

La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat*

GUY BROUSSEAU

1 La didàctica de les matemàtiques en la comunitat matemàtica

1 DEFINICIÓ *La didàctica de les matemàtiques és la ciència de les condicions de creació i difusió dels coneixements matemàtics.*

Aquesta definició pot semblar una mica pretensiosa però, de fet, conté la humilitat de considerar que només el caràcter científic pot legitimar la didàctica com a discurs dirigit als professors. Considerar la didàctica com una ciència és una ambició necessària, tot i que encara no s'hagi consumat.

Per què incloem a la definició *les condicions de creació dels coneixements matemàtics*? Es podria pensar que aquestes condicions de *creació* s'han de reservar per als matemàtics, que s'han de mantenir separades de les condicions de *difusió* dels coneixements, perquè els matemàtics tenen una manera especial de construir, de pensar les matemàtiques, diferent de la dels que les difonen i les pensen per segon cop. Malgrat aquesta objecció, nosaltres pensem —i es pot demostrar— que si es pretén la difusió d'un pensament matemàtic que no es limiti a una mera repetició, a un *psitacisme*, llavors és necessari conèixer, dominar i recrear les condicions de creació dels coneixements matemàtics, entenent *creació* no en el sentit de primera aparició històrica, sinó en tant que conjunt de condicions universals lligades a la gènesi del pensament matemàtic.

Tractaré de mostrar en aquesta presentació que no es poden separar les matemàtiques de la didàctica de les matemàtiques. Hauria de quedar clar que en l'activitat dels matemàtics que creen matemàtiques ja hi ha una activitat de tipus didàctic; que ja en el naixement del coneixement matemàtic hi ha una component didàctica. I veurem també que la identificació de les condicions per expressar i comunicar aquests coneixements no poden funcionar d'una manera independent de les nocions que es tracta de recrear en l'ensenyament. Així, el problema amb el qual ens trobem no és dir què podria ser la didàctica per un costat i les matemàtiques per un altre, sinó el de mostrar el que poden ser juntes, i de quina manera es poden tractar les dues en la formació dels mestres.

*Conferència pronunciada a les *Segones Jornades de Matemàtiques i Didàctica de les Matemàtiques* celebrades el mes de febrer de 1993 a la U.A.B.

Per això he dit que existeix la didàctica en l'activitat matemàtica, és a dir, que per difondre un descobriment matemàtic es necessita un treball de reconstrucció amb l'estil de pensament propi de la comunitat matemàtica. Quan el matemàtic escriu un article per exposar els resultats de les seves investigacions, no pot explicar la història d'un descobriment, ha d'escriure un text convencional, escollir el que en el treball pot interessar la gent, deixar de banda les evidències, mostrar el que és important, escollir el que pot aparèixer com un mètode, etc. Aquest és un treball de reconstrucció, de destemporalització, de despersonalització, de descontextualització dels resultats per poder incloure'ls en una teoria més general, etc. Aquest treball és de naturalesa didàctica i, en funció de si es fa d'una manera o altra, canvia el significat de la mateixa matemàtica. No és el mateix el text matemàtic, el pensament que l'ha produït, que la comprensió i ús d'aquest text. Des d'un punt de vista històric, és fàcil mostrar aquestes distincions: l'autor d'un coneixement no és conscient de tots els aspectes de la seva obra, aspectes que potser en descobriren d'altres, arribant fins i tot a canviar l'estatut del coneixement originari. En resum, *la construcció del pensament matemàtic en tant que saber, en tant que coneixement que es comunica ja en la institució dels matemàtics, depèn de condicions i transformacions de tipus didàctic.*

2 La didàctica en l'activitat dels professors

En l'activitat dels professors també trobarem certs elements de didàctica espontània, és a dir, elements d'una activitat natural que es desenvolupa i que intervé en l'exercici docent, ja sigui implícitament o explícita.

Crec que no hi ha dubte sobre l'existència d'un pensament didàctic espontani. Consisteix essencialment a elegir, per a un conjunt donat d'alumnes, en un moment donat, i en relació amb una noció matemàtica, un conjunt de problemes, una sèrie de declaracions que podrien ser útils per resoldre'ls, un ordre de dependència entre aquestes declaracions per facilitar la seva retenció, la seva prova, etc. Per exemple, elegir una demostració com a mètode de presentació didàctica d'un coneixement matemàtic és ja una decisió didàctica. S'han fet matemàtiques abans de veure l'interès de la demostració. La demostració apareix avui com a explicativa del coneixement matemàtic: no hi ha matemàtiques si no hi ha problemes i si les solucions d'aquests problemes no s'acompanyen d'una demostració. En l'actualitat, la demostració forma part de les matemàtiques.

