

Implicacions didàctiques de les recerques sobre visualització

ALAN J. BISHOP

La geometria s'ocupa de la matematització de l'espai, i la recerca ha posat de manifest que hi ha tres àrees conceptuais principals que poden contenir obstacles potencials per als alumnes que estudien geometria:

1. l'aprenentatge en relació amb l'espai,
2. l'aprenentatge de la matematització de l'espai, i
3. l'aprenentatge de la geometria.

A la majoria de països del món, els nens arriben a l'escola amb certs coneixements del seu propi món espacial, però pocs coneixements matemàtics. Cal fer molta feina a l'escola primària per tal d'estendre aquestes idees espacials i també per a introduir les habilitats matemàtiques bàsiques, com són la classificació, la descripció, la capacitat de relacionar, habilitats com les que ens permeten descobrir què és una forma triangular, decidir com anomenar diferents figures de quatre costats, o veure com es pot construir una capsa a partir de sis peces rectangulars. A l'escola secundària, l'èmfasi es posarà tradicionalment en un ventall més ampli de temes geomètrics —coordenades, transformacions, vectors, trigonometria— i en les seves característiques matemàtiques, incloent-hi les relacions i les aplicacions. A la universitat, els sistemes geomètrics es formalitzaran totalment i es construiran a partir de fonamentacions axiomàtiques. A tots els nivells d'aprenentatge hi ha obstacles potencials per a l'estudiant i la recerca ha posat de manifest quins són alguns d'aquests obstacles.

1 L'aprenentatge de l'espai

El primer factor que pot afectar clarament l'aprenentatge es l'èmfasi que es posa en l'aritmètica en detriment de la geometria a l'ensenyament primari. A molts dels països del món, siguin més o menys desenvolupats, l'aparició de la geometria en el currículum escolar de primària és relativament recent. Un segon obstacle sorgeix del fet que, fins i tot si es treballa la geometria, per a molts currículums i per a molts professors que ensenyen aquest currículum, aquest treball té poca connexió amb l'espai real de fora de l'aula. En particular, i des d'un punt de vista cultural, hem de reconèixer que, per a

molts alumnes de tot el món, les idees geomètriques que se'ls ensenya a l'escola estan basades en una manera d'interpretar l'espai que és aliena a la manera d'interpretar-lo en la seva pròpia cultura local. Poden ser els fills de famílies que han emigrat recentment a un altre país o que pertanyen a una població amb una cultura minoritària que es veu eclipsada per la cultura del grup dominant en el propi país. La recerca de Bishop (1983) a Papua Nova Guinea, la de Harris (1980) amb els aborígens australians i la de Pinxten *et al.* (1983) amb els indis navahos als Estats Units illustren clarament alguns d'aquests problemes.

Aquest problema és part d'una falta d'acord més general entre les experiències del nen (en el sentit més ampli) a l'entorn espacial i els conceptes i les idees matemàtiques que es promouen a l'escola. Prenc com a axiomàtic el fet que l'ensenyament ha d'obtenir elements de les experiències generals, els ha d'aprofitar i eixamplar, però també s'ha d'admetre que aquestes experiències varien de nen a nen, de zona a zona i, per descomptat, de país a país. Mitchelmore (1984), per exemple, assenyala alguns dels aspectes en què l'entorn del nen pot ser deficient des d'aquest punt de vista (Mitchelmore, *op. cit.*, p. 139):

Molts habitatges a Jamaica no tenen joguines adients als nens. Tenen menys joguines [que els nens europeus]. Els llibres són menys sofisticats i no hi ha tanta varietat de programes infantils a la televisió.

Siguin quines siguin les raons d'aquestes diferències en les experiències dels nens en relació amb l'espai i l'entorn, cal que l'escola no doni res per suposat, sinó que afavoreixi activitats adequades per a treballar l'espai com a introducció de les idees geomètriques.

A més, per a aprendre geometria és absolutament fonamental saber fins a quin punt el nen ha interioritzat i "agafat" intel·lectualment les seves experiències espacials. És capaç de parlar d'aquestes experiències? Què en sap? Sap representar els fenòmens espacials? La seva cultura d'origen, dóna importància a la pintura, o al dibuix o a la construcció de models? Sap imaginar i visualitzar les seves experiències espacials fins al punt de poder començar a reflexionar sobre elles?

