

## Com comptar esferes mirant un mirall\*

IGNASI MUNDET I RIERA

### 1 Introducció

Un dels descobriments més sorprenents a la geometria els últims deu anys ha estat el fenomen anomenat *mirror symmetry*. Aquest descobriment ha permès resoldre preguntes que semblaven completament fora de l'abast del coneixement actual i alhora, tot suggerint noves preguntes i problemes, ens ha fet descobrir paisatges de la geometria fins ara completament insospitats. Curiosament, un fenomen de tanta rellevància matemàtica com aquest ha estat descobert per físics teòrics.

L'exemple més clar de problema clàssic que s'ha resolt gràcies a la *mirror symmetry* i a les tècniques que s'han desenvolupat per mirar d'entendre-la és el de comptar corbes racionals en certes varietats algebraïques. La resposta que dóna la *mirror symmetry* a aquest problema és la següent: en molts casos, comptar corbes racionals és equivalent a estudiar certs objectes geomètrics d'una natura (almenys aparentment) molt diferent de la de les corbes racionals i alhora força més senzills d'estudiar. D'aquesta manera queda resolt el problema de comptar corbes racionals, però al mateix temps n'apareix un de molt més misteriós: el d'entendre per què objectes d'una natura tan diferent estan relacionats d'una manera tan estreta.

El fet que un fenomen geomètric tan interessant com la *mirror symmetry* hagi estat descobert per físics teòrics no és ni de molt un cas aïllat dins la geometria dels últims vint anys. Més aviat el contrari! Moltes de les idees més profundes aparegudes últimament a la geometria tenen el seu origen a la física teòrica, i sovint han estat (al menys en part) proposades per físics. A part de la *mirror symmetry*, l'estudi de varietats diferenciables de dimensió quatre o

---

\* Conferència pronunciada a la Quarta Trobada Matemàtica de la Societat Catalana de Matemàtiques, que va tenir lloc a la seu de l'Escola Universitària Politècnica de Vilanova i la Geltrú l'abril de 2001.

dels nusos són exemples de qüestions que s'han enriquit enormement amb l'aportació d'idees físiques.

L'explicació d'aquest fet no és pas que els físics s'avorreixin i hagin decidit passar l'estona fent geometria. És més aviat que molts dels objectes que interessen als geòmetres, tot i ser abstractes i aparentment allunyats de la nostra realitat física (per exemple, les corbes racionals) apareixen d'una manera natural a la física teòrica. D'aquesta manera es dona la situació que sovint físics i matemàtics es miren els mateixos objectes abstractes però amb objectius, intuïcions i punts de vista diferents. I és aquesta diversitat de perspectives la que propicia l'abundor de resultats profunds de què parlàvem.

Per ser exactes, doncs, caldria dir que la *mirror symmetry* és un concepte físic que fa referència a objectes geomètrics. El repte dels matemàtics és d'entendre exactament les implicacions matemàtiques de la *mirror symmetry*. Ni aquest problema ni el de comprendre físicament la *mirror symmetry* estan (ni de bon tros!) completament resolts avui dia.

L'objectiu d'aquest article és motivar el problema del càlcul de nombres de corbes racionals i explicar quina mena de resposta dona la *mirror symmetry* a aquest problema. Hem intentat començar l'explicació a un nivell raonablement baix, sense pressuposar gaires coneixements per part del lector. Això ens ha obligat a simplificar en alguns casos els conceptes. Esperem que tot i les simplificacions el lector pugui fer-se una idea prou realista del bocí de la *mirror symmetry* que mirarem d'explicar.

Agraïxo a en Jaume Amorós les seves correccions i comentaris sobre aquest article.

## 2 Les 27 rectes de les superfícies cúbiques

### 2.1 Enunciat del problema

Comencem recordant un problema clàssic de la geometria algebraica.

1 PROBLEMA Demostreu que qualsevol cúbica llisa dins  $\mathbb{P}^3$  conté exactament 27 rectes.

Abans de veure com demostrar el que se'ns demana, fem uns quants comentaris per aclarir el problema.

- $\mathbb{P}^3$  denota l'espai projectiu de dimensió 3 sobre els complexos;
- una **cúbica dins**  $\mathbb{P}^3$  és el conjunt de punts

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{P}^3$$

que satisfan una equació de la forma

$$P_a(x_0, \dots, x_3) = \sum_{i_0 + \dots + i_3} = 3a_{i_0, \dots, i_3} x_0^{i_0} \cdot \dots \cdot x_3^{i_3} = 0,$$

on almenys un dels coeficients  $a_{i_0, \dots, i_3}$  és diferent de zero ( $P_a$  és llavors un polinomi homogeni de grau 3);

- hi ha 20 quàdruples de naturals  $i_0, \dots, i_3$  que sumen 3; a més, si  $\lambda \neq 0$  és un nombre complex qualsevol, llavors  $P_a(x_0, \dots, x_3)$  i  $\lambda P_a(x_0, \dots, x_3)$  descriuen la mateixa cúbica; per tant, podem parametritzar les cúbiques dins  $\mathbb{P}^3$  amb l'espai projectiu  $\mathbb{P}^{19}$ ;
- el conjunt de coeficients

$$S = \{a = [a_{i_0, \dots, i_3}]\} \subset \mathbb{P}^{19}$$

que descriuen cúbiques singulars (és a dir, no llises) es pot descriure com el conjunt de zeros d'unes certes equacions polinòmiques complexes; per tant  $S \subset \mathbb{P}^{19}$  té codimensió real  $\geq 2$ ;

- llavors  $\mathbb{P}^{19} \setminus S$  és un conjunt connex, i per tant totes les cúbiques llises de  $\mathbb{P}^3$  són difeomorfes;
- però en general dues cúbiques llises de  $\mathbb{P}^3$  no tenen per què ser isomorfes com a varietats algebraiques!<sup>1</sup>

## 2.2 Solució del problema 1

- a. Fixem un polinomi  $P = P_a(x_0, \dots, x_3) \neq 0$  homogeni de grau 3. Sigui  $C = \{P = 0\}$  la cúbica donada per  $P$ . Suposem que  $C$  és llisa.

Hi ha una única aplicació

$$\Pi : \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}$$

lineal i simètrica que satisfà  $P(x) = \Pi(x \otimes x \otimes x)$ . ( $\Pi$  s'anomena la **polarització** de  $P$ .) Observem que

$$\Pi \in (S^3 \mathbb{C}^4)^*.$$

- b. És el mateix donar una recta  $r$  dins  $\mathbb{P}^3$  que donar un subespai  $V = V_r$  de  $\mathbb{C}^4$  de dimensió 2. La inclusió  $\iota_V : V \hookrightarrow \mathbb{C}^4$  indueix una aplicació lineal

$$\iota_V^* : (S^3 \mathbb{C}^4)^* \rightarrow (S^3 V)^*.$$

Llavors, la recta  $r \subset \mathbb{P}^3$  corresponent al subespai  $V$  està continguda dins la cúbica  $\{P = 0\}$  si i només si

$$\iota_V^*(\Pi) = 0 \in (S^3 V)^*.$$

<sup>1</sup> Més endavant justificarem aquesta observació i en donarem un altre exemple. El fet que hi pugui haver famílies de varietats algebraiques llises parametritzades per una base connexa però no isomorfes entre elles és una de les diferències radicals entre la geometria algebraica i la geometria diferencial, i juga un paper clau al fenomen de la *mirror symmetry*. És aquest fet també el que motiva un dels exemples més naturals de *problema de moduli* (vegeu l'article de S. del Baño en aquesta revista basat en la seva xerrada a la Segona Trobada Matemàtica, 1999).

- c. El conjunt de subespais vectorials de  $\mathbb{C}^4$  de dimensió 2 està parametritzat per la Grassmanniana  $G(2, 4)$ , que és una varietat complexa llisa i compacta de dimensió 4. Si associem a cada subespai  $V \in G(2, 4)$  l'espai vectorial  $(S^3V)^*$  obtenim una família  $\mathcal{V}$  d'espais vectorials sobre  $G(2, 4)$ . Això s'anomena un **fibrat vectorial** sobre  $G(2, 4)$ , i es denota

$$\mathcal{V} \rightarrow G(2, 4).$$

Cada un dels espais vectorials  $(S^3V)^*$  té dimensió 4. Es diu llavors que  $\mathcal{V}$  té **rang 4**. Abans hem associat a cada  $V \in G(2, 4)$  un element  $t_V^*(\Pi) \in (S^3V)^*$ . Això ens dóna una **secció**

$$\sigma : G(2, 4) \rightarrow \mathcal{V}$$

del fibrat  $\mathcal{V}$ . Aquesta secció és **holomorfa** (és a dir, complexa).

