Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 14, núm. 2, 1999. Pàg. 7–40

Una invitació a les àlgebres parcials*

Wiktor Bartol, Peter Burmeister, Francesc Rosselló

> Els homes de ciència han de fer front a conceptes extremadament abstractes i generals. Pel fet d'usar-los constantment i estar-hi familiaritzats, aquests conceptes, i les relacions entre si, esdevenen igual de reals i externs que els objectes de l'experiència.
>
> **W. K. Clifford**

A la memòria de Nadal Batle i Nicolau

1 Introducció

La parcialitat és un fenomen que, juntament amb la seva altra cara, l'extensió (i a l'extrem, la compleció), acompanya les matemàtiques des de sempre. Quan Euclides refusava efectuar operacions sobre objectes de dimensions diferents, com ara longituds i àrees, assumia que les seves operacions eren parcials. Quan els pitagòrics trobaven nombres incommensurables, descobrien amb això que qualcunes de les seves proporcions no estaven definides. La introducció dels nombres negatius, racionals, després irracionals i complexos, va respondre bàsicament a la necessitat de completar operacions prèviament no definides. Encara ara, quan construïm per exemple el cos de fraccions d'un domini d'integritat, definim una extensió de la inversió sobre aquest, que no pot ser mai una compleció si el domini té dos o més elements; la compactació d'un espai topològic i la immersió d'un reticle en el seu reticle d'ideals es poden entendre com a complecions d'operacions definides sobre infinits arguments; etc. Estem segurs que a cada lector li vindran al cap altres exemples d'operacions parcials, i extensions d'aquestes, extrets de la seva experiència matemàtica quotidiana.

La parcialitat també és una propietat característica de gairebé totes les estructures considerades en informàtica. En molts casos, es tracta d'una parcialitat similar

* Aquest treball ha estat finançat en part pel KBN polonès, projectes 8-T11C-010-11 i 8-T11C-040-10, i la DGES espanyola, projecte PB96-0191-C02-02.

a la trobada per Euclides, en el sentit que no es poden efectuar operacions sobre objectes de diferents tipus. En altres casos, és una conseqüència de les limitacions físiques dels ordinadors. Tant en un cas com en l'altre, la comprensió del significat de la parcialitat i la capacitat de raonar-hi són de gran importància.

L'estudi de la parcialitat en abstracte és l'estudi de les *àlgebres parcials*, els objectes formats per un conjunt i diverses operacions internes, en principi parcials, sobre aquest: per exemple, els cossos amb les operacions usuals, els nombres naturals amb la subtracció, etc.

La teoria de les àlgebres parcials és una branca de l'*àlgebra universal* —la disciplina matemàtica que, en paraules del seu fundador, G. Birkhoff, «forneix teoremes generals sobre àlgebres amb operacions univaluades, totalment definides i finitàries»— i neix oficialment com a disciplina autònoma els anys seixanta amb els treballs de Józef Słomiński (per exemple [21], [22]) i Jürgen Schmidt (per exemple [19], [20]). Però les seves aplicacions en precediren l'aparició formal. Una de les primeres va ser el resultat de T. Evans (vegeu [12]) sobre l'equivalència de la resolubilitat del problema de la paraula per una classe equacional d'àlgebres totals i la decidibilitat del problema de la immersibilitat de certes àlgebres parcials finites en àlgebres d'aquesta classe. El 1963, G. Grätzer i E. T. Schmidt (vegeu [13]) empraren àlgebres parcials en la demostració del fet que tot reticle algebraic és isomorf al reticle de congruències d'una àlgebra total. Aquí les àlgebres parcials serviren per construir fragments d'una estructura algebraica, en un procés d'extensions (per apropar-se a una àlgebra total) i reduccions (per no perdre'n propietats) que fornia en el límit l'àlgebra de l'enunciat del teorema. Construccions similars aparegueren en la bibliografia diverses vegades (l'altre exemple més notable n'és segurament [17]).

Els darrers quinze anys, la teoria de les àlgebres parcials ha estat impulsada amb força per les seves aplicacions en la teoria de la programació, on qualsevol eina poderosa d'àlgebra abstracta que permeti raonar sobre els programes és benvinguda. En aquest sentit, destaquem l'ús de les àlgebres parcials per exemple en l'especificació de *tipus abstractes de dades* (vegeu, per exemple, [4] i [11]) o, per esmentar una aplicació més propera als autors del present treball, en l'àrea de la transformació algebraica d'hipergrafs (vegeu, per exemple, [9] i [8]).

Aquest article vol ser una introducció bàsica a la teoria de les àlgebres parcials, amb l'objectiu final que el lector hi pugui entrellucar si més no un pàl·lid reflex del que són i com poden ser útils aquestes àlgebres.

Aquest nivell bàsic que ens hem imposat implica que la nostra presentació de la parcialitat també sigui, forçosament, parcial. Per exemple, i per no complicar més del necessari les notacions, ens restringirem a operacions *finitàries* (és a dir, que s'apliquen a arguments de llargada finita) i a àlgebres *homogènies* (és a dir, amb elements «d'un sol tipus»). Això darrer pot significar una decepció per als lectors interessats en les aplicacions de les àlgebres parcials en informàtica, on s'empren de manera gairebé sistemàtica àlgebres *heterogènies* (per oposició a les homogènies). Emperò, no creiem que restringir-nos al cas homogeni signifiqui una gran pèrdua, perquè en la gran majoria de situacions les propietats de les àlgebres homogènies es generalitzen de manera molt natural en les heterogènies; simplement, les notacions en aquest darrer cas són més embolicades. Encara més: cada àlgebra heterogènia pot ser considerada com una àlgebra parcial homogènia amb una certa estructura dels dominis de les operacions, o com un element d'una categoria llesca (*slice*) d'àlgebres parcials homogènies. En tot cas, el lector interessat primàriament en les àlgebres heterogènies pot llegir aquest article en combinació amb l'apèndix A de [9], que conté una introducció a aquestes àlgebres (sentim confessar que molt àrida, sense motivacions ni exemples ni comentaris, i orientada específicament a les necessitats concretes d'aquell treball) paral·lela a les seccions 2 a 6 d'aquest article.

També per raons de simplicitat, no emprarem teoria avançada de categories, encara que bona part del desenvolupament actual de la teoria de les àlgebres parcials s'arrela en aquesta: vegeu, per exemple, [14] i [15] com a treballs típics de l'escola de H. J. Hoehnke, on es defineixen i estudien les àlgebres parcials mitjançant *teories algebraiques* en el sentit de F. Lawvere, i [1] i [2], on s'estudien classes axiomàtiques d'àlgebres parcials mitjançant sistemes de factorització, entre d'altres eines.

Una presentació més completa de la teoria de les àlgebres parcials pot trobar-se a [5] o [6]. Una introducció elemental a l'àlgebra universal pot trobar-se per exemple a [10].

La resta d'aquest article està dividida en dues parts. A la primera (formada per les seccions 2 a 7) introduïm el llenguatge bàsic de la teoria de les àlgebres parcials, mentre que a la segona (les seccions 8 a 10) presentem els nostres dos teoremes preferits d'aquesta teoria. Es tracta de dos teoremes fonamentals i molt característics: el teorema general de l'homomorfisme i el teorema de la solució universal, tots dos de J. Schmidt.

Dels resultats que incloem en aquest article només donem, com a molt, indicacions de les demostracions: aquestes indicacions són suficients perquè el lector interessat pugui completar-les i d'aquesta manera familiaritzar-se amb els arguments típics de l'àrea, però prou curtes per no enredar el lector que només vulgui fer una ullada al que són les àlgebres parcials.

Agraïm profundament a Marta Cuyàs que ens hagi ajudat a netejar aquest article d'errades ortogràfiques, gramaticals i d'estil.

Aquest treball està escrit a la memòria del nostre amic comú, i matemàtic excepcional, Nadal Batle i Nicolau, mort el passat mes de desembre. La seva visió de la matemàtica, i en particular de l'anàlisi, la topologia i la probabilitat, era profundament algebraica, i va ser a causa d'ell que el tercer autor d'aquest article (F. R.) entrà al món de les àlgebres parcials i va conèixer els altres dos autors.

2 Àlgebres

Com ja hem comentat a la Introducció, una àlgebra parcial és una estructura formada per un conjunt A i un sistema d'operacions internes parcials sobre aquest. Val a dir que, aquí, *parcial* significa *no necessàriament definida pertot arreu*, i per tant aquestes operacions parcials poden ser totals.

Considerem per exemple les estructures següents:

- $(\mathcal{P}(X), \cup)$ el conjunt de parts d'un conjunt X amb la unió;
- $(\mathbb{N}, -)$ el conjunt dels nombres naturals amb la subtracció;
- $(Mor(C), \circ)$ el conjunt dels morfismes d'una categoria petita C amb la composició.

Cada una d'aquestes tres estructures és un parell format per un conjunt i una operació parcial binària, i en aquest sentit podem dir que totes tres són del mateix *tipus*. Més concretament, si introduïm un símbol φ per denotar una operació binària genèrica sobre un conjunt genèric A, aleshores cada una d'aquestes estructures s'ha obtingut assignant uns significats diferents al conjunt A i l'operació φ.

Aquestes consideracions ens porten a les definicions de tipus d'àlgebres i d'àlgebra parcial.

1 DEFINICIÓ *Un* tipus d'àlgebres[1] *és un parell* $\Sigma = (\Omega, \eta)$ *on* Ω *és un conjunt, els elements del qual anomenarem* símbols d'operacions *o simplement* operacions*, i* $\eta\colon \Omega \to \mathbb{N}$ *és una aplicació (total).*

Si $\varphi \in \Omega$ i $\eta(\varphi) = n$, direm que φ és una operació *n-ària*; emprarem els adjectius *nul·lària*, *unària* i *binària* en lloc de 0-ària, 1-ària i 2-ària, respectivament.

Als exemples, quan parlem d'un tipus d'àlgebres $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, ens referirem a un tipus $\Sigma = (\Omega, \eta)$ on $\Omega = \{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ (els noms dels símbols d'operacions seran, de fet, irrellevants) i $\eta(\varphi_i) = n_i$ per a tot $i = 1, \dots, m$. Així per exemple, $(0,0,1,1,2,2)$ denotarà un tipus d'àlgebres amb dues operacions nul·làries, dues operacions unàries i dues operacions binàries.

2 DEFINICIÓ *Sigui* $\Sigma = (\Omega, \eta)$ *un tipus d'àlgebres. Una* àlgebra parcial de tipus Σ *és una estructura de la forma*

$$\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$$

on A *és un conjunt, dit l'*univers *de l'àlgebra, i, per a cada* $\varphi \in \Omega$, $\varphi^{\mathbf{A}}\colon A^{\eta(\varphi)} \to A$ *és una aplicació parcial, de domini* $\operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$*, anomenada l'*operació φ sobre $\mathbf{A}$*.*

Escriurem les àlgebres parcials d'un tipus amb conjunt d'operacions $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ com a $\mathbf{A} = (A, \varphi_1^{\mathbf{A}}, \dots, \varphi_m^{\mathbf{A}})$.

Atès que, per defecte, totes les àlgebres d'aquest article són parcials, ometrem sovint aquest darrer adjectiu; i quan el tipus d'àlgebres sigui irrellevant o conegut, també l'ometrem. Per tant, a partir d'ara quan parlem d'una *àlgebra* ens referirem a una àlgebra parcial d'un cert tipus Σ. Quan considerem dues o més àlgebres simultàniament, entendrem sempre que són *similars*, és a dir, que són del mateix tipus.

Abans de continuar, és important reflexionar una mica sobre les operacions nul·làries. Com que $A^0 = \{\emptyset\}$ per a qualsevol conjunt A, si $\eta(\varphi) = 0$, aleshores l'operació φ sobre una àlgebra $\mathbf{A}$ té la forma $\varphi^{\mathbf{A}}\colon \{\emptyset\} \to A$. Si $\operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}} = \{\emptyset\}$, direm que $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida*, i la identificarem amb la imatge $\varphi^{\mathbf{A}}(\emptyset) \in A$. Per tant, cada operació nul·lària definida en una àlgebra hi distingeix un element; d'aquesta manera podem especificar, per exemple, els elements neutres als grups o als anells. Una operació nul·lària no definida en una àlgebra (i, en general, qualsevol operació no definida enlloc) no hi fa res, excepte formar part del llenguatge de l'àlgebra.

Direm que una operació $\varphi^{\mathbf{A}}$ sobre una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ és *discreta* quan $\operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}} = \emptyset$, i que és *total* quan $\operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}} = A^{\eta(\varphi)}$. Una àlgebra és *discreta* o *total*, segons correspongui, quan totes les operacions sobre aquesta ho són.

Anomenarem *àlgebra buida* a la d'univers buit $\emptyset$, i direm *trivial* a qualsevol àlgebra d'univers un singletó. Noteu que si el tipus d'àlgebres té operacions nul·làries, aleshores una àlgebra total no pot ser mai buida.

Donats dos tipus d'àlgebres $\Sigma = (\Omega, \eta)$ i $\Sigma' = (\Omega', \eta')$ tals que $\Omega' \subseteq \Omega$ i $\eta' = \eta|_{\Omega'}$ (aleshores direm que Σ *conté* Σ') i una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ de tipus Σ,

1 En informàtica se'n sol dir una *signatura*.

anomenarem *reducció de tipus* Σ' de $\mathbf{A}$ a l'àlgebra $\mathbf{A}' = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega'})$ de tipus Σ', amb el mateix univers que $\mathbf{A}$ i amb les operacions de $\mathbf{A}$ que corresponguin a símbols d'operacions de Ω'.

EXEMPLES

I) Les tres estructures considerades al principi d'aquesta secció són àlgebres de tipus (2). La primera és total, la segona no, i la tercera només és total si la categoria té com a molt un objecte.

II) Les estructures algebraiques usuals, com ara semigrups, monoides, grups, anells, cossos, espais vectorials, reticles, àlgebres de Boole, etc., són casos particulars d'àlgebres, la majoria totals, de tipus adients. Per exemple:

- Un *monoide* és una àlgebra total $\mathbf{A} = (A, \lambda, \cdot)$ de tipus $(0, 2)$ tal que la seva operació binària $\cdot$ és associativa i la seva operació nul·lària λ n'especifica l'element neutre.
- Un *grup* és una àlgebra total $\mathbf{G} = (G, e, ^{-1}, \cdot)$ de tipus $(0, 1, 2)$ tal que la seva reducció $(G, e, \cdot)$ de tipus $(0, 2)$ és un monoide, i l'operació unària $^{-1}$ assigna a cada element $x \in G$ el seu invers x^{-1} respecte a l'operació binària.
- Un *espai vectorial* sobre un cos $\mathbb{K}$ és una àlgebra total $\mathbf{E} = (E, 0, -, +, (\lambda^{\mathbf{E}})_{\lambda\in\mathbb{K}})$ de tipus $(\{0, -, +\} \cup \mathbb{K}, \eta)$, on $\eta(0) = 0$, $\eta(-) = 1$, $\eta(+) = 2$ i $\eta(\lambda) = 1$ per a tot $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que la seva reducció $(E, 0, -, +)$ és un grup commutatiu, i per a cada $\lambda \in \mathbb{K}$ l'operació unària $\lambda^{\mathbf{E}}$ és la multiplicació per l'escalar λ.
- Un *cos* és una àlgebra $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, 0, 1, -, ^{-1}, +, \cdot)$ de tipus $(0, 0, 1, 1, 2, 2)$ —on, per aquest ordre, les operacions nul·làries especifiquen els elements neutres de la suma i del producte, les operacions unàries donen les inversions respecte a la suma i el producte, i les operacions binàries són la suma i el producte del cos, respectivament— que no és total si $0 \neq 1$, perquè aleshores 0^{-1} mai no hi pot estar definit.

