes que t'he dit que els romans no tindran mai gaires èxits en l'aplicació de les matemàtiques? Ara pots veure per què; tenen una mentalitat massa pràctica.

HIERÓ Penso que hauríem d'aprendre dels romans, ens en sortiríem millor en la lluita contra ells.

ARQUIMEDES No hi estic d'acord. Si intentem guanyar abandonant les idees que defensem i imitant els nostres adversaris, aleshores haurem perdut la batalla abans de començar-la. Encara que poguéssim guanyar la guerra d'aquesta manera, no valdria la pena, una victòria així és pitjor que una derrota.

HIERÓ No parlem de la guerra; tornem a les matemàtiques. Digues, com construeixes els teus models matemàtics?

ARQUIMEDES És difícil explicar això en termes generals. Potser un símil ens serà útil. Un model matemàtic d'una situació real seria com la seva ombra en la pantalla de l'enteniment.

HIERÓ La teva filosofia sembla ser la contrària de la de Plató. Ell diu que les coses reals són les ombres de les idees,⁴⁴ mentre que tu estàs dient que les idees són l'ombra de les coses.

ARQUIMEDES Ambdós punts de vista són més propers del que pugui semblar. Plató estava intrigat per la correspondència que hi ha entre les idees matemàtiques i la realitat, i va creure que la principal funció de la filosofia era l'explicació d'aquesta correspondència. Fins aquí estic completament d'acord amb ell. No coincideixo amb la seva explicació, però com a mínim ell va veure clarament el problema i va intentar elaborar una de les respostes lògicament possibles. Però em sembla que haurem de deixar la filosofia i tornar a la realitat, sento que truquen a la porta. Vaig a obrir.

HIERÓ Deixa'm a mi, deu ser el meu missatger que torna amb la resposta de Marcel. Aquí la tenim.

ARQUIMEDES Quina és, la seva resposta?

HIERÓ Llegeix tu mateix.

⁴³ Ni avui, quan tot té drets d'autor, ningú no paga «drets d'autor» per usar el teorema d'un altre.

⁴⁴ Referència al famós mite de la caverna, exposat per Plató a *La República* (llibre VII), segons el qual coneixem solament una ombra d'allò que és, de la *Idea*.

ARQUIMEDES A veure. «Marcel saluda el rei Hieró i li anuncia que conquerirà Siracusa abans de la lluna nova, i el rei Hieró comprovarà que un romà manté la seva paraula».

HIERÓ Què et sembla?

ARQUIMEDES El seu grec no és dolent. El contingut és el que jo esperava.

HIERÓ Certament, la teva predicció era correcta, com si l'haguessis trobada amb el teu mètode.

ARQUIMEDES Bé, almenys sabem el que ens espera.

HIERÓ Me'n vaig, he de dormir una mica, demà ens haurem de preparar per a un nou atac. Moltes gràcies per aquesta conversa tan interessant.

ARQUIMEDES M'ho he passat molt bé. Darrerament no tinc gaires oportunitats per a parlar de matemàtiques. I gràcies, un cop més, per la magnífica safata.

HIERÓ M'alegra que t'agradi. Bona nit, amic meu, em penso que tu també necessites descansar.

ARQUIMEDES Bona nit, rei meu. Jo encara no em retiraré. Vull acabar una carta al meu amic Dositeu de Pelusium sobre els meus darrers resultats. Ara que la flota romana ha marxat segur que hi haurà vaixells que sortiran demà del port, però potser demà passat els romans tornaran a establir el bloqueig. Vull aprofitar l'ocasió; podria ser la darrera.

Apèndix: els «mètodes» d'Arquimedes en el diàleg de Rényi

1.