Això no sempre ha estat així. A la Xina hi havia matemàtics abans de l'arribada dels àrabs, que van portar-hi els elements d'Euclides. Aquesta introducció no va tenir gran efecte sobre les matemàtiques xineses. Però, més tard, els jesuïtes van proposar als mandarins nous mètodes per ensenyar, explicant que utilitzaven les matemàtiques per desenvolupar un cert tipus de pensament. I van proposar traduir i utilitzar Euclides. Els xinesos van respondre que ja coneixien els elements, però que no entenien la tercera part de la resolució de cada problema (és a dir, la part de la demostració): *No ens interessa, no s'entén i és difícil i complicada.* Resulta que la relació dels xinesos amb les matemàtiques s'assemblava a la relació que tenim nosaltres amb l'art: no es diu per què una cosa és bella; no s'aprèn poesia recitant regles de poesia, sinó en interacció amb la poesia. De la mateixa manera, el matemàtic xinès havia de trobar, pel seu propi esforç, sense explicació, la bellesa matemàtica, entenent sense necessitat de demostració. La prova era només una necessitat personal de convenciment que no calia fer pública. Trobem així a la història una matemàtica que amaga les seves proves per diferents raons: per exemple, per exercir un poder sobre la gent amagant l'origen del saber; en el Renaixement, per obtenir una plaça a les universitats italianes (els problemes no s'expliquen perquè

permeten construir problemes per guanyar competicions), etc. Això mostra que l'acte de publicar demostracions és un acte social i cultural molt particular. Aquest acte, fonamental avui dia per a la comunicació del coneixement matemàtic, es basa en una hipòtesi humanista: que *la veritat ha de ser compartida*. En una societat on no hi hagi aquest sentiment, no hi ha necessitat d'ensenyar matemàtiques a tothom.

El meu centre d'interès com a investigador són les matemàtiques de l'escola obligatòria. Hem vist en quin sentit la demostració és una *invenció didàctica* lligada a certes relacions humanes i culturals. Per això en l'ensenyament s'ha de pensar que, per exemple, una prova no és únicament una demostració, és també quelcom que una persona diu a una altra per obtenir el seu consentiment i acord, segons unes regles que s'imposen tant a l'una com a l'altra. Una demostració matemàtica s'ha de construir en oposició a altres mitjans que permeten obtenir l'acord dels altres (la seducció, l'autoritat, etc.). Tots els mitjans retòrics per aconseguir l'assentiment dels altres són obstacles per a la prova matemàtica.

Tinc força estudiants a la universitat que no estan convençuts de les demostracions que em donen. Prenem, per exemple, un domini particular com la combinatòria, on, tradicionalment, per raons conegudes, no s'exigeix que les demostracions es donin amb la precisió que s'exigeix en àlgebra o altres dominis. En combinatòria, es demana generalment als estudiants que concebin els mètodes adequats i que siguin capaços de presentar-los, encara que sigui de manera ambigua. En aquest cas, els estudiants presenten resultats dels que no n'estan segurs i esperen cada cop la conformitat del professor, la seva correcció. El professor podria molt bé considerar que si els estudiants han resolt un problema, si estan convençuts de la validesa de la seva pròpia solució, aleshores no necessiten cap correcció. Però tots sabem que no és possible mantenir aquesta posició amb els estudiants.

El que no es produeix, però hauria de produir-se, és una *devolució* de la responsabilitat del coneixement matemàtic a la generació que segueix. I això es pot aconseguir amb estudiants ben petits: els nens de quatre o cinc anys, encara que no concebin bé una noció o problema de nombres —com va mostrar Piaget— poden molt bé comprendre la necessitat d'assumir una posició personal enfront dels problemes. No obstant això, alguns anys després, tornen a l'escola en una relació amb el saber totalment diferent, que els fa totalment dependents de la solució que donarà el professor, sense cap sentiment de responsabilitat en la transmissió del saber. *Construir la relació de l'alumne a la prova, al coneixement matemàtic, aquest és el principal paper del professor, perquè els mitjans i els coneixements concrets canvien d'una generació a l'altra*. Per exemple, el que constitueix avui dia la base d'un curs habitual sobre funcions a secundària és la construcció de la gràfica d'una funció. Però actualment els nois tenen a la butxaca una calculadora en la qual poden entrar l'equació de la funció i obtenir la gràfica directament. Per descomptat que això planteja un problema a l'ensenyament. I no és el primer. Podria fer una llarga llista de coneixements molt útils en un moment donat que desaparagueren amb l'aparició d'un nou saber, una nova tècnica, etc. Hi ha gent que té un amor particular cap als indivisibles, però obliden que ara tenim mètodes més ràpids que ens permeten evitar el munt de problemes que plantegen.

El treball del professor consisteix en la reconstrucció de les matemàtiques significatives per als nens d'una generació determinada. La formació que hem de donar als professors de matemàtiques ha de deduir-se, per tant, d'aquesta proposició.

3 La didàctica de les matemàtiques en la formació del professorat

Quins podrien ésser els continguts que proposa la didàctica en la formació del professorat, donat el desenvolupament actual d'aquesta ciència?

Aquest tercer punt tracta del problema de la utilitat del coneixement didàctic, dels límits de la seva expressió i comunicació, i dels mitjans de què disposa la didàctica per reconèixer i col·laborar en el treball del professor. L'acta de naixement de la didàctica consisteix a creure que es pot descriure el que fa de manera natural el professor. Una altra qüestió és saber fins a quin punt, amb quina eficàcia, suport o fonamentació és possible arribar a una tal descripció. Aquest problema s'ha plantejat en matemàtiques abans que en altres dominis, en part a causa del caràcter *estraný* del coneixement matemàtic que s'ensenya, estrany en el sentit d'allunyat de la pràctica popular. No es troben habitualment matemàtics que actuïn de manera visible (o pública) per mostrar, per exemple, què és allò que s'entén per *buscar*. Per a la gent, *buscar* és una cosa negativa: es busca quan s'ha perdut alguna cosa, quan no se sap com actuar. Si es demana quelcom a algú, no se li demana que busqui sinó que contesti, que actuï. *Buscar* no té sentit a les institucions socials allunyades de la pràctica científica. Els problemes que trobem avui dia amb la difusió social de les matemàtiques a la nostra societat expliquen bé per què la necessitat d'investigar en didàctica s'ha plantejat abans en matemàtiques que en altres dominis.