Pel que hem vist abans, *el nombre de rectes contingudes dins  $C$  és igual al nombre de punts de  $G(2, 4)$  on  $\sigma$  es fa zero.*

- d. Necessitarem el següent resultat de topologia diferencial.

**1 TEOREMA** *Sigui  $F \rightarrow M$  un fibrat vectorial complex sobre una varietat complexa i compacta  $M$ . Suposem que el rang de  $F$  és igual a la dimensió de  $M$ . Sigui  $\sigma : M \rightarrow F$  una secció holomorfa de  $F$ , i suposem que en tot punt  $x$  on  $\sigma(x) = 0$  la diferencial  $d\sigma_x : T_xM \rightarrow F_x$  és exhaustiva (en aquest cas es diu que  $\sigma$  és **transversal a la secció 0**). Llavors*

$$e(F) = \#\{x \in M \mid \sigma(x) = 0\}$$

*és un nombre finit que només depèn de  $F \rightarrow M$  i no de  $\sigma$ .*

El nombre  $e(F)$  s'anomena el **nombre d'Euler** del fibrat  $F$  i es pot calcular amb eines de topologia algebraica.

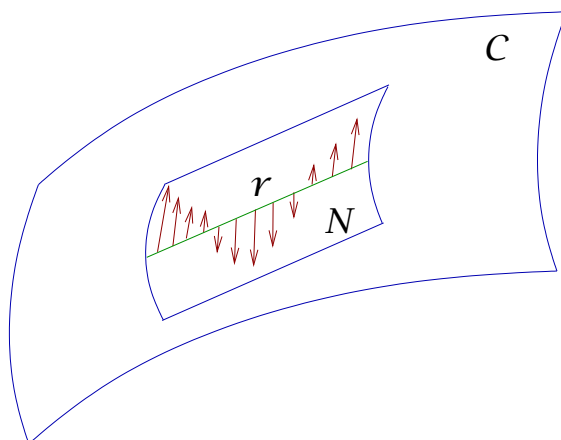
En el cas del fibrat  $\mathcal{V} \rightarrow G(2, 4)$  s'obté el resultat següent:

$$e(\mathcal{V}) = 27.$$

- e. Amb el que hem vist fins ara, només ens cal comprovar que la secció  $\sigma : G(2, 4) \rightarrow \mathcal{V}$  és transversal a la secció 0. Això és equivalent a demostrar que si  $r$  és una recta continguda dins la cúbica  $C$ , llavors no hi ha cap manera de *deformar infinitesimalment*  $r$  dins  $C$ . Les deformacions infinitesimals de  $r \subset C$  vénen donades per les seccions holomorfes del fibrat normal  $N \rightarrow r$ .

Ara bé, es pot calcular que el fibrat normal de qualsevol recta dins  $C$  té nombre d'Euler negatiu. Per tant no pot tenir seccions holomorfes (p. e., pel teorema que hem vist abans)! Amb això acabem la demostració.<sup>2</sup>

<sup>2</sup> L'única cosa que no hem explicat és com calcular el nombre d'Euler del fibrat  $\mathcal{V}$ . Una manera de fer-ho sense usar topologia algebraica és la següent. Hem demostrat que el nombre d'Euler de  $\mathcal{V}$  és igual al nombre de rectes contingudes en una cúbica llisa *arbitrària*. Per tant, podem prendre una cúbica llisa que ens sembli prou senzilla i mirar de trobar-hi totes les rectes. Un exemple raonable és  $x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ .



### 3 Corbes racionals dins la superfície cúbica

#### 3.1 Generalitzem el problema

En aquesta secció explicarem què és corba racional i estudiarem la generalització natural del problema de les 27 rectes dins la cúbica: en lloc de comptar rectes comptarem corbes racionals.

- a. Una manera de mirar-nos les rectes a  $\mathbb{P}^3$  és imatges d'aplicacions  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  de la forma

$$\phi([y : z]) = [\phi_0(y, z) : \phi_1(y, z) : \phi_2(y, z) : \phi_3(y, z)],$$

on cada  $\phi_i$  és un polinomi homogeni de grau 1.

- b. Observem, però, que si prenem un automorfisme  $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  llavors  $\phi \circ \psi$  té per imatge la mateixa recta que  $\phi$ .

Tot automorfisme algebraic  $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  és<sup>3</sup> de la forma

$$\psi([y : z]) = [ay + bz : cy + dz],$$

on  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  satisfan  $ac - bd = 1$ . (Exercici: demostreu-ho!) De fet, també són d'aquesta forma tots els automorfismes holomorfs de  $\mathbb{P}^1$ , essencialment perquè tota funció meromorfa a  $\mathbb{P}^1$  es pot expressar com el quocient de dos polinomis. És a dir, un automorfisme holomorf de  $\mathbb{P}^1$  és necessàriament algebraic. És clar, per altra banda, que d'automorfismes de  $\mathbb{P}^1$  com a varietat diferenciable n'hi ha molts més a part dels algebraics!

Llavors, si  $\psi$  és un automorfisme algebraic de  $\mathbb{P}^1$  i les coordenades d'una aplicació  $\phi = [\phi_0 : \dots : \phi_3]$  són polinomis de grau 1, el mateix passa amb

<sup>3</sup> Podeu prendre com a definició d'automorfisme algebraic de  $\mathbb{P}^1$  tota aplicació  $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  donada per polinomis per la qual n'existeix una altra, diguem-ne  $\psi' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , que satisfà  $\psi' \psi = \text{Id}$ .

$\phi \circ \psi$ . Observem una altra conseqüència d'aquest fet: la varietat formada pels automorfismes de  $\mathbb{P}^1$  té dimensió 3.

- c. Anomenarem **corba racional de grau  $d$  dins  $\mathbb{P}^3$**  qualsevol aplicació  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  que sigui de la forma

$$\phi([y : z]) = [\phi_0(y, z) : \phi_1(y, z) : \phi_2(y, z) : \phi_3(y, z)],$$

essent cada  $\phi_i$  un polinomi homogeni de grau  $d$ . Identificarem dues corbes racionals  $\phi$  i  $\phi'$  quan existeixi un automorfisme  $\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $\phi' = \phi \circ \psi$ .<sup>4</sup>

- d. Ens agradaria molt trobar exemples de varietats que tinguin una quantitat finita de corbes racionals de grau  $d > 1$ , de la mateixa manera que les cúbiques llises dins  $\mathbb{P}^3$  tenen 27 rectes. Sovint, però, ens trobarem amb el problema següent.

Si  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  és una corba racional de grau  $d$  i  $\phi' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  és de la forma

$$\phi' = [\phi'_0 : \phi'_1],$$

amb  $\phi'_0, \phi'_1$  polinomis homogenis de grau  $d'$ , llavors  $\phi \circ \phi' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  és una corba racional de grau  $d'd$ . Prenent  $d' \geq 3$  i considerant totes les  $\phi'$  de grau  $d'$ , obtenim una quantitat infinita de corbes racionals de grau  $d'd$  a  $\mathbb{P}^3$ , totes diferents.<sup>5 6</sup>

Per evitar aquest fenomen, definim les **corbes racionals injectives** com aquelles  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  que no es poden factoritzar  $\phi = \phi'' \circ \phi'$  amb  $\phi' : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grau  $\geq 1$ . (Exercici: demostreu que les rectes a  $\mathbb{P}^3$  estan en bijecció amb les corbes racionals injectives de grau 1.)

- e. Observem que totes aquestes definicions tenen sentit substituint  $\mathbb{P}^3$  per qualsevol altre espai projectiu  $\mathbb{P}^N$ .
- f. Fetes aquestes definicions, ja podem proposar una generalització natural del problema de les 27 rectes.

2 PROBLEMA Quantes corbes racionals injectives de grau  $d$  conté una cúbica llisa dins  $\mathbb{P}^3$ ?

OBSERVACIÓ Topològicament les corbes que estem comptant són les imatges de certes aplicacions de l'esfera a la cúbica (això explica un tros del títol).