Al començament del diàleg,⁴⁵ Hieró parla de «el teu mètode». Aquí es refereix a la coneguda anècdota de l'*eureka*, segons la qual Arquimedes s'adonà que el *principi d'Arquimedes* —«tot cos submergit en un fluid rep una empenta cap amunt igual al pes de l'aigua que desplaça», que constitueix una part del postulat 2 de l'obra *Sobre els cossos que suren*— permet d'esbrinar la quantitat de metall de cada mena que hi ha en un aliatge de dos metalls. Així va poder establir que l'orfebre reial, mentre elaborava una corona per al rei Hieró, va robar una part de l'or que havia rebut del tresor reial i la va substituir per plata.

El mètode a què fa referència la famosa anècdota —que trobem ressenyada a l'obra *Sobre l'arquitectura* de Vitruvi⁴⁶— és el següent. Suposem que el pes de la corona és $p = p_1 + p_2$, on p_1 és el pes de la part d'or i p_2 el de la plata, i que la corona desplaça un volum v d'aigua. Un pes p d'or desplaça un volum v_1 d'aigua. Aleshores un pes p_1 d'or desplaçarà un volum $\frac{v_1}{p} \cdot p_1$. Un pes p de plata desplaça un volum v_2 d'aigua. Aleshores un pes p_2 de plata desplaçarà

⁴⁵ A la pàgina 56.

⁴⁶ Vegeu [9, I, 113].

un volum $\frac{v_2}{p} \cdot p_2$. D'aquí deduïm que

$$v = \frac{v_1}{p} \cdot p_1 + \frac{v_2}{p} \cdot p_2 = \frac{p_1 v_1 + p_2 v_2}{p_1 + p_2}.$$

És a dir, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{v_2 - v}{v - v_1}$. Finalment, doncs, $p_2 = \frac{v - v_1}{v_2 - v_1} \cdot p$ és el pes de la plata substituïda.

2.

El «mètode peculiar» que Arquimedes mateix afirma haver desenvolupat⁴⁷ és el que s'acostuma a anomenar el *Mètode d'Arquimedes*. Es basa en la descomposició de dues figures planes o sòlides —una de coneguda i l'altra parcialment desconeguda— de les quals es comparen els pesos, tot equilibrant-los en una balança. La idea és la següent. L'àrea o volum conegut s'aplica al seu centre de gravetat, que constitueix un dels extrems de la balança. L'altra es descompon en àtoms —línies rectes en el cas de figures planes i superfícies planes en el cas dels volums o sòlids— que s'apliquen tots en un mateix punt, a l'altre extrem de la balança. Cal que la balança s'equilibri. És a dir, cal determinar la longitud del segon braç de la palanca. Aleshores, de la figura parcialment desconeguda en podem deduir l'àrea, si és una figura plana, o el volum, si es tracta d'un sòlid; i, en ambdós casos, el centre de gravetat. La descomposició que fa Arquimedes recorre als àtoms, que són incompatibles amb la propietat que avui anomenem *arquimedianitat*,⁴⁸ quelcom que és essencial en el desenvolupament rigorós de la geometria grega. En conseqüència no és acceptable en l'àmbit de la racionalitat que havien assumit els geomètres grecs des d'Euclides i probablement des d'Èudox. Vegeu [10, 54-60].

Arquimedes exposà aquest mètode en un llibre, sota la forma d'una carta a Eratòstenes, publicat modernament amb el títol de *El mètode*. En un dels primers paràgrafs li diu:

Reconeixent, com et deia, el teu zel i el teu domini excel·lent en filosofia, i també que saps apreciar, quan s'esdevé l'ocasió, la investigació de les qüestions matemàtiques, m'ha semblat oportú confiar-te per escrit, i explicar en aquest mateix llibre, les característiques pròpies d'un *mètode*⁴⁹ amb el qual et serà possible d'abordar la investigació de certes qüestions matemàtiques per mitjà de la mecànica. Quelcom que, n'estic ben conveçut, no és pas menys útil per tal d'aconseguir les demostracions d'aquests mateixos teoremes. Perquè alguns dels primers que se'm van acudir per la mecànica, van rebre després

⁴⁷ A la pàgina 64.