III) Podem entendre una categoria petita C com una àlgebra de tipus $(1, 1, 2)$ de la manera següent. Sigui $\mathrm{Mor}\,(C)$ el conjunt dels seus morfismes, i considerem sobre $\mathrm{Mor}\,(C)$ les operacions següents:

- $\mathrm{dom}\,, \mathrm{cod}: \mathrm{Mor}\,(C) \to \mathrm{Mor}\,(C)$, que assignen, a cada morfisme f, la identitat del seu objecte origen i la identitat del seu objecte d'arribada, respectivament; és a dir, si $f: A \to B$, aleshores $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{Id}_A$ i $\mathrm{cod}\,(f) = \mathrm{Id}_B$.
- $\circ: \mathrm{Mor}\,(C) \times \mathrm{Mor}\,(C) \to \mathrm{Mor}\,(C)$, que correspon a la composició de morfismes; escriurem $g \circ f$ en lloc de $\circ(f, g)$.

Aleshores podem identificar la categoria C amb l'àlgebra $(\mathrm{Mor}\,(C), \mathrm{dom}\,, \mathrm{cod}\,, \circ)$, la qual satisfà, entre d'altres, les propietats següents:

- dom i cod són totals;
- $\circ$ està definida només sobre els parells $(f, g) \in \mathrm{Mor}\,(C) \times \mathrm{Mor}\,(C)$ tals que $\mathrm{dom}\,(g) = \mathrm{cod}\,(f)$;
- $\circ$ és associativa en el sentit següent: donats $f, g, h \in \mathrm{Mor}\,(C)$, si una de les dues composicions $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ existeix, aleshores l'altra també existeix i totes dues coincideixen;

- $\mathrm{dom}\,(\mathrm{dom}\,(f)) = \mathrm{cod}\,(\mathrm{dom}\,(f)) = \mathrm{dom}\,(f)$ i $\mathrm{dom}\,(\mathrm{cod}\,(f)) = \mathrm{cod}\,(\mathrm{cod}\,(f)) = \mathrm{cod}\,(f)$ per a tot $f \in \mathrm{Mor}\,(C)$;
- $f \circ \mathrm{dom}\,(f) = f$ i $\mathrm{cod}\,(f) \circ f = f$ per a tot $f \in \mathrm{Mor}\,(C)$;
- $\mathrm{dom}\,(g \circ f) = \mathrm{dom}\,(f)$ i $\mathrm{cod}\,(g \circ f) = \mathrm{cod}\,(g)$ sempre que $g \circ f$ existeixi.

I, de fet, a tota àlgebra de tipus $(1,1,2)$ que satisfaci aquestes propietats hi podem assignar una categoria petita, de manera que quan apliquem la construcció anterior a aquesta categoria, recuperem l'àlgebra de partida.

IV) Els *grupoides* són estructures algebraiques parcials que s'usen per caracteritzar la simetria d'objectes amb pocs, o cap, automorfismes geomètrics: vegeu [25]. Una manera de definir un *grupoide* és com una categoria petita on tot morfisme té un invers (únic per l'associativitat): per tant, podem interpretar els grupoides com a àlgebres parcials d'un tipus $(1,1,1,2)$, que conté el tipus $(1,1,2)$ emprat al punt anterior per definir les categories petites com a àlgebres, tals que la seva reducció a aquest tipus és una categoria petita i l'operació unària nova assigna a cada morfisme el seu invers.

V) Siguin A un conjunt i $(A, (R_i)_{i\in I})$ un *sistema relacional* sobre A; és a dir, cada R_i és una relació $R_i \subseteq A^{n_i}$, $n_i \geq 1$. Considerem el tipus d'àlgebres $\Sigma = (\{\varphi_i\}_{i\in I}, \eta)$, on $\eta(\varphi_i) = n_i$ per a cada $i \in I$. Aleshores podem entendre aquest sistema relacional com una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi_i^{\mathbf{A}})_{i\in I})$ de tipus Σ, on, per a cada $i \in I$, $\mathrm{dom}\,\varphi_i^{\mathbf{A}} = R_i$, i si $(a_1, \ldots, a_{n_i}) \in R_i$, aleshores $\varphi_i^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{n_i}) = a_1$. Aquesta àlgebra determina el sistema relacional de manera única.

En particular, d'aquesta manera podem interpretar com a àlgebres parcials els conjunts parcialment ordenats, els grafs dirigits, etc.

VI) En física quàntica apareix l'àlgebra $\mathcal{B}_n = (S(\mathbb{R}^n), 0, 1, \neg, \vee)$ de tipus (0,0,1,2), on $S(\mathbb{R}^n)$ és el conjunt de tots els subespais vectorials de $\mathbb{R}^n$, les operacions nul·làries 0 i 1 corresponen als subespais $\{0\}$ i $\mathbb{R}^n$, respectivament, l'operació unària $\neg$ assigna a cada subespai de $\mathbb{R}^n$ el seu ortogonal, i l'operació $\vee$ és la suma de subespais, restringida als parells de subespais (F_1, F_2) tals que existeix una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ que conté una base de F_1 i de F_2 simultàniament; vegeu, per exemple, [24].

L'exemple següent és tan important que mereix que el donem en una definició a part: es tracta de les *àlgebres de termes*.

3 Definició *Sigui* $\Sigma = (\Omega, \eta)$ *un tipus d'àlgebres. Donat un conjunt* X, *el* conjunt $\mathrm{T}_\Sigma(X)$ de termes de tipus Σ sobre X *és el menor conjunt que satisfà les dues propietats següents:*

- $X \subseteq \mathrm{T}_\Sigma(X)$.
- *Si* $\varphi \in \Omega$ *i* $t_1, \ldots, t_{\eta(\varphi)} \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, *aleshores* $(\varphi, t_1, \ldots, t_{\eta(\varphi)}) \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$*; en particular, si* φ *és una operació nul·lària, aleshores* $(\varphi) \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$.

Per simplificar les notacions, representarem sempre una seqüència de la forma $(\varphi, t_1, \ldots, t_{\eta(\varphi)})$, *amb* $\varphi \in \Omega$ *i* $t_1, \ldots, t_{\eta(\varphi)} \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, *per* $\varphi(t_1, \ldots, t_{\eta(\varphi)})$*; en particular, si* φ *és una operació nul·lària, emprarem simplement* φ *per referir-nos al terme* (φ).

L'àlgebra de termes de tipus Σ sobre X *aleshores és l'àlgebra total de tipus* Σ

$$\mathbf{T}_\Sigma(X) = (\mathrm{T}_\Sigma(X), (\varphi^{\mathbf{T}_\Sigma(X)})_{\varphi\in\Omega})$$

d'univers el conjunt de termes de tipus Σ sobre X i operacions definides de la manera següent: si $\varphi \in \Omega$ i $t_1, \dots, t_{\eta(\varphi)} \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, aleshores

$$\varphi^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}(t_1, \dots, t_{\eta(\varphi)}) = \varphi(t_1, \dots, t_{\eta(\varphi)}) \in \mathrm{T}_\Sigma(X);$$

en particular, si $\varphi \in \Omega$ i $\eta(\varphi) = 0$, aleshores $\varphi^{\mathbf{T}_\Sigma(X)} = \varphi \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$.

Noteu que si Σ no conté cap operació nul·lària, aleshores $\mathrm{T}_\Sigma(\emptyset) = \emptyset$.

Els termes, com a composicions formals d'operacions, indueixen de manera natural unes aplicacions sobre les àlgebres, similars per exemple a les aplicacions sobre anells associades a polinomis amb coeficients enters (les quals, de fet, en són un cas particular).

4 Definició *Sigui $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi \in \Omega})$ una àlgebra de tipus Σ. Per a tot terme $t \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, definim l'aplicació parcial* associada *a t*

$$t^{\mathbf{A}} \colon A^X \to A$$

(on A^X denota el conjunt d'aplicacions de X en A) de domini $\operatorname{dom} t^{\mathbf{A}}$*, per recurrència sobre l'estructura de t, de la manera següent:*

- *Si $t = x \in X$, aleshores $t^{\mathbf{A}}(f) = f(x)$ per a tota aplicació $f \in A^X$.*
- *Quan $t = \varphi \in \Omega$, amb $\eta(\varphi) = 0$, si $\varphi^{\mathbf{A}}$ està definida, aleshores $t^{\mathbf{A}}(f) = \varphi^{\mathbf{A}}$ per a tota $f \in A^X$, mentre que si $\varphi^{\mathbf{A}}$ no està definida, aleshores* $\operatorname{dom} t^{\mathbf{A}} = \emptyset$.
- *Si $t = \varphi(t_1, \dots, t_{\eta(\varphi)})$, amb $\varphi \in \Omega$ i $t_1, \dots, t_{\eta(\varphi)} \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$, aleshores*

  $$\operatorname{dom} t^{\mathbf{A}} = \{f \in A^X \mid f \in \bigcap_{i=1}^{\eta(\varphi)} \operatorname{dom} t_i^{\mathbf{A}} \text{ i } (t_1^{\mathbf{A}}(f), \dots, t_{\eta(\varphi)}^{\mathbf{A}}(f)) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}\}$$

  i si $f \in \operatorname{dom} t^{\mathbf{A}}$, aleshores

  $$t^{\mathbf{A}}(f) = \varphi^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}(f), \dots, t_{\eta(\varphi)}^{\mathbf{A}}(f)).$$

Noteu que l'existència de $t^{\mathbf{A}}(f)$ i el seu valor només depenen del terme t i de les imatges per f dels elements de X que hi apareixen explícitament.

3 Subàlgebres

Si extrapolem els conceptes coneguts de subgrup, subanell, subespai vectorial, etc., al món de les àlgebres parcials, concloem que una subàlgebra d'una àlgebra $\mathbf{A}$ hauria de ser una subestructura de $\mathbf{A}$ que fos una àlgebra amb les operacions induïdes per les de $\mathbf{A}$. Per a les àlgebres totals, això dóna lloc a una noció clara (i única) de subàlgebra.

5 Definició *Siguin $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi \in \Omega})$ i $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi \in \Omega})$ dues àlgebres totals similars tals que $B \subseteq A$. Aleshores, $\mathbf{B}$ és una* subàlgebra *de $\mathbf{A}$ quan per a tota $\varphi \in \Omega$ i per a tot $\underline{b} \in B^{\eta(\varphi)}$ es té que $\varphi^{\mathbf{B}}(\underline{b}) = \varphi^{\mathbf{A}}(\underline{b})$.*

Per exemple, un grup és un subgrup d'un altre grup si n'és una subàlgebra en aquest sentit.

Ara, per a àlgebres parcials, la descripció intuïtiva donada al començament admet diverses interpretacions, segons l'abast del que entenguem per «operacions induïdes sobre un subconjunt», la qual cosa dóna lloc a tres nocions diferents de subàlgebra.

6 DEFINICIÓ *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *i* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *dues àlgebres similars tals que* $B \subseteq A$.

a) L'àlgebra $\mathbf{B}$ *és una* subàlgebra feble *de* $\mathbf{A}$ *quan, per a tota* $\varphi \in \Omega$,

$$si\ \underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}},\ aleshores\ \underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}\ i\ \varphi^{\mathbf{B}}(\underline{b}) = \varphi^{\mathbf{A}}(\underline{b}).$$

En particular, quan $\eta(\varphi) = 0$, *aquesta condició diu que si* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *està definida, aleshores* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *també està definida, i* $\varphi^{\mathbf{B}} = \varphi^{\mathbf{A}}$.

b) L'àlgebra $\mathbf{B}$ *és una* subàlgebra relativa *de* $\mathbf{A}$ *quan n'és una subàlgebra feble tal que, per a tota* $\varphi \in \Omega$,

$$si\ \underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}} \cap B^{\eta(\varphi)}\ i\ \varphi^{\mathbf{A}}(\underline{b}) \in B,\ aleshores\ \underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}}.$$

Quan $\eta(\varphi) = 0$, *aquesta condició diu que si* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida i pertany a* B, *aleshores* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *també està definida; i aleshores, com que* $\mathbf{B}$ *és una subàlgebra feble de* $\mathbf{A}$, $\varphi^{\mathbf{B}} = \varphi^{\mathbf{A}}$.

c) L'àlgebra $\mathbf{B}$ *és una* subàlgebra tancada *de* $\mathbf{A}$ *quan n'és una subàlgebra relativa tal que, per a tota* $\varphi \in \Omega$,

$$si\ \underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}} \cap B^{\eta(\varphi)},\ aleshores\ \underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}}.$$

Quan $\eta(\varphi) = 0$, *aquesta condició diu que si* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida, aleshores* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *també està definida (i coincideixen).*

Si $\mathbf{B}$ és una subàlgebra tancada de $\mathbf{A}$, aleshores el seu univers és un subconjunt tancat en el sentit següent.

7 DEFINICIÓ *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra i* $B \subseteq A$. *Aleshores,* B *és un subconjunt* tancat *de* $\mathbf{A}$ *quan, per a tota* $\varphi \in \Omega$, *es té que* $\varphi^{\mathbf{A}}(B^{\eta(\varphi)}) \subseteq B$.

De les definicions es desprèn que la «noció bàsica» de subàlgebra en la teoria de les àlgebres parcials és la de subàlgebra feble, de la qual les altres dues són casos particulars definits per mitjà de propietats addicionals.

EXEMPLES

I) Sigui $\underline{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, s)$ una àlgebra total de tipus $(0,1)$, amb univers el conjunt dels nombres naturals, operació nul·lària $0^{\mathbb{N}} = 0$ i operació unària l'aplicació successor.

- L'àlgebra discreta d'univers $\{1,2\}$ és una subàlgebra feble, però no relativa, de $\underline{\mathbb{N}}$.
- L'àlgebra discreta d'univers $\{1,3\}$ és una subàlgebra relativa, però no tancada, de $\underline{\mathbb{N}}$.
- L'àlgebra $\mathbf{A} = (\{0,1\}, 0^{\mathbf{A}}, s^{\mathbf{A}})$, amb l'operació nul·lària $0^{\mathbf{A}}$ no definida i l'operació unària $s^{\mathbf{A}}$ donada per $s^{\mathbf{A}}(0) = 1$, és una subàlgebra feble, però no relativa, de $\underline{\mathbb{N}}$.

- L'àlgebra $\mathbf{B} = (\{1,2\}, 0^{\mathbf{B}}, s^{\mathbf{B}})$, amb $0^{\mathbf{B}}$ no definida i $s^{\mathbf{B}}(1) = 2$, és una subàlgebra relativa, però no tancada, de $\underline{\mathbb{N}}$.
- L'única subàlgebra tancada de $\underline{\mathbb{N}}$ és ella mateixa.

II) L'àlgebra discreta d'univers un subconjunt qualsevol B de l'univers d'una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ sempre és una subàlgebra feble d'aquesta, que és relativa si i només si $\varphi^{\mathbf{A}}(B^{\eta(\varphi)}) \cap B = \emptyset$ per a tota $\varphi \in \Omega$, i tancada si i només si $\varphi^{\mathbf{A}}(B^{\eta(\varphi)}) = \emptyset$ per a tota $\varphi \in \Omega$.

III) Les subcategories d'una categoria petita es corresponen amb les seves subàlgebres tancades, sota la interpretació de les categories petites com a àlgebres parcials segons l'exemple (III) de la secció anterior.

IV) La subàlgebra discreta d'univers un conjunt X és una subàlgebra relativa de l'àlgebra de termes $\mathbf{T}_\Sigma(X)$.