<sup>4</sup> Si volguéssim ser rigorosos, quan parléssim de corbes racionals hi hauríem d'afegir l'adjectiu *irreductible*. Per exemple, la corba  $\{x_0x_1 = 0\} \subset \mathbb{P}^2$  és una corba racional (segons la definició habitual de la geometria algebraica) que no és la imatge d'una aplicació polinomial  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  (per què?), i per tant no és irreductible. Tot i que nosaltres obviarem aquest detall, és important tenir present que les corbes racionals no irreductibles juguen un paper fonamental a la *mirror symmetry* (concretament als invariants de Gromov-Witten, dels quals parlarem més endavant).

<sup>5</sup> Quan diem que són corbes diferents volem dir que no es poden identificar usant l'acció dels automorfismes de  $\mathbb{P}^1$ ; per altra banda, totes les aplicacions  $\phi \circ \phi'$  construïdes d'aquesta manera tenen òbviament la mateixa imatge.

<sup>6</sup> Amb aquesta nota volem tranquil·litzar el lector angoixat comproment-nos formalment a no tornar a posar quatre notes al peu d'una mateixa pàgina.

### 3.2 Cúbiques i explosions

El resultat següent (del qual podeu trobar la demostració al llibre de Griffiths i Harris *Principles of Algebraic Geometry*) ens permet reduir el problema d'estudiar les corbes racionals a la cúbica dins  $\mathbb{P}^3$  a estudiar corbes racionals a  $\mathbb{P}^2$ .

2 TEOREMA *Tota cúbica llisa de  $\mathbb{P}^3$  es pot obtenir seguint els passos següents:*

- prenem 6 punts  $p_1, \dots, p_6$  a  $\mathbb{P}^2$  que no estiguin continguts a cap cònica i de manera que no n'hi hagi tres en línia;
- explotem  $\mathbb{P}^2$  als punts  $p_1, \dots, p_6$ , i així obtenim una superfície  $\pi : C \rightarrow \mathbb{P}^2$ ;
- prenem la inclusió  $C \hookrightarrow \mathbb{P}^3$  donada pel sistema lineal format per les cúbiques de  $\mathbb{P}^2$  que passen pels punts  $p_1, \dots, p_6$ .

Recordem què vol dir explotar (*blow-up* en anglès) una superfície complexa en un punt. Diguem primer que es tracta d'una transformació local. Per tant, com que localment tota superfície és isomorfa a  $\mathbb{C}^2$ , és suficient descriure l'explosió  $\widehat{\mathbb{C}^2}$  de  $\mathbb{C}^2$  a l'origen  $(0, 0)$ . Identificant  $\mathbb{P}^1$  amb el conjunt de rectes de  $\mathbb{C}^2$  que passen per  $(0, 0)$ ,

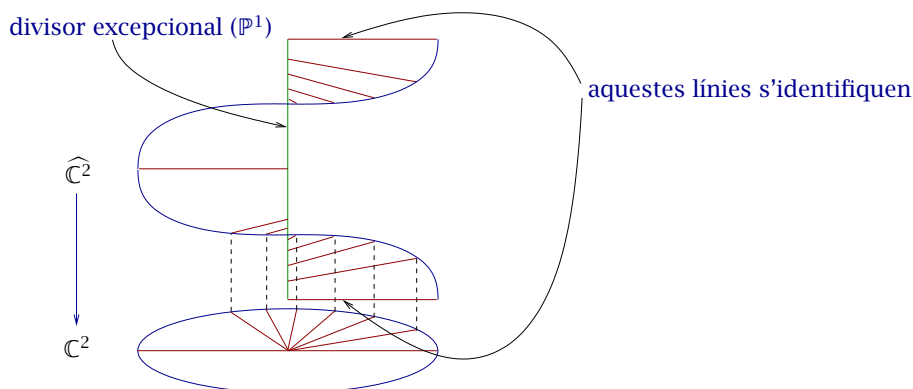
$$\widehat{\mathbb{C}^2} = \{(x, r) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid x \in r\}.$$

El divisor excepcional és per definició  $\{(0, r) \mid r \in \mathbb{P}^1\} \simeq \mathbb{P}^1$ . Observem finalment que tenim una projecció  $\pi_0 : \widehat{\mathbb{C}^2} \rightarrow \mathbb{C}^2$  definida com  $(x, r) \mapsto x$  que dóna un isomorfisme entre  $\pi_0^{-1}(\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0))$  i  $\mathbb{C}^2 \setminus (0, 0)$ .

Assignant a cada corba racional  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow C \subset \mathbb{P}^3$  l'aplicació  $\pi \circ \phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  obtenim una bijecció entre les corbes racionals (injectives) de  $C$  i les de  $\mathbb{P}^2$ . Si  $\phi(\mathbb{P}^1)$  és un divisor excepcional, llavors  $\pi \circ \phi(\mathbb{P}^1) = \{p_j\}$  té grau 0. En general,

$$\text{grau}(\phi) = 3\text{grau}(\pi \circ \phi) - \#(\pi \circ \phi(\mathbb{P}^1) \cap \{p_1, \dots, p_6\}).$$

L'explosió  $\widehat{\mathbb{C}^2}$  de  $\mathbb{C}^2$  a  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  té aquest aspecte:



### 3.3 Algunes conseqüències del teorema

- a. Les 27 rectes de  $C$  són les següents:
- els 6 divisors excepcionals;
  - les preimatges  $\pi^{-1}(r_{ij})$  de cada una de les 15 rectes que passen per dos dels punts  $p_1, \dots, p_6$ ;
  - les preimatges  $\pi^{-1}(c_i)$  de cada una de les còniques que passen per tots els punts  $p_1, \dots, p_6$  llevat d'un.
- b. Podem deduir del punt a les relacions d'incidència entre les 27 rectes. En particular, no només totes les cúbiques llises dins  $\mathbb{P}^3$  tenen el mateix nombre de rectes: també les relacions d'incidència entre elles són sempre les mateixes.
- c. Usant que tot automorfisme de  $\mathbb{P}^2$  ve donat per una transformació lineal de  $\mathbb{C}^3$ , deduïm que existeixen famílies de cúbiques llises dins  $\mathbb{P}^3$  parametritzades per una bola a  $\mathbb{C}^2$ , on no hi ha cap parell de cúbiques que siguin isomorfes com a varietats algebraiques.
- d. Qualsevol cúbica llisa  $C$  dins  $\mathbb{P}^3$  conté infinites corbes racionals injectives de grau  $d$  si  $d > 1$ . Per exemple,
- qualsevol recta a  $\mathbb{P}^2$  que passi per exactament un dels punts  $p_1, \dots, p_6$  té per preimatge a  $C$  una corba racional de grau 2;
  - qualsevol recta a  $\mathbb{P}^2$  que no passi per cap dels punts  $p_1, \dots, p_6$  té per preimatge a  $C$  una corba racional de grau 3;
  - qualsevol cònica a  $\mathbb{P}^2$  que passi per exactament dos dels punts  $p_1, \dots, p_6$  té per preimatge a  $C$  una corba racional de grau 4;
  - etc.

I amb això queda contestada la pregunta que ens havíem fet en el Problema 2. Estudiar les corbes racionals injectives de grau  $d > 1$  en una cúbica llisa de  $\mathbb{P}^3$ , però, pot ser molt interessant; per exemple, observant que es poden parametritzar amb varietats algebraiques, mirant de compactificar aquestes varietats, estudiant-ne la topologia...

## 4 Corbes racionals dins la quintica dins $\mathbb{P}^4$

### 4.1

Davant de la resposta obtinguda al problema 2, és natural plantejar-se la qüestió següent.

3 PROBLEMA ¿Hi ha alguna família de varietats algebraiques llises senzilles (per exemple, hipersuperfícies dins un  $\mathbb{P}^N$ ) dins les quals sigui raonable esperar trobar una quantitat finita de corbes racionals injectives de grau  $d$  per cada  $d \geq 0$ ?



RESPOSTA D'hipersuperfícies amb aquesta propietat només pot haver-hi les quintiques dins  $\mathbb{P}^4$ .

Justificarem aquesta resposta amb un argument heurístic.

