

L'àlgebra vectorial. Una història que ens cal reescriure*

Josep M. Parra Serra

Laboratori de Física Matemàtica (I.E.C)

Departament de Física Fonamental

Universitat de Barcelona

e-mail: jmparra@hermes.ffn.ub.es

Introducció

“But I venture to differ from his authority (Grassmann) in thinking that the quaternion symbols do not in first place answer to the “Elementargrösse” of the Ausdehnungslehre, but to binary products of them; from which supposition, as we have seen, the laws of their multiplication follow at once.” (W.K. Clifford, 1878)

Moltes són les raons per les quals un científic pot interessar-se per la història de la seva disciplina. En el cas concret d'aquest assaig (això és, l'estudi de la inclusió, realitzada per Clifford, dels quaternions de Hamilton en el sistema de càlcul de l'extensió de Grassmann), entre les raons que han mogut a l'autor n'hi ha de:

a) Històriques. Es tracta d'una síntesi “genial” que, si no s'hagués negligit, hauria modificat substancialment els desenvolupaments de l'anàlisi vectorial, tensorial i la teoria de grups de transformacions. I el debat Gibbs-Tait possiblement no s'hauria produït.

b) Científiques i pedagògiques. L'anàlisi vectorial avui vigent està basada en una síntesi defectuosa dels sistemes de Hamilton i Grassmann.

*Aquest estudi és una versió ampliada del presentat a les *II Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica* (Peníscola, 5-8 desembre 1992), pág. 359-377 de les Actes (publicades, el 1993, per la Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Filial de l'Institut d'Estudis Catalans).

La conseqüència és un del tot innecessari “gongorisme” que obstaculitza la construcció i comunicació d’una imatge del món físic.

c) Filosòfiques i metodològiques. El caràcter contingent del “progrés” de la ciència és, un cop més, posat en evidència. I cal afrontar qüestions referents a una “reconstrucció” de la mateixa ciència basada, en bona mesura, en una part oblidada de la seva història.

1 Ciència, història i filosofia. Algunes qüestions de mètode

És lloc comú considerar l'àlgebra i la geometria com a parts força diferenciades de les matemàtiques. La primera és la ciència dels nombres; la segona, de les figures, de l'espai. Aquesta contraposició inicial dels dos subjectes, evident a un nivell elemental, esdevé problemàtica a un nivell superior. En totes les èpoques, per unes raons o unes altres, la clara línia de demarcació entre àlgebra i geometria ha estat eliminada. L'organització del pensament matemàtic ha tendit a integrar-les en un únic esquema. La integració que en resulta és, quasi sempre, concebuda com una veritable síntesi, que supera les limitacions de la fraccionada concepció anterior i obre nous camps d'aplicació. Una síntesi semblant a la maxwelliana, que unificant electricitat i magnetisme permeté a més un nou i més complet tractament dels fenòmens lluminosos. Així, l'anomenada àlgebra vectorial, formulada per Gibbs i Heaviside al final del segle passat, és avui una estructura universalment utilitzada en la formulació de les teories físiques en conjunció amb l'àlgebra lineal.

Però aquesta unió de l'àlgebra amb la geometria, com tota unió entre entitats inicialment oposades, no deixa de plantejar problemes. Problemes que, si no estan ben plantejats i ben resolts, poden amenaçar de dur a la ruïna l'empresa comuna, independentment del perjudici o benefici de cadascuna de les parts. La tesi que presentem, basada essencialment en la història matemàtica de les àlgebres geomètriques, és que en aquesta unió hi ha hagut una renúncia indeguda dels drets individuals de cadascuna de les parts i que la geometria ha estat la part que n'ha sortit clarament perjudicada.