Per tant, els primers passos dirigits a retirar els obstacles perquè l'alumne aprengui geometria són activitats d'aprenentatge pensades perquè el nen assoleixi una millora de la comprensió del seu propi espai. Si tots els professors de geometria es preocupessin de preparar "espacialment" els alumnes abans de matematitzar les idees, més endavant trobarien més fàcil la seva tasca d'ensenyar a partir d'aquestes experiències. I els alumnes, com és natural, s'adonarien que ja tenen fonaments espacials amb els quals bastir el coneixement i la comprensió de les idees geomètriques. Ara per ara aquest no és encara el cas.

2 L'aprenentatge de la matematització de l'espai

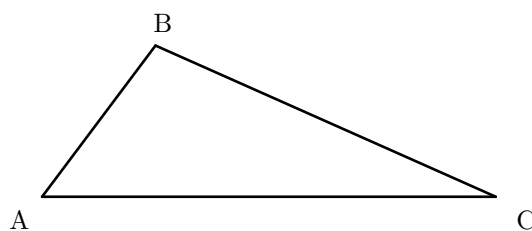
Tanmateix, aprendre idees geomètriques no és només aprendre la matemàtica de l'espai. També s'ha de conèixer la matematització de l'espai. Mentre que a la secció anterior consideràvem les arrels espacials de la formació geomètrica del nen, ara ens ocupem primordialment del que es pot ensenyar a partir d'aquestes arrels. És clar que tant els professors d'art com els de geografia, disseny, educació física i dansa, tenen com a objectiu, en certa manera, formalitzar la consciència que de l'espai tenen els nens, uns més que d'altres, basant el desenvolupament de la seva àrea en les arrels espacials. Però també és clar que el matemàtic veu l'espai de manera diferent d'un artista o un geògraf.

Els obstacles que dificulten l'aprenentatge de la geometria es poden pensar, fins a un cert punt, com a qüestions de forma i contingut. Aquesta dicotomia clàssica és important a la matemàtica en general, però és especialment important que tots els professors la tinguin en compte en relació amb la geometria, perquè als nens la forma, en geometria, els sembla el seu contingut. Tenim entre mans una representació de l'espai que té relació tant amb la forma (manera de representar una idea) com amb el contingut (el que es representa).

És important assenyalar aquest aspecte, perquè quan l'alumne comença a matematitzar les idees espacials és quan pot produir-se la confusió entre forma i contingut.

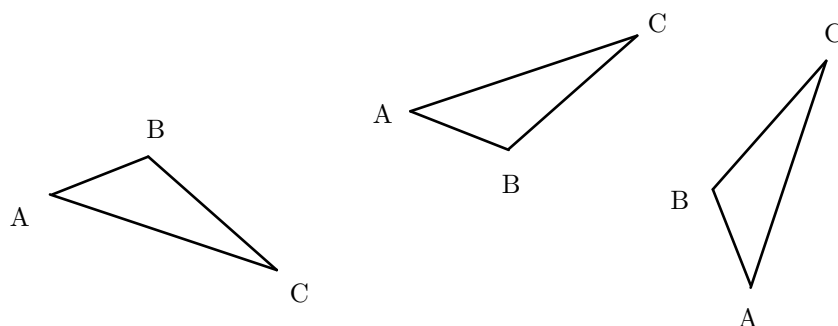
Podem trobar diversos exemples d'aquest fet:

Aquest dibuix,

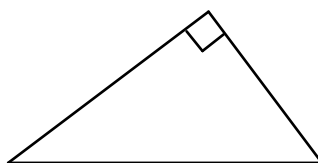


representa un triangle? o és en si mateix un triangle?

I aquests tres triangles, són el mateix?



I tots coneixem el clàssic problema de l'*orientació*, que sorgeix quan molts alumnes es neguen a considerar aquesta figura



com a triangle rectangle.

Una altra confusió sorgeix del fet que no es pot dibuixar un "triangle qualsevol" en el mateix sentit que quan diem que x és un "número qualsevol". Una vegada s'ha dibuixat el triangle "qualsevol", aquest pot convertir-se immediatament, en la ment del nen, en un triangle específic. En aquest nivell cal atacar, per tant, tres fonts principals de problemes potencials: una noció restringida del que és important, una interpretació limitada de les representacions i la confusió de la forma amb el contingut.