⁴⁸ La propietat que, donats dos segments, àrees o volums desiguals, sempre podem ultrapassar un d'aquests a partir de repetir l'altre un nombre finit, prou gran, de vegades. Aquesta propietat apareix subrepticiament en els *Elements* d'Euclides, però el primer que la posa explícitament com a postulat és Arquimedes (és el postulat v de *Sobre l'esfera i el cilindre*).

⁴⁹ Arquimedes usa el terme grec *τρόπον* que vol dir «manera».

demostració per mitjà de la geometria, atès que *la investigació per aquest mètode queda lluny d'una demostració. És més fàcil contruir la demostració després d'haver adquirit amb aquest mètode un cert coneixement dels problemes, que no pas buscar-la sense tenir cap mena de coneixement sobre el tema.*⁵⁰

Clarament, Arquimedes tenia l'esperança que el fet de donar a conèixer el seu mètode seria valuós pels matemàtics que vindrien darrere seu, ja que més endavant diu:

Espero que els meus contemporanis o bé els seus successors, fent-lo servir, aconseguixin de trobar altres teoremes que a mi no se m'hagin ocorregut.

Però aquesta carta es perdé fins que, l'any 1899, fou descoberta en un *palimpsest* que contenia un manuscrit del segle x d'uns cent vuitanta fulls, que havia estat rentat —sortosament no havia estat raspat— i damunt del qual s'havia escrit, pels volts del segle XIII, un *Eucologi*, és a dir, un recull dels oficis del diumenge i de les principals festes de l'any. El text manuscrit del segle x fou desxifrat l'any 1906 per J. L. Heiberg, un historiador de la ciència. Contenia algunes obres d'Arquimedes ja conegudes (*Sobre l'esfera i el cilindre*, *Sobre les espirals*, *Mesura del cercle*, *Sobre l'equilibri dels plans*) i, a més, el text grec de *Sobre els cossos que suren*, que només era conegut per una traducció llatina d'una versió àrab, i dues obres totalment desconegudes, l'*Estomaquió* i el *Mètode*.

3.

Quan Arquimedes parla de «veritables demostracions» i dels «mètodes geomètrics tradicionals»,⁵¹ es refereix al *mètode d'exhaustió* introduït per Èudox, que es fa servir a través de la *reducció a l'absurd*. Hom suposa fals allò que s'ha de demostrar i s'estableix una contradicció amb un resultat ja obtingut o amb un postulat. Per tant, allò que volem demostrar no pot ser fals. És, doncs, vertader, que és el que volíem veure. Però per a fer servir aquest mètode cal conèixer prèviament, com diu Arquimedes, el valor de l'àrea o volum que es busca. Nosaltres, quan volem calcular una àrea o un volum, usem mètodes que ens donen el valor que busquem i, per aconseguir-lo, no ens cal conèixer-lo. En això hi ha una gran diferència amb el mètode de fer *quadratures* dels matemàtics grecs.

Quan el rei li demana un exemple, Arquimedes fa referència al teorema següent. Donada una paràbola, tirem una corda que talla la paràbola en els punts *A* i *B*. Fem la tangent paral·lela a la corda. Sigui *T* el punt de tangència. Unim els extrems de la corda amb el punt de tangència i obtenim el triangle $\triangle ATB$. Bé doncs, l'àrea Π del segment de paràbola *ATB* és igual a $\frac{4}{3}\Delta$, on Δ és l'àrea del triangle $\triangle ATB$.

⁵⁰ La cursiva és nostra.

⁵¹ A la pàgina 64.

Per a provar-ho, Arquimedes suposa que $\Pi > \frac{4}{3}\Delta$ i, usant l'exhaustió —que estableix que «si d'una magnitud en treiem reiteradament més de la meitat amb un nombre finit de passos aconseguirem una magnitud més petita que una de donada per endavant»—, arriba a establir una contradicció. Aleshores, suposa que $\Pi < \frac{4}{3}\Delta$ i arriba també a una contradicció. Atès que Π no és ni més gran ni més petit que $\frac{4}{3}\Delta$, ha de ser igual a $\frac{4}{3}\Delta$, que és el que volíem provar. Evidentment, no podem seguir aquesta línia de raonament si no sabem que el resultat final ha de ser $\frac{4}{3}\Delta$.