Observem que sobre un subconjunt B qualsevol de l'univers A d'una àlgebra $\mathbf{A}$, hi podem definir, en principi, diverses subàlgebres febles de $\mathbf{A}$, però només una subàlgebra relativa. I sobre B podem definir una subàlgebra tancada de $\mathbf{A}$ només quan n'és un subconjunt tancat, cas en el qual aquesta subàlgebra tancada és única.

Podem entendre que les subàlgebres febles corresponen a *aproximacions* d'àlgebres (per formar una subàlgebra feble d'una àlgebra, en prenem un subconjunt qualsevol de punts i un subconjunt qualsevol d'operacions entre aquests) i les subàlgebres relatives corresponen a *restriccions* d'àlgebres (per formar una subàlgebra relativa d'una àlgebra, en prenem un subconjunt qualsevol de punts i totes les operacions definides entre aquests). Les subàlgebres tancades estan relacionades amb la *generació de subestructures*, en el sentit que expliquem tot seguit.

8 Lema *La intersecció d'una família arbitrària de subconjunts tancats d'una àlgebra* $\mathbf{A}$ *és un subconjunt tancat.*

Això implica en particular que, donat un subconjunt $X \subseteq A$ de l'univers d'una àlgebra $\mathbf{A}$, existeix el menor subconjunt tancat de $\mathbf{A}$ que el conté: la intersecció de tots els subconjunts tancats de $\mathbf{A}$ que el contenen.

9 Definició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra i* $X \subseteq A$. *El* subconjunt tancat de $\mathbf{A}$ generat per X, *en símbols* $C_{\mathbf{A}}(X)$, *és el menor subconjunt tancat de* $\mathbf{A}$ *que conté* X. *Anomenarem* subàlgebra tancada *de* $\mathbf{A}$ *generada per* X *a la que té univers* $C_{\mathbf{A}}(X)$*; en particular, direm que* X genera *l'àlgebra* $\mathbf{A}$ *quan* $C_{\mathbf{A}}(X) = A$.

Per exemple, el subconjunt tancat generat per un element d'un grup és el subgrup cíclic generat per aquest element, i el subconjunt tancat de l'àlgebra de termes $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ generat per X és tot $T_\Sigma(X)$ (és a dir, X genera $\mathbf{T}_\Sigma(X)$).

L'adjectiu «generat» el motiva el resultat següent, que és conseqüència immediata de les definicions.

10 Proposició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra i* $X \subseteq A$. *Diguem* $X_0 = X$ *i*

$$X_{n+1} = X_n \cup \{\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}) \mid \varphi \in \Omega,\ \underline{a} \in X_n^{\eta(\varphi)} \cap \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}\}, \quad n \geq 0$$

(en particular, $\{\varphi^{\mathbf{A}} \mid \varphi \in \Omega,\ \eta(\varphi) = 0,\ \varphi^{\mathbf{A}}$ *definida*$\} \subseteq X_1$*). Aleshores* $C_{\mathbf{A}}(X) = \bigcup_{n\geq 0} X_n$.

Equivalentment, si $i\colon X \hookrightarrow A$ *denota la inclusió de* X *dins* A*, aleshores*

$$C_{\mathbf{A}}(X) = \{t^{\mathbf{A}}(i) \mid t \in \mathrm{T}_{\Sigma}(X),\ i \in \operatorname{dom} t^{\mathbf{A}}\}$$

on, per a cada terme t, $t^{\mathbf{A}}$ *denota l'operació sobre* $\mathbf{A}$ *associada a* t *(definició 4).*

En la generació de subàlgebres tancades rau precisament una de les diferències fonamentals entre la teoria de les àlgebres parcials i la teoria dels sistemes relacionals. Ja hem explicat que tot sistema relacional pot ser interpretat com una àlgebra parcial d'un tipus adient (vegeu l'exemple (V) de la secció 2). Per un altre costat, és clar que tota àlgebra parcial $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ pot ser interpretada com un sistema relacional, mitjançant l'assignació a cada operació $\varphi^{\mathbf{A}}$ del seu graf

$$\{(a_1, \ldots, a_{\eta(\varphi)}, \varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_{\eta(\varphi)})) \mid (a_1, \ldots, a_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}\} \subseteq A^{\eta(\varphi)+1}.$$

Emperò, si bé tot concepte de la teoria dels sistemes relacionals admet una traducció senzilla a la teoria de les àlgebres parcials, a l'inrevés això és fals. En particular, no és gens fàcil parlar d'una manera natural de la generació de conjunts en el marc dels sistemes relacionals, la qual cosa és una mancança greu des del punt de vista de l'àlgebra, en què la generació d'estructures a partir de conjunts i operacions és un dels conceptes fonamentals.

Observem finalment que si $\mathbf{A}$ és una àlgebra total i $\mathbf{B}$ n'és una subàlgebra tancada, aleshores $\mathbf{B}$ també és total, mentre que no té per què ser-ho si només n'és una subàlgebra relativa o feble. I per un altre costat, si una àlgebra total és una subàlgebra feble d'una àlgebra, n'és una subàlgebra tancada. D'aquesta manera, les àlgebres (estrictament) parcials apareixen de manera natural en el món de les àlgebres totals, com a aproximacions o restriccions d'aquestes; vegeu per exemple el treball de G. Grätzer i E. T. Schmidt esmentat en la introducció.

4 Homomorfismes

Si extrapolem els conceptes d'homomorfisme de grups, homomorfisme d'anells, aplicació lineal entre espais vectorials, etc., a les àlgebres parcials, un homomorfisme d'àlgebres hauria de ser una aplicació entre els universos d'aquestes que fos compatible amb les seves estructures. Com en el cas de les subàlgebres, per a les àlgebres totals el significat formal d'això és clar i únic.

11 Definició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *i* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *dues àlgebres totals similars. Una aplicació* $f\colon A \to B$ *és un* homomorfisme *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *quan, per a tota operació* $\varphi \in \Omega$ *i per a tot* $\underline{a} \in A^{\eta(\varphi)}$*, es té que*[2] $\varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a})) = f(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}))$.

Per exemple, donats dos monoides $\mathbf{A} = (A, e, *)$ i $\mathbf{B} = (B, e', \cdot)$, una aplicació $f\colon A \to B$ és un homomorfisme de monoides de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si i només si és un homomorfisme de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ com a àlgebres totals de tipus (0,2): totes dues condicions diuen que $f(e) = e'$ i $f(a * a') = f(a) \cdot f(a')$ per a tots $a, a' \in A$.

En canvi, que l'aplicació $f\colon A \to B$ sigui «compatible» amb les estructures de les àlgebres $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ pot tenir diversos significats si $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són parcials. Aleshores es pren com a definició bàsica d'homomorfisme la següent.

2 Si $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_{\eta(\varphi)})$, aleshores $f(\underline{a})$ denota $(f(a_1), \ldots, f(a_{\eta(\varphi)}))$.

12 DEFINICIÓ *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *i* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *dues àlgebres similars. Una aplicació* $f\colon A \to B$ *és un* homomorfisme *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$*, en símbols* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*, quan preserva l'estructura algebraica de* $\mathbf{A}$*; és a dir, quan, per a tota operació* $\varphi \in \Omega$*,*

$$\textit{si } \underline{a} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}, \textit{ aleshores } f(\underline{a}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}} \textit{ i } \varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a})) = f(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a})).$$

En particular, quan $\eta(\varphi) = 0$*, aquesta condició diu que si* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida, aleshores* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *també està definida i* $\varphi^{\mathbf{B}} = f(\varphi^{\mathbf{A}})$*.*

El grau del lligam entre les estructures de $\mathbf{A}$ i de $\mathbf{B}$ per mitjà de l'homomorfisme f es reflecteix en les dues propietats següents dels homomorfismes.

13 DEFINICIÓ *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *i* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *dues àlgebres similars.*

a) Un homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *és* ple *quan l'estructura de la subàlgebra relativa de* $\mathbf{B}$ *d'univers* $f(A)$ *és completament determinada per la de* $\mathbf{A}$*; és a dir, quan, per a tota operació* $\varphi \in \Omega$*, si* $\underline{a} \in A^{\eta(\varphi)}$ *és tal que* $f(\underline{a}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}}$ *i* $\varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a})) \in f(A)$*, aleshores existeix un* $\underline{a}' \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}$ *tal que* $f(\underline{a}) = f(\underline{a}')$*; i llavors, com que* f *és un homomorfisme,* $\varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a})) = f(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}'))$*.*

Quan $\eta(\varphi) = 0$*, aquesta condició diu que* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida si i només si* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *està definida i pertany a* $f(A)$*, i si aquest és el cas, aleshores* $\varphi^{\mathbf{B}} = f(\varphi^{\mathbf{A}})$*.*

b) Un homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *és* tancat *quan preserva de manera exacta l'estructura algebraica de* $\mathbf{A}$*; és a dir, quan per a tota operació* $\varphi \in \Omega$*,*

$$\textit{si } \underline{a} \in A^{\eta(\varphi)}, \textit{ aleshores } \underline{a} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}} \textit{ si i només si } f(\underline{a}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}}.$$

Quan $\eta(\varphi) = 0$*, aquesta condició diu que* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida si i només si* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *està definida; i com que* f *és un homomorfisme, quan totes dues estan definides es té que* $\varphi^{\mathbf{B}} = f(\varphi^{\mathbf{A}})$*.*

A més a més, la compatibilitat de l'aplicació $f\colon A \to B$ amb les estructures algebraiques de $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ pot ser entesa en termes de reflexió en lloc de preservació, la qual cosa dóna lloc a un concepte completament diferent d'homomorfisme.

14 DEFINICIÓ *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *i* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *dues àlgebres similars. Una aplicació* $f\colon A \to B$ *és un* conformisme[3] *de* $\mathbf{A}$ *en* $\mathbf{B}$ *quan reflecteix l'estructura algebraica de* $\mathbf{B}$*; és a dir, quan per a tota operació* $\varphi \in \Omega$*, si* $\underline{a} \in A^{\eta(\varphi)}$ *i* $f(\underline{a}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}}$*, aleshores* $\underline{a} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}$ *i* $\varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a})) = f(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}))$*.*

Quan $\eta(\varphi) = 0$*, aquesta condició diu que si* $\varphi^{\mathbf{B}}$ *està definida, aleshores* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *també està definida i* $\varphi^{\mathbf{B}} = f(\varphi^{\mathbf{A}})$*.*

Quan $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són àlgebres totals, les quatre nocions d'homomorfisme, homomorfisme ple, homomorfisme tancat i conformisme es col·lapsen en la noció única d'homomorfisme d'àlgebres totals donada a la definició 11. Noteu així mateix que tot homomorfisme tancat és ple, i que els homomorfismes tancats són aquelles aplicacions que són simultàniament homomorfismes i conformismes.

EXEMPLES

I) Siguin $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$, amb $A \neq \emptyset$, una àlgebra total i $\mathbf{A}'$ l'àlgebra discreta del mateix tipus i amb el mateix univers A que $\mathbf{A}$; suposem que $\Omega \neq \emptyset$, de manera

3 De fet, un *conformisme total*.

que $\mathbf{A}' \neq \mathbf{A}$. Aleshores $\mathrm{Id}_A\colon A \to A$ és un homomorfisme de $\mathbf{A}'$ en $\mathbf{A}$ que no és ple (ni, per tant, tancat), i un conformisme de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}'$ que no és homomorfisme.

II) La inclusió d'una subàlgebra feble és un homomorfisme, que és ple si i només si la subàlgebra és relativa, i tancat si i només si la subàlgebra és tancada.

III) Sigui $\underline{\mathbb{N}} = (\mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, s)$ l'àlgebra total de tipus $(0,1)$ de l'exemple (I) de la secció 3, i per a cada $n \in \mathbb{N}$ sigui $\underline{\mathbb{N}}_n$ la seva subàlgebra relativa sobre $\{0,\dots,n\}$. Sigui, finalment, $\mathbf{A}$ una àlgebra trivial total del mateix tipus, d'univers un singletó $\{a\}$.

- L'aplicació $f_0\colon \{0\} \to \{a\}$ és un homomorfisme de $\underline{\mathbb{N}}_0$ en $\mathbf{A}$ que no és ple;
- L'aplicació constant $f_n\colon \{0,\dots,n\} \to \{a\}$, amb $n \geq 1$, és un homomorfisme ple de $\underline{\mathbb{N}}_n$ en $\mathbf{A}$ que no és tancat;
- L'aplicació constant $f_{\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \{a\}$ és un homomorfisme tancat de $\underline{\mathbb{N}}$ en $\mathbf{A}$;
- Si $n > m$, l'aplicació
$$\begin{array}{rccc} f_{n,m}\colon & \{0,\dots,n\} & \to & \{0,\dots,m\} \\ & x & \mapsto & \min(x,m) \end{array}$$
és un conformisme de $\underline{\mathbb{N}}_n$ en $\underline{\mathbb{N}}_m$ que no és homomorfisme.

Els homomorfismes, homomorfismes tancats i conformismes són tancats per composició, i per tant defineixen categories d'àlgebres parcials, en cada cas amb morfismes identitat les aplicacions identitat. L'exemple (I) anterior mostra que perquè un homomorfisme o un conformisme sigui un isomorfisme (és a dir, invertible) no és suficient que sigui bijectiu: de fet, en totes tres categories els *isomorfismes* són els homomorfismes bijectius i tancats. Com és usual, direm que dues àlgebres $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són *isomorfes* (o també, que cada una és una *imatge isomorfa* de l'altra), en símbols $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, quan existeix un d'aquests isomorfismes entre elles.

En canvi, els homomorfismes plens no són tancats per composició, i per tant no defineixen cap categoria. El seu interès rau en el fet que apareixen de manera natural en tractar amb subàlgebres relatives (un homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ indueix un isomorfisme entre $\mathbf{A}$ i una subàlgebra relativa de $\mathbf{B}$ si i només si és ple i injectiu) i, com veurem a la propera secció, àlgebres quocient.

Els conformismes són un dels objectes més estranys a què dóna lloc la teoria de les àlgebres parcials, i els hem introduït aquí només com a exemple de la manera com un concepte natural per a àlgebres totals pot degenerar quan permetem que les àlgebres siguin parcials. Els conformismes no tornaran a aparèixer en aquest article: de fet, tot i haver estat introduïts ara fa vint-i-cinc anys (a [18]), encara no han estat suficientment explorats (ni, creiem, explotats).

Per acabar aquesta secció, donem un resultat i unes definicions que emprarem sovint en properes seccions.

15 Proposició *Siguin $f, g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ dos homomorfismes d'àlgebres i sigui X un conjunt generador de* $\mathbf{A}$. *Si $f|_X = g|_X$, aleshores $f = g$.*

Demostració: El conjunt $\{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ és tancat de $\mathbf{A}$ i conté X: per tant, conté $C_{\mathbf{A}}(X) = A$. □

16 Definició *Donades dues àlgebres $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ i $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$, un homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és* dens *quan $f(A)$ genera* $\mathbf{B}$.

Per la proposició anterior, si un homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és dens, aleshores és un *epimorfisme* en el sentit de la teoria de categories (és a dir, és tal que per a tota parella d'homomorfismes $g_1, g_2\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$, si $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, aleshores $g_1 = g_2$). El recíproc, que tot homomorfisme epimòrfic és dens, també és cert, però més difícil de demostrar. Per un altre costat, un homomorfisme dens i tancat és exhaustiu, perquè la imatge d'un homomorfisme tancat és un conjunt tancat de l'àlgebra d'arribada.