El problema del que és important en el context de la geometria té molt a veure amb el que hem dit a la secció anterior. Si, tal com cada vegada es creu més que és el cas, l'ensenyament de la geometria comença amb les experiències espacials del nen, aleshores en aquest nivell hauríem d'ambicionar matematitzar aquestes experiències. Això vol dir, per exemple, que en lloc d'haver d'aprendre les definicions de cercle, quadrat o rectangle, el que el nen necessita és desenvolupar idees sobre *circularitat* (és a dir, el que permet que rodin els objectes i el fet que hi hagi una curvatura constant, fet que no passa amb les figures ovals; i també que per als nens la *circularitat*, inicialment, està més a prop de la idea d'esfera que de les figures bidimensionals); sobre *quadratura* (quatre costats, amb sensació de simetria, una forma *molt igual*, il·lustrada per la imatge dels quatre punts cardinals) i *rectangularitat* (forma de *capsa*, com l'anomena Freudenthal (1983), amb una certa simetria, però essencialment desequilibrada). Clarament aquestes idees es desprenen molt més fàcilment dels objectes *reals* (capses, paquets...) tretes de l'entorn espacial del nen.

Però per què limitar-nos, o limitar el nen, a la geometria dels objectes petits? Què passa amb l'espai a gran escala i el del moviment? Viatges curts i llargs, d'anada i tornada, amb totes les seves indicacions ("tomba a l'esquerra a la segona cruïlla") tenen moltes propietats importants més endavant a la geometria. Les imatges amb miralls, els moviments de reflexió amb un company, les posicions al voltant d'una taula, els passos d'una dansa popular, poden també ser explotats. Les ombres, els miralls còncaus i convexos, els punts de vista insòlits, poden contribuir a fer que l'alumne s'iniciï en les idees de distorsió que estudiarà més endavant quan s'analitzin les ampliacions o les seccions.

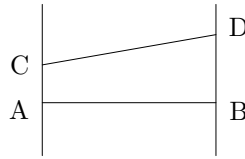
La matematització de l'espai implica començar a reflexionar sobre les característiques de l'espai que interessen als matemàtics. Per tant, hem d'assegurar que els nens es fixin en el màxim nombre possible de característiques de l'espai: petit i gran, estàtic i dinàmic, fruit de l'observació i de l'experiència, sentit i vist, natural i artificial, creat pel professor i creat per l'alumne.

Permeteu-me considerar a continuació els obstacles que apareixen en la representació d'aquestes idees geomètriques i com superar-los. Com indicàvem abans, l'arrel d'aquest problema és el fet d'adoptar una aproximació massa restringida a la representació. Un aspecte fonamental d'aquest procés que sovint s'oblida és el de reduir l'entorn espacial, fet que sovint implica la traducció d'un fenomen de l'espai a gran escala en un full de paper o en un objecte. Crec que es podrien estudiar dos aspectes prometedors des d'aquest punt de vista. El primer té a veure amb els mapes i el fet de fer-ne, que semblen ser aspectes bàsics del nostre "espai cognitiu". L'altre aspecte té a veure amb les fotografies i la utilització de la càmera en general. Alguns dels materials del projecte IOWO (1978) exploten el valor de la fotografia com a representació "entremig", un tipus de representació que està entre la realitat i el fet de dibuixar-la.

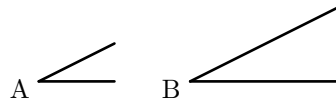
Tornant a les figures que realment es fan servir per a representar idees geomètriques, reconeixem, en primer lloc, que poden causar moltes dificultats.

A continuació en tenim alguns exemples:

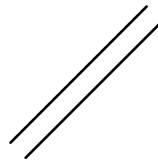
1. Les línies AB i CD es pot dir que tenen la mateixa longitud (Hart, 1981).



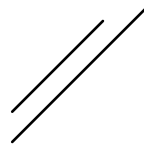
2. L'angle B pot ser més gran que l'angle A (Kent, 1978).



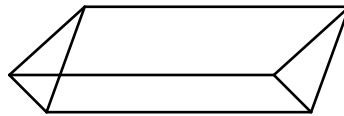
3. Aquestes línies poden ser paral·leles,



mentre que aquestes no ho són (Kerslake, 1979).