3.1 Els mitjans i límits de la didàctica de la didàctica

Hem dit que existeix una didàctica natural en l'activitat dels professors. I el problema que es planteja és el de veure fins a quin punt és necessari explicitar aquesta didàctica espontània amb certs tipus de coneixements, fins a quin punt s'ha de comunicar als professors aquests coneixements, i quines limitacions es troben en aquesta comunicació. No és veritat que tot saber o coneixement necessari per al control d'una altra activitat sigui bo. La distinció entre una institució que actua i controla la seva activitat amb coneixements espontanis o reproduïts per imitació i la creació d'una altra institució que construeix els mitjans de control per a la primera, és encara molt difícil des del punt de vista cultural. En particular, quan es tracta de comunicar un saber com les matemàtiques, el professor està tan preocupat per fer comprendre als alumnes tot el necessari perquè acceptin les idees que els ensenya, que si s'ensenya al professor un tipus de metaconeixement sobre les matemàtiques, es corre el perill que, en lloc de matemàtiques, el professor acabi ensenyant als seus alumnes un discurs sobre la producció de les matemàtiques, és a dir, un discurs didàctic.

La possibilitat d'ensenyar didàctica als professors depèn de la capacitat d'aquests per mantenir una separació entre, per un costat, la seva activitat professional com a ensenyants de matemàtiques i, per altre costat, els mitjans professionals que possibiliten aquesta activitat. I aquesta separació no està, en principi, assegurada. No es poden llançar en paracaigudes resultats de didàctica als professors, sense més, de la mateixa manera que no es poden donar medicaments a un poble on no hi ha ni metges ni hospitals. L'eficàcia docent dels coneixements didàctics depèn, doncs, de la possibilitat social d'organitzar les relacions futures entre professors i didàctics. Sense aquesta organització fracassarem. I aquest és el punt focal del desenvolupament i control de l'activitat dels professors, de la preparació dels futurs professors amb un tipus de coneixement com és la didàctica de les matemàtiques.

El fet que estiguem intentant entendre, en la investigació didàctica, els mitjans de producció i reproducció dels coneixements matemàtics, no vol pas dir que aquesta ciència pugui arribar a donar resposta a totes les preguntes que suscita la didàctica espontània

del professor. En particular, s'ha d'atorgar un lloc legítim a les tècniques didàctiques tradicionals de comunicació: el que es pot explicar i entendre no necessita d'un gran discurs per millorar-se. L'economia tampoc té per objectiu aconseguir que un venedor de corbates vengui més corbates, no és el seu mètode de funcionament. Hi ha coses que han de desenvolupar-se per les pròpies qualitats dels ensenyants.

Les explicacions didàctiques han d'ajudar aquesta didàctica espontània, però també contradir a vegades les conclusions precipitades que s'extreuen de la seva pràctica. La didàctica de les matemàtiques no és la simple racionalització d'una pràctica espontània. Al contrari, el fet que els professors hagin de prendre decisions fa que el seu coneixement didàctic sigui en general un coneixement fals. Utilitzarem una metàfora. A França, durant el segle XIX, es va desenvolupar una teoria de la llengua necessària per a la comunicació i l'ensenyament de la llengua: en diem *la gramàtica dels professors*. Era una mena de teoria de la llengua amb els elements suficients per poder parlar de les paraules, de les frases, etc. Els professors van tractar de fer una descripció de la llengua, sota la necessitat de parlar de les frases en el domini de l'ensenyament, no amb la intenció de fer una teoria del llenguatge. Van fer una gramàtica que no té exactament les propietats que s'espera d'una teoria, es tractava de regles amb un munt d'excepcions, perquè això resolva el problema d'escriure correctament: s'aplicava la regla i es donava la llista d'excepcions. I es podia així dominar l'escriptura de les paraules. Però aquestes regles no eren lleis en el sentit de la ciència, que tenen com a objectiu la comprensió del funcionament dels fenòmens. La preocupació del que vol ensenyar a parlar i, quan dóna una regla falsa, afegeix, com a particularitat, les excepcions, és diferent de la del que vol construir una teoria consistent i que ha de canviar-la quan no ho és. La gent que té com a preocupació prioritària fer una teoria, entendre els fenòmens, segueix un rumb diferent de la gent que ha de prendre decisions i necessita regles locals que s'adaptin bé a les seves necessitats.

El problema dels formadors de professors és el de distingir entre la seva manera d'ensenyar i el que ensenyen als estudiants. Per exemple, pot succeir que jo no em vegi capaç de fer que un futur professor desenvolupi un pensament didàctic, i veure'm llavors obligat a comunicar-li els coneixements didàctics que li haig d'ensenyar amb mètodes de comunicació tradicionals. Però no m'agradaria que ell utilitzés amb els seus estudiants els mateixos mètodes que utilitzo jo amb ell. El problema està en el fet que la possibilitat de fer produir un pensament matemàtic és un tema que s'està estudiant, mentre que no s'estudia encara la possibilitat de fer produir un pensament propi de la didàctica de les matemàtiques (tema aquest que em sembla molt més difícil).