17 Definició *Una àlgebra* $\mathbf{B}$ *és una* imatge homomorfa *(respectivament,* plena, tancada*) d'una àlgebra* $\mathbf{A}$ *quan existeix un homomorfisme (respectivament, ple, tancat) exhaustiu* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*.*

5 Congruències

Siguin $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ i $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ dues àlgebres similars i $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfisme. Considerem la relació d'equivalència sobre A

$$\ker f = \{(a, a') \in A^2 \mid f(a) = f(a')\}$$

a la qual direm el *nucli* de f.

Siguin ara $\varphi \in \Omega$ i $\underline{a} = (a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}), \underline{a}' = (a'_1, \dots, a'_{\eta(\varphi)}) \in A^{\eta(\varphi)}$ tals que

$$(a_1, a'_1), \dots, (a_{\eta(\varphi)}, a'_{\eta(\varphi)}) \in \ker f,$$

de manera que $f(\underline{a}) = f(\underline{a}')$. Si $\underline{a}, \underline{a}' \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$, aleshores, per la definició d'homomorfisme, $f(\underline{a}), f(\underline{a}') \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{B}}$ i

$$f(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a})) = \varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a})) = \varphi^{\mathbf{B}}(f(\underline{a}')) = f(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}'))$$

i per tant $(\varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}), \varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}')) \in \ker f$.

Així doncs, l'equivalència $\ker f$ és compatible amb les operacions de $\mathbf{A}$, en el sentit que si podem aplicar una operació a dos arguments que siguin equivalents element a element, aleshores els resultats d'aquestes operacions també són equivalents.

Ara suposem que l'homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és tancat. Si $\underline{a} \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$, aleshores $f(\underline{a}) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{B}}$, i per tant, com que $f(\underline{a}') = f(\underline{a})$, resulta que $\underline{a}' \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$. Així doncs, si f és tancat, aleshores el seu nucli $\ker f$ encara és *més* compatible amb les operacions de $\mathbf{A}$, ja que aquesta compatibilitat s'estén als dominis de les operacions.

Aquestes dues nocions de compatibilitat d'una equivalència amb les operacions d'una àlgebra es reflecteixen en els conceptes següents de congruència i congruència tancada.

18 Definició *Sigui* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra.*

a) Una relació d'equivalència θ *sobre* A *és una* congruència *sobre* $\mathbf{A}$ *quan, per a tota operació* $\varphi \in \Omega$*, si* $(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}), (b_1, \dots, b_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$ *i* $(a_1, b_1), \dots, (a_{\eta(\varphi)}, b_{\eta(\varphi)}) \in \theta$*, aleshores*

$$(\varphi^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}), \varphi^{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_{\eta(\varphi)})) \in \theta.$$

b) Una congruència θ *sobre* $\mathbf{A}$ *és* tancada *quan, per a tota operació* $\varphi \in \Omega$*, si* $(a_1, b_1), \dots, (a_{\eta(\varphi)}, b_{\eta(\varphi)}) \in \theta$ *i* $(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$*, aleshores* $(b_1, \dots, b_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$*.*

Noteu en particular que les operacions nul·làries no imposen cap condició sobre les congruències.

Exemples

I) Tota relació d'equivalència sobre una àlgebra discreta és una congruència tancada.

II) Hem vist al començament d'aquesta secció que si $f: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ és un homomorfisme, aleshores el seu nucli $\ker f$ és una congruència sobre **A**, que és tancada si f és tancat. Ara bé, un nucli pot ser tancat sense que l'homomorfisme ho sigui: per exemple, quan l'àlgebra de partida és discreta i la d'arribada total.

III) Tota congruència sobre una àlgebra total és tancada.

IV) La *diagonal* $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ sobre l'univers d'una àlgebra **A** sempre és una congruència tancada, mentre que la *relació total* A^2 sobre el mateix univers sempre és una congruència, però només és tancada si cada una de les operacions sobre **A** és discreta o total.

V) Sigui H un subgrup normal d'un grup $\mathbf{G} = (G, e, ^{-1}, \cdot)$. Aleshores la relació

$$\theta_H = \{(x, y) \mid x \cdot y^{-1} \in H\}$$

és una congruència (tancada, perquè **G** és total) sobre **G**. I tota congruència θ sobre **G** s'obté d'aquesta manera, perquè la classe d'equivalència $[e]$ de l'element neutre mòdul θ és un subgrup normal de **G**.

La mateixa relació es té per exemple entre les congruències sobre un anell i els ideals d'aquest, o entre les congruències sobre un espai vectorial i els subespais d'aquest.

VI) Les úniques congruències sobre un cos són la diagonal i la relació total, i d'aquestes dues només la diagonal és tancada.

Amb les congruències es fan quocients. Per exemple, el quocient d'un grup **G** per una congruència és el quocient de **G** pel subgrup normal corresponent. Per a grups, anells, etc., la definició del quocient $\mathbf{A}/\theta$ d'una àlgebra **A** per una congruència θ és clara: és l'àlgebra sobre el conjunt quocient A/θ amb les operacions (entre classes d'equivalència) induïdes per les operacions sobre **A**. Per a àlgebres parcials prendrem aquesta mateixa definició d'àlgebra quocient, amb les precaucions imposades per la parcialitat de les operacions.

19 Definició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra i* θ *una congruència sobre* **A**. *Definim l'*àlgebra quocient *de* **A** *mòdul* θ *com l'àlgebra*

$$\mathbf{A}/\theta = (A/\theta, (\varphi^{\mathbf{A}/\theta})_{\varphi\in\Omega})$$

d'univers el conjunt quocient A/θ *i operacions* $\varphi^{\mathbf{A}/\theta}$ *definides de la manera següent:*

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}/\theta} = \{&([a_1], \ldots, [a_{\eta(\varphi)}]) \in (A/\theta)^{\eta(\varphi)} \mid \\ &\textit{existeixen } a'_1 \in [a_1], \ldots, a'_{\eta(\varphi)1} \in [a_{\eta(\varphi)}], \textit{ tals que } (a'_1, \ldots, a'_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}\}\end{aligned}$$

i si $([a_1], \ldots, [a_{\eta(\varphi)}]) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}/\theta}$*, aleshores*

$$\varphi^{\mathbf{A}/\theta}([a_1], \ldots, [a_{\eta(\varphi)}]) = [\varphi^{\mathbf{A}}(a'_1, \ldots, a'_{\eta(\varphi)})]$$

per a qualsevol $(a'_1, \dots, a'_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom} \varphi^{\mathbf{A}}$ *tal que* $([a_1], \dots, [a_{\eta(\varphi)}]) = ([a'_1], \dots, [a'_{\eta(\varphi)}])$.

En particular, si $\eta(\varphi) = 0$*, aleshores* $\varphi^{\mathbf{A}/\theta}$ *està definida si i només si* $\varphi^{\mathbf{A}}$ *està definida, cas en el qual* $\varphi^{\mathbf{A}/\theta} = [\varphi^{\mathbf{A}}]$.

És immediat comprovar que, per la definició de congruència, cada operació $\varphi^{\mathbf{A}/\theta}$ està ben definida: és a dir, que el seu valor sobre un argument del seu domini no depèn dels representants que emprem per calcular-lo. A més a més, si la congruència θ és tancada, aleshores per decidir si una operació sobre el quocient està definida sobre una certa n-pla de classes, basta comprovar si l'operació està definida a $\mathbf{A}$ sobre qualsevol n-pla de representants seus.

20 Proposició *Siguin* $\mathbf{A}$ *una àlgebra parcial i* θ *una congruència sobre* $\mathbf{A}$. *Aleshores la projecció natural*

$$\pi_\theta \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$$

és un homomorfisme ple, que és tancat si i només si θ *és una congruència tancada.*

6 Productes directes

Dediquem aquesta petita secció a definir el producte directe d'una família d'àlgebres.

21 Definició *Sigui* $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ *una família d'àlgebres similars, amb* $\mathbf{A}_i = (A_i, (\varphi^{\mathbf{A}_i})_{\varphi\in\Omega})$ *per a cada* $i \in I$. *El seu* producte directe *és l'àlgebra del mateix tipus*

$$\prod_{i\in I} \mathbf{A}_i = (\prod_{i\in I} A_i, (\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i})_{\varphi\in\Omega})$$

d'univers el producte cartesià dels seus universos

$$\prod_{i\in I} A_i = \{a \colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid a(i) \in A_i \text{ per a cada } i \in I\}$$

i amb les operacions $\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}$ *definides de la manera següent:*

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i} = \ & \{(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}) \in (\textstyle\prod_{i\in I} A_i)^{\eta(\varphi)} \mid \\ & \quad (a_1(i), \dots, a_{\eta(\varphi)}(i)) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}_i} \text{ per a cada } i \in I\}\end{aligned}$$

i si $(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}$*, aleshores el valor* $\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)}) \in \prod_{i\in I} A_i$ *el dóna*

$$\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}(a_1, \dots, a_{\eta(\varphi)})(i) = \varphi^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \dots, a_{\eta(\varphi)}(i)), \quad i \in I.$$

És a dir, les operacions sobre els productes directes estan definides si ho estan component a component, i, quan estan definides, s'efectuen component a component. En particular, si $\varphi \in \Omega$ és nul·lària, aleshores $\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i}$ està definida si i només si ho està cada $\varphi^{\mathbf{A}_i}$, cas en el qual $\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i} = (\varphi^{\mathbf{A}_i})_{i\in I}$.

És immediat comprovar que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ és total si i només si totes les àlgebres $\mathbf{A}_i$ són totals, i que $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ és discreta si i només si per a cada operació $\varphi \in \Omega$ existeix una àlgebra $\mathbf{A}_i$ de la família on l'operació $\varphi^{\mathbf{A}_i}$ és discreta. A més a més, si $I = \varnothing$, aleshores $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ és una àlgebra trivial total.

Aquests productes directes són productes en el sentit de la teoria de categories. En concret, es té el resultat següent.

22 PROPOSICIÓ *Sigui $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una família d'àlgebres similars, amb $\mathbf{A}_i = (A_i, (\varphi^{\mathbf{A}_i})_{\varphi\in\Omega})$ per a cada $i \in I$, i sigui $\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i = (\prod_{i\in I} A_i, (\varphi^{\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i})_{\varphi\in\Omega})$ el seu producte directe.*

a) Per a cada $i \in I$, l'aplicació

$$p_i \colon \prod_{i\in I} A_i \to A_i$$

donada per $p_i(a) = a(i)$ per a tot $a \in \prod_{i\in I} A_i$, és un homomorfisme $p_i \colon \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_i$.

b) Siguin ara $\mathbf{B}$ una àlgebra similar a les anteriors i $f_i \colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}_i$ un homomorfisme per a cada $i \in I$. Aleshores existeix un únic homomorfisme $f \colon \mathbf{B} \to \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ tal que $p_i \circ f = f_i$ per a cada $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B} \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, dotted, "f"] & \mathbf{A}_i \\
\prod_{i\in I}\mathbf{A}_i \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓ: L'homomorfisme $f \colon \mathbf{B} \to \prod_{i\in I}\mathbf{A}_i$ de l'apartat b) assigna a cada $b \in B$ l'aplicació

$$\begin{array}{rccl} f(b)\colon & I & \mapsto & \bigcup_{i\in I} A_i \\ & i & \mapsto & f_i(b)\,. \end{array}$$

□

7 Equacions

Recordem que a la secció 2 hem interpretat un grup com una àlgebra total $\mathbf{G} = (G, e, ^{-1}, \cdot)$ de tipus $(0, 1, 2)$ on l'operació binària $\cdot$ és associativa, l'operació nul·lària e n'especifica l'element neutre i l'operació unària $^{-1}$ assigna a cada element el seu invers; és a dir, com una àlgebra total $\mathbf{G} = (G, e, ^{-1}, \cdot)$ de tipus $(0, 1, 2)$ tal que, per a tots $x, y, z \in G$,

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

i, per a tot $x \in G$,

$$e \cdot x = x \cdot e = x, \quad x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e.$$

Aquestes condicions se solen expressar per mitjà d'equacions: concretament, diem que els grups satisfan les equacions[4]

$$\begin{gathered} e \cdot x \approx x,\ x \cdot e \approx x, \quad x \cdot x^{-1} \approx e,\ x^{-1} \cdot x \approx e, \\ x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z. \end{gathered}$$

Altres propietats dels grups s'expressen per mitjà d'equacions. Per exemple, un grup és abelià quan satisfà l'equació $x \cdot y \approx y \cdot x$, i és de n-torsió quan satisfà l'equació $x^n \approx e$.

Per formalitzar la noció d'equació, fixem d'ara endavant un conjunt numerable $\mathcal{X} = \{x_i \mid i \geq 1\}$, els elements del qual anomenarem *variables*. Donat un tipus

4 En les equacions simbolitzarem la igualtat per $\approx$, per distingir-la de la igualtat entre objectes, per a la qual reservem el símbol $=$.

d'àlgebres Σ, anomenarem, genèricament, una *equació de tipus* Σ a un parell $(p,q) \in \mathrm{T}_\Sigma(X)^2$, el qual farem que denoti $p \approx q$. Parlarem simplement d'*equacions*, sense referència al seu tipus, quan aquest se sobreentengui: per exemple, si considerem simultàniament àlgebres i equacions, entendrem sempre que totes són del mateix tipus.

En les estructures algebraiques habituals, com ara grups, anells, etc., diem que una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ satisfà una equació $p \approx q$ quan, sempre que substituïm de manera consistent les variables dels termes p i q de cada costat de l'equació per elements de l'àlgebra, i a continuació efectuem les operacions indicades pels termes sobre aquests elements, obtenim el mateix resultat a cada costat. Aquest procés de substitució de les variables dels termes p, q per elements de l'àlgebra $\mathbf{A}$ i posterior càlcul de les corresponents operacions sobre $\mathbf{A}$ es formalitza per mitjà de les aplicacions $p^{\mathbf{A}}, q^{\mathbf{A}}$ associades a aquests termes, aplicades a qualsevol aplicació $f : X \to A$ que assigni a les variables dels termes els elements pels quals les substituïm.

En les àlgebres totals aquesta noció informal es tradueix en una definició clara i única d'equació i la seva satisfacció.

23 Definició *Una àlgebra total* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ satisfà *una equació* $p \approx q$, *en símbols* $\mathbf{A} \vDash p \approx q$, *quan* $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ *com a aplicacions* $A^X \to A$*; és a dir, quan* $p^{\mathbf{A}}(f) = q^{\mathbf{A}}(f)$ *per a tota* $f \in A^X$.

Les equacions donades abans per als grups són exemples d'equacions en aquest sentit.

Ara, observem que la traducció formal a les àlgebres parcials d'aquesta noció intuïtiva d'equació (i la seva satisfacció) no és única, perquè la parcialitat de les aplicacions associades a termes sobre les àlgebres parcials fa que la «igualtat» de dues aplicacions d'aquestes pugui tenir diversos significats. Això implica que en la teoria de les àlgebres parcials puguem parlar de diferents tipus d'equacions, els més importants dels quals són els següents.