- Recordem que una **quintica dins**  $\mathbb{P}^4$  és el conjunt de punts

$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4] \in \mathbb{P}^4$$

que satisfan una equació de la forma  $P_b(x_0, \dots, x_4) = 0$ , on  $P_b$  és un polinomi homogeni de grau 5;

- una corba racional  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^4$  de grau  $d \geq 0$  ve descrita per 5 polinomis homogenis  $\phi_0, \dots, \phi_4$  de grau  $d$  en 2 variables. Per tant, a  $\phi$  hi ha  $5(d+1)$  coeficients. A més, si multipliquem tots els  $\phi_0, \dots, \phi_4$  per un mateix  $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ , o si posem  $\phi$  amb un automorfisme de  $\mathbb{P}^1$ , llavors obtenim la mateixa corba racional. És a dir, la dimensió de l'espai de corbes racionals de grau  $d$  a  $\mathbb{P}^4$  és

$$5(d+1) - (1+3) = 5d+1;$$

- per altra banda, una corba  $\phi$  de grau  $d$  donada pels polinomis  $\phi_0, \dots, \phi_4$  està inclosa dins la quintica

$$\{P_b = 0\}$$

si i només si el polinomi

$$P_b(\phi_0(y, z), \dots, \phi_4(y, z)),$$

que és de grau  $5d$  i en 2 variables (i per tant té  $5d+1$  coeficients), és idènticament 0. Com que un polinomi és idènticament zero si cada un dels seus coeficients és zero, resulta que la condició

$$\phi(\mathbb{P}^1) \subset \{P_b = 0\}$$

està donada per  $5d+1$  equacions, és a dir, *tantes equacions com la dimensió de l'espai de corbes racionals!*

## 4.2

Aquest argument fa raonable esperar el resultat següent, conjeurat per Clemens els anys vuitanta del segle passat.

CONJECTURA (CLEMENS) Si els coeficients  $b = (b_{i_0, \dots, i_4})$  són genèrics, llavors  $\{P_b = 0\}$  és una quintica llisa dins  $\mathbb{P}^4$  que conté una quantitat finita de corbes racionals injectives de grau  $d$  per cada  $d > 0$ .

Val a dir que això és una versió simplificada de la conjectura de Clemens. Aquesta conjectura segueix oberta avui dia, fins i tot la versió més senzilla que acabem d'escriure. Sí que es sap en canvi que la conjectura és certa per a  $d \leq 24$ . Ara bé, si donat un  $d \in \mathbb{N}$  som capaços de demostrar que una quintica genèrica dins  $\mathbb{P}^4$  conté un quantitat finita de corbes racionals injectives de grau  $d$ , mirar de calcular-ne el nombre és una temptació massa forta per poder-nos-en estar...

4 PROBLEMA Suposant que la conjectura de Clemens és certa, ¿quantes corbes racionals injectives de grau  $d$  hi ha dins una quintica genèrica llisa de  $\mathbb{P}^4$ ?

### 4.3 Què se'n sabia a principis dels noranta?

Realment, no massa cosa! Només s'havia resolt el problema completament per  $d = 1, 2$  (sí que se sabia, però, que la conjectura de Clemens és certa per tot  $d \leq 7$ ).

- **Schubert** (1885): Una quintica genèrica conté 2.875 corbes racionals injectives de grau 1 (és a dir, rectes).<sup>7</sup>
- **Katz** (1986): Una quintica genèrica conté 609.250 corbes racionals injectives de grau 2 (és a dir, còniques).

## 5 Les prediccions de la Mirror Symmetry

### 5.1 Una bona sorpresa!

Davant del que se sabia a principis del 90 sobre el nombre de corbes racionals a la quintica, és fàcil d'imaginar-se la sorpresa que va ser l'aparició dels resultats següents.

- **Candelas, de la Ossa, Green, Parkes** [3] (1991) donen una fórmula que permet calcular el nombre virtual  $N_d^{virt}$  de corbes racionals de qualsevol grau  $d$  en una quintica qualsevol; justifiquen la seva fórmula amb arguments de física teòrica i proposen una relació entre el nombre  $N_d$  de corbes racionals injectives de grau  $d$  en una quintica genèrica i  $N_d^{virt}$ .

---

<sup>7</sup> El fet que el resultat es refereixi a quintiques genèriques és important. A diferència del que passa amb les cúbiques a  $\mathbb{P}^3$ , en el cas de les quintiques només podem afirmar que dues quintiques llises genèriques tenen el mateix nombre de rectes. Una manera de demostrar-ho és seguint l'esquema que hem usat per estudiar les rectes dins una cúbica a  $\mathbb{P}^3$ , associant a cada quintica  $Q$  una secció  $\sigma_Q$  d'un fibrat sobre la Grassmanniana  $G(2, 5)$ . El problema és que  $\sigma_Q$  només és transversa a la secció zero quan  $Q$  és genèrica. En efecte, el fibrat normal a una recta dins  $Q$  té rang 2 i grau  $-2$ , i només en una situació genèrica (quan és  $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ ) és un fibrat sense seccions.

- **Aspinwall, Morrison** [1] (1993) justifiquen físicament la relació entre  $N_d$  i  $N_d^{virt}$ .

## 5.2 Els resultats de [3]

Per a descriure aquests resultats és convenient introduir una mica de notació.

- Definim primer la funció generatriu

$$F(t) := \frac{5}{6}t^3 + \sum_{d \geq 1} N_d^{virt} e^{dt},$$

i observem que si coneixem els coeficients de Taylor de  $F(t)$  llavors podem calcular el valor de  $N_d^{virt}$  per tot  $d$ ;

- l'expressió donada a [3] per  $F(t)$  fa servir unes funcions auxiliars  $\psi_0, \dots, \psi_3$  definides de la manera següent:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(1 + 5\epsilon)(2 + 5\epsilon) \dots (5n + 5\epsilon)}{[(1 + \epsilon)(2 + \epsilon) \dots (n + \epsilon)]^5} z^{n+\epsilon} = \sum_{i=0}^3 \psi_i(z) \epsilon^i,$$

on  $\epsilon^4 = 0$  i  $z^{n+\epsilon}$  s'interpreta com  $e^{\log z(n+\epsilon)}$  (en particular les funcions  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  són multivaluades).

Observem que, tal com estant descrites les funcions  $\psi_i$ , podem calcular-ne (això sí, fent una colla d'operacions) els coeficients de Taylor. Però més que l'expressió explícita d'aquestes funcions, ens interessa remarcar el fet següent (que proposem demostrar com a exercici).

**Molt important:** les funcions  $\psi_0, \dots, \psi_3$  són solucions de l'equació diferencial

$$\left[ \left( z \frac{d}{dz} \right)^4 - 5z \prod_{j=1}^4 \left( 5z \frac{d}{dz} + j \right) \right] \psi(z) = 0. \quad (1)$$

El resultat donat a [3] és la relació següent entre  $F$  i les  $\psi_i$ :

$$F \left( \frac{\psi_1}{\psi_0} \right) = \frac{5}{2} \frac{\psi_1 \psi_2 - \psi_0 \psi_3}{\psi_0^2}. \quad (2)$$

I això, utilitzant el teorema de la funció implícita, permet calcular tots els  $N_d^{virt}$ .

### 5.3 El resultat d'[1]

Es té la següent relació entre els nombres  $N_d^{virt}$  i  $N_d$ :

$$N_d^{virt} := \sum_{k|d} \frac{1}{k^3} N_{d/k}.$$

Combinant aquesta fórmula amb (2) podem calcular tots els  $N_d$ , és a dir, el nombre de corbes racionals injectives de grau  $d$  dins una quintica genèrica!

### 5.4 Comentaris

Abans de continuar, fem alguns comentaris sobre aquests resultats.

- Primerament, més que un comentari una pregunta: què vol dir el nombre virtual de corbes racionals dins una varietat? (Sabem què és el nombre de corbes racionals dins una varietat, i en el cas de la quintica genèrica sabem que n'hi ha infinites.) Una observació important sobre aquests nombres virtuals: si els calculem usant la fórmula de [3], ens trobem que són nombres racionals, però no necessàriament enters positius.
- Els primers valors que s'obtenen usant [3] i [1] són

$d$	$N_d$
1	2875
2	609250
3	317206375
4	242467530000
5	229305888887625

Els resultats quan  $d = 1, 2$  coincideixen amb els que ja se sabien. El cas  $d = 3$  va ser comprovat per Ellingsrud i Strømme (1992) i el cas  $d = 4$  per Kontsevich (1995).