No hi ha en didàctica *un* mètode, una única solució per a tots els problemes. És a dir: s'han de poder usar diferents mitjans, diferents enginyeries, segons les circumstàncies. Si només tinc cinc minuts per preparar la lliçó dels meus alumnes de darrer any de secundària, és suficient que decideixi quins són els exercicis més pertinents per proposar-los, la demostració que faré, el que deixaré de costat, etc. En 5 minuts no puc fer més. Si miro de fer una altra cosa sense preparar-m'ho més, per exemple, si em comporto com un investigador davant dels estudiants, estaré prenent un risc inútil, i puc arribar a donar un missatge fals sobre la matèria que vull ensenyar.

El problema de la didàctica en tant que ciència no consisteix a haver de proposar immediatament una solució als problemes d'ensenyament, sinó a explicar què passa i a tractar de distingir a través dels fenòmens, a partir de l'estudi del que ja ha passat, les lleis i models que han de permetre prendre decisions diferents en funció dels resultats esperats. Però primer s'ha de comprendre com actua realment el sistema. Per això la didàctica no es pot reduir a la racionalització de l'activitat dels professors. Al contrari. El

pensament natural està condicionat per la necessitat d'adoptar una decisió immediata. El que assegura una certa eficàcia al treball dels professors és la possibilitat de veure quan una decisió no és realment bona i corregir-la immediatament per una altra. *És l'exercici massa fàcil o massa difícil? En proposaré un altre per mostrar un altre punt de vista.* Aquesta possibilitat de corregir la decisió anterior és la principal característica del professor, i és necessària per obtenir certs resultats. No conec cap teoria que permeti estalviar-se aquesta activitat. És més, tenim una demostració del fet contrari: si existís una didàctica perfecta, ideal, això és, una manera de comunicar directament a un nen el coneixement de, per exemple, un gran algebrista actual, no és segur que s'obtingués per aquest camí un millor desenvolupament del saber o del coneixement del nen. La transmissió d'un camp de coneixements depèn que es creï la possibilitat de fer avançar els coneixements i els sabers. L'activitat dels professors en tant que elegeixen i transformen els coneixements és una part constitutiva de la construcció de les matemàtiques.

La separació excessiva, en la investigació matemàtica, entre el que és nou i la reorganització del que ja existeix resta tot el seu valor a aquesta última activitat que té, no obstant això, un gran interès social per al funcionament mateix de la comunitat matemàtica. Aquesta escissió condueix dramàticament a una visió deformada, que menysprea el treball dels professors, perquè considera sense valor el fet de reorganitzar entre si els coneixements ja existents. Euclides o Bourbaki no haguessin avui dia obtingut el títol de matemàtic, perquè no hi ha cap teorema nou a la seva producció. En la seva labor de reorganització de coneixements ja obtinguts no hi ha resultats nous. En el treball de tot matemàtic hi ha una part que reorganitza, que repeteix els coneixements. Hi ha altres tipus d'arguments per mostrar que es necessita una transformació abans de donar nous resultats matemàtics. La dialèctica entre l'organització i el descobriment de matemàtiques noves és una de les coses que tractem d'estudiar en didàctica de les matemàtiques.

3.2 L'enginyeria didàctica

Per tal que els alumnes aprenguin, han de resoldre certs tipus de problemes. El més fàcil és donar exemples de problemes que fan funcionar els coneixements que es volen ensenyar. És el mínim que s'ha de fer. El que s'ha d'ensenyar és la correcció d'aquests problemes, juntament amb els teoremes corresponents. És una posició extrema però la mantinc: sense problemes no hi ha pensament matemàtic. I els teoremes es poden aconseguir com una manera econòmica d'aprendre el que s'ha de fer per resoldre problemes. *L'enginyeria didàctica és la proposta i l'elecció de condicions que permetin desenvolupar els coneixements matemàtics de l'alumne.* Però hi ha una altra condició: parlarem d'enginyeria didàctica quan l'elecció d'aquests problemes es recolza en la teoria didàctica, rebutjant els tipus de problemes que provoquen dificultats. La legitimació de l'elecció dels problemes, de les seves variables, etc., s'ha de recolzar en la teoria didàctica.

Per als professors, l'enginyeria didàctica és un estudi potser massa tècnic. Actualment, l'element principal de la seva formació en aquest camp és l'observació d'aules. No podem fer gaire més en la preparació dels professors que veure amb altres ulls la realitat de l'aula, la contingència. Fins fa dos anys, es feia la preparació dels professors sense que hi hagués una confrontació entre el que se'ls deia durant la formació, per exemple l'organització dels problemes que s'havien de presentar, i el que feien realment els professors en actiu. Es concebia aquesta informació professional com quelcom que ve després de la formació, que arriba amb l'experiència.