24 Definició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra parcial i* $p, q \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$ *dos termes.*

a) Direm que $\mathbf{A}$ satisfà l'equació feble $p \approx_w q$, *en símbols* $\mathbf{A} \vDash p \approx_w q$, *quan* $p^{\mathbf{A}}(f) = q^{\mathbf{A}}(f)$ *per a tota* $f \in \operatorname{dom} p^{\mathbf{A}} \cap \operatorname{dom} q^{\mathbf{A}}$.

b) Direm que $\mathbf{A}$ satisfà l'equació forta[5] $p \approx_s q$, *en símbols* $\mathbf{A} \vDash p \approx_s q$, *quan* $\operatorname{dom} p^{\mathbf{A}} = \operatorname{dom} q^{\mathbf{A}}$ *i* $p^{\mathbf{A}}(f) = q^{\mathbf{A}}(f)$ *per a tota* $f \in \operatorname{dom} p^{\mathbf{A}} = \operatorname{dom} q^{\mathbf{A}}$.

c) Direm que $\mathbf{A}$ satisfà l'equació existencial $p \approx_e q$, *en símbols* $\mathbf{A} \vDash p \approx_e q$, *quan* $\operatorname{dom} p^{\mathbf{A}} = \operatorname{dom} q^{\mathbf{A}} = A^X$ *i* $p^{\mathbf{A}}(f) = q^{\mathbf{A}}(f)$ *per a tota* $f \in A^X$.

És a dir,

- $\mathbf{A} \vDash p \approx_w q$ quan $p^{\mathbf{A}}|_{\operatorname{dom} p^{\mathbf{A}} \cap \operatorname{dom} q^{\mathbf{A}}} = q^{\mathbf{A}}|_{\operatorname{dom} p^{\mathbf{A}} \cap \operatorname{dom} q^{\mathbf{A}}}$;
- $\mathbf{A} \vDash p \approx_s q$ quan $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ com a aplicacions parcials $A^X \to A$;
- $\mathbf{A} \vDash p \approx_e q$ quan $p^{\mathbf{A}} = q^{\mathbf{A}}$ com a aplicacions *totals* $A^X \to A$.

5 O *equació de Kleene*, en homenatge a S. C. Kleene, que introduí aquest tipus d'equacions en el seu famós llibre *Introducció a la metamatemàtica*.

En particular, noteu que, per a cada parell de termes $(p,q) \in \mathrm{T}_\Sigma(\mathcal{X})^2$, tenim les implicacions

$$\mathbf{A} \models p \approx_e q \Longrightarrow \mathbf{A} \models p \approx_s q \Longrightarrow \mathbf{A} \models p \approx_w q.$$

D'aquestes nocions d'equació, l'existencial, de fet, és la bàsica, en el sentit que totes les altres es poden expressar en termes d'equacions existencials (com veurem més endavant), mentre que les equacions fortes semblen les naturals per tractar amb operacions parcials, com ja se n'adonà S. C. Kleene en usar-les amb aplicacions recursives. Noteu a més a més que, sobre una àlgebra total, les nocions d'equació feble, forta i existencial es col·lapsen en la donada a la definició 23.

Exemples

I) Una àlgebra $\mathbf{A}$ satisfà una equació existencial $t \approx_e t$ si i només si l'aplicació $t^{\mathbf{A}}\colon A^{\mathcal{X}} \to A$ és total. Per tant, una àlgebra $\mathbf{A}$ és total si i només si $\mathbf{A} \models \varphi(x_1,\ldots,x_{\eta(\varphi)}) \approx_e \varphi(x_1,\ldots,x_{\eta(\varphi)})$ per a tota $\varphi \in \Omega$. En canvi, tota àlgebra satisfà l'equació forta $t \approx_s t$.

II) Si $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, 0, 1, -, ^{-1}, +, \cdot)$ és un cos, aleshores $\mathbb{K} \models x_1 \cdot x_1^{-1} \approx_w 1$, però $\mathbb{K} \not\models x_1 \cdot x_1^{-1} \approx_s 1$.

III) Sigui $C = (\mathrm{Mor}\,(C), \mathrm{dom}\,, \mathrm{cod}\,, \circ)$ una categoria petita, entesa com una àlgebra de tipus $(1,1,2)$ segons l'exemple (III) de la secció 2. Aleshores C satisfà les equacions existencials

$$\begin{gathered}
\mathrm{dom}\,(x_1) \approx_e \mathrm{dom}\,(x_1),\ \mathrm{cod}\,(x_1) \approx_e \mathrm{cod}\,(x_1),\\
\mathrm{dom}\,(\mathrm{dom}\,(x_1)) \approx_e \mathrm{dom}\,(x_1),\ \mathrm{cod}\,(\mathrm{dom}\,(x_1)) \approx_e \mathrm{dom}\,(x_1),\\
\mathrm{dom}\,(cod(x_1)) \approx_e \mathrm{cod}\,(x_1),\ \mathrm{cod}\,(\mathrm{cod}\,(x_1)) \approx_e \mathrm{cod}\,(x_1),\\
x_1 \circ \mathrm{dom}\,(x_1) \approx_e x_1,\ \mathrm{cod}\,(x_1) \circ x_1 \approx_e x_1\,;
\end{gathered}$$

l'equació forta (corresponent a l'associativitat)

$$x_1 \circ (x_2 \circ x_3) \approx_s (x_1 \circ x_2) \circ x_3\,,$$

i les equacions febles

$$\mathrm{dom}\,(x_1 \circ x_2) \approx_w \mathrm{dom}\,(x_2),\ \mathrm{cod}\,(x_1 \circ x_2) \approx_w \mathrm{cod}\,(x_1).$$

Però si C té dos o més objectes, aleshores no satisfà

$$x_1 \circ (x_2 \circ x_3) \approx_e (x_1 \circ x_2) \circ x_3,\ \mathrm{dom}\,(x_1 \circ x_2) \approx_s \mathrm{dom}\,(x_2),\ \mathrm{cod}\,(x_1 \circ x_2) \approx_s \mathrm{cod}\,(x_1).$$

IV) Una àlgebra discreta amb dos o més punts satisfà totes les equacions febles excepte les de la forma $x_i \approx_w x_j$, amb $x_i, x_j \in \mathcal{X}$ i $x_i \neq x_j$, totes les equacions fortes on cap dels dos termes és una variable, i només les equacions existencials de la forma $x_i \approx_e x_i$, amb $x_i \in X$.

V) L'àlgebra buida satisfà totes les equacions fortes, però només les equacions existencials on cap dels dos termes no involucra operacions nul·làries.

Les equacions permeten expressar propietats de les àlgebres: per exemple, la commutativitat o l'associativitat d'una operació binària, o la distributivitat de dues operacions binàries. Això motiva que es consideri la classe formada per totes les àlgebres que satisfan un conjunt donat d'equacions.

25 Definició *Sigui $\mathcal{E}$ un conjunt d'equacions. Aleshores la* classe equacional *determinada per $\mathcal{E}$ és la classe de totes les àlgebres* totals *que satisfan totes les equacions de $\mathcal{E}$.*

De la mateixa manera, si $\mathcal{E}$ ara és un conjunt d'equacions existencials (respectivament, fortes, febles), aleshores la classe equacional existencial *(respectivament,* forta, feble*) determinada per $\mathcal{E}$ és la classe de totes les àlgebres que satisfan totes les equacions de $\mathcal{E}$.*

Exemples (Continuació)

VI) Els grups formen la classe equacional d'àlgebres totals $\mathbf{G} = (G, e, {}^{-1}, \cdot)$ de tipus $(0, 1, 2)$ determinada per les equacions

$$e \cdot x_1 \approx x_1, x_1 \cdot e \approx x_1, x_1 \cdot x_1^{-1} \approx e, x_1^{-1} \cdot x_1 \approx e,$$
$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) \approx (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3.$$

VII) La classe equacional forta d'àlgebres de tipus $(0, 1, 2)$ determinada per l'equació

$$e \approx_s x_1$$

consisteix només en l'àlgebra buida i totes les àlgebres trivials d'aquest tipus que tenen l'operació nul·lària e definida: cinc àlgebres diferents, llevat d'isomorfismes.

VIII) Els sistemes relacionals $\mathbf{A} = (A, (R_i)_{i \in I})$, entesos com a àlgebres segons l'exemple (V) de la secció 2, formen la classe equacional feble determinada per les equacions

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \approx_w x_1, \quad i \in I.$$

En tots els casos excepte el feble, se saben caracteritzar algebraicament aquestes classes equacionals per mitjà de construccions sota les quals són *tancades* en el sentit següent: una classe $\mathcal{K}$ és *tancada per productes directes* quan el producte directe de qualsevol família d'àlgebres de $\mathcal{K}$ pertany a $\mathcal{K}$; una classe $\mathcal{K}$ és *tancada per subàlgebres* de qualque tipus quan tota subàlgebra d'aquest tipus d'una àlgebra de $\mathcal{K}$ pertany a $\mathcal{K}$; una classe $\mathcal{K}$ és *tancada per imatges* de qualque tipus quan tota imatge d'aquest tipus d'una àlgebra de $\mathcal{K}$ pertany a $\mathcal{K}$; etc.

En el cas de les àlgebres totals, aquesta caracterització és el famós *teorema HSP de Birkhoff*, el qual apareix a l'article [3], considerat com el tret de sortida de l'àlgebra universal.

26 Teorema *Una classe $\mathcal{K}$ d'àlgebres totals similars és equacional si i només si és tancada per imatges homomorfes, subàlgebres i productes directes.*

Com que les classes equacionals d'àlgebres totals són casos particulars de classes equacionals existencials per l'exemple (I) d'aquesta secció, podem entendre aquest teorema de Birkhoff com un cas particular de la caracterització següent de les classes equacionals existencials, deguda a P. Burmeister.

27 Teorema *Una classe $\mathcal{K}$ d'àlgebres parcials similars és equacional existencial si i només si és* primitiva*: és a dir, tancada per imatges homomorfes, subàlgebres tancades i productes directes.*

Donarem la demostració d'aquesta caracterització al final de la secció 10, com a exemple d'ús de tot l'aparat introduït en aquest article.

La caracterització en el sentit del teorema HSP de Birkhoff de les classes equacionals fortes ha estat trobada recentment per B. Staruch (vegeu [23]), però tant el seu enunciat com la seva demostració ultrapassen amb escreix el nivell bàsic d'aquest article. Pel que fa a les classes equacionals febles, tot i que se'n coneixen diversos resultats parcials, roman obert el problema de trobar-ne una caracterització algebraica general similar a les anteriors. Tampoc no es coneix res sobre caracteritzacions d'aquest estil de classes equacionals definides per combinacions de diferents tipus d'equacions.

Tornem un moment a les categories petites enteses com a àlgebres de tipus $(1,1,2)$. A l'exemple (III) d'aquesta secció hem donat una sèrie d'equacions existencials, fortes i febles que són satisfetes per les categories petites. Però encara no podem identificar la classe de les categories petites amb la classe (equacional) de les àlgebres d'aquest tipus que satisfan aquestes equacions, perquè, de fet, la condició sobre la definició de la composició

$$g \circ f \text{ està definit si i només si } \operatorname{cod}(f) = \operatorname{dom}(g)$$

no és una condició equacional, sinó *quasiequacional*.

28 Definició *Una* implicació elemental *de tipus* Σ *és una expressió de la forma*

$$\Big(\bigwedge_{i\in I} p_i \approx_e q_i\Big) \to \Big(\bigwedge_{j\in J} p'_j \approx_e q'_j\Big)$$

on $p_i \approx_e q_i$*, per a tot* $i \in I$*, i* $p'_j \approx_e q'_j$*, per a tot* $j \in J$*, són equacions existencials de tipus* Σ*.*

Una implicació elemental és una quasiequació *quan la conclusió és una sola equació:*

$$\Big(\bigwedge_{i\in I} p_i \approx_e q_i\Big) \to p \approx_e q$$

Una implicació elemental és una equació existencial existencialment condicionada *(una* ECE-equació*) quan totes les equacions de la premissa són de la forma* $p_i \approx_e p_i$*.*

29 Definició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra parcial i*

$$\phi = \Big(\bigwedge_{i\in I} p_i \approx_e q_i\Big) \to \Big(\bigwedge_{j\in J} p'_j \approx_e q'_j\Big)$$

una implicació elemental. Direm que $\mathbf{A}$ satisfà ϕ*, en símbols* $\mathbf{A} \vDash \phi$*, quan, per a tota aplicació* $f \in A^X$*, si* $f \in \operatorname{dom} p_i^{\mathbf{A}} \cap \operatorname{dom} q_i^{\mathbf{A}}$ *i* $p_i^{\mathbf{A}}(f) = q_i^{\mathbf{A}}(f)$ *per a tot* $i \in I$*, aleshores* $f \in \operatorname{dom} {p'_j}^{\mathbf{A}} \cap \operatorname{dom} {q'_j}^{\mathbf{A}}$ *i* ${p'_j}^{\mathbf{A}}(f) = {q'_j}^{\mathbf{A}}(f)$ *per a tot* $j \in J$*.*

Per exemple, les categories petites satisfan les quasiequacions

$$\operatorname{dom}(x) \approx_e \operatorname{cod}(y) \to x \circ y \approx_e x \circ y$$
$$x \circ y \approx_e x \circ y \to \operatorname{dom}(x) \approx_e \operatorname{cod}(y).$$

Notem també que les equacions existencials, fortes i febles es poden interpretar en termes d'ECE-equacions:

- $\mathbf{A} \vDash p \approx_e q$ si i només si $\mathbf{A} \vDash \bigwedge \varnothing \to p \approx_e q$;
- $\mathbf{A} \vDash p \approx_s q$ si i només si $\mathbf{A} \vDash p \approx_e p \to p \approx_e q$ i $\mathbf{A} \vDash q \approx_e q \to p \approx_e q$;
- $\mathbf{A} \vDash p \approx_w q$ si i només si $\mathbf{A} \vDash (p \approx_e p \wedge q \approx_e q) \to p \approx_e q$.

Notem finalment que si $\mathbf{A}$ és una àlgebra total, aleshores $\mathbf{A}$ satisfà una ECE-equació $\left(\bigwedge_{i\in I} p_i \approx_e p_i\right) \to p \approx_e q$ si i només si $\mathbf{A} \vDash p \approx q$ en el sentit de la definició 23.

Direm que una classe $\mathcal{K}$ d'àlgebres similars és *implicacional* (respectivament, *quasiequacional*, *ECE-equacional*) quan està formada per totes les àlgebres que satisfan qualque conjunt donat d'implicacions elementals (respectivament, de quasiequacions, d'ECE-equacions). Les categories petites formen una classe quasiequacional. Notem també que les classes equacionals existencials, fortes i febles són casos particulars de classes ECE-equacionals.

30 Teorema *Una classe $\mathcal{K}$ d'àlgebres similars és una classe implicacional si i només si és* quasiprimitiva*: és a dir, tancada per imatges isomorfes, subàlgebres tancades i productes directes.*

Es coneixen també caracteritzacions similars per a les classes quasiequacionals i ECE-equacionals, que no donem aquí perquè involucren construccions (concretament, els productes reduïts), que no hem definit. Aquestes caracteritzacions formen part del *metateorema HSP de Birkhoff*, de H. Andréka i I. Németi. Aquest és un dels resultats més formidables de la teoria de les àlgebres parcials, sense paral·lel en la teoria de les àlgebres totals, el qual forneix caracteritzacions sintàctiques de les classes d'àlgebres tancades per diverses combinacions de construccions (inclosos els productes directes i reduïts, els diferents tipus d'imatges i els diferents tipus de subàlgebres). Vegeu [2] o [5] per a més detalls.

Volem comentar un darrer resultat al voltant de les equacions i les ECE-equacions. Si bé és clar que tota classe equacional forta és ECE-equacional, resulta que hi ha una connexió en el sentit contrari que mostra el caràcter bàsic de les equacions fortes. Sigui Σ un tipus d'àlgebres, i afegim-hi una nova operació binària ε, amb la qual cosa obtenim un nou tipus Σ' que conté el primer. Anomenarem *àlgebra generalitzada de tipus* Σ a una àlgebra de tipus Σ' que satisfaci l'equació forta

$$\varepsilon(x_1, x_2) \approx_s x_1$$

(és a dir, on l'operació ε sigui una primera projecció total).