L'estudi de la història concreta d'aquesta part de les matemàtiques, bé que adreçada quasi exclusivament als aspectes internalistes, il·lustra suficientment que la ciència és una empresa humana. Com a tal, reflecteix plenament les aspiracions, els interessos, les fatalitats i les activitats sovint contraposades dels seus protagonistes. Com digué Sartre, tota ac-

ció humana contribueix a la història i si sovint ens sembla que no es així, que els resultats són nuls o no es corresponen amb les accions, és perquè els altres també són actors de la història.

En historiar aquesta petita part de les matemàtiques confesso que sovint he sentit reviure i involucrar-me en el procés històric, i que no puc –i no crec que honestament es pugui– escriure una crònica absolutament “imparcial”. En primer lloc no es fa història per guanyar-se el pa. En tot treball de recerca històrica hom s’interessa per una època, un autor, una idea, etc., partint d’una sèrie de factors “temàtics”, relacionats amb la concepció del món que cadascú té; l’estudi es presenta llavors com un autèntic “intercanvi” amb la història. En el decurs de l’estudi la història, per dir-ho així, pren vida en la ment de l’historiador el qual, en passar-ho al paper, en expressar les noves vivències en paraules, actua com a cronista. En contrapartida, aquesta vivència “històrica”, com qualsevol altra vivència, necessàriament modifica (enriqueix, reestructurant, destruint, etc.) la concepció del món del mateix historiador. Aquest necessari “reviure” la història és una forma específica de tenir en compte la necessitat d’historiar en context, de saber-se situar en el marc històric de l’època objecte d’estudi sense deformar els “fets” històrics sobre la base de factors inexistents en el passat.

Però hom no pot desempallegar-se de les seves idees, i menys un historiador, la tasca del qual consisteix a aplicar tant el seu saber com el seu “saber fer” a un conjunt de materials sovint fragmentats, incomplets i dispersos, per tal de transformar-los en un saber operatiu, capaç d’actuar sobre la concepció del món dels seus contemporanis, enriqueix-la i modificant-la si cal. De fet, seria un veritable contrasentit que ho fes; el ben conegut aforisme “la història jutjarà” és, per sobre de tot, el reconeixement que el procés històric rarament pot ser copsat pels seus protagonistes i que les generacions posteriors tindran més i millors elements de judici. Així, la que podríem anomenar acció històrica de la història passa pels mateixos historiadors, que no poden renunciar a aquests elements de judici.

És per això que la millor manera de no curtcircuitar la recerca partint d’unes idees preconcebudes consisteix a tornar a vivenciar la història, amb tot el que som i sabem. Acceptar el lliure intercanvi amb aquest material del passat i del qual tant ell com l’historiador en resulten modificats: el material és reelaborat, sotmès a una particular reconstrucció històrica, mentre l’historiador adquireix uns nous coneixements “actius” i els comunica als altres en compliment de la seva tasca professional.

Els comentaris precedents són d’aplicació general a tota història. La

història de la ciència té, però, unes característiques que la distingeixen clarament de la que podríem anomenar “història general”. En la història general el rellotge mai no es pot fer tornar enrere. La història general té un caràcter d’immutabilitat que transcendeix tota actuació de l’historiador. Aquest mai no podrà participar en primera persona del procés històric. La seva vivència ha de limitar-se a ser, per dir-ho així, “virtual”. No és aquest el cas de la ciència. Aquí l’historiador es troba en una situació molt més “afortunada”. Com Goethe molt encertadament va dir, “la història de la ciència és la mateixa ciència”. La vivència de l’historiador de la ciència implica per tant, necessàriament, la comprensió del fet científic objecte d’estudi. És a dir, implica una genuïna activitat científica per part de l’historiador. Sense aquesta activitat científica la història de la ciència queda transformada en un treball d’erudició i recopilació. Un treball que pot tenir un gran valor i mèrit com a tal, però que per si sol, sense una posterior activitat històrica genuïna, restarà inoperant en la història, és a dir, en la mateixa ciència. La comprensió del fet científic significa *redescobrir* o *recrear*, en primera persona, el que altres han descobert o creat abans. En la mesura que aquest *redescobriment* o *recreació* es realitzen plenament en la ment de cadascú, i necessàriament modifiquen la concepció del món, la vivència històrica és real i no virtual. Per a l’historiador de la ciència comprendre és tornar a fer, és tornar a donar “vida”, fer “reviure” fets i concepcions científiques del passat. La reconstrucció “històrica” de la pila de Volta o de l’interferòmetre de Michelson tenen un caràcter i una exigència de realitat que els distingeix nítidament de qualsevol reconstrucció “cinematogràfica” de la batalla de Waterloo, per ben documentada que sigui. Aquesta “fidelitat” que hom exigeix als aparells històricament reconstruïts és igualment exigible al nivell de les concepcions teòriques posades a la llum pels historiadors de la ciència. Tant els uns com les altres són el que ha estat la ciència.