Per què l'enginyeria didàctica és un estudi massa tècnic per als professors? Si es vol

proposar a la societat un tipus de matèria per ésser ensenyada, s'ha de descriure, no tan sols el que es proposa, sinó l'efecte que tindrà aquest ensenyament, la manera com s'ha elaborat el projecte, la seva fonamentació, etc.; és a dir, cal proposar el necessari per establir una patent que descrigui i justifiqui l'ús i la utilitat del nou *artefacte didàctic*. La producció d'un objecte d'ensenyament no és suficient. La diferència entre la didàctica espontània i l'enginyeria és que, sobre un mateix problema, l'enginyeria distingeix entre el problema i la descripció de les seves propietats. Els projectes d'enginyeria didàctica no són absolutament necessaris, es pot seguir ensenyant matemàtiques amb els problemes que coneixem, amb la cultura didàctica habitual que tenim. Però quan es proposa un projecte d'enginyeria didàctica, s'han d'avançar les raons per les quals s'hauria d'ensenyar tal o qual cosa de tal o qual manera en relació amb certs coneixements didàctics. Proposar una enginyeria als professors és l'acte segon, i significa dir-los com es pot ensenyar aquest tipus de coneixement matemàtic que permeti realitzar tal o qual tipus d'exàmens (com ensenyar als alumnes de secundària les transformacions geomètriques, quins exercicis proposar, etc.).

3.3 Didàctica d'una noció matemàtica

Aquest punt és el més important. Per ensenyar, per exemple, els nombres naturals o racionals en l'ensenyament primari, o per ensenyar la noció de funció o qualsevol noció matemàtica, s'ha de fer una reflexió específica que no és objecte d'ensenyament en els cursos universitaris de matemàtiques. I aquesta reflexió ha de ser explicitada d'acord amb el que s'ha posat en evidència en les investigacions didàctiques.

Com es pot transformar la visió d'una noció matemàtica mitjançant l'anàlisi didàctica d'aquesta noció? *Un dels papers de la didàctica és explicar les matemàtiques*. Per què? No ho fan ja els matemàtics? Sí, els matemàtics són excel·lents epistemòlegs i coneixedors de matemàtiques en el domini en el qual treballen. Però en els dominis que no coneixen, tenen una epistemologia espontània que construeixen a partir de la seva experiència de professors o estudiants. A més, no es pot pensar que l'epistemologia d'un concepte pugui donar informacions clares sobre un altre concepte en general. Es poden comprendre perfectament les relacions que existeixen entre les assercions de la geometria i els coneixements de l'espai, però això no dona cap mitjà per atacar l'ensenyament de les probabilitats, per exemple. És un problema completament diferent. *Aquest és el fonament de la didàctica: el que es va a construir és específic del coneixement matemàtic, no pot ser una idea general que s'aplicaria sola, de manera independent del contingut matemàtic*. Comprendre què és construir els nombres naturals, quins coneixements es van a desenvolupar, què demanarà el professor als alumnes des del punt de vista de comprensió, de coneixement, les diferències entre això últim i el saber ensenyat, etc. Per exemple, quan s'ensenyava l'addició, la multiplicació, l'ordre, etc., en els nombres naturals, el nen entén, per exemple, que ha fet una multiplicació i que el resultat és correcte perquè el resultat creix amb cada factor del producte. Això és un mitjà de control: l'alumne controla l'addició per la recitació del successor, controla la diferència per l'addició, controla la multiplicació per l'addició (pensa 3 vegades 4 és 4 més 4 més 4). És una forma de comprensió personal. Quan es volen explicar els decimals, tots els esforços anteriors de comprensió, és a dir, d'invenió de coneixements, de *teoremes*, d'opinions sobre què són els nombres, fracassarà. Això no es tindrà en compte en l'ensenyament, no es dirà, per exemple, que els decimals no tenen successor, no se'n treuen totes les conseqüències. I aleshores els nens ja no entenen què pot ser 3,5 per 7,3. Hi ha hagut un treball enorme en la història de les matemàtiques per construir aquesta operació. El que serveix per en-

senyar aquesta noció ja no és l'addició sinó la proporció: *ab és el que és a a com b és a 1*, i això funciona tant per a les fraccions com per als naturals. Així, els alumnes adquireixen mitjans per construir coneixements i assumir la responsabilitat de comprendre el que se'ls ensenya. Per tal de fer això es plantegen, sobre cada problema, preguntes de les quals no se'ls ha ensenyat la resposta; aquesta ha de ser construïda per una activitat que no els ha estat presentada abans, que està sota la responsabilitat de l'ensenyat. I cada coneixement que construeixen té la possibilitat d'ésser fals, de revelar-se fals més tard. El professor ensenya sota la responsabilitat de construir una comprensió falsa del que ensenya i d'utilitzar aquesta comprensió per després corregir-la, si pot, quan s'aborda a classe un nou aspecte de la noció. Aquesta idea està en la base de la teoria dels *obstacles didàctics*.

Examinar com es pot construir un coneixement com els nombres naturals, o els enters, requereix una anàlisi específica de macrodidàctica i microdidàctica. Macrodidàctica, com a estudi de l'organització general dels coneixements; micro-didàctica, com a estudi de les situacions particulars que permeten construir parts particulars dels coneixements. S'han d'organitzar les dues de manera que permetin construir una gènesi que sigui possible per a l'estudiant, prou *veritable* com per salvar els obstacles i millorar els coneixements antics, i que convergeixin al final cap a un coneixement actual, el d'avui. La didàctica dels principals coneixements matemàtics demana una reflexió pròpia sobre cada un dels objectius de l'ensenyament de les matemàtiques. Per fer aquestes anàlisis, per saber què és un obstacle, com funcionen les variables didàctiques, les situacions, etc., s'ha de desenvolupar un nombre de conceptes metamatemàtics, fins i tot metadidàctics en el sentit que han de servir per descriure l'activitat didàctica. A aquest instrument d'explicació de les matemàtiques i la seva gènesi l'anomeno *didàctica fonamental*. Això és una presa de posició teòrica i suposa que la teoria didàctica pot revolucionar l'epistemologia i transformar la descripció de la construcció d'un coneixement —que és un fet únic— en una aplicació d'un coneixement general, més universal. És un desafiament, però es pot comprendre que aquest desafiament està lligat a l'ambició de construir la didàctica.