- Hem vist com a [3] s'expressa la funció generatriu  $F(t)$  en termes de solucions d'una equació diferencial. És raonable que els nombres  $N_d$  satisfacin alguna relació de recurrència, i és un fet general que les relacions de recurrència satisfetes pels elements d'una successió es tradueixen que la seva funció generatriu satisfà certes equacions diferencials. El que és molt sorprenent és que *l'equació diferencial satisfeta per les funcions  $\psi_0, \dots, \psi_3$  té una interpretació geomètrica molt concreta.*

A la resta d'aquest article farem el següent: primer explicarem què vol dir el nombre virtual de corbes racionals; després explicarem la interpretació geomètrica de l'equació diferencial satisfeta per les funcions  $\psi_i$ , i finalment direm algunes paraules sobre el context dins el qual es van fer les prediccions de [3] (la *mirror symmetry*).

## 6 Els nombres $N_d^{virt}$

En aquesta secció explicarem què vol dir el nombre virtual de corbes racionals dins una varietat. Aquests nombres són un cas particular dels anomenats invariants de Gromov–Witten, que es poden definir en dos contextos diferents. L'un és el de la geometria algebraica, concretament el de les varietats llises i projectives sobre un cos de característica zero i algebraicament tancat. L'altre és el de les varietats simplèctiques compactes.<sup>8</sup> La intersecció d'aquests dos contextos és el de les varietats projectives definides sobre els complexos (per exemple, les quintiques a  $\mathbb{P}^4$ ); en aquesta situació les dues possibles definicions dels invariants de Gromov–Witten coincideixen.

Definir els invariants de Gromov–Witten és una tasca bastant tècnica, i nosaltres ens limitarem a explicar-ne les idees bàsiques sense entrar als detalls. Farem servir la definició simplèctica que, encara que fa servir varietats de dimensió infinita, ens sembla més senzilla d'explicar que no pas l'algebraica.

- a. Sigui  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^4$  una quintica llisa *qualsevol*. Podem pensar les estructures complexes a  $\mathbb{P}^1$  i  $\mathcal{Q}$  com endomorfismes  $j \in \text{End}(T\mathbb{P}^1)$  i  $J \in \text{End}(T\mathcal{Q})$  tals que  $j^2 = -\text{Id}$  i  $J^2 = -\text{Id}$ .
- b. Considerem el conjunt de totes les aplicacions llises  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{Q}$  tals que

$$f_*[\mathbb{P}^1] = d \in \mathbb{Z} \simeq H_2(\mathcal{Q}; \mathbb{Z}).$$

Identificarem dos elements  $f$  i  $f'$  d'aquest conjunt quan existeixi un automorfisme  $\psi$  de  $\mathbb{P}^1$  tal que  $f' = f \circ \psi$ . Denotem  $\mathcal{B}_d \subset \{f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{Q}\} / \sim$  el conjunt de les classes d'equivalència d'aquestes aplicacions. Sigui  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_d$  el fibrat vectorial que sobre  $f \in \mathcal{B}_d$  té per fibra

$$\mathcal{E}_f = \{\alpha : \Omega^0(T\mathbb{P}^1) \rightarrow \Omega^0(f^*T\mathcal{Q}) \mid \alpha \circ j = -J \circ \alpha\}.$$

Podem pensar  $\mathcal{B}_d$  com una varietat de dimensió infinita llisa i  $\mathcal{E}$  com un fibrat vectorial de rang infinit.

- c. Considerem la secció  $\sigma : \mathcal{B}_d \rightarrow \mathcal{E}$  definida com  $\sigma(f) = df \circ j - J \circ df \in \mathcal{E}_f$ . Llavors es pot demostrar que

$$\sigma^{-1}(0) = \{\text{corbes racionals } \phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathcal{Q} \text{ de grau } d\}.$$

(Exercici: feu-ho! Podeu usar el fet següent: tota funció meromorfa a  $\mathbb{P}^1$  es pot expressar com el quocient de dos polinomis.)<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Anomenem varietat simplèctica tot parell de la forma  $(M, \omega)$ , on  $M$  és una varietat diferenciable (llisa) i  $\omega \in \Omega^2(M)$  és una 2-forma (anomenada forma simplèctica) que és tancada (és a dir,  $d\omega = 0$ ) i no degenerada (per a tot  $x \in X$  i  $v \in T_x$  existeix un  $w \in T_x$  tal que  $\omega(v, w) \neq 0$ ). Exercici: (1) demostreu que tota varietat diferenciable orientable de dimensió real 2 admet una forma simplèctica; (2) demostreu que no hi ha varietats simplèctiques de dimensió senar.

<sup>9</sup> Aquest resultat ens diu que, si una aplicació de  $\mathbb{P}^1$  a  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{P}^4$  és holomorfa, llavors és automàticament algebraica. Això és molt gros!... De fet, es pot demostrar un resultat molt més general: si considerem varietats compactes contingudes dins un espai projectiu complex tota

- d. En aquest moment estem en una situació molt semblant a la del problema de les 27 rectes, però amb dues diferències: el nostre fibrat és de dimensió infinita i la secció no és transversa (exercici: demostreu això últim). Abans de dir què fer, parlem una mica del cas de dimensió finita. Tenim el resultat següent.

3 TEOREMA Si  $E \rightarrow B$  és un fibrat vectorial sobre una varietat llisa i compacta (i, per tant, de dimensió finita)  $B$ , i  $s : B \rightarrow E$  n'és una secció qualsevol, llavors es poden trobar seccions  $s' : B \rightarrow E$  tan a prop com es vulgui de  $s$  que són transverses a la secció 0. Si a més  $\dim B = \text{rang } E$ , llavors  $s'$  té un nombre finit de zeros.

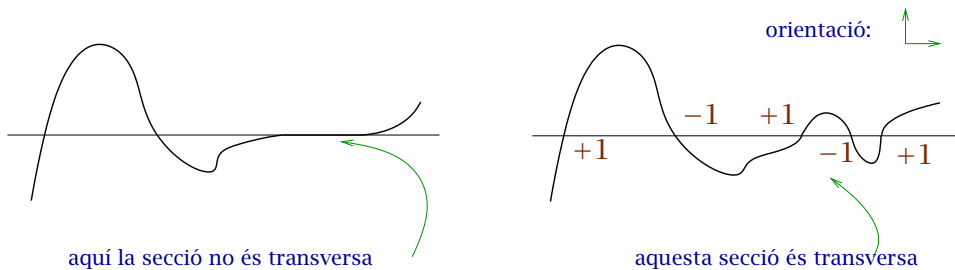
Suposem que  $E \rightarrow B$  està orientat i definim, per a tot  $z \in s'^{-1}(0)$ ,  $\epsilon(z) = 1$  si  $ds'(z) : T_z B \rightarrow E_z$  respecta l'orientació i  $\epsilon(z) = -1$  en cas contrari. Llavors tenim aquest altre resultat.

4 TEOREMA La suma

$$\sum_{z \in s'^{-1}(0)} \epsilon(z)$$

només depèn de  $E \rightarrow B$  i s'anomena el **nombre d'Euler de  $E$** .

(Si  $E \rightarrow B$  és un fibrat complex llavors està orientat canònicament, i  $s'$  és una secció complexa transversa a 0 es té que  $\epsilon(z) = 1$  per tot  $z \in s'^{-1}(0)$ .) La figura següent dona un exemple de secció no transversa i d'una pertorbació seva que sí que ho és.<sup>10</sup>



- e. En el nostre cas, com ja hem dit, tenim un fibrat  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}_d$  de dimensió infinita, i per tant no podem aplicar el resultat anterior directament. A més,

construcció holomorfa que fem amb elles serà de fet algebraica; per exemple, si prenem una varietat compacta dins un espai projectiu complex que localment es pugui expressar com a zeros de funcions holomorfes, llavors aquesta varietat és algebraica, és a dir, es pot veure com el conjunt de zeros d'uns polinomis (això és un teorema de Chow). Exercici: deduiu-ne que tota subvarietat algebraica irreductible de  $\mathbb{P}^n$  és connexa respecte a la topologia usual de  $\mathbb{P}^n$ .