4. En diagrames més complicats, com aquest,



potser costa de veure la tridimensionalitat (Bishop, 1983).

Existeix clarament un vocabulari visual molt complex, amb molts símbols i convencions, que els estudiants han de comprendre si es vol que puguin donar sentit a les figures geomètriques, i en aquesta comprensió poden sorgir molts problemes com els que acabem d'examinar. Aquests problemes es poden interpretar entenent que la qüestió es saber "llegir" els símbols de l'altra gent. De la mateixa manera que s'aprèn a llegir paraules i frases, s'ha d'implicar els alumnes en activitats que requereixin fer representacions i no només simples interpretacions. Això vol dir potenciar el dibuix i proposar tota mena de representacions. Dibuixar no és senzill (Goddnow, 1977); i Fuson i Murray (1978) han demostrat que és més fàcil reconèixer figures prèviament retallades que fer-les amb pals, per exemple, i que fer-les amb pals és més senzill que dibuixar-les acuradament. Per tant, hem de ser conscients que dibuixar és només una manera de representar les idees geomètriques. Potser caldria considerar-lo l'últim esglaó d'una escala d'activitats de representació que inclouria fer figures amb pals, filferro i cordill, dibuixar a la sorra...

Els alumnes necessiten, doncs, tota mena d'experiències i "traduccions" d'una representació a l'altra. El diagrama següent il·lustra una manera d'afavorir aquestes experiències:

		Sortida		
		Objectes	Figures	Símbols
Entrada	Objectes			C
	Figures	A		
	Símbols		B	

Si entenem *objecte* com a objecte de l'espai real, a petita o gran escala, *figura* com a diagrama o fotografia i *símbol* com a paraules, lletres i també números, es poden fer primer diverses representacions i després fer tota mena de traduccions que poden centrar-se en els diferents aspectes de la representació.

A continuació hi ha tres exemples corresponents al diagrama anterior:

- A. En aquesta casella el professor donaria a l'alumne algunes figures, per exemple tres dibuixos diferents d'un objecte. Amb aquests dibuixos, l'alumne hauria de fer aquest objecte amb fang.
- B. En aquesta casella el professor descriuria verbalment una figura. L'alumne hauria de construir aquesta figura a partir de la descripció. La feina podria desenvolupar-se a partir de tasques de construcció simple, fent servir llapis, regle i corbes, per exemple.
- C. En aquesta casella es donaria a un alumne un objecte i se li demanaria que el descrigués de tal manera que un seu company, separat d'ell per una pantalla, pogués escollir-lo d'entre un grup d'objectes similars.

Evidentment poden sorgir confusions i malentesos, però, discutint-los amb els nens, podria començar-se a construir no únicament idees i conceptes geomètrics, sinó també ajudar a prendre consciència del que implica la representació d'aquests conceptes. Tot això pot contribuir a començar a desenvolupar el *metaconeixement* de la geometria (en particular la necessitat de definicions precises), de les relacions i interconnexions entre les idees matemàtiques, i del caire general i abstracte de l'activitat matemàtica. En particular, es pot aclarir la relació entre forma i contingut.

3 L'aprenentatge de la geometria i el paper de la visualització

L'origen de gran part de les dificultats d'aprenentatge de la geometria té a veure amb la visualització. Aquesta àrea recentment ha estat de creixent interès per als investigadors en educació matemàtica i és important tenir presents aquestes investigacions, no només des de la perspectiva de l'ensenyament de la geometria, sinó per a l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques en general.

Durant més de 100 anys, els ensenyants de matemàtiques s'han interessat en la representació visual i figurativa de les idees matemàtiques tant en les activitats individuals com en el procés d'ensenyament d'aquestes idees. Totes les idees en relació amb el "suport visual" estan basades en el coneixement del fet que (a) aquestes representacions visuals ofereixen una introducció molt potent a les complexes abstraccions de les matemàtiques i que (b) els "materials manipulatius", les "representacions concretes" i els "materials

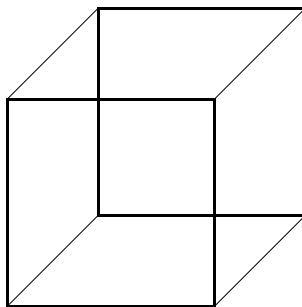
intuïtiu” són part dels recursos del professor actualitzat. Avui l’ordinador està augmentant enormement la varietat de recursos que ajuden la visualització, i la seva presència a l’aula estimula també gran quantitat de recerques i el desenvolupament d’aquesta àrea. Què estem, doncs, aprenent de la recerca en aquesta àrea i quines són les preguntes que cal plantejar-nos de cara al futur?