Atesa la formació que tenim, se'ns fa una mica difícil copsar el nus d'aquesta metodologia.

Cronologia

Api, Claudi (segles IV–III aC).
 Anníbal (~247–183 aC).
 Apolloni de Perga (Perga ~262 aC–Alexandria ~190 aC).
 Aristarc de Samos (Samos 310–230 aC).
 Aristeu el Vell (segle IV aC).
 Aristòtil (Estagira 384 aC–Chalcis 322 aC).
 Arquimedes (Siracusa 287–212 aC).
 Ciceró Arpino (106–Fornia 43 aC).
 Conó de Samos (Samos 280 aC–Alexandria 220 aC).
 Copèrnic, Nicolau (Torun 1473–Frauenburg 1543).
 Diocles (Caristus 240 aC–? 180 aC).
 Dositeu de Pelusium (segle III aC).
 Eratòstenes de Cirene (Cirene 276 aC–Alexandria 194 aC).
 Euclides (? ~325 aC–Alexandria ~265 aC).
 Èudox de Cnidos (Cnidos ~408–355 aC).
 Heró d'Alexandria (Alexandria? 10–Alexandria 75 dC).
 Hieró II de Siracusa (Siracusa ~ 306–215 aC).
 Homer (Quios, segle VIII aC?).
 Kepler, Johannes (Württemberg 1571–Ratisbona 1630).
 Marcel, Marc Claudi (Roma ~270 –Venúcia, ~208 aC).
 Menecm (Alopeconnesus ~380 aC– ? ~320 aC).
 Nicòmac de Gerasa (Síria romana (avui Jarash) ~60–120 dC).
 Pitàgores de Samos (Samos ~569–Crotona ~500 aC).
 Plató (Atenes 427–347 aC).
 Procle (Constantinoble (avui Istanbul) 411–Atenes 485).
 Ptolemeu, Claudi (? ~85– Alexandria ~165).
 Ptolemeu III *Evergetes* (Egipte ~280–221 aC).
 Rényi, Alfréd (Budapest, 1921–1970).
 Tales de Milet (Milet ~ 625–~ 547 aC).

Obres d'Arquimedes citades, i les seves edicions modernes

Sobre l'esfera i el cilindre, 2 llibres. [5, 1-90]; [4, I, 1-124]; [20, II, 23-94].

Mesura del cercle. [5, 91-98]; [4, I, 125-134]; [20, II, 94-100].

Sobre conoides i esferoides, 2 llibres. [5, 99-150]; [4, I, 135-236]; [20, II, 94-147].

Sobre les espirals. [5, 151-188]; [4, I, 237-299]; [20, II, 147-183].

De l'equilibri dels plans o dels seus centres de gravetat, 2 llibres. [5, 189-220]; [4, I, 300-350]; [20, II, 183-204].

L'Arenari. [5, 221-232]; [4, I, 351-374]; [20, II, 204-217]. Hi ha també una traducció castellana a [9, vol. 4, 2-17].

De la quadratura de la paràbola. [5, 233-252]; [4, II, 375-404]; [20, II, 220-238].

Sobre els cossos que suren, 2 llibres. [5, 253-300]; [4, II, 405-463]; [20, II, 238-260].

El llibre dels lemes. [5, 301-318]; [4, II, 521-542].

El problema dels bous. [5, 319-326]; [4, II, 543-547]; [20, II, 218-219].

El mètode. [5, Apèndix]; [4, II, 475-519]; [20, II, 261-297]. Hi ha una edició catalana a [18, 136-199], que correspon a l'edició castellana dels mateixos autors [17, 59-124]. Una altra edició castellana és la de [19, 33-95].