31 Proposició *Amb les notacions anteriors:*

a) Si el tipus d'àlgebres Σ no conté cap operació nul·lària, aleshores una classe d'àlgebres de tipus Σ és la classe de totes les àlgebres que satisfan qualque conjunt donat d'ECE-equacions amb conjuncions finites d'equacions com a premisses *si i només si és la classe de les reduccions de tipus Σ de les àlgebres d'una classe equacional forta d'àlgebres generalitzades de tipus Σ.*

b) Si el tipus d'àlgebres Σ conté operacions nul·làries, aleshores l'equivalència anterior és vàlida per a les classes d'àlgebres de tipus Σ que continguin l'àlgebra buida.

Si el tipus d'àlgebres Σ conté qualque operació nul·lària φ, aleshores amb l'equació existencial $\varphi \approx_e \varphi$ es pot imposar que una àlgebra sigui no buida, mentre que això és impossible amb només equacions fortes. Per a més detalls sobre aquest tema, inclosa naturalment la demostració de la proposició anterior, vegeu [7].

8 Complecions lliures

La noció de *compleció lliure d'una àlgebra* és una de les eines més útils de la teoria de les àlgebres parcials, com veurem a les dues properes seccions. Per motivar aquesta noció, vegem primer de tot la següent propietat fonamental de les àlgebres de termes.

32 Proposició *Siguin* Σ *un tipus d'àlgebres,* X *un conjunt qualsevol,* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra total de tipus* Σ *i* $f\colon X \to A$ *una aplicació. Aleshores, existeix un únic homomorfisme* $\tilde{f}\colon \mathbf{T}_\Sigma(X) \to \mathbf{A}$ *que estén* f*.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{T}_\Sigma(X) \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\ \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

Demostració: Aquest homomorfisme és

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}\colon & \mathbf{T}_\Sigma(X) & \to & \mathbf{A} \\ & t & \mapsto & t^{\mathbf{A}}(f)\,. \end{array}$$

Noteu que si $\mathbf{A}$ és una àlgebra total, aleshores l'aplicació $t^{\mathbf{A}}$ és total per a cada terme $t \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$. □

Si interpretem el conjunt X com una àlgebra discreta, el resultat anterior diu que tot homomorfisme de X en una àlgebra total $\mathbf{A}$ s'estén de manera única a un homomorfisme de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ en $\mathbf{A}$. Recordem a més a més que X és una subàlgebra relativa de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ que la genera. Aquestes són les dues propietats que defineixen la compleció lliure d'una àlgebra.

33 Definició *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra i* $\overline{\mathbf{A}}$ *una àlgebra total que contingui* $\mathbf{A}$ *com una subàlgebra relativa i que sigui generada per* A*. Aleshores,* $\overline{\mathbf{A}}$ *és una* compleció lliure *de* $\mathbf{A}$ *quan per a cada homomorfisme* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$*, amb* $\mathbf{C}$ *una àlgebra total, existeix un homomorfisme* $\tilde{f}\colon \overline{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ *que l'estén.*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \overline{\mathbf{A}} \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\ \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

Per exemple, l'àlgebra de termes sobre un conjunt X és una compleció lliure de l'àlgebra discreta d'univers X, i una àlgebra total sempre és la seva pròpia compleció lliure.

Noteu que, per la proposició 15, si $\overline{\mathbf{A}}$ és una compleció lliure de $\mathbf{A}$, i per tant és generada per l'univers d'aquesta, aleshores l'homomorfisme $\tilde{f}\colon \overline{\mathbf{A}} \to \mathbf{C}$ que estén $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ és únic amb aquesta propietat. D'aquí es dedueix, per mitjà d'un argument estàndard, la unicitat llevat d'isomorfismes de la compleció lliure d'una àlgebra.

34 Proposició *Dues complecions lliures d'una àlgebra* $\mathbf{A}$ *són isomorfes, per mitjà d'un únic isomorfisme que indueix la identitat sobre* $\mathbf{A}$*.*

A partir d'ara cometrem l'abús de llenguatge de parlar de *la* compleció lliure d'una àlgebra, la qual sempre existeix per la proposició següent.

35 PROPOSICIÓ *Tota àlgebra té una compleció lliure.*

DEMOSTRACIÓ: Siguin $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ una àlgebra de tipus Σ i $\mathbf{T}_\Sigma(A)$ l'àlgebra total de termes de tipus Σ sobre A. Considerem l'àlgebra total $\mathbf{A}_0$ d'univers $\mathrm{T}_\Sigma(A)$ i amb operacions definides de la manera següent: per a cada $\varphi \in \Omega$ i $\underline{t} \in \mathrm{T}_\Sigma(A)^{\eta(\varphi)}$

$$\varphi^{\mathbf{A}_0}(\underline{t}) = \begin{cases} \varphi^{\mathbf{A}}(\underline{t}) & \text{si } \underline{t} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}} \\ \varphi^{\mathbf{T}_\Sigma(A)}(\underline{t}) & \text{altrament.} \end{cases}$$

Finalment, sigui $\overline{\mathbf{A}}$ la subàlgebra tancada de $\mathbf{A}_0$ generada per A. Aquesta $\overline{\mathbf{A}}$ és una compleció lliure de $\mathbf{A}$. □

La compleció lliure d'una àlgebra pot ser caracteritzada per propietats *internes*, com mostra el resultat següent.

36 PROPOSICIÓ *Siguin* $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra i* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *una àlgebra total que la conté com una subàlgebra relativa.*

Aleshores, $\mathbf{B}$ *és una compleció lliure de* $\mathbf{A}$ *si i només si satisfà les tres propietats següents:*

I) $C_{\mathbf{B}}(A) = B$.

II) Per a tota $\varphi \in \Omega$ *i per a tot* $\underline{b} \in B^{\eta(\varphi)}$, *si* $\varphi^{\mathbf{B}}(\underline{b}) \in A$, *aleshores* $\underline{b} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}$.

III) Per a tota parella d'operacions $\varphi, \phi \in \Omega$, *i per a tots* $\underline{b} \in B^{\eta(\varphi)}$, $\underline{b}' \in B^{\eta(\phi)}$, *si* $\varphi^{\mathbf{B}}(\underline{b}) = \phi^{\mathbf{B}}(\underline{b}') \notin A$, *aleshores* $\varphi = \phi$ *i* $\underline{b} = \underline{b}'$.

DEMOSTRACIÓ: Com que la compleció lliure $\overline{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$ descrita a la proposició anterior satisfà aquestes tres propietats, per la proposició 34 tenim que totes les complecions lliures de $\mathbf{A}$ la satisfan.

Recíprocament, suposem que $\mathbf{B}$ satisfà les propietats (I) a (III), i sigui $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un homomorfisme de $\mathbf{A}$ en una àlgebra total $\mathbf{C} = (C, (\varphi^{\mathbf{C}})_{\varphi\in\Omega})$. Sigui $\mathbf{B}' = (B, (\varphi^{\mathbf{B}'})_{\varphi\in\Omega})$ la subàlgebra feble de $\mathbf{B}$ amb el seu mateix univers i

$$\operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}'} = \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}} - \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}}$$

per a cada $\varphi \in \Omega$. Considerem les relacions $f_0 = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ i, per a cada $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} f_{n+1} = f_n \cup \{(\varphi^{\mathbf{B}'}(b_1, \dots, b_{\eta(\varphi)}), \varphi^{\mathbf{C}}(c_1, \dots, c_{\eta(\varphi)})) \mid \\ \varphi \in \Omega, (b_1, \dots, b_{\eta(\varphi)}) \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{B}'}, (b_1, c_1), \dots, (b_{\eta(\varphi)}, c_{\eta(\varphi)}) \in f_n\}. \end{aligned}$$

Sigui finalment $\tilde{f} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n \subseteq B \times C$. Aleshores resulta que $\tilde{f}$ és una aplicació de B en C que estén $f = f_0\colon A \to C$ i que és un homomorfisme de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{C}$. □

9 El teorema general de l'homomorfisme

Un dels problemes bàsics de tota teoria d'àlgebres és la caracterització de totes les imatges homomorfes d'una àlgebra per mitjà d'objectes associats de qualque manera «interna» a aquesta. Per exemple, tot grup imatge d'un grup $\mathbf{G}$ és isomorf a un quocient de $\mathbf{G}$ (en virtut de l'anomenat *primer teorema de l'isomorfisme* per a grups), la qual cosa, de fet, estableix una correspondència bijectiva entre els subgrups normals de $\mathbf{G}$ i les imatges homomorfes (llevat d'isomorfismes) de $\mathbf{G}$.

En el cas de les àlgebres parcials, una primera aproximació a la solució d'aquest problema és conseqüència del resultat següent, conegut com el *teorema feble de l'homomorfisme.*

37 Teorema *Siguin* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un homomorfisme ple i exhaustiu i* $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *un homomorfisme arbitrari. Aleshores existeix un (únic) homomorfisme* $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *tal que* $\hat{g} \circ f = g$ *si i només si* $\ker f \subseteq \ker g$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & \mathbf{B} \arrow[dl, dotted, "\hat{g}"] \\ \mathbf{C} & \end{tikzcd}$$

Demostració: Donades una aplicació exhaustiva $f\colon A \to B$ i una aplicació arbitrària $g\colon A \to C$, existeix una única aplicació $\hat{g}\colon B \to C$ tal que $\hat{g} \circ f = g$ si i només si $\ker f \subseteq \ker g$: aquesta aplicació $\hat{g}$ assigna, a cada $b \in B$, la imatge $g(a)$ de qualsevol $a \in A$ tal que $f(a) = b$, i, sota les hipòtesis de l'enunciat, és un homomorfisme $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$. □

La tesi del resultat anterior no sempre és vertadera si f no és ple: considereu per exemple una àlgebra discreta $\mathbf{A}$ d'univers A, una àlgebra total $\mathbf{B}$ amb el mateix univers A, $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ la identitat sobre A (que és homomorfisme però no ple) i $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ la mateixa identitat. Aleshores, i malgrat $\ker f = \ker g = \Delta_A$, no existeix cap homomorfisme $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tal que $\hat{g} \circ f = g$: de fet, no existeix cap homomorfisme de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$.

Del teorema anterior se n'obté fàcilment el resultat següent, el qual podríem anomenar *primer teorema feble de l'isomorfisme.*

38 Corol·lari *Sigui* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un homomorfisme ple i exhaustiu. Aleshores,* $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}/\ker f$.

Com abans, la tesi no és necessàriament vertadera si l'homomorfisme no és ple.

Així doncs, tenim una correspondència bijectiva entre les congruències sobre una àlgebra i les seves imatges homomorfes plenes (llevat d'isomorfismes). En el cas de les àlgebres totals, això resol completament el problema proposat al començament, car tot homomorfisme d'àlgebres totals és ple. Però per a àlgebres parcials arbitràries, aquest primer teorema feble de l'isomorfisme no ho és tot. Per exemple, combinant-lo amb la definició de la compleció lliure d'una àlgebra (definició 33), obtenim el resultat següent.

39 COROL·LARI *Siguin $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfisme exhaustiu, amb $\mathbf{B}$ una àlgebra total, i $\tilde{f}\colon \overline{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$ l'únic homomorfisme de la compleció lliure $\overline{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ que l'estén. Aleshores, $\mathbf{B} \cong \overline{\mathbf{A}}/\ker \tilde{f}$.*

Per tractar el cas general, necessitem un teorema *general* de l'homomorfisme que valgui per a homomorfismes arbitraris: cerquem, concretament, un resultat de la forma:

> Donats un homomorfisme exhaustiu $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ i un homomorfisme arbitrari $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, existeix un (únic) homomorfisme $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tal que $\hat{g} \circ f = g$ si i només si ... (i aquí, una condició adient),

del qual puguem deduir una caracterització de les imatges homomorfes d'una àlgebra, similar a les donades als corol·laris anteriors per a les imatges homomorfes plenes i per a les imatges homomorfes totals. El corol·lari 39 indica que les complecions lliures intervindran en la condició que cerquem.

El teorema general de l'homomorfisme que resol aquest problema és degut a J. Schmidt [20] i, de fet, encara és més general que el que cerquem, perquè s'aplica a homomorfismes $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ densos (definició 16). Per poder explicar-lo, necessitem una sèrie de nocions i resultats preliminars.

40 DEFINICIÓ *Un* segment inicial *d'una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ és una subàlgebra relativa $\mathbf{D} = (D, (\varphi^{\mathbf{D}})_{\varphi\in\Omega})$, amb $D \neq \emptyset$, tal que, per a tota operació $\varphi \in \Omega$,*

$$\textit{si } \underline{a} \in \operatorname{dom}\varphi^{\mathbf{A}} \textit{ i } \varphi^{\mathbf{A}}(\underline{a}) \in D, \textit{ aleshores } \underline{a} \in D^{\eta(\varphi)}.$$

EXEMPLES

I) Una àlgebra $\mathbf{A}$ és segment inicial de la seva compleció lliure $\overline{\mathbf{A}}$, per la segona propietat característica de les complecions lliures donada a la proposició 36.

II) L'únic segment inicial d'un grup $\mathbf{G}$ és aquest mateix. En efecte, si $\mathbf{D}$ és un segment inicial d'univers D de $\mathbf{G} = (G, e, {}^{-1}, \cdot)$ i $x \in D$, aleshores, pel fet que $x \cdot e = x \in D$, tenim $e \in D$, i ara, com que $y \cdot y^{-1} = e \in D$ per a tot $y \in G$, concloem que $G = D$.

III) Els segments inicials de l'àlgebra $\underline{\mathbb{N}}$ de l'exemple (I) de la secció 3 són les seves subàlgebres relatives $\underline{\mathbb{N}}_n$ sobre els conjunts de la forma $\{0, \dots, n\}$.

Per simplificar el llenguatge, donada una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$, anomenarem $\mathbf{A}$-*segment inicial* a un segment inicial de la seva compleció lliure $\overline{\mathbf{A}}$ que contingui $\mathbf{A}$ com una subàlgebra relativa i donat un homomorfisme d'àlgebres $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, anomenarem *extensió inicial* seva a qualsevol homomorfisme $f'\colon \mathbf{Dom}\, f' \to \mathbf{B}$ que l'estengui, definit sobre un $\mathbf{A}$-segment inicial. Com que l'univers A d'una àlgebra $\mathbf{A}$ genera $\overline{\mathbf{A}}$, també genera qualsevol $\mathbf{A}$-segment inicial, i aleshores, per la proposició 15, per a cada $\mathbf{A}$-segment inicial existeix com a molt una extensió inicial de f que la té per origen.

El nostre proper objectiu és demostrar que tot homomorfisme admet una extensió inicial màxima: és el *teorema general de recursió*.

41 Teorema *Un homomorfisme d'àlgebres* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *té una única extensió inicial tancada* $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \to \mathbf{B}$. *A més a més, aquesta extensió inicial de* f *és màxima.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \arrow[r, hook] \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] & \overline{\mathbf{A}} \\
\mathbf{B} & &
\end{tikzcd}$$

Demostració: Siguin $\mathbf{B} \hookrightarrow \overline{\mathbf{B}}$ la compleció lliure de $\mathbf{B}$ i $\bar{f}\colon \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{B}}$ l'únic homomorfisme que estén $\mathbf{A} \xrightarrow{f} \mathbf{B} \hookrightarrow \overline{\mathbf{B}}$. Siguin aleshores $\mathrm{Dom}\,\tilde{f} = \bar{f}^{-1}(B)$, on B és l'univers de $\mathbf{B}$, i $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \to \mathbf{B}$ la restricció de $\bar{f}$ a la subàlgebra relativa de $\overline{\mathbf{A}}$ d'univers $\mathrm{Dom}\,\tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \arrow[r, hook] \arrow[dl, "\tilde{f}"] & \overline{\mathbf{A}} \arrow[d, "\bar{f}"] \\
\mathbf{B} \arrow[rr, hook] & & \overline{\mathbf{B}}
\end{tikzcd}$$

El fet que $\bar{f}\colon \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{B}}$ sigui un homomorfisme d'àlgebres totals que estén f implica que $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \to \mathbf{B}$ és una extensió inicial tancada de f. I atès que $\overline{\mathbf{A}}$ és la compleció lliure de qualsevol $\mathbf{A}$-segment inicial, resulta que $\tilde{f}$ és l'única extensió inicial tancada i l'extensió inicial màxima de f. □

Si apliquem el teorema general de recursió a una aplicació d'un conjunt X (interpretat com una àlgebra discreta) en una àlgebra $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$, l'extensió inicial tancada única que obtenim és

$$\begin{array}{rrcl} \tilde{f}\colon & \mathbf{Dom}\,\tilde{f} & \longrightarrow & \mathbf{A} \\ & t & \longmapsto & t^{\mathbf{A}}(f)\,, \end{array}$$

on $\mathbf{Dom}\,\tilde{f}$ és la subàlgebra relativa de $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ sobre $\mathrm{Dom}\,\tilde{f} = \{t \in \mathrm{T}_\Sigma(X) \mid f \in \mathrm{dom}\,t^{\mathbf{A}}\}$.

42 Proposició *Sigui* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un homomorfisme i* $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \to \mathbf{B}$ *la seva extensió inicial tancada. Aleshores,* $\tilde{f}$ *és exhaustiu si i només si* f *és dens.*

Demostració: El motiu és que $C_{\mathbf{B}}(f(A)) = C_{\mathbf{B}}(\tilde{f}(A)) = \tilde{f}(C_{\mathbf{Dom}\,\tilde{f}}(A)) = \tilde{f}(\mathrm{Dom}\,\tilde{f})$ (on A és l'univers de $\mathbf{A}$). □

El *teorema general de l'homomorfisme* de J. Schmidt diu ara el següent.

43 Teorema *Siguin* $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *un homomorfisme dens i* $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *un homomorfisme arbitrari. Aleshores existeix un (únic) homomorfisme* $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *tal que* $\hat{g} \circ f = g$ *si i només si* $\ker \tilde{f} \subseteq \ker \tilde{g}$, *on* $\tilde{f}$ *i* $\tilde{g}$ *són les extensions inicials tancades de* f *i* g, *respectivament.*

Demostració: Si $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ és un homomorfisme tal que $\hat{g} \circ f = g$, aleshores

$$\hat{g} \circ \tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \longrightarrow \mathbf{C}$$

és una extensió inicial de g i per tant la màxima extensió inicial $\tilde{g}$ de g estén $\hat{g} \circ \tilde{f}$, la qual cosa implica directament que $\ker \tilde{f} \subseteq \ker \tilde{g}$.

Recíprocament, si $\ker \tilde{f} \subseteq \ker \tilde{g}$, aleshores $\operatorname{Dom} \tilde{f} \subseteq \operatorname{Dom} \tilde{g}$, per la qual cosa

$$\ker \tilde{f} \subseteq \ker \tilde{g} \cap (\operatorname{Dom} \tilde{f})^2 = \ker \tilde{g}\,|_{\operatorname{Dom} \tilde{f}}.$$

Ara, $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\, \tilde{f} \to \mathbf{B}$ és un homomorfisme tancat, i és exhaustiu per la proposició anterior. Per tant, si apliquem el teorema feble de l'homomorfisme a $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\, \tilde{f} \to \mathbf{B}$ i $\tilde{g}\,|_{\operatorname{Dom} \tilde{f}}\colon \mathbf{Dom}\, \tilde{f} \to \mathbf{C}$, concloem que existeix un homomorfisme $\hat{g}\colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ tal que $\hat{g} \circ \tilde{f} = \tilde{g}\,|_{\operatorname{Dom} \tilde{f}}$, el qual és l'homomorfisme tal que $\hat{g} \circ f = g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ que cercàvem. □

44 Corol·lari *Sigui $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfisme dens. Aleshores*

$$\mathbf{B} \cong \mathbf{Dom}\, \tilde{f} / \ker \tilde{f}$$

on $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\, \tilde{f} \to \mathbf{B}$ és l'extensió inicial tancada de f.

D'aquesta manera obtenim una correspondència bijectiva entre les congruències tancades sobre $\mathbf{A}$-segments inicials i les imatges homomorfes denses de $\mathbf{A}$ (llevat d'isomorfismes), la qual cosa resol el problema plantejat al principi d'aquesta secció.

10 El teorema de la solució universal

Un dels instruments més poderosos de l'àlgebra és l'existència, a certes classes d'àlgebres, d'*àlgebres lliures* generades per conjunts qualssevol de generadors. Recordem per exemple el cas dels grups. Per a cada conjunt X, sabem construir el *grup lliure* $\mathbf{F}(X)$ generat per X, el qual satisfà que qualsevol aplicació $f\colon X \to \mathbf{G}$, amb $\mathbf{G}$ un grup, s'estengui de manera única a $\mathbf{F}(X)$. (No s'ha de confondre aquest grup lliure $\mathbf{F}(X)$ amb l'àlgebra de termes de tipus $(0,1,2)$ sobre X, que satisfà aquesta propietat d'extensió per a totes les àlgebres totals d'aquest tipus, però que no és un grup.) A partir d'aquí es demostra que tot grup és quocient d'un grup lliure i, pel primer teorema de l'isomorfisme per a grups, també es demostra l'existència d'una correspondència bijectiva entre les classes d'isomorfisme de grups generats per conjunts de cardinal menor o igual que κ i els subgrups normals d'un grup lliure generat per un conjunt de cardinal κ. De la mateixa manera, per a cada conjunt X i per a cada enter positiu n, sabem construir un *grup de n-torsió lliure* $\mathbf{F}_n(X)$ generat per X i que satisfà la mateixa propietat d'extensió que $\mathbf{F}(X)$, però només per a aplicacions de X en grups de n-torsió; això s'usa en l'estudi dels grups de torsió fixada, com per exemple en el problema de Burnside. També sabem construir, per a cada conjunt X, un *grup abelià lliure* $\mathbf{Ab}(X)$ generat per X que satisfà la mateixa propietat d'extensió que $\mathbf{F}(X)$, però només per a aplicacions de X en grups abelians. I així successivament.

Aquests diferents tipus de grups lliures són exemples del concepte d'*àlgebra* (total) *lliure* en àlgebra universal.

45 Definició *Siguin $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ una àlgebra total generada per un subconjunt $X \subseteq A$, i $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres totals del mateix tipus que* $\mathbf{A}$. *Aleshores,* $\mathbf{A}$ *és* lliure a $\mathcal{K}$ sobre X *si i només si* $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ *i per a tota àlgebra* $\mathbf{B} = (B, (\varphi^{\mathbf{B}})_{\varphi\in\Omega})$ *de $\mathcal{K}$ i*

per a tota aplicació $f: X \to B$ existeix un homomorfisme $\tilde{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que estén f.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{A} \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\ \mathbf{B} & \end{tikzcd}$$

Com que, a la definició anterior, X genera $\mathbf{A}$, la proposició 15 implica que l'homomorfisme $\tilde{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que estén f és únic.

Exemples

I) Els grups $\mathbf{F}(X)$, $\mathbf{F}_n(X)$ i $\mathbf{Ab}(X)$ són àlgebres lliures sobre X a les classes de tots els grups, de tots els grups de n-torsió i de tots els grups abelians, respectivament.

II) El semigrup de paraules sobre un conjunt X és lliure sobre aquest X a la classe de tots els semigrups.

III) Un espai vectorial és lliure sobre qualsevol base seva a la classe de tots els espais vectorials entesos com a àlgebres segons l'exemple (II) de la secció 2.

IV) L'anell de polinomis $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ és lliure sobre $\{x_1, \dots, x_n\}$ a la classe de tots els anells commutatius, però no a la classe de tots els anells.

V) L'àlgebra de termes de tipus Σ sobre X és lliure sobre X a la classe de totes les àlgebres totals de tipus Σ.

Així com els grups lliures (o els grups de n-torsió lliures, o els grups abelians lliures) són objectes molt útils en la teoria dels grups, les àlgebres lliures ho són en àlgebra universal, principalment gràcies a les tres propietats següents:

- Tota classe quasiprimitiva (és a dir, implicacional —vegeu el teorema 30) d'àlgebres totals té, per a cada conjunt X, una àlgebra lliure sobre un conjunt equipotent a X.
- Si la classe $\mathcal{K}$ és equacional, aleshores una àlgebra pertany a $\mathcal{K}$ si i només si és una imatge homomorfa d'una àlgebra lliure a $\mathcal{K}$.
- Si $\mathcal{K}$ és una classe equacional i $\mathbf{F}$ és una àlgebra lliure a $\mathcal{K}$, aleshores $\mathbf{F}$ satisfà *exactament* les equacions que són satisfetes per totes les àlgebres de $\mathcal{K}$.

Gràcies a aquestes propietats, les àlgebres lliures poden servir, per exemple, per demostrar que totes les àlgebres d'una certa classe equacional d'àlgebres totals satisfan una certa equació. De fet, aquest és l'ingredient bàsic de la demostració original de Birkhoff del teorema 26.

Fins a quin punt podem recuperar aquest instrument en la teoria de les àlgebres parcials? Si reescrivim la definició d'àlgebra lliure en un llenguatge més proper a les àlgebres parcials, obtenim que una àlgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ és lliure a $\mathcal{K}$ sobre un cert subconjunt X, el qual identificarem amb l'àlgebra discreta sobre aquest, quan la inclusió $i: X \to \mathbf{A}$ és un homomorfisme dens amb la propietat següent:

> Per a qualsevol homomorfisme $f: X \to \mathbf{B}$ amb $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ existeix un (únic) homomorfisme $\tilde{f}: \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$.

La generalització natural d'aquest concepte a àlgebres parcials ara és evident.

46 Definició *Siguin* $\mathbf{A}$ *una àlgebra i* $\mathcal{K}$ *una classe d'àlgebres del mateix tipus. Una* solució universal *de* $\mathbf{A}$ *dins* $\mathcal{K}$ *és un homomorfisme dens* $e: \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$*, amb* $\hat{\mathbf{A}} \in \mathcal{K}$*, tal*

que, donat qualsevol homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *amb* $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$*, existeix un homomorfisme* $\tilde{f}\colon \hat{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$ *tal que* $\tilde{f} \circ e = f$*.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \hat{\mathbf{A}} \arrow[dl, dotted, "\tilde{f}"] \\
\mathbf{B} &
\end{tikzcd}$$

Com abans, l'homomorfisme $\tilde{f}\colon \hat{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$ tal que $\tilde{f} \circ e = f$ és únic perquè e és dens. Notem també que si $e\colon \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$ i $e_0\colon \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}_0$ són dues solucions universals dins $\mathcal{K}$ de $\mathbf{A}$, aleshores $\hat{\mathbf{A}} \cong \hat{\mathbf{A}}_0$.

El primer teorema sobre l'existència de solucions universals és degut a J. Schmidt (vegeu [19]), i és el següent.

47 Teorema *Donades una àlgebra* $\mathbf{A}$ *i una classe quasiprimitiva* $\mathcal{K}$ *d'àlgebres del mateix tipus, existeix una solució universal* $e\colon \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$ *de* $\mathbf{A}$ *dins* $\mathcal{K}$*.*

Demostració: Siguin $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ una àlgebra parcial i $\mathcal{K}$ una classe quasiprimitiva d'àlgebres del mateix tipus. Pel teorema general de recursió (teorema 41), per a cada homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, amb $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, existeix una (única) extensió inicial tancada $\tilde{f}\colon \mathbf{Dom}\,\tilde{f} \to \mathbf{B}$. Sigui

$$\hom_{\mathcal{K}}(\mathbf{A}) = \bigcup\{f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B} \mid \mathbf{B} \in \mathcal{K},\ f \text{ un homomorfisme}\}.$$

És clar que $\hom_{\mathcal{K}}(\mathbf{A}) \neq \emptyset$, perquè $\mathcal{K}$ conté totes les àlgebres trivials totals (isomorfes al producte directe de la família buida) i tota àlgebra sempre admet un homomorfisme en una àlgebra trivial total. Per desgràcia, $\hom_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$ en general no és un conjunt, sinó una classe pròpia. Considerem aleshores sobre $\hom_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$ la relació d'equivalència

$$f \sim g \text{ si i només si } \ker\tilde{f} = \ker\tilde{g}$$

(on $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ són les extensions inicials tancades de f i g, respectivament), i sigui $\widetilde{\hom}_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$ un *conjunt* format per un, i només un, representant de cada classe d'equivalència de $\hom_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$ mòdul aquesta relació.

Siguin ara D la intersecció dels universos de tots els segments inicials $\mathbf{Dom}\,\tilde{f}$ amb $f \in \widetilde{\hom}_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$, i $\mathbf{D}$ la subàlgebra relativa de $\overline{\mathbf{A}}$ sobre D, que és un $\mathbf{A}$-segment inicial. Considerem la relació sobre D

$$\Theta = \bigcap\{\ker\tilde{f} \mid f \in \widetilde{\hom}_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})\}.$$

Es demostra fàcilment que Θ és una congruència tancada sobre $\mathbf{D}$, i que $\Theta \subseteq \ker\tilde{g}$ per a tot $g \in \hom_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})$. I resulta que

$$\mathbf{D}/\Theta \in \mathcal{K}.$$

En efecte, per a tot homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ amb $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, sabem pel corol·lari 38 que $\mathbf{Dom}\,\tilde{f}/\ker\tilde{f}$ és isomorf a la subàlgebra tancada de $\mathbf{B}$ sobre $\tilde{f}(\mathrm{Dom}\,\tilde{f})$, i per tant $\mathbf{Dom}\,\tilde{f}/\ker\tilde{f} \in \mathcal{K}$ perquè $\mathcal{K}$ és tancada per imatges isomorfes i subàlgebres tancades. Llavors, el producte directe de totes aquestes àlgebres

$$\prod_{f\in\widetilde{\hom}_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})} \mathbf{Dom}\,\tilde{f}/\ker\tilde{f}$$

també pertany a $\mathcal{K}$, perquè és tancada per productes directes. Ara, si associem a cada classe d'equivalència $[a]_\Theta \in D/\Theta$ l'element $([a]_{\ker \tilde{f}})_{f \in \widetilde{\hom}_{\mathcal{K}}(\mathbf{A})}$ d'aquest producte directe, obtenim una subàlgebra tancada d'aquest producte isomorfa a $\mathbf{D}/\Theta$, per la qual cosa $\mathbf{D}/\Theta \in \mathcal{K}$.

Sigui $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{D}/\Theta$ i sigui $e\colon \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$ la restricció a $\mathbf{A}$ de la projecció natural $\pi_\Theta\colon \mathbf{D} \to \hat{\mathbf{A}}$. Com que π_Θ és un homomorfisme tancat definit sobre un $\mathbf{A}$-segment inicial, tenim (per la unicitat de l'extensió inicial tancada) que $\tilde{e} = \pi_\Theta$, i, com que π_Θ és exhaustiu, la proposició 42 ens diu que e és dens.