D’entrada cal fer una important distinció entre el *nom* visualització, que porta la nostra atenció cap al producte, l’objecte, el *què* de la visualització, les imatges visuals, i el *verb* visualització, que ens fa pensar en el procés, l’activitat, l’habilitat, el *com* visualitzar. Ja hem vist que aquests dos aspectes tenen a veure amb la geometria, però permeteu-me considerar què és el que ens diuen les recerques específiques en aquest camp. Considerant “l’objecte” de la visualització, el punt més interessant és el fet que les visualitzacions (tal com les anomenaré) són de caire molt personal. La imatgeria visual que fan servir els individus és molt variada, fins i tot quan ens restringim a l’activitat matemàtica. Presmeg (1986) fa una llista de cinc tipus diferents d’imatgeria visual detectats ens els seus estudiants:

1. Imatgeria concreta, pictòrica (dibuixos en la ment).
2. Imatgeria de models (relacions pures representades en un esquema espacial-visual).
3. Imatges memorístiques de fórmules.
4. Imatgeria cinestètica (en relació amb activitats musculars, e. g. dits “caminant”).
5. Imatgeria dinàmica (que es mou).

A més, els alumnes no van utilitzar únicament un d’aquests tipus, sinó que en van fer servir de diferents segons les situacions. La varietat de visualitzacions generades pels individus és, per tant, un factor important a tenir en compte en considerar l’ensenyament de les matemàtiques. De la recerca de Gaulin i Puchalska (1983), Ben-Haim, Lappan i Houang (1985) i també de la de Krutetskii (1976) i Presmeg (1986) i molts altres es desprèn que els nens tenen poques dificultats per a generar imatges visuals —una conclusió molt potent per si mateixa de cara a la pràctica educativa.

Generalment, assumim que aquestes visualitzacions ajuden i, sovint, de fet ho fan. Malgrat això, d’altres qualitats de les visualitzacions apareixen en un marc negatiu, tenen més a veure amb els obstacles que elles mateixes poden generar, alguns dels quals ja han estat esmentats. Per exemple, Hoz (1981) es refereix al que ell anomena *rigidesa geomètrica*, deguda al fet que el nen és incapaç de veure un diagrama d’una manera diferent. Un nivell superior d’aquesta dificultat apareix quan les visualitzacions esdevenen símbols dels objectes. Per exemple, el dibuix de l’anomenat *cub de Necker* que hi ha a continuació és una de les visualitzacions més comunes que es fan servir, però malgrat això, per a molta gent és un símbol convencional. El fet que cap cub pugui tenir aquest aspecte a la realitat (a causa de la transformació obliqua) s’oblida en general, fins que no ens imaginem la forma vista des de dalt, quan semblaria un rombe, no un quadrat.



Presmeg (1986) resumeix les dificultats que experimenten els “visualitzadors” en el seu estudi en els següents tipus:

1. La concretesa d’una única imatge o diagrama pot lligar el pensament a detalls irrelevants o, fins i tot, introduir informació falsa.
2. La imatge d’una figura estàndard pot induir el pensament rígid que impedeix el reconeixement d’un concepte en un diagrama no estàndard.
3. Una imatge incontrolada pot persistir i impedir l’obertura d’altres vies de pensament més profitoses (aquesta dificultat és particularment aguda quan la imatge és vívida, intensa).
4. La imatgeria que no va aparellada a processos de pensament analític rigorosos pot no ser de cap utilitat, especialment si és vaga.

Encara que sigui temptador creure que totes les visualitzacions han de tenir necessàriament un paper útil en l’activitat matemàtica, és clar que necessitem recerca que ens ajudi a entendre millor quines de les seves característiques contribueixen significativament al seu paper en una situació matemàtica donada.