10 Aquí estem fent una mica de trampa, perquè la base d'aquest fibrat és  $\mathbb{R}$ , que no és compacte; per quedar amb la consciència tranquil·la, podem identificar  $-\infty$  amb  $\infty$  i obtenir un cercle, que ja és compacte. Pregunta: i què fem amb el fibrat si prop de  $\infty$  la secció és positiva i prop de  $-\infty$  és negativa? Resposta: una banda de Möbius!

què vol dir que la dimensió d'una varietat coincideix amb el rang d'un fibrat quan els dos són infinit? En general aquestes qüestions no es poden resoldre. Però a la situació que estem considerant nosaltres passen algunes coses especials.

- Per a tot  $f \in \mathcal{B}_d$  tal que  $\sigma(f) = 0$ , la diferencial  $d\sigma_f : T_f\mathcal{B}_d \rightarrow \mathcal{E}_f$  té nucli i conucli de dimensió finita i imatge tancada (és el que s'anomena un operador de Fredholm) i a més

$$\dim \text{Ker}(d\sigma_f) = \dim \text{Coker}(d\sigma_f)$$

(aquesta igualtat en el cas de les aplicacions lineals entre espais vectorials de dimensió finita és equivalent que les dimensions de l'espai de sortida i del d'arribada coincideixin);

- el fibrat determinant

$$\Lambda_{\mathbb{R}}^{\text{top}} \text{Ker}(d\sigma_f) \otimes \Lambda_{\mathbb{R}}^{\text{top}} \text{Coker}(d\sigma_f)^* \rightarrow \sigma'^{-1}(0)$$

admet una trivialització canònica;

- el conjunt  $\sigma^{-1}(0)$  no és compacte,<sup>11</sup> però es pot compactificar d'una manera geomètrica (considerant corbes no irreductibles).

f. Usant aquestes tres propietats es pot demostrar que

- existeixen seccions  $\sigma'$  de  $\mathcal{E}$  tan prop de  $\sigma$  com es vulgui que són transverses a la secció 0 i tals que  $\sigma'^{-1}(0)$  és finit;
- definint, per a cada  $f \in \sigma'^{-1}(0)$ ,  $\epsilon(f) = \text{signe}(\det d\sigma'_f)$ , la suma

$$\sum_{f \in \sigma'^{-1}(0)} \epsilon(f) \tag{3}$$

no depèn de  $\sigma'$  (però sí que depèn de  $\sigma$ ).

Els nombres  $N_d^{\text{virt}}$  es defineixen usant pertorbacions i comptant zeros amb signe, d'una manera semblant a (3) però no exactament. Fixem-nos per exemple que la suma (3) sempre dona un nombre enter, mentre que ja hem observat que els nombres  $N_d^{\text{virt}}$  en general són racionals. Per a definir correctament  $N_d^{\text{virt}}$  cal tenir en compte les simetries d'algunes de les corbes. De fet un model de dimensió finita per  $\mathcal{B}_d$  més adequat que una varietat diferenciable seria un *orbifold* compacte.<sup>12</sup>

<sup>11</sup> Per dir que un conjunt no és compacte hauríem d'haver-hi posat una topologia, cosa que no hem fet amb  $\sigma^{-1}(0)$ ; en lloc de definir-la, donem un exemple de successió de corbes racionals de grau  $d = 2$  que no tenen límit: per a tot  $t \in \mathbb{C}^*$ , sigui  $\phi_t : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$  donada per  $\phi_t([x : y]) = [x^2 : ty^2 : xy]$ ; exercici: estudieu què passa quan  $t \rightarrow 0$ .

<sup>12</sup> Un *orbifold* de dimensió  $n$  és un espai topològic  $X$  que admet un recobriment per oberts  $\{U_i\}$  de manera que per a tot  $i$  existeix un grup finit  $\Gamma_i$  actuant linealment a  $\mathbb{R}^n$ , un obert  $\Gamma_i$ -

## 7 Períodes de varietats algebraiques

En aquesta secció parlarem de la interpretació geomètrica de l'equació diferencial satisfeta per les funcions  $\psi_0, \dots, \psi_3$ .

### 7.1 La descomposició de Hodge

Sigui  $X \subset \mathbb{P}^N$  una subvarietat algebraica llisa i compacta (p. e., una quintica dins  $\mathbb{P}^4$ ). Anem a descriure una manera d'obtenir invariants de  $X$  com a varietat algebraica usant la cohomologia.

- $X$  és un espai topològic  $\implies$  té associats uns grups de cohomologia  $H^k(X; \mathbb{Z})$  per tot  $k \geq 0$ ;
- $X$  és una varietat diferencial  $\implies$  podem calcular  $H^k(X; \mathbb{R}) = H^k(X; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  usant formes diferencials:

$$H^k(X; \mathbb{R}) \simeq \frac{\text{Ker}(d : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X))}{\text{Im}(d : \Omega^{k-1}(X) \rightarrow \Omega^k(X))}$$

(això és el **teorema de Rham**);

- qualsevol mètrica a  $X$  indueix una mètrica a  $\Omega^k(X)$  i permet de definir les formes harmòniques  $\mathcal{H}^k(X)$  com l'ortogonal dins  $\text{Ker}(d : \Omega^k(X) \rightarrow \Omega^{k+1}(X))$  de  $\text{Im}(d : \Omega^{k-1}(X) \rightarrow \Omega^k(X))$ , de manera<sup>13</sup> que

$$H^k(X; \mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^k(X) \subset \Omega^k(X);$$

- $X$  té una estructura complexa  $J \in \text{End}(TX)$  (és aquí on s'usa l'estructura algebraica, reflectida en l'existència d'aquesta  $J$ )  $\implies$  podem definir una acció de  $S^1$  a  $TX$  fent actuar  $e^{i\theta}$  com  $\cos \theta + J \sin \theta$ ; aquesta acció n'indueix una altra a  $\Omega^k(X)$ ;
- a  $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{N+1})$  hi ha (mòdul constant) una única mètrica invariant per l'acció de  $U(N+1)$ ; si prenem a  $X$  la restricció d'aquesta mètrica,<sup>14</sup> lla-

invariant  $\hat{U}_i \subset \mathbb{R}^n$  i un homeomorfisme  $\phi_i : U_i \rightarrow \hat{U}_i/\Gamma_i$ ; a més a més, es demana que per a tot  $x \in U_i \cap U_j$  existeixi un  $x \in U_k \subset U_i \cap U_j$ , morfismes  $\rho_i : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_i$ ,  $\rho_j : \Gamma_k \rightarrow \Gamma_j$  i inclusions equivariants (respecte a  $\rho_i$  i  $\rho_j$ )  $\hat{U}_k \rightarrow \hat{U}_i$  i  $\hat{U}_k \rightarrow \hat{U}_j$  que siguin difeomorfismes amb les seves imatges i que aixequin les inclusions  $U_k \subset U_i$  i  $U_k \subset U_j$ . Exercicis: (1) demostreu que tot *orbifold* compacte és difeomorf al quocient d'una varietat diferenciable compacta per l'acció d'un grup de Lie compacte amb grups d'isotropia finits; (2) doneu un exemple d'*orbifold* compacte que no es pugui posar com a quocient d'una varietat diferenciable compacte per l'acció d'un grup finit; (3) generalitzeu els teoremes de Rham i de Hodge als *orbifolds* i demostreu que la cohomologia d'un *orbifold* compacte a coeficients racionals satisfà la dualitat de Poincaré; (4) inventeu-vos una definició d'*orbifibrat*. Observació: el nombre d'Euler d'un *orbifibrat* sobre un *orbifold* és en general un nombre racional.

<sup>13</sup> El lector atent haurà observat que estem parlant d'espais de dimensió infinita. En aquest context no tot subespai dins un espai vectorial amb una mètrica té ortogonal. En el cas de les formes diferencials, es demostra l'existència de l'ortogonal utilitzant resultats d'EDP's el·líptiques.

<sup>14</sup> Aquesta mètrica s'anomena la mètrica de Fubini-Study. Una condició sobre les mètriques hermítiques a  $X$  que fa que les formes harmòniques siguin invariants per l'acció de  $S^1$  és que la part imaginària defineixi una forma simplèctica a  $X$ . Les mètriques que satisfan aquesta propietat s'anomenen mètriques Kähler.



vors  $\mathcal{H}^k(X)$  és invariant per l'acció de  $S^1 \implies$  podem descompondre en pesos

$$\mathcal{H}^k \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q},$$

on  $S^1$  actua a  $\mathcal{H}^{p,q}$  amb pes  $p - q$ ;

- usant l'isomorfisme  $H^k(X; \mathbb{R}) \simeq \mathcal{H}^k(X)$  obtenim una descomposició

$$H^k(X; \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

anomenada **descomposició de Hodge**;

- el **teorema de Dolbeault** ens diu com calcular els  $H^{p,q}(X)$  usant geometria complexa:

$$H^{p,q}(X) \simeq H^q(X; \Omega_X^p),$$

essent  $\Omega_X^p$  el feix de formes diferencials holomorfes a  $X$ .