Amb això no vull dir, evidentment, que les activitats de l’historiador de la ciència i les del científic siguin idèntiques o assimilables. En primer lloc, la motivació fonamental de la recerca, que podríem anomenar “vocacional”, és totalment diversa. La motivació del científic pot definir-se com la recerca d’una explicació “racional” (és a dir, en un marc teòric-pràctic establert o paradigma kuhnià) d’un conjunt de fets o interrogants que es plantegen com a problema. De fet, fins i tot la que Kuhn anomenà ciència extraordinària, i que condueix a modificar el marc establert, entra dins la categoria anterior. Cal només eixamplar la definició de marc teòric-pràctic: la revolució relativista canvià el marc geomètric de la física de tres a quatre dimensions, però la física continuà sent formulada sobre la

base d'una geometria. O, més simplement, admetent com a "legítima" activitat científica la transformació dels marcs teòrico-pràctics establerts. És el fet de cercar una explicació racional en un marc "preestablert" de racionalitat el que permet formular l'activitat científica com la recerca de la "veritat", del "mecanisme", del "procés" (tots ells relatius al marc) pel qual els fets se'ns apareixen com a tals.

No és aquesta la tasca de l'historiador de la ciència. En la immensa majoria dels casos el marc teòrico-pràctic en el qual ha d'emmarcar el seu estudi és totalment obsolet des del punt de vista del científic contemporani. Quin interès per a un científic pot tenir estudiar el sistema astronòmic de Ptolomeu, o les matemàtiques babilòniques, o els sistemes cartogràfics del segle XVI? L'atenció prestada a aquests temes en els plans d'estudi destinats a la formació dels científics respon per si sola a la pregunta.

L'historiador de la ciència no pot, com a tal, anar a la recerca de l'"explicació científica". Són precisament les explicacions científiques, passades i presents, obsoletes o vigents, sempre amb inclusió explícita del marc teòric i pràctic que les suporta, l'objecte del seu estudi. És a dir, el coneixement de la ciència, passada i present, i no la producció de nou coneixement científic o l'aplicació tècnica d'aquest. El fet que la problemàtica abordada per l'historiador estigui o no definitivament resolta des d'una perspectiva purament científica, és una qüestió secundària, encara que pot influir de manera decisiva en la selecció dels materials i mètodes d'estudi. La característica de demarcació que permet catalogar un estudi com a pertanyent a la història de la ciència, i no a la mateixa ciència, consisteix en el fet que els problemes teòrics i pràctics afrontats per l'historiador ja no formen part, ni són assimilables, al conjunt de "trencaclosques" admesos en el paradigma vigent. Aquesta demarcació, encara incompleta, de la tasca específica de l'historiador de la ciència motiva una sèrie de consideracions de la major importància. Si l'objecte d'estudi són les explicacions científiques és obvi que comparteix una part d'aquest domini amb l'estudiant de ciències, que es prepara per a la seva futura activitat científica o tècnica. I també amb els "filòsofs" de la ciència, l'activitat predominant dels quals és la reconstrucció en el marc de sistemes formals peculiars, dels resultats de l'activitat científica.