3.4 Didàctica fonamental

Aquest és el punt en què aparentment se separen les matemàtiques i la didàctica. La didàctica fonamental crea certs conceptes, certes idees específiques com a eines de descripció i anàlisi de les condicions de producció de les matemàtiques. Però aquesta escissió no ha d'emfasitzar-se gaire. Quan es va crear l'*anàlisi situ*, tampoc semblava que allò fossin matemàtiques; quan es va inventar l'àlgebra, quan es va donar al nombres l'estatut de solució d'una equació, es va crear una condició de funcionament dels nombres que no era coneguda abans; el mateix va esdevenir en inventar-se el càlcul i en obtenir equacions algebraïques com a solucions de sistemes diferencials. De manera que una teoria de les condicions de creació del saber matemàtic també es pot considerar com el fonament d'un nou domini susceptible d'una anàlisi de tipus matemàtic.

No veurem aquí una presentació de la didàctica fonamental. Només ens plantejarem què pot haver-hi en un curs de formació del professorat per proporcionar als professors els elements principals que els permetin de comprendre el que passa a l'aula, els indicis que han de mirar per tal d'optimitzar les seves decisions i per corregir-les.

La didàctica fonamental és un instrument d'explicació de les matemàtiques: de la seva gènesi, del seu funcionament i del seu ensenyament. Els fets didàctics són fets reals, durs, estesos en el temps tant com els fenòmens que estudia l'economia. *L'aritmètzació de l'àlgebra*, per exemple, és un fet que es va desenvolupar fa quatre segles i que continua

desenvolupant-se avui dia. Hi ha fenòmens que són desconeguts en aquest moment, ens trobem amb el fet que no podem dominar certs fets. Podem donar grans i petits exemples d'això amb l'ensenyament lligat a les matemàtiques modernes. La gent en general opina: a alguns els sembla bé, a d'altres malament; podríem dir que hi va haver coses extraordinàries al costat d'errors greus. Però el que és important és que apareixeren fenòmens importants, com l'*esllavissada metadidàctica* sobre la que ens aturarem un instant.

Durant anys, s'han utilitzat dibuixets per explicar les operacions, els connectors lògics, etc. Era una idea agafada d'Euler que sembla molt interessant per expressar la intersecció de conjunts, la unió, etc. Però el model és fals: hi ha coses de la teoria que no són concretament significatives. Per exemple, la idea de conjunt suggerida pel model com a col·lecció de coses que estan pròximes les unes de les altres no serveix per concebre un conjunt de particions que es correspongui amb parts no connexes dels dibuixos. Quan els elements no estan junts s'ha d'inventar un altre conveni, un altre model. Així, tot el sistema que havia de servir per controlar un pensament lògic es transforma en un munt de convenis i arguments aliens al que es vol ensenyar. *L'esllavissada consisteix en el següent: per parlar d'una qüestió matemàtica es desenvolupa un discurs no matemàtic.* Per exemple, per fer una teoria de les funcions, per parlar dels objectes funcions, s'utilitzen conceptes de conjunts, nocions lligades a la teoria de conjunts. Deprés, per reorganitzar les matemàtiques i presentar les estructures d'una manera global, amb la lògica que es desenvolupa molt ràpidament en aquest moment, s'utilitza una teoria dels conjunts presa de l'anàlisi funcional en tant que fonament de tot coneixement matemàtic. Aquest és el treball de Bourbaki, i aquest és el principi de l'esllavissada: es construeix una cosa per parlar d'una altra. Per ensenyar als estudiants els fonaments, les paradoxes, etc. se'ls pot ensenyar lògica formalitzada i tot funciona bé. Però per ensenyar als nens més petits, s'utilitzen els diagrames d'Euler, dibuixets per parlar de conjunts, conjunts per parlar de funcions, etc. Els dibuixos no es poden controlar directament, no es pot ensenyar el seu control. Llavors es desenvolupa un vocabulari especial per parlar d'aquestes coses: el color del conjunt, la seva etiqueta, etc. I per parlar d'aquest vocabulari, per establir convenis, es necessitarà un altre vocabulari, etc. Pot haver-hi diversos nivells d'esllavissament. Els professors de matemàtiques veuen que això és un problema i es lamenten: què podem fer? No poden tractar la relació entre els coneixements i els sabers d'una manera correcta sense abans resoldre el problema didàctic de l'ús i control dels objectes del saber. Llavors ho deixen estar.