Tornant ara al procés de visualització, aquest és reconegut com a procés complex, però és molt important que els educadors el comprenguin. Una vegada més, l’atenció principal rau en la naturalesa individual d’aquest procés, i recentment ha crescut molt l’interès de la recerca en aquells estudiants que semblen ser bons duent-lo a terme. Els anomenats visualitzadors —aquells que en la resolució de problemes prefereixen utilitzar i utilitzen correctament el processament visual— són avui un grup ben estudiat. Krutetskii (1976), Lean i Clements (1981), Moses (1977), Presmeg (1986) i Suwarsono (1982) són tan sols alguns dels investigadors que s’han centrat en aquesta àrea. Però, què hem après d’aquest procés?

1. Presmeg (1986) afirma: “Un mètode de resolució visual és aquell que inclou imatgeria visual, amb o sense un diagrama, com a part essencial del mètode de solució, fins i tot encara que es facin servir raonaments o mètodes algebraics”.
2. L’escala del “grau de visualitat” de Moses (1977) estava basada en el “nombre de processos de resolució visuals (e. g. dibuixos, gràfics, llistes, taules) presents en les solucions escrites”.
3. El “tipus geomètric” de Krutetskii (1976) “sent la necessitat d’interpretar visualment les expressions de les relacions matemàtiques abstractes i manifesta una gran ingenuïtat en aquest aspecte”.
4. El grau de visualitat de Suwarsono (1982) era elevat “si s’arribava a la resposta correcta i el raonament estava basat en un diagrama (fet per l’alumne) o en alguna

imatge visual icònica (construïda per l'alumne)".

Per tant, simplificant, el procés de visualització sembla que inclou la construcció per part de l'alumne d'algun tipus de visualització i la seva utilització de manera correcta.

En una revisió anterior, aquest autor va definir "l'habilitat de processament visual (VP)" com a aspecte que cal considerar separatament de "l'habilitat d'interpretació d'informació figurativa (IFI)" (Bishop, 1983). VP estava definida de la següent manera: "Aquesta habilitat inclou la visualització i la traducció de relacions abstractes i informació no figurativa a termes visuals. També inclou la manipulació i transformació de representacions visuals i imatgeria visual. És una habilitat de procés i no està relacionada amb la forma del material presentat com a estímul" (p. 184).

Fins a quin punt és necessari aquest tipus d'activitat depèn totalment de la interacció entre l'estímul i l'individu implicat —per exemple, no hi ha mai una única manera de dur a terme una determinada tasca, ja que cada tasca ha de ser interpretada per cada individu. El que passi aleshores dependrà de les preferències de la persona, de la seva memòria de les visualitzacions, de la seva habilitat per a recordar, per a generar o per a escollir visualitzacions apropiades, i aleshores de la seva habilitat per a operar apropiadament amb les visualitzacions escollides.

Una implicació d'aquesta anàlisi és clarament el fet que la visualització i la utilització d'imatgeria és una qüestió molt personal. Cada alumne necessita que se li doni prou temps per a desenvolupar les seves pròpies imatges, i no té massa sentit que els professors esperin imatges idèntiques com a resultat de processos tan personals. Hem d'anticipar i, fins i tot, fins a cert punt fomentar la possibilitat de la diversitat en visualització.

Què podem dir del desenvolupament de la visualització per part del professor? És clar que mitjançant l'ensenyament és factible estimular el desenvolupament de les imatges visuals i la capacitat visualitzadora en general. D'una banda, tenim estudis com els de Mitchelmore (1984) que tracten aspectes de l'entorn material que interaccionen en certa manera amb la visualització. Per exemple, Mitchelmore diu (1984, p. 139): "Les repercussions de l'entorn familiar queden ben clares amb els casos excepcionals que apareixen [...] com el del fill d'un mecànic a casa del qual hi havia taller, o el del fill d'un paleta que sovint ajudava el seu pare; tots dos nens sobresortien en els exercicis de simetria a les escoles rurals on estudiaven, la majoria dels alumnes de les quals eren fills de pagesos". D'altra banda, sabem per estudis anteriors (Bishop, 1973, Marriot, 1978) que els materials manipulatius poden contribuir a la creació de visualitzacions i, per tant, ajuden en el mateix procés de visualització.