L'historiador, llevat el cas de dedicació a temes exclosos de la ciència actual en els quals la intersecció és nul·la, es distingeix de l'estudiant de ciències en, essencialment, dos trets. En primer lloc, la seva preparació addicional com a historiador i, en segon lloc, la finalitat, el resultat o l'aplicació pràctica perseguits amb el seu estudi. Dels tres cicles en què Whitehead [46] divideix tot procés d'aprenentatge (enamorament i

primeres idees, precisió en les idees i domini tècnic en les aplicacions, saviesa i domini dels principis generals amb sacrifici dels detalls) és obvi que la segona etapa, dominant (en excés) en l'ensenyament de l'alumne de ciències, és poc important per a l'historiador. L'etapa de motivació, i del coneixement de tipus "divulgatiu" que l'acompanya, ja es pot considerar recorreguda en el moment d'interessar-se professionalment per una temàtica concreta. El seu estudi està, doncs, centrat directament en l'adquisició de la "saviesa" pertinent. Idealment ha d'assolir el màxim grau de comprensió científica sobre el tema, sobre els resultats i les implicacions últimes, encara que tècnicament presenti llacunes que en un científic podrien considerar-se greus o inadmissibles. Per exemple, en el cas de la relativitat general un historiador no té per què conèixer les tècniques d'enllaç de mètriques ni saber calcular o programar el càlcul de les components del tensor de curvatura; però sí li cal "saber" què és la curvatura, què són les geodèsiques, què representa la solució de Schwarzschild, etc.

És obvi que, en el cas de la física postnewtoniana, els científics estan en una posició "privilegiada" per a esdevenir historiadors de la ciència. De fet, la història de la ciència ha estat sempre una pràctica estesa entre grans científics (Lagrange, Laplace, Duhem, Planck ...). Cal tenir, de fet, la doble formació de científic i historiador per tal de poder realitzar la tasca ben feta. L'actual disposició dels estudis en dificulta sobre manera la seva adquisició, en no permetre accedir al "saber" sinó és al final d'una llarga etapa "tècnica"; i això quan aquesta darrera no s'esgota en si mateixa!

Pel que fa als objectius finals, a l'aplicació pràctica del seu saber, a la seva aportació a la història de la ciència, és obvi que consisteix, essencialment, en l'elaboració i la comunicació efectiva d'aquest saber emmarcat no en un món abstracte de les idees, sinó del conjunt de circumstàncies materials, personals, institucionals, etc. que han vorejat la seva producció i transmissió. Insistim que aquest emmarcament, aquesta reconstrucció històrica peculiar que és la seva tasca específica, exigeix en rigor un autèntic "saber científic", ja que solament així podrà l'historiador "jutjar" el pes específic de cadascuna de les aportacions i circumstàncies. En certa manera la història de la ciència té les mateixes exigències que la història general: cal conèixer les canviants formes de les organitzacions humanes per historiar-les; cal conèixer les canviants formes de les realitzacions científiques per historiar-les; historiar exigeix sempre un acte de coneixement previ a la reconstrucció. I, pel que fa al pensament científic, la seva reconstrucció o és ella mateixa ciència o no és en absolut coneixement, sinó pura "reexpressió lingüística" semblant a la transcripció didàctica.