Hi ha altres tipus de fenòmens didàctics que resisteixen. No és suficient que tots els professors tinguin una formació matemàtica. Passa el mateix en economia. Existeixen dues il·lusions: la il·lusió de la ingenuïtat perfecta: demà hem de reflexionar, tenim un coneixement perfecte per tractar això. I la il·lusió del coneixement perfecte: els sabis de Chicago resoldran tots els problemes d'Argentina de manera perfecta. Les dues maneres fracassen. I la metàfora serveix per als fenòmens didàctics: hem de comprendre quines són les causes dels efectes que observem. I això té un paper molt important per als professors perquè la societat exigeix d'ells una qualitat, una transparència, uns resultats, coses a les quals els professors no poden respondre. Llavors desenvolupen una mena de falsa culpabilitat: el bon professor ho pot tot. Quan dos-cents mil professors fan la mateixa tonteria no és perquè existeixen dos-cents mil tontos, és perquè existeixen forces que els impellen en aquesta direcció i optimitzen entre els problemes que troben dient coses que a d'altres els semblaran tonteries. Però aquests fenòmens s'han d'explicar i analitzar per comprendre exactament on és la responsabilitat de cadascú, ni més ni

menys. *La didàctica ha de proporcionar als professors els instruments necessaris perquè puguin decidir en cada lliçó obtenir un resultat o un altre. Aquest és el paper de la didàctica en la formació del professorat: el d'alleujar, descarregar el professor de falses responsabilitats que el fan al final responsable de tot.*

3.5 Didàctica matemàtica

Una part de la didàctica fonamental es pot definir com a desenvolupament d'una teoria matemàtica. Així, les *situacions didàctiques* es poden descriure com autòmats de cert tipus i es pot verificar la consistència de cert tipus de declaracions a propòsit de les situacions, deduint-les d'un estudi directe dels models. Per exemple, l'existència i caracterització d'una *memòria didàctica*, o memòria del sistema didàctic. Aquesta és una cosa que no s'ha descobert directament a partir de l'observació. No hi ha en els textos d'ensenyament un apartat a propòsit del que ha de recordar el professor (o el sistema) sobre l'activitat d'ensenyament d'un concepte. Res no impedeix que arribi un especialista de la primera lliçó, doni la lliçó, plantegi les preguntes, controli l'aprenentatge i després cedeixi el seu lloc a un especialista de la segona lliçó que no sap res del que ha ocorregut anteriorment. Això no es fa generalment, però no hi ha res que digui què ha de saber de la primera lliçó el professor especialista de la segona. Es concebeix generalment el procés didàctic com un procés markovià: hi ha un estat de les coses, es pren una decisió que canvia aquest estat, i una decisió coneixent únicament l'estat inicial anterior. Amb el model matemàtic subjacent a la *teoria de les situacions didàctiques* podem demostrar que això és fals.

Es poden donar així petits exemples de coses que permeten analitzar els fenòmens de didàctica de les matemàtiques amb l'ajuda de les matemàtiques. Faré una observació personal —que no és fruit de cap investigació. Crec que els matemàtics són els que menys utilitzen les matemàtiques per desenvolupar models explicatius dels fenòmens didàctics, els que menys utilitzen l'estadística, els que no els agrada analitzar un procés o el que pot passar a l'ensenyament. Fer matemàtiques elementals, com per exemple realitzar l'anàlisi d'un procés amb una petita matriu i el teorema central del límit és una cosa tan particular que sembla que s'hagi d'utilitzar únicament dins de l'àmbit de les matemàtiques. Vol dir això que es pot aplicar l'estadística d'una manera salvatge, sense el control d'una teoria prèvia? Els matemàtics són coneixedors que no mengen d'aquest pa. Els sembla que la utilització de les matemàtiques en la didàctica és tan falsa que posen tot sovint en dubte la seva utilitat.

3.6 Les matemàtiques de la didàctica

També s'han d'ensenyar matemàtiques específiques per als professors. Crec que els professors han de tenir un llenguatge per parlar de les matemàtiques, aprendre un mínim de lògica matemàtica, els elements d'una teoria de conjunts que permeti entendre les bases de la teoria matemàtica que s'ensenyava. Es poden aprendre altres coses específiques, que no són matemàtiques per ensenyar sinó per comprendre el seu propi treball.

A la formació del professorat de primària, a França, ja podem proposar problemes de didàctica als futurs mestres, o, millor, problemes de matemàtiques barrejats amb didàctica. Anomenem *matemàtiques* tot aquest conjunt de coneixements, *matemàtiques per a professors*. Es tracta de matemàtiques amb les consideracions necessàries de didàctica perquè puguin ser útils als professors. Aquesta assignatura rep el nom de *matemàtiques* com en economia es diu matemàtiques a allò que s'ensenyava en relació amb l'activitat d'utilitzar matemàtiques en economia. Hi ha teories matemàtiques com

la de les matrius positives que tan sols es desenvolupen en economia i que s'ensenyen com a matemàtiques per a economistes. De la mateixa manera nosaltres ensenyem matemàtiques per a professors. L'origen de la dificultat és la barreja que existeix entre la preparació dels matemàtics de tots els dominis i la dels futurs professors.

4 L'observació d'aules (o la relació amb la contingència)

Abans d'acabar, encara que no he pogut donar un pla detallat dels aspectes més importants de la didàctica fonamental per a la formació del professorat, vull dir algunes coses sobre la relació amb la contingència.

Suposem (com és tradició) que, en el primer any de formació, els professors aprenen coses per ensenyar i que, durant el segon any, aprenen exercint i veient les classes dels veterans. Generalment aquesta estratègia de formació fracassa perquè els veterans no són capaços de mostrar les tècniques d'ensenyament que dominen per experiència. Els problemes de l'aprenent no són els que suposa el veterà, i aquest tendeix a mostrar aspectes molt difícils de la seva professió, quan en realitat el principiant fracassa sobre aspectes molt elementals. Com organitzar, doncs, les observacions de les classes? Quina relació ha de tenir un futur professor amb la contingència a l'aula, amb el que passa a l'aula (i que podria passar d'una altra manera)? És aquest un problema de didàctica de les matemàtiques o de pedagogia?