Més recentment, i en un nivell d'activitat més sofisticat, diversos estudis posen de manifest que la força i l'accessibilitat de les imatges produïdes amb ordinador tenen una influència que estimula les visualitzacions dels alumnes. Noss (1987), per exemple, diu (p. 361): "Els resultats d'aquest estudi suggereixen que hi ha conceptes geomètrics que es veuen estimulats per la participació en un context de geometria de la tortuga". També en relació amb idees geomètriques els estudis de Gallou-Dumiel (1987), Olive i Langenau (1987) i Osta (1987) demostren, tots de diferents maneres, com un entorn informàtic interactiu pot afavorir i, fins a cert punt, desenvolupar les habilitats de visualització dels alumnes, especialment quan es fan servir imatges visuals dinàmiques. Hoyles (1987) va resumir així la seva recerca basada en la utilització de l'ordinador (p. 64): "[En aquest estudi] l'ordinador, doncs, no es contempla com a professor sinó com a eina que permet manipular les representacions gràfiques i que té la capacitat de donar *feedback* que conté informació." L'ordinador és, per tant, una eina molt poderosa per al desenvolupament de la visualització.

Tanmateix, el professor també és mencionat en aquesta citació, la qual cosa ens recorda que l'entorn material i social juguen també un paper en el desenvolupament de les visualitzacions. Per exemple, a tots els estudis que hem mencionat aquí, l'actuació del professor (i en un dels casos, dels pares) ha estat considerada com a beneficiosa. Igualment les tècniques d'ensenyament recollides per Kent i Hedger (1980) semblen ser útils des del punt de vista de la visualització, però també és cert, ho hem vist abans, que el professor pot crear, inconscientment, problemes als alumnes, concretament en relació amb els obstacles d'aprenentatge en relació amb l'espai i la matematització de l'espai.

4 Conclusions

Tal com hem vist, hi ha hagut bons progressos en les recerques sobre l'aprenentatge de la geometria, i a les classes de matemàtica es poden fer moltes coses per ajudar la visualització. Estem, doncs, d'acord amb les afirmacions de Gaulin (1985) i aniríem, fins i tot, més enllà en afirmar: "El meu punt principal és que, a l'educació matemàtica, s'hauria de donar molta més importància als diferents tipus de representacions sobre el pla de les formes i relacions tridimensionals, tant als plans d'estudi com en el camp de la investigació i el de la innovació". Hi ha proves del fet que val la pena emfasitzar les representacions visuals en tots els aspectes de l'ensenyament de la matemàtica. Al mateix temps, cal que els ensenyants de matemàtiques tinguin present el caràcter altament individual i personal de la naturalesa del procés de visualització.

En particular, si s'entén millor quin és el paper de la visualització i s'és conscient dels obstacles amb què es troben els alumnes quan aprenen geometria, els professors de matemàtiques tenen poder per a transformar l'ensenyament de la geometria. En lloc de ser l'assignatura difícil i avorrida que tracta de l'estudi àrid de teoremes i demostracions, que és la imatge que molts alumnes tenen de la geometria, es pot guiar l'alumne a descobrir una disciplina fascinant i molt interessant que estudia, ni més ni menys, la matematització de l'espai.

Referències

- [1] D. BEN HAIM, G. LAPPAN i R. T. HOUANG: *Visualizing rectangular solids made from small cubes: Analysing and effecting students' performance*. Educational Studies in Math., 16 (1985), 389–409.
- [2] A. J. BISHOP: *Use of structural apparatus and spatial ability: A possible relationship*. Research in Education, 9 (1973), 43–49.
- [3] A. J. BISHOP: *Space and geometry*. A R. Lesh i M. Landau (eds.). "Acquisition of Mathematics concepts and processes", p. 176–203. Academic Press, New York 1983.
- [4] H. FREUDENTHAL: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Reidel, Dordrecht 1983.
- [5] K. FUSON i C. MURRAY: *The Haptic-visual Perception, Construction, and Drawing of Geometric Shapes by Children Aged Two to Five: a Piagetian Extension*. A R. Lesh (ed.), "Recent Research Concerning the Development of Spatial and Geometric Concepts", p. 49–83. Ohio State University, Centre for Science and Mathematics Education (ERIC), 1978.
- [6] F. GALLOU-DUMIEL: *Theorem de Thales et micro-ordinateur*. A J.C. Bergeron, N. Herscovics i C. Kieran (eds.), "Proceedings of the eleventh international conference of PME", vol. 2, p. 10–16. University of Montreal. Montreal 1987.