I ens trobem aquí nítidament, cara a cara, amb la qüestió fonamental

referent a la filosofia de la ciència, al seu domini de demarcació. Una part substancial d'aquest domini, aquella que podríem anomenar com a genuïnament filosòfica i que enfonsa les seves arrels en el *De rerum natura* de Lucreci, "apareix" tan sols com un producte del desinterès de la comunitat dels "científics" per àrees que corresponen a la cosmovisió generada pel mateix pensament científic. És en Heisenberg [17, pàg. 148-149] on trobem una declaració explícita d'aquesta inhibició filosòfica, característica del nostre segle per més que vulgui presentar-la com un retorn als orígens després dels excessos del XIX. En la mesura que la construcció i el manteniment d'una cosmovisió és sempre una tasca necessària en tota cultura, la inhibició dels científics porta tan sols a una nova divisió del treball de dubtosa efectivitat en una empresa per essència interdisciplinària. Pel que fa a l'altra branca de la filosofia de la ciència, la que reconeix els seus seus orígens en el positivisme lògic, consisteix, com la història, en la reconstrucció (ara dita "racional" o més pròpiament axiomàtico-deductiva) de totes les teories científiques "formalitzables". El caràcter científic de la reconstrucció històrica ha quedat nítidament afirmat abans, com a tautologia del que ha estat o és el coneixement científic. Per contra, les reconstruccions axiomàtico-deductives de les ciències de la natura no necessàriament tenen en compte el referent "experimental o empíric", ni poden identificar-se amb la ciència de la qual es pretenen filosofia o epistemologia. De fet, aquesta branca de la filosofia de la ciència és una manifestació conseqüent al triomf de l'esperit axiomàtico-deductiu de la matemàtica grega al començament de segle. Diu Freudenthal [10, pàg. 3-5]:

"Qui no ha sentit parlar del teorema de Pitàgores? Aquest teorema era conegut pels babilonis uns dos mil·lenis abans que pels grecs. Va ser Pitàgores el primer en demostrar-lo? No, un teorema com aquest, que no és obvi a ull, només pot ser descobert provant-lo; no pot ser trobat empíricament mesurant els costats dels triangles. No obstant molts llibres ens diuen que la demostració de teoremes va ser una invenció grega més que no babilònica.

Allò que els grecs varen fer en realitat és fer de la demostració un principi en matemàtiques. En la matemàtica grega estan indicades les línies del que avui s'anomena un sistema deductiu. Això, possiblement, començà amb Tales. D'ell es diu que va demostrar teoremes, i una mirada atenta a aquestes proposicions revela que no són de la mena del teorema pitagòric sinó del tipus de la igualtat d'angles en un triangle isòsceles; és a dir, teoremes que són obvis a simple vista. Quan la gent començà a demostrar aquesta mena d'enunciats, van fer públic que havien descobert un nou joc, a saber, demostrar per demostrar. Del fet que eren capaços de provar aquestes proposicions podem concloure que

havien construït un sistema en el qual demostrar és una activitat significativa
...

Allò que l'axiomàtica significa i com han de formular-se els seus axiomes no va ser mostrat fins a final del segle XIX, en l'obra de Pasch –ho va ensenyar als geòmetres italians– i de Hilbert. Deductivitat i el germen de l'axiomàtica són, en la nostra opinió, els trets més sorprenents, i de fet els més moderns, de la matemàtica grega.”

Els resultats de la història de la ciència, tal com l'hem descrita, tenen un domini d'aplicació molt més ampli que el d'una col·lectivitat acadèmica que es tanca en si mateixa, com és el cas de bona part de la “filosofia de la ciència” actual. Pel que fa als resultats històrics en dominis “científicament obsolets”, és obvi que constitueixen aportacions a la història general de les idees amb relacions potencialment enriquidores amb tots els altres camps de les ciències humanes. Pel que fa als resultats en teories que podem anomenar “vigents”, com la mecànica newtoniana, és obvi que els estudis històrics haurien de formar part del material bàsic de l'ensenyament científic. Aportarien, a tots els nivells, aquesta component de “saviesa” que permet a l'alumne passar amb satisfacció d'una etapa a la següent, de l'estudi d'una teoria a una altra en la qual el marc conceptual i pràctic són diferents o, fins i tot, incomparables. Una component que, en l'organització actual dels estudis, resta incomprensiblement oblidada. Incomprensiblement perquè la història, coneixement del passat i del present, és, sense discussió, la sòlida base sobre la qual pot construir-se el futur. Com hem dit abans, la història de la ciència és la mateixa ciència, que requereix una constant reconstrucció per continuar-se construint.