Crec que és en primer lloc un problema de didàctica: *el que importa en una aula, el que ha de veure un professor quan ensenya, són els fets lligats al coneixement ensenyat.* És cert que hi ha un munt de variables que també actuen: psicològiques, sociològiques, fins i tot meteorològiques, tot pot actuar sobre la història d'una classe. No estic rebutjant aquests tipus de precaucions. Per exemple, inventar els grans avions *jumbo-jet* va servir enormement per desenvolupar el coneixement dels idiomes estrangers, i aquesta innovació va ésser potser més revolucionària per a l'ensenyament de les llengües que qualsevol altre mètode que s'hagués pogut crear. Un altre factor que actua avui dia sobre el nivell dels professors és la demanda econòmica: si tots els possibles professors de matemàtiques canvien de professió, deixa d'haver-hi ensenyament de matemàtiques. I això no depèn del nivell de desenvolupament de la didàctica.

Però estic dient que les variables que han de conèixer en primer lloc els professors són les lligades a la mateixa raó de la seva presència a la classe: els professors no estan aquí per tractar els seus problemes psicològics o econòmics, sinó per ensenyar matemàtiques. El que realment importa és veure què passa en una aula respecte al que s'aprèn o al que no s'aprèn, veure els problemes que neixen aquí a propòsit del saber que es vol ensenyar. I això no es pot mostrar fàcilment. No n'hi ha prou amb posar un principiant en una aula perquè sàpiga com i què ha d'observar: com analitzar la preparació de les situacions, què és pertinent i què no, com analitzar les situacions didàctiques, les parts adidàctiques, els moments en què els nens estan sols pensant per ells mateixos els problemes, quin paper fan aquests moments, què signifiquen els errors, com s'analitzen, s'agrupen, es classifiquen i es tracten aquests errors, quina significació tenen els processos d'avaluació, quin paper té el fracàs de certs alumnes en la conducta de la situació, com buscar problemes que facin fracassar a certs alumnes per obligar-los a construir nous coneixements, etc.

Aquest tipus d'estudi i els elements teòrics que suposa, s'ha d'acompanyar de manera efectiva amb experimentacions. Com conciliar la necessitat d'actuar en situacions de gran incertesa amb la deontologia de l'exigència d'una eficàcia i seguretat a l'aula? Els coneixements en didàctica poden donar als professors una idea de la comprensió de les matemàtiques. Però la seva producció i organització amb l'ajuda d'una anàlisi que

pren això com a objecte d'estudi és una activitat professional inevitable. És un saber professional que legitima la professió d'ensenyant, que fa que no sigui suficient tenir un petit coneixement per fer el que fa el professor. I aquest saber no ve donat de cop amb la lectura de certs llibres, sinó que cal una organització, una estructuració dels papers professionals entre investigadors i professors. Hi ha una guerra actualment contra la didàctica, provocada a vegades per certs matemàtics per raons laborals: a França, la didàctica ha nascut dels matemàtics, de la voluntat de certs grans matemàtics, del seu suport i invenció pròpia. Ara hi ha una lluita per les places a la universitat: els matemàtics tenen por d'obrir la porta a aquest estrany tipus de reflexió en el seu domini. És necessari que la didàctica estigui en el conjunt de les preocupacions de la comunitat dels matemàtics. És amb ells que s'han de confrontar els progressos i descobriments de la didàctica. Com es necessita veure moltes més coses que les referents a les matemàtiques, és normal que hi hagi altres dominis fora de les matemàtiques que es proposen comprendre el que passa en una aula. *Però la responsabilitat del que fa aquesta institució d'investigació que és la didàctica ha de quedar-se en la comunitat matemàtica. Pot haver-hi didàctics de la matemàtica psicòlegs, o sociòlegs o antropòlegs. La nostra comunitat els necessita. Però ha d'haver-hi dintre de la comunitat dels didàctics una majoria de matemàtics, o amb una influència suficient, perquè la formació dels professors de matemàtiques és una responsabilitat dels matemàtics.* És als matemàtics a qui la societat demana la seva opinió sobre el que succeeix amb l'ensenyament de les matemàtiques. No poden tancar-se en el domini de les coses que els interessin només a ells. Al mateix temps, la didàctica té mala fama entre els professors que pensen que és un tipus de coneixement que ja tenen, o que no necessiten. I si l'accepten és per una mena de comoditat administrativa: doneu-nos la solució i ja l'aplicarem. Ara és el moment que els progressos que s'han fet en didàctica comencin a donar els seus fruits en la formació del professorat, tant a França com en altres països.

En conclusió, tractem en didàctica de quedar-nos el més a prop possible del conjunt dels matemàtics. Perquè les matemàtiques són la casa dels didàctics i la dels professors de matemàtiques.

LABORATOIRE DE DIDACTIQUE DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES ET
TECHNOLOGIQUES (LADIST)
UNIVERSITÉ BORDEAUX 1
40, RUE LAMARTINE
33400 TALENCE
brousse@frbdx11.cribx1.u-bordeaux.fr