## 7.2 Variacions d'estructures de Hodge

Suposem ara que tenim una família de varietats projectives llises

$$\{X_z \subset \mathbb{P}^N \mid z \in U \subset \mathbb{C}\}$$

parametritzades per un obert connex  $U \subset \mathbb{C}$ .

5 PROBLEMA Com canvia la cohomologia  $H^k(X_z; \mathbb{C})$  quan  $z$  es belluga dins  $U$ ?

RESPOSTA Com que  $U$  és connex, totes les varietats  $X_z$  són difeomorfes. Per tant, totes les  $X_z$  tenen els mateixos grups de cohomologia  $H^k(X_z; \mathbb{C})$ . A més, si  $U$  és simplement connex, podem identificar d'una manera canònica els grups  $H^k(X_z; \mathbb{C})$  i  $H^k(X_{z'}; \mathbb{C})$  per a qualssevol  $z, z' \in \mathbb{C}$ .

Però què passa si en lloc d'estudiar la variació de  $H^k$  estudiem la variació de la descomposició de Hodge? Recordem que, d'una banda, la descomposició de Hodge de  $X_z$  depèn de l'estructura algebraica de  $X_z$  i no només de l'estructura diferenciable, i, d'altra banda, que hi ha famílies connexes de varietats llises on l'estructura algebraica de les fibres va canviant. Plantegem-nos, doncs, aquest problema!

6 PROBLEMA (tornem-hi...) Com canvien els grups  $H^{p,q}(X_z)$  quan  $z$  es belluga dins  $U$ ?

RESPOSTA Es pot descriure la variació de  $H^{p,q}(X_z)$  dins  $H^k(X_z; \mathbb{C})$  usant equacions diferencials algebraiques (de Picard-Fuchs).

### 7.3 Exemple: les integrals eHíptiques

Aquí donarem un exemple diferent del de les cúbiques de família connexa on no tots els membres són isomorfs com a varietats algebraiques, i explicarem com es descriu en aquest cas la variació de la descomposició de Hodge.

La família  $\{X_z \subset \mathbb{P}^2 \mid z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}\}$  que considerem ve descrita per aquesta equació:

$$P_z(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 x_2 - x_0(x_0 - x_2)(x_0 - zx_2).$$

(L'equació inhomogènia de  $X_z$  és, doncs,  $y^2 = x(x-1)(x-z)$ .)

Com podem descriure la variació de  $H^{1,0}(X_z)$  en funció de  $z$ ? Per començar, observem que cada fibra d'aquesta família és topològicament un tor. Per tant  $H_1(X_z; \mathbb{C}) = \mathbb{C}^2$ . Ara, si prenem per a tot  $z \in U \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  (on  $U$  és un obert prou petit) una base  $y_1^z, y_2^z$  de  $H_1(X_z)$ , és clar que el subespai  $H^{1,0}(X_z) \subset H_1(X_z; \mathbb{C})$  estarà determinat pel quocient

$$\frac{\int_{y_1^z} \theta_z}{\int_{y_2^z} \theta_z},$$

on  $\theta$  és una secció del fibrat sobre  $U$  que té com a fibra a  $z \in U$  el subespai  $H^{1,0}(X_z) \subset H_1(X_z; \mathbb{C})$ . Les integrals de la forma

$$\int_{y_i^z} \theta_z$$

s'anomenen els períodes de  $X_z$ , i en el cas de la nostra família es poden calcular en termes d'integrals eHíptiques

$$\Pi_{a,b,\rho}(z) = 2 \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-z)}},$$

on els extrems d'integració  $a, b \in \{0, 1, \infty\}$  i  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  és un camí que uneix  $a$  amb  $b$  (observem que el resultat de la integral no només depèn de  $a$  i  $b$ , sinó també de  $\rho$ ; la dependència en  $\rho$  de la integral s'anomena monodromia). La forma diferencial holomorfa  $\theta_z \in H^{1,0}(X_z)$  que estem prenent aquí és  $q^* dx_0/x_1$ , on  $dx_0/x_1$  és una 1-forma meromorfa a  $\mathbb{P}^1$  i  $q$  és la restricció a  $X_z$  de

$$\mathbb{P}^2 \setminus \{[0:0:1]\} \ni [x_0:x_1:x_2] \mapsto [x_0:x_1] \in \mathbb{P}^1.$$

Si  $\rho$  denota el camí entre 0 i 1 que té per imatge l'interval  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , llavors la funció  $\Pi = \Pi_{0,1,\rho}(z)$  satisfà aquesta equació de Picard-Fuchs:

$$\frac{1}{4}\Pi + (2z-1)\frac{d\Pi}{dz} + z(z-1)\frac{d^2\Pi}{dz^2} = 0 \quad (4)$$

(si triem un camí d'integració diferent obtenim una equació diferencial semblant), i això ens permet deduir que

$$\Pi(z) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n}{n}\right)^2 2^{-4n} z^n.$$

(Observeu, per altra banda, que la funció  $(x(x-1)(x-z))^{-1/2}$  no té cap primitiva que es pugui donar en termes de funcions elementals.) Una conseqüència del fet que les funcions  $\Pi$  en realitat siguin multivaluades (cosa que s'explica per la monodromia) és que no totes les corbes  $X_z$  són isomorfes entre elles.

#### 7.4 L'equació diferencial a [3]

L'equació (4) no és pas la mateixa que (1), però té un aire molt similar. De fet, a [3] s'explicita una família de varietats els períodes de les quals satisfan exactament l'equació (1).

Considerem la família de varietats algebraiques dins  $\mathbb{P}^4/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ :

$$\widehat{X}_z = \{x_0^5 + x_1^5 + \dots + x_4^5 = zx_0x_1\dots x_4\}/(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3,$$

on  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$  actua a través de matrius diagonals formades per arrels cinques de la unitat que respecten l'equació (les varietats  $\widehat{X}_z$  són singulars). Hi ha una manera de desingularitzar les varietats  $\widehat{X}_z$  de manera que les varietats llises resultants  $X_z$  satisfan el següent: la variació de  $H^{3,0}(X_z)$  en termes de  $z$  ve descrita per l'equació diferencial

$$\left[ \left( z \frac{d}{dz} \right)^4 - 5z \prod_{j=1}^4 \left( 5z \frac{d}{dz} + j \right) \right] \psi(z) = 0;$$

en particular, les funcions  $\psi_0, \dots, \psi_4$  descriuen els períodes de  $X_z$ . Això és tan remarcable que ho posarem dins un senyor marc.

Les funcions  $\psi_0, \dots, \psi_4$  descriuen alhora el nombre de corbes racionals en una quintica genèrica i els períodes de les varietats  $X_z$ ; això és un exemple de la *mirror symmetry*.

## 8 Mirror symmetry

### 8.1

Avui dia no existeix encara cap formulació que es consideri definitiva de la *mirror symmetry*. De fet, ni al món de la física teòrica (que és d'on prové, tal com hem dit a la introducció) pot dir-se que es compregui completament aquest fenomen. Al món de les matemàtiques hi ha com a mínim tres *traduccions geomètriques* de la *mirror symmetry*.

Totes comencen més o menys afirmant que a (quasi) tota varietat de Calabi-Yau  $Y$  (per exemple, una quintica a  $\mathbb{P}^4$ ) de dimensió 3 li correspon una família de varietats de Calabi-Yau  $X_z$  (i es diu que  $(Y, X_z)$  és un *mirror pair*); les relacions entre  $Y$  i  $X_z$  que donen les tres versions són les següents.

- comptar corbes racionals a  $Y$  és el mateix que estudiar la variació de  $H^{3,0}(X_z)$  en funció de  $z$  (més precisament, hi ha un isomorfisme local d'estructures de Frobenius entre el moduli d'estructures Kaehler complexificades a  $Y$  i la varietat que parametriza la família  $X_z$ );
- (Kontsevich) la categoria derivada de la categoria de Fukaya de  $Y$  és equivalent a la categoria derivada de feixos coherents a  $X_{z_0}$ ;
- (Strominger, Yau, Zaslow) tant  $Y$  com  $X_{z_0}$  fibren sobre una mateixa varietat de dimensió real 3; les fibres són tors especials lagrangians (que poden ser singulars) duals entre ells.