Estomaquíó. [4, II, 465-473].

Referències

- [1] BABINI, J. *Arquímedes*. Buenos Aires: Espasa Calpe, col·lecció Austral, 1948. [És un text molt interessant i molt complet. Potser és un xic antiquat.]
- [2] BUTTERFIELD, H. *The Origins of Modern Science*. Londres: G. Bell & Sons, 1956.
- [3] BUTTERFIELD, H. *Los orígenes de la ciencia moderna*. [Traducció castellana de l'anterior, a càrrec de Luís Castro. Madrid: Taurus Ediciones, 1958. Reimprès el 1971 i 1982.]
- [4] EECKE, P. VER. *Les œuvres complètes d'Archimède*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1960. 2 volums.
- [5] HEATH, sir TH. *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press, 1897. [Reeditat el 1912, i reimprès a Nova York: Dover Publications, Inc., 2002.]
- [6] HOMER. *La Ilíada*. [Traducció catalana de Miquel Peix. Barcelona: Alpha, 1978.]
- [7] HOMER. *L'Odissea*. [Traducció catalana de Carles Riba. Reeditat per Edicions La Magrana en dos volums. Barcelona: 1993.]

- [8] NEWMAN, J. R. *The World of Mathematics*. Nova York: Simon and Schuster, Inc., 1956.
- [9] NEWMAN, J. R. *Sigma [Sigma]. El Mundo de las Matemáticas*. [Traducció castellana de l'anterior, a cura de Manuel Sacristán. 6 volums. Barcelona: Ediciones Grijalbo, 1968.]
- [10] PLA I CARRERA, J. «Arquimedes i Descartes; el mètode com un canvi de llenguatge». *Butlletí de la SCM*, vol. 13, núm. 2, (1998), 35-84.
- [11] RÉNYI, A. *Dialógusok a matematikáról*. Budapest: Akadémiai Kaidó, 1965.
- [12] RÉNYI, A. *Dialogues on Mathematics*. [Traducció anglesa de l'anterior, a càrrec de l'autor. San Francisco: Holden-Day, 1967.]
- [13] STEIN, SH. *What Did He Do Besides Cry Eureka?* Washington DC: Mathematical Association of America, 1999. [Un repàs matemàtic, en termes actuals, dels resultats més importants de les obres d'Arquimedes.]
- [14] THUILLIER, P. *D'Archimède à Einstein. Les faces cachées de l'invention scientifique*. París: Librairie Arthème Fayard, 1988.
- [15] THUILLIER, P. *De Arquímedes a Einstein. Las caras ocultas de la invención científica*. [Traducció castellana de l'anterior, a càrrec d'Amalia Correa. Madrid: Alianza Editorial, 1990.]
- [16] TORIJA HERRERA, R. *Arquímedes. Alrededor del círculo*. Madrid: Nivola, 1999. [Molt adequat com a primera aproximació, a nivell elemental, a la figura i l'obra d'Arquimedes.]
- [17] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.; VAQUÉ JORDI, J. *Arquímedes. El método relativo a los teoremas mecánicos*. Barcelona: Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona i Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, Col·lecció «Clásicos de las ciencias», vol. 4, 1993.
- [18] GONZÁLEZ URBANEJA, P. M.; VAQUÉ JORDI, J. *Arquímedes. Mètode*. Barcelona: Fundació Bernat Metge, 1997.
- [19] VEGA, L. *Arquímedes: El método*. Madrid: Alianza Editorial, Col. «El Libro de Bolsillo», núm. 1.151, 1986.
- [20] VERA, F. *Los científicos griegos*. Madrid: Aguilar Editorial, 1970. 2 volums.

DEPARTAMENT DE Lògica, Història i Filosofia de la Ciència
 FACULTAT DE MATEMÀTIQUES
 UNIVERSITAT DE BARCELONA
 GRAN VIA DE LES CORTS CATALANES, 585
 08007 BARCELONA
 jmfont@ub.edu
 jpla@ub.edu