Recordem, per acabar, unes paraules de B.L. van der Waerden, destacat matemàtic i historiador de la matemàtica, i que han constituït un estímulo per a la redacció d'aquest treball [44]:

“En un llibre de text, l'exposició de les teories físiques està obligada a ser, almenys fins a cert punt, *dogmàtica*. L'exposició comença amb una hipòtesi, dedueix les seves conseqüències i les compara amb els resultats empírics. Alguns textos segueixen un mètode *mixt*, combinant l'exposició dogmàtica amb comentaris històrics, mostrant de quina manera les hipòtesis van ser trobades. Aquest mètode té grans mèrits. D'altra banda, el mètode *històric* segueix, graó a graó, el desenvolupament de les idees en les ments dels teòrics, en la mesura en la qual poden ser resseguides en les seves publicacions. En la meua opinió, una comprensió completa d'una teoria física pot ser tan sols assolida mitjançant el mètode històric. Aquest mètode ens permet jutjar si determinades hipòtesis eren realment necessàries per explicar els fenòmens, si poden ser modificades,

i sota quines condicions una teoria és vàlida.”

2 Leibniz, el precursor

Hem començat la secció anterior parlant de l'àlgebra geomètrica i de la tensió essencial existent entre les dues parts d'aquest nom. Com explica Freudenthal la primera “síntesi”, present ja als *Elements* d'Euclides, tingué nefastes conseqüències per al conjunt de la matemàtica grega. El seu origen fou una solució errada, en termes geomètrics, a un problema algebèric (numèric) [10, pàg. 5]:

“Hi ha poques coses que semblin més òbvies que tota relació entre magnituds pugui ser expressada mitjançant nombres naturals. El descobriment que això no era cert, d'acord amb els historiadors moderns, havia d'haver causat una crisi en els fonaments de les matemàtiques, però aquesta és probablement una visió massa moderna. És cert que no encaixava en la doctrina pitagòrica segons la qual tot era nombre, però els matemàtics dins els pitagòrics intentaren trobar una sortida. Es requeria una nova definició de raó, que no usés els nombres naturals. Primer es va fer mitjançant infinites aproximacions que, finalment, van ser eliminades. La solució definitiva a l'antiguitat era semblant als talls de Dedekind. Està presentada en els llibres 5 i 6 dels *Elements*, juntament amb una versió antiga de l'“epsilòntica”. La doctrina grega va fer un pas més: no tan sols els processos infinits, sinó també l'àlgebra babilònica fou eliminada. [...]

Va ser totalment abandonada l'àlgebra? No, no completament, ja que es va inventar un substitut, una àlgebra geomètrica, un sistema de momificació geomètrica de les operacions algebriques, de les equacions lineals i quadràtiques, i de procediments de resolució. Aquest sistema va ser exposat en el llibre 2 d'Euclides i aplicat en particular en el 10 en la classificació de les irracionalitats —un parangó de matemàtica il·legible.

L'àlgebra geomètrica, aquest impràctic producte de dogmatisme metodològic i fanàtic rigorisme, fou la malaltia que matà la matemàtica grega.”

L'àlgebra fou reinventada en el món àrab i una nova relació, aparentment molt més satisfactòria i coneguda com a geometria analítica, fou iniciada per Descartes. Amb ella Descartes, més que geometritzar l'àlgebra, algebritzà la geometria. L'abast de la síntesi cartesiana està clarament recollida en Hestenes [20, pàg. 6-7]:

“Descartes desenvolupa l'àlgebra en un llenguatge geomètric: Descartes donà a la noció grega de magnitud una feliç forma simbòlica en suposar que tot segment de línia pot ser representat en forma única per un nombre. Va ser el

primer a etiquetar els segments per lletres que representaven la seva longitud numèrica. Com va demostrar, la propietat d'aquest procediment resideix en el fet que a les operacions aritmètiques bàsiques com l'addició i la substracció poden fer-se correspondre en una exacta analogia amb operacions geomètriques sobre segments de línia. Una de les seves innovacions més significatives fou descartar la idea grega de representar el “producte” de dos segments de línia per un rectangle. En el seu lloc donà una regla per “multiplicar segments de línia” que donava un altre segment de línia en exacta correspondència amb el producte numèric. Això li permeté evitar les aparents limitacions de la regla grega de “multiplicació geomètrica”. Descartes va poder tractar amb productes geomètrics d'ordre arbitrari, i va fer-ne un bon ús mostrant com usar equacions algebraïques per descriure corbes geomètriques. Aquest fou el començament de la geometria analítica i un pas crucial en el desenvolupament del llenguatge matemàtic que fa possible la física moderna.”

Que a llarg termini, i en el domini de la física, inseparable de la geometria, la “síntesi cartesiana” presentaria problemes ho podem apreciar tant en l'exposició subsegüent de Hestenes com en la vívida descripció de Heaviside, coautor amb Gibbs de l'àlgebra vectorial que s'imposarà com a llenguatge privilegiat de la física del segle XX [16, pàg. 133-134].

“... en el mètode cartesià som conduïts lluny de les relacions físiques que és tan desitjable conservar en la ment, menats a calcular exercicis matemàtics sobre les components. Esdevé, o tendeix a esdevenir, matemàtica cega. Es va dir un cop com un bon acudit sobre un matemàtic que el pobre home es va tornar boig i prenia els símbols per les realitats; com L per la lluna i S pel sol. [...] Si el nostre objecte és en darrer terme físic, més que no matemàtic, llavors com més a prop puguem identificar els símbols amb els seus representants físics, més útilment podrem treballar; i evitarem inútils –encara que igualment correctes– exercicis matemàtics. La sola mirada a la col·locació dels símbols hauria de despertar una imatge immediata de la física simbolitzada, de manera que les nostres fórmules puguin esdevenir **vives**, per dir-ho així. Això és ara possible i, per cert, comparativament fàcil, en l'anàlisi vectorial; però és molt difícil en l'anàlisi cartesiana.”

Speiser deixa clar el paper “transicional”, o provisional, de la “síntesi” cartesiana quan diu [43, pàg. 38]:

“L'essència del gran descobriment de Newton és que les forces són vectors. Aquesta és la més important contribució de Newton a les simetries. Les coordenades cartesianes són el substitut més proper d'un càlcul vectorial abstracte i, en conseqüència, Euler escriurà quasi sempre les seves fórmules en un sistema

de coordenades cartesianes fixades a l'espai; seria un exercici rutinari traduir els seus principals escrits al llenguatge vectorial abstracte.”

Però ja en temps de Descartes i Newton, quan les imperioses necessitats de la teoria electromagnètica de Maxwell estaven encara lluny de fer-se sentir, Leibniz anticipà genialment les línies programàtiques “mestres” d’una anàlisi geomètrica diferenciada de l’anàlisi algebraica. En una sostinguda correspondència amb Huygens, qui rebé molt fredament el seu vehement suggeriment de desenvolupar una *anàlisi situs*, Leibniz escrigué [23, pàg. 558 i seg.]:

“Però després de tots els progressos que he fet en aquestes matèries no estic encara content amb l'àlgebra, en el fet que no dóna ni les vies més curtes, ni les més belles construccions de geometria. És per aquesta raó, quan es tracta d'això, que crec que ens cal encara una altra anàlisi pròpiament geomètrica lineal, que ens expressi directament **situm**, com l'àlgebra expressa **magnitudinem**. I crec disposar del mitjà, i que hom podria representar les figures i fins i tot les màquines i moviments amb caràcters, com l'àlgebra representa els nombres o magnituds; i us envio un assaig que em sembla digne de consideració.” (Hannover, 8 set. 1679)

I l'assaig comença tot dient [23, pàg. 570-571]:

“He trobat alguns elements d’una nova característica, totalment diferent de l'àlgebra, i que tindrà grans avantatges per a representar a l'esperit exactament i al natural, encara que sense figures, tot allò que depèn de la imaginació. L'àlgebra no és altra cosa que la característica dels nombres indeterminats o de les magnituds. Però no expressa directament la situació, els angles i el moviment; i d'aquí resulta que és sovint difícil de reduir en un càlcul allò que hi ha en la figura, i que resulta encara més difícil trobar demostracions i construccions geomètriques còmodes, fins i tot quan el càlcul d'àlgebra està tot fet. Però aquesta nova característica seguint les figures visuals, no pot deixar de donar al mateix temps la solució i la construcció i la demostració geomètrica, tot d’una manera natural i mitjançant una anàlisi. És a dir, per vies determinades. L'àlgebra està obligada a suposar els elements de geometria allà on aquesta característica porta l'anàlisi fins a la fi. Si estigués acabada de la manera com jo la concebo ...

Crec que hom podria amb aquest mitjà manipular la mecànica quasi com la geometria i que hom podria fins i tot examinar les qualitats dels materials, perquè aquestes depenen ordinàriament de certes figures de les seves parts sensibles. En fi, no crec que hom pugui anar massa lluny en física abans d'haver trobat una tal reducció per alleujar la imaginació. [...] No obstant això hi ha alguna esperança d'arribar-hi (a explicar l'estructura submicroscòpica) en part, quan aquesta anàlisi veritablement geomètrica serà establerta.

Però com adverteixo que cap altre no ha tingut mai el mateix pensament, la qual cosa em fa témer que pugui perdre's, si no tinc temps d'acabar-lo, hi afegiré aquí un assaig, que em sembla digne de consideració, i que bastarà almenys per fer el meu pla més creïble i més fàcil de concebre a fi que, si alguna fatalitat n'impedeix la perfecció al present, serveixi de monument a la posteritat, i doni lloc al fet que un altre ho aconsegueixi.”

Entre el 10 i 20 d'octubre torna a escriure a Huygens demanant-li de nou l'opinió sobre la nova característica geomètrica. Finalment, el 22 de novembre, Huygens contesta de manera força decebedora [23, pàg. 577-578]:

“He examinat atentament el que em vàreu enviar referent a la vostra nova característica, però per dir-vos-ho francament, no puc concebre, partint del que m'heu fet arribar, que hi pugueu fonamentar una tan gran esperança ... Us ho dic ingènuament, al meu parer no són més que bells desitjos i em caldrien altres proves per creure que hi hagi quelcom de real en el que vós m'avanceu. No tinc per tant per què no dir que abuseu de vós mateix, coneixent d'altra part la subtileza i profunditat del vostre esperit. Us prego solament que la grandiositat de les coses que busqueu no us faci en absolut retardar donar-nos aquelles que ja heu trobat, com és aquesta quadratura aritmètica, ...”

És d'interès, finalment, observar com en la resposta a la carta anterior Leibniz persisteix en la seva idea i aporta un matís que, vigent encara avui dia, defineix nítidament la seva posició crítica envers la geometria analítica cartesiana [23, pàg. 580]:

“... puc expressar per aquest càlcul tota la natura o definició de la figura (allò que l'àlgebra no fa mai, perquè dient que $x^2 + y^2$ aeq. a^2 és l'equació del cercle, cal explicar mitjançant la figura què són x i y , és a dir, que són línies rectes, perpendiculars entre si i que una comença pel centre, l'altre per la circumferència de la figura) ...

Reconec, això no obstant, que aquests raonaments no són rellevants i que hom tindria més mèrit a fer aquestes coses que a demostrar que són factibles.”

Aquesta llarga citació de Leibniz creiem que queda plenament justificada perquè, com ell mateix s'ocupa d'assenyalar, la idea d'una anàlisi específicament geomètrica, separada de l'àlgebra numