Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 13, núm. 1, 1998. Pàg. 39–40.

El teorema de Bolzano implica l'axioma del suprem

M. Dalmau,* R. Quintanilla,* J. Saludes

Al cos real tota funció contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verifica la propietat dels valors intermedis; en particular la gràfica de f no pot passar de valors positius a valors negatius sense tallar l'eix d'abcisses. Imaginem aquest fet dient que als reals *no hi ha forats*; així el cos real realitza la nostra intuïció d'un continu de nombres.

Els racionals són un cos ordenat que és arquimedià però no complet (hi ha successions de Cauchy que no tenen límit). Al cos racional hi ha funcions contínues que no verifiquen la propietat dels valors intermedis; per exemple la funció $f(q) = q^2 - 2$ és contínua, positiva si $q > 2$, negativa si $0 < q < 1$, però no pren el valor 0.

Si a $\mathbb{R}(x)$, cos de fraccions de $\mathbb{R}[x]$, hi posem l'ordre lexicogràfic, obtenim un cos ordenat que és complet però no arquimedià. Considerem-hi la topologia de l'ordre. També en aquest cas hi ha funcions contínues que no verifiquen la propietat dels valors intermedis; per exemple la funció $f(\xi) = \xi^2 - x$ és contínua, positiva si $\xi > x$, negativa per $0 < \xi < 1$, però no pren el valor 0 (si $\frac{p^2}{q^2} = x$ tindríem $p^2 = xq^2$, que no pot ser per la paritat dels graus).

Imaginem aquests fets dient que $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}(x)$ *tenen forats.* L'objectiu d'aquesta nota és mostrar que el cos real és l'únic cos ordenat sense forats (en el sentit que les funcions contínues verifiquen la propietat dels valors intermedis) i serà, per tant, l'únic cos ordenat que realitza la nostra intuïció d'un continu de nombres.

També podem associar la idea d'un cos ordenat sense forats al fet que sigui connex. Veurem, però, que ser connex és equivalent a què es verifiqui la propietat dels valors intermedis (Proposició 1).

En el que segueix, X és un conjunt totalment ordenat (amb, almenys, tres punts) dotat amb la topologia de l'ordre, és a dir, els conjunts oberts són les unions arbitràries o les interseccions finites d'intervals $a^+ = \{x \in X : a < x\}$, $a^- = \{x \in X : a > x\}$ i tot l'espai, X.

Propietat de Bolzano *X té la propietat de Bolzano si donats qualsevol $a, b \in X$, $a < b$, $f : [a, b] \to X$ una aplicació contínua i $k \in X$ tal que $k \in (f(a), f(b))$ (o bé $k \in (f(b), f(a))$), existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.*

* Amb el suport del projecte PB96-0497 de la DGES.

1 PROPOSICIÓ *X és connex si i només si X té la propietat de Bolzano.*

PROVA: Si X no és connex existeix $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ que és obert i tancat alhora. Siguin $x, y, z \in X$ tals que $x < y < z$. Siguin $a \in A$ i $b \notin A$; definim $f(A) = x$, $f(A^c) = z$. La funció f és contínua perquè l'antiimatge d'un obert és A, A^c o bé X, que són oberts, però no pren el valor y que és un valor mig perquè $x = f(a) < y < f(b) = z$. X no té la propietat de Bolzano.

Si X no té la propietat de Bolzano, existeixen $a, b, k \in X$ i una $f : [a, b] \to X$ contínua, tal que $f(a) < k < f(b)$ (o bé $k \in (f(b), f(a))$) i tal que

k no té antiimatge. Els conjunts $A = \{x : f(x) \leq k\} \cup \{x : x \leq a\}$ i $B = \{x : f(x) \geq k\} \cup \{x : x \geq b\}$ són tancats, disjunts (perquè el valor k no s'assoleix), no buits ($a \in A$, $b \in B$) i tals que $X = A \cup B$. Per tant X no és connex. □

2 PROPOSICIÓ *Si X és connex aleshores X verifica l'axioma del suprem.*

PROVA: Sigui A un conjunt fitat superiorment. Sigui $B = \bigcap_{a \in A}\{x \in X : x \geq a\}$ (fites superiors de A); B és no buit perquè A està fitat superiorment. Sigui $C = \bigcap_{b \in B}\{x \in X : x \leq b\}$ (fites inferiors de B); C és no buit perquè $A \subset C$. Si no es verifiqués l'axioma del suprem per a A, aleshores B i C serien dos conjunts no buits, tancats, disjunts i tals que $X = B \cup C$ i per tant X no seria connex. □

3 COROL·LARI *Si $\mathbb{K}$ és un cos ordenat que té la propietat de Bolzano, aleshores $\mathbb{K}$ és el cos real.*

PROVA: $\mathbb{K}$ és connex segons la proposició 1 i, segons la proposició 2, a $\mathbb{K}$ es verifica l'axioma del suprem. És un resultat conegut (vegeu [1], p. 749 i ss.) que l'únic cos ordenat en el qual es verifica l'axioma del suprem és el cos real. Per tant $\mathbb{K}$ és el cos real. □

Recordem que existeixen conjunts totalment ordenats i connexos no inclosos en el cos dels reals ([2]).

Referències

[1] SPIVAK, M. *Calculus: Càlcul infinitesimal.* Reverté, Barcelona 1995.

[2] STEEN, L. A., SEEBACH, J. A. *Counterexamples in Topology.* Springer, New York 1978.

DEP. DE MATEMÀTICA APLICADA II
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
COLOM, 11
08222 TERRASSA
mdalmau@ma2.upc.es
saludes@grec.upc.es