El que hem explicat de la quintica és un cas particular de la primera formulació. Fixem-nos que només l'última versió dóna alguna idea de com construir geomètricament la família  $X_z$  a partir de  $Y$ . Tot i això, hi ha encara molts aspectes importants de la construcció de Strominger, Yau i Zaslow que resten obscurs. Hom conjectura que la segona versió (que es sol anomenar la *mirror symmetry* homològica) implica la primera. De fet, però, també queden encara molts detalls a treballar per tenir un enunciat rigorós de la *mirror symmetry* homològica.

PREGUNTA Per què s'anomena *mirror symmetry*, és a dir, simetria mirall?

RESPOSTA Si comparem les dues matrius construïdes col·locant a la posició  $(p, q)$  les dimensions de  $H^{p,q}(Y)$  i de  $H^{p,q}(X_z)$  respectivament, llavors hi ha una simetria especular que passa d'una matriu a l'altra.

## 8.2 Què se'n sap de moment?

Se'n saben moltes coses (i amb tota seguretat encara en queden moltes més per saber!), de manera que els treballs que mencionarem aquí són només una part minúscula del que es coneix, i han estat seleccionats amb un criteri molt personal.

- S'han definit rigorosament els invariants de Gromov-Witten de varietats simplèctiques compactes (Ruan, Tian [19]; McDuff, Salamon [16]; Liu, Tian [14]; Fukaya, Ono [5]; Siebert [20]; Ruan [18]).
- S'ha demostrat rigorosament el resultat de [3] i s'ha generalitzat a interseccions completes dins varietats tòriques (Givental [8]; Kim [10]; Lin, Lian, Yau [12]; Bertram [2]; Gathmann [6]); això ha permès en particular demostrar la primera de les versions de la *mirror symmetry* que hem esmentat abans per un conjunt bastant gros de varietats (per exemple, interseccions completes dins varietats tòriques).
- S'ha demostrat rigorosament el resultat de [1] (Manin [15]; Voisin [21]; Liu, Lian, Yau [12]).
- Kontsevich i Soibelman [11] han estudiat la relació entre les versions de Kontsevich i Strominger-Yau-Zaslow de la *mirror symmetry*.

- S'ha generalitzat el concepte d'invariants de Gromov-Witten: invariants de varietats amb accions Hamiltonianes (Mundet [17]; Cieliebak, Gaio, Mundet, Salamon [4]); invariants relatius (Ruan, Li [13]; Ionel, Parker [9]; Gathmann [6]).

### 8.3 Què queda per fer?

Moltes coses! Novament en diem tres d'entre les moltíssimes possibles.

- Entendre la relació entre les diverses formulacions de la *mirror symmetry* (i demostrar-les!).
- Entendre d'altres manifestacions de la *mirror symmetry* (p. e., la relació entre invariants de nusos i invariants de GW donada per la *local mirror symmetry*).
- Demostrar la conjectura de Clemens i entendre com comptar corbes a la quintica usant els resultats de [3] i [1]. Potser caldria fer algun comentari per aclarir aquest últim punt. Hem dit abans que el resultat d'Aspinwall i Morrison ha estat demostrat rigorosament per Manin i d'altres. Estrictament el que s'ha demostrat és el següent: si  $\mathbb{P}^1 \simeq C \subset Y$  és una corba racional llisa de grau  $d'$  i el fibrat normal  $N_{C|Y} \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ , llavors les corbes  $f : C' \rightarrow Y$  que factoritzin a través d'una aplicació de grau  $d$  entre  $C'$  i  $C$  contribueixen a summand  $d^{-3}$  a l'invariant de Gromov-Witten  $N_{dd'}^{virt}$ . Ara bé, se sap que aquesta situació no sempre es dona: tota quintica genèrica té corbes racionals de grau 5 que són singulars. Usant aquest fet, Pandharipande ha demostrat que les fórmules obtingudes combinant [3] amb [1] no donen el nombre correcte de corbes de grau 10 a la quintica genèrica. El problema és doncs d'entendre correctament la relació entre els invariants de Gromov-Witten de la quintica i els nombres de corbes racionals. La fórmula de [1] dona només una primera aproximació a aquest problema.

## Referències

- [1] ASPINWALL, P. S.; MORRISON, D. R. «Topological field theory and rational curves». *Comm. Math. Phys.*, 151 (1993), núm. 2, 245-262.
- [2] BERTRAM, A. «Another way to enumerate rational curves with torus actions». *Invent. Math.*, 142 (2000), núm. 3, 487-512.
- [3] CANDELAS, P.; OSSA, P. DE LA; GREEN, P. S.; PARKES, L. «A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory». *Nuclear Phys. B*, 359 (1991), núm. 1, 21-74.
- [4] CIELIEBAK, K.; GAI0, R.; MUNDET I RIERA, I.; SALAMON, D. «The symplectic vortex equations and invariants of Hamiltonian group actions». Preprint.

- [5] FUKAYA, K.; ONO, K. «Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant». *Topology*, 38 (1999), núm. 5, 933-1048.
- [6] GATHMANN, A. «Relative Gromov-Witten invariants and the mirror formula». Preprint math.AG/0009190.
- [7] GRIFFITHS, P.; HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry* (reedició de l'original de 1978), Wiley Classics Library. Nova York: John Wiley & Sons, Inc. 1994.
- [8] GIVENTAL, A. «Elliptic Gromov-Witten invariants and the generalized mirror conjecture». *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)*, 107-155, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1998.
- [9] IONEL, E.-N.; PARKER, T. H. «Relative Gromov-Witten Invariants». Preprint math.SG/9907155.
- [10] KIM, B. «Quantum cohomology of flag manifolds  $G/B$  and quantum Toda lattices». *Ann. of Math. (2)*, 149 (1999), núm. 1, 129-148.
- [11] KONTSEVICH, M.; SOIBELMAN, Y. «Homological mirror symmetry and torus fibrations». Preprint math.SG/0011041.
- [12] LIAN, B. H.; LIU, K.; YAU, S.-T. «Mirror principle I, II, III». *Asian J. Math.*, 1 (1997), núm. 4, 729-763, 3 (1999), núm. 1, 109-146, 3 (1999), núm. 4, 771-800.
- [13] LI, A.-M.; RUAN, Y. «Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau 3-folds». *Invent. Math.*, 145 (2001), núm. 1, 151-218.
- [14] LIU, G.; TIAN, G. «Floer homology and Arnold conjecture». *J. Differential Geom.*, 49 (1998), núm. 1, 1-74.
- [15] MANIN, YU. I. «Generating functions in algebraic geometry and sums over trees». *The moduli space of curves* (Texel Island, 1994), 401-417, Progr. Math. 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [16] MCDUFF, D.; SALAMON, D. *J-holomorphic curves and quantum cohomology*. University Lecture Series, 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.
- [17] MUNDET I RIERA, I. «Hamiltonian Gromov-Witten invariants». [Apareixerà a *Topology*].
- [18] RUAN, Y. «Virtual neighborhoods and pseudo-holomorphic curves». Proceedings of 6th Gökova Geometry-Topology Conference, *Turkish J. Math.*, 23 (1999), núm. 1, 161-231.
- [19] RUAN, Y.; TIAN, G. «Higher genus symplectic invariants and sigma models coupled with gravity». *Invent. Math.*, 130 (1997), núm. 3, 455-516.
- [20] Siebert, B. «Gromov-Witten invariants of general symplectic manifolds». Preprint dg-ga/9608005.

- [21] VOISIN, C. «A mathematical proof of a formula of Aspinwall and Morrison». *Compositio Math.*, 104 (1996), núm. 2, 135-151.

Podeu trobar les referències que apareixen com a *preprint* a aquesta pàgina web: <http://xxx.unizar.es>.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID  
CAMPUS DE CANTOBLANCO  
28049 MADRID  
[ignasi.mundet@uam.es](mailto:ignasi.mundet@uam.es)

ADREÇA ACTUAL:  
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA I,  
ETSEIB  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
DIAGONAL 647  
08028 BARCELONA