- [7] C. GAULIN: *The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations*. A L. Streefland (ed.), "Proceedings of ninth international conference of PME", vol. 2, p. 53–71. University of Montreal. Montreal 1985.
- [8] C. GAULIN i E. PUCHALSKA: *Representations on paper of 3-dimensional shapes*. A J.C. Bergeron i N. Herscovics (eds.), "Proceedings of the fifth annual meeting of PME-NA", vol. 1, p. 322–325. University of Montreal. Montreal 1983.
- [9] J. GOODNOW: *Children's Drawing*. Fontana, London 1977.
- [10] P. HARRIS: *Measurement in Tribal Aboriginal Communities*. Northern Territory Department of Education, Australia 1980.
- [11] K. M. HART (ed.): *Children's Understanding of Mathematics 11–16*. John Murray, London 1981.
- [12] C. HOYLES: *Geometry and the computer environment*, A J.C. Bergeron, N. Herscovics i C. Kieran (eds.), "Proceedings of the eleventh international conference of PME", vol. 2, p. 60–66. University of Montreal. Montreal 1987.
- [13] R. HOZ: *The effects of Rigidity on School Geometry Learning*. Educational Studies in Math., 12 (1981), 171–190.
- [14] IOWO: *Zie Je Wiel*, Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO), Tiberdreef 4, Utrecht 1978.
- [15] D. KENT: *The Dynamics of Put*. Mathematics Teaching, 82 (1978), 32–36.
- [16] D. KENT i K. HEDGER: *Growing Tall*. Educational Studies in Math., 11 (1980), 136–179.
- [17] D. KERSLAKE: *Visual Mathematics*. Math. in School, 8 (1979), 34–35.
- [18] V. A. KRUTETSKII: *The psychology of mathematical abilities in school-children*. University of Chicago Press. Chicago 1976.
- [19] G. A. LEAN i M. A. CLEMENTS: *Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance*. Educational Studies in Math., 12 (1981), 267–299.
- [20] P. MARRIOTT: *Fractions, now you see them, now you don't*. A D. Williams (ed.), "Learning and applying mathematics". Australian Association of Math. Teachers. Melbourne 1978.
- [21] M. MITCHELMORE: *Spatial Ability end Geometry Teaching in Jamaica*. A R. Morris (ed.), "Studies in Mathematics Education", vol. 3: The Mathematical Education of Primary-school Teachers, p. 135–143. Unesco, Paris 1984.
- [22] B. E. MOSES: *The nature of spatial ability and its relationship to mathematical problem solving*. Tesi doctoral no publicada, Indiana University, Bloomington 1977.
- [23] R. NOSS: *Children's learning of geometrical concepts through LOGO*. Journal for Research in Math. Education, 18 (1987), 343–362.
- [24] J. OLIVE i C. A. LANKENAU: *The effects of Logo-based learning experience on students' non-verbal cognitive abilities*. A J.C. Bergeron, N. Herscovics i C. Kieran (eds.), "Proceedings of eleventh international conference of PME", vol. 2, p. 24–30. University of Montreal. Montreal 1987.
- [25] I. OSTA: *L'outil informatique et l'enseignant de la geometrie dans l'espace*. A J.C. Bergeron, N. Herscovics i C. Kieran (eds.), "Proceedings of eleventh international conference of PME", vol. 2, p. 31–38. University of Montreal. Montreal 1987.
- [26] R. PINXTEN, VAN DOOREN, I. i HARVERY, F.: *Antropology of Space*. University of Pennsylvania Press. Philadelphia 1983.

- [27] N. C. PRESMEG: *Visualizaticn in high-school mathematics*. For the Learning of Math., 6 (1986), 42–46.
- [28] S. SUWARSONO: *Visual imagery in the mathematical thinking of seventh-grade students*. Tesi doctoral no publicada. Monash University, Melbourne 1982.

FACULTY OF EDUCATION
MONASH UNIVERSITY
CLAYTON, VIC3128
AUSTRÀLIA
`alan.bishop@education.monash.edu.au`