Sigui finalment $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorfisme amb $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$. Aleshores $\Theta \subseteq \ker \tilde{g}$, i pel teorema general de l'homomorfisme (teorema 43) existeix un homomorfisme $\hat{g}\colon \hat{\mathbf{A}} \to \mathbf{B}$ tal que $\hat{g} \circ e = g$. □

48 Observació La demostració que hem donat del teorema de la solució universal no és l'original de J. Schmidt, la idea bàsica de la qual (similar a la construcció de Birkhoff de les àlgebres lliures dins una classe quasiprimitiva, o la demostració usual del teorema del functor adjunt en teoria de categories) és la següent.

Siguin $\mathcal{K}$ una classe quasiprimitiva d'àlgebres de tipus Σ, i $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi \in \Omega})$ una àlgebra del mateix tipus, de la qual volem trobar una $\mathcal{K}$-solució universal. El primer que cal notar és que la proposició 10 implica l'existència d'un cardinal κ tal que l'univers de tota àlgebra de tipus Σ generada per un conjunt de cardinal menor o igual que el de A té cardinal, com a molt, κ. Siguin X_κ un conjunt de cardinal aquest κ i $\mathcal{K}_\kappa$ el conjunt de les àlgebres de $\mathcal{K}$ d'univers contingut dins X_κ. Com que $\mathcal{K}$ és tancada per imatges isomorfes, tota àlgebra de $\mathcal{K}$ generada per un conjunt de cardinal menor o igual que el de A és isomorfa a una àlgebra de $\mathcal{K}_\kappa$.

Siguin ara

$$\hom_\kappa(\mathbf{A}) = \bigcup\{f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B} \mid \mathbf{B} \in \mathcal{K}_\kappa,\ f \text{ un homomorfisme}\}$$

i $\mathbf{P}$ el producte directe de la família, de conjunt d'índexs $\hom_\kappa(\mathbf{A})$, formada per una còpia de cada àlgebra de $\mathcal{K}_\kappa$ per a cada homomorfisme diferent de $\mathbf{A}$ en ella:

$$\mathbf{P} = \prod_{\mathbf{B} \in \mathcal{K}_\kappa} \mathbf{B}^{\hom(\mathbf{A},\mathbf{B})}$$

(on $\hom(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ denota el conjunt d'homomorfismes de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$). Sigui $e\colon \mathbf{A} \to \mathbf{P}$ l'homomorfisme de $\mathbf{A}$ en aquest producte induït per la família d'homomorfismes $\hom_\kappa(\mathbf{A})$ (vegeu la proposició 22) i sigui $\hat{\mathbf{A}}$ la subàlgebra de $\mathbf{P}$ generada per la imatge de e. Aleshores $e\colon \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$ és la $\mathcal{K}$-solució universal de $\mathbf{A}$. En efecte, per a cada homomorfisme $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ amb $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$, si $i\colon \mathbf{B}_0 \hookrightarrow \mathbf{B}$ és la inclusió de la subàlgebra tancada de $\mathbf{B}$ generada per $f(A)$, aleshores podem trobar una «còpia isomorfa» $f'\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}_0'$ de $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}_0$ dins $\hom_\kappa(\mathbf{A})$, i aleshores f és igual a $e\colon \mathbf{A} \to \hat{\mathbf{A}}$ seguit de la restricció a $\hat{\mathbf{A}}$ de la projecció des de $\mathbf{P}$ sobre $\mathbf{B}_0'$ corresponent a l'índex f', seguit de l'isomorfisme de $\mathbf{B}_0'$ en $\mathbf{B}_0$ que transforma f' en f i seguit finalment de la inclusió $\mathbf{B}_0 \hookrightarrow \mathbf{B}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "e"] \arrow[rrrrr, bend left, "f"] \arrow[rrr, bend right, "f'"'] & \hat{\mathbf{A}} \arrow[r, hook] & \mathbf{P} \arrow[r, "p_{f'}"] & \mathbf{B}_0' \arrow[r] & \mathbf{B}_0 \arrow[r, hook, "i"] & \mathbf{B}
\end{tikzcd}$$

Els exemples donats abans d'àlgebres lliures serveixen com a exemples de solucions universals d'àlgebres discretes dins classes primitives d'àlgebres totals. Vegemne uns quants més.

Exemples (Continuació)

VI) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, aleshores la seva solució universal dins $\mathcal{K}$ és $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \colon \mathbf{A} \to \mathbf{A}$.

VII) Si prenem com a classe $\mathcal{K}$ la de totes les àlgebres totals d'un tipus donat, la solució universal dins $\mathcal{K}$ d'una àlgebra és la (inclusió dins la) seva compleció lliure.

VIII) Si prenem com a classe $\mathcal{K}$ una classe equacional d'àlgebres totals determinada per un conjunt d'equacions $\mathcal{E}$, la solució universal dins $\mathcal{K}$ d'una àlgebra $\mathbf{A}$ s'obté fent el quocient de la seva compleció lliure $\overline{\mathbf{A}}$ per la menor congruència sobre aquesta que identifica els parells de la forma $(p^{\overline{\mathbf{A}}}(f), q^{\overline{\mathbf{A}}}(f))$ amb $p \approx q \in \mathcal{E}$ i $f \in \overline{A}^{X}$. Aquesta solució universal també s'obté com el quocient de $\overline{\mathbf{A}}$ per la clausura transitiva de la relació que identifica els parells de la forma $(p^{\overline{\mathbf{A}}}(f), q^{\overline{\mathbf{A}}}(f))$, amb $p \approx q$ qualsevol equació satisfeta per totes les àlgebres de $\mathcal{K}$ i $f \in A^{X}$; aquesta clausura transitiva resulta ser una congruència sobre $\overline{\mathbf{A}}$.

Ara vegem el que hem recuperat amb les solucions universals per a les àlgebres totals.

- Tota classe quasiprimitiva d'àlgebres parcials té una solució universal de qualsevol àlgebra parcial; això és una mica més del que teníem per a àlgebres totals, on només consideràvem, per dir-ho així, solucions universals d'àlgebres discretes.
- Si $\mathcal{K}$ és una classe primitiva, aleshores una àlgebra pertany a $\mathcal{K}$ si i només si és una imatge homomorfa d'una solució universal dins $\mathcal{K}$: la implicació directa és deguda al fet que tota àlgebra de $\mathcal{K}$ és la seva pròpia solució universal dins $\mathcal{K}$, i la implicació inversa al fet que $\mathcal{K}$ és tancada per imatges homomorfes.

I què passa amb les equacions? Sigui $\mathcal{X}$ el conjunt numerable de variables sobre el qual construïm les equacions, i entenguem-lo també com l'àlgebra discreta d'univers aquest conjunt, de manera que la seva compleció lliure és $\mathbf{T}_{\Sigma}(\mathcal{X})$. Si apliquem la construcció de la demostració del teorema de la solució universal a $\mathcal{X}$, tenim que, donat un terme $p \in \mathrm{T}_{\Sigma}(\mathcal{X})$, $p \in D$ si i només si a cada àlgebra $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ l'aplicació $p^{\mathbf{B}}$ associada a p és total i donats dos termes $p, q \in \mathrm{T}_{\Sigma}(\mathcal{X})$, $(p, q) \in \Theta$ si i només si a cada àlgebra $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ les aplicacions $p^{\mathbf{B}}$ i $q^{\mathbf{B}}$ associades a aquests dos termes són la mateixa aplicació total. Per tant, podem afegir als dos punts anteriors el següent:

- Si $\mathbf{F}$ és la solució universal dins $\mathcal{K}$ d'un conjunt numerable, aleshores $\mathbf{F}$ satisfà exactament les equacions existencials que són satisfetes per totes les àlgebres de $\mathcal{K}$.

Precisament aquestes reflexions són l'ingredient essencial de la demostració del teorema 27, que afirma que una classe d'àlgebres és equacional existencial si i només si és primitiva.

Demostració (del teorema 27): La implicació directa és immediata, perquè la satisfacció existencial d'una equació s'encomana a les subàlgebres tancades, les imatges homomorfes i els productes directes. Pel que fa al recíproc, sigui $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres parcials tancada per imatges homomorfes, subàlgebres tancades i productes directes; en particular, $\mathcal{K}$ és quasiprimitiva. Sigui

$$\mathcal{E}_e(\mathcal{K}) = \{p \approx_e q \mid \mathbf{A} \models p \approx_e q \text{ per a tota } \mathbf{A} \in \mathcal{K}\}$$

la seva *teoria equacional existencial*. Aleshores demostrarem que $\mathcal{K}$ és la classe equacional existencial determinada per $\mathcal{E}_e(\mathcal{K})$; de fet, basta demostrar que $\mathcal{K}$ conté aquesta classe equacional, perquè l'altra inclusió es verifica per definició.

Sigui doncs $\mathbf{A} = (A, (\varphi^{\mathbf{A}})_{\varphi\in\Omega})$ una àlgebra que satisfà totes les equacions de $\mathcal{E}_e(\mathcal{K})$, i identifiquem el seu univers A amb l'àlgebra discreta sobre aquest conjunt. Siguin aleshores $\rho\colon A \to \widetilde{\mathbf{A}}$ la $\mathcal{K}$-solució universal de A i $\tilde{\rho}$ la seva extensió inicial tancada. Recordem de la demostració del teorema de la solució universal que

$$\ker\tilde{\rho} = \bigcap\{\ker\tilde{f}\colon A \to \mathbf{B} \mid f\colon A \to \mathbf{B} \text{ una aplicació amb } \mathbf{B} \in \mathcal{K}\}$$

(és la Θ d'aquella demostració). Per un altre costat, siguin $\mathrm{Id}_A\colon A \to \mathbf{A}$ l'homomorfisme donat per la identitat sobre el conjunt A i $\widetilde{\mathrm{Id}_A}$ la seva extensió inicial tancada.

Les consideracions sobre equacions efectuades just abans d'aquesta demostració indiquen que $\ker\tilde{\rho} \subseteq \ker\widetilde{Id_A}$. Llavors, pel teorema general de l'homomorfisme, existeix un homomorfisme $f\colon \widetilde{\mathbf{A}} \to \mathbf{A}$ tal que $f \circ \rho = \mathrm{Id}_A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_A"'] & \widetilde{\mathbf{A}} \arrow[dl, dotted, "f"] \\ \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

Com que Id_A és exhaustiva, f també ho és, i per tant $\mathbf{A}$ és una imatge homomorfa de l'àlgebra $\widetilde{\mathbf{A}} \in \mathcal{K}$: com que $\mathcal{K}$ és tancada per imatges homomorfes, això implica que $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, com volíem demostrar. $\square$

Encara que puguem entendre les solucions universals com un bon substitut de les àlgebres lliures quan tractem amb àlgebres parcials, no tots els mètodes coneguts per a àlgebres totals basats en les àlgebres lliures poden ser emprats per a àlgebres parcials i solucions universals, sobretot quan hi estan involucrades equacions no existencials. Per exemple, a [16] i [23] va ser necessari inventar construccions molt particulars, diferents als dos casos i adaptades a les necessitats dels arguments que s'hi desenvolupen, per resoldre dos vells problemes de la teoria de les àlgebres parcials que en el cas de les àlgebres totals es resolen emprant àlgebres lliures.

Referències

[1] Andréka, H., Burmeister, P., Németi, I. «Quasivarieties of partial algebras — a unifying approach towards a two-valued model theory for partial algebras», *Studia Sci. Math. Hungar.*, 16 (1981), 325–372.

[2] Andréka, H., Németi, I. «Generalization of the concept of variety and quasivariety to partial algebras through category theory», *Dissertationes Math.*, 204 (1983).

[3] Birkhoff, G. «On the structure of abstract algebras», *Proc. Cambridge. Philos. Soc.*, 29 (1935), 441–464.

[4] Broy, M., Wirsing, M. «Partial abstract data types», *Acta Informatica*, 18 (1982), 47–64.

[5] Burmeister, P. «A Model Theoretic Oriented Approach to Partial Algebras», *Math. Research*, 32, Akademie (1986).

[6] Burmeister, P. «Partial Algebras - An Introductory Survey. Algebras and Orders» [Ed., I. G. Rosenberg, G. Sabidussi], *NATO ASI Series C*, vol. 389, Kluwer Acad. Publ. (1993), 1–70.

[7] Burmeister, P. «On the equivalence of ECE- and generalized Kleene-equations for many-sorted partial algebras», *Contributions to General Algebra*, 9, Hölder-Pichler-Tempsky (1995), 91–106.

[8] Burmeister, P., Monserrat, M., Rosselló, F., Valiente, G. «Algebraic Transformation of Unary Partial Algebras II: Single-Pushout Approach», *Theoretical Computer Science*, 208 (1998). [En premsa]

[9] Burmeister, P., Rosselló, F., Torrens, J., Valiente, G. «Algebraic Transformation of Unary Partial Algebras I: Double-Pushout Approach», *Theoretical Computer Science*, 184 (1997), 145–193.

[10] Burris, S., Sankapanavar, H. P. *A Course in Universal Algebra*. Springer (1981). (Graduate Texts in Mathematics, 78).

[11] Ehrig, H., Grosse-Rhode, M., Wolter, U. «Applications of category theory to the area of algebraic specification in computer science», *Applied Categorical Structures*, 6 (1998), 1–35.

[12] Evans, T. «Embeddability and the word problem», *Journal of the London Math. Soc.*, 26 (1951), 64–71.

[13] Grätzer, G., Schmidt, E. T. «Characterization of congruence lattices of abstract algebras», *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 24 (1963), 34–59.

[14] Hoehnke, H. J. «On partial algebras», Contributions to Universal Algebra, *Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, vol. 29, North-Holland P. C. (1982).

[15] Jarzembski, G. «Spectral algebraic theories and their algebras as a categorical counterpart of partial algebras», *Seminarberichte Hagen*, 19 (1984), 225–243.

[16] Kosiuczenko, P. «Mal'cev type conditions for partial algebras», *Algebra Universalis*, 31 (1994), 467–474.

[17] Lampe, W. A. «The independence of certain related structures of a universal algebra, i - iv», *Algebra Universalis*, 2 (1972), 99–112, 270–283, 286–295, 296–302.

[18] Poythress, V. «Partial morphisms of partial algebras», *Algebra Universalis*, 3 (1973), 182–202.

[19] Schmidt, J. «A general existence theorem on partial algebras and its special cases», *Colloquium Math.*, 14 (1966), 73–87.

[20] Schmidt, J. «A morphism theorem for partial algebras», *Colloquium Math.*, 21 (1970), 5–21.

[21] Słomiński, J. «A theory of extensions of quasi-algebras to algebras», *Dissertationes Math.*, 40 (1964).

[22] Słomiński, J. «Peano algebras and quasi-algebras», *Dissertationes Math.*, 61 (1968).

[23] Staruch, B. *Caracterització algebraica de les classes d'àlgebres parcials definibles per equacions fortes.* Tesi de doctorat, Univ. de Varsòvia, 1997. (En polonès).

[24] Svozil, K. «Quantum computation and complexity theory I, II», *Bulletin of the EATCS*, 55 (febrer 1995), 170–207 i 56 (juny 1995), 116–136.

[25] Weinstein, A. «Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry», *Notices of the AMS*, 43 (juliol 1996), 744–752.

Wiktor Bartol,
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa
Polònia
bartol@mimuw.edu.pl

Peter Burmeister,
Fachbereich Mathematik,
Technische Universität Darmstadt
Schlossgartenstr. 7
D-64289 Darmstadt
Alemanya
burmeister@mathematik.tu-darmstadt.de

Francesc Rosselló
Departament de Ciències Matemàtiques i Informàtica,
Universitat de les Illes Balears
Cra. de Valldemossa, km 7,5
07071 Palma
cesc@ipc4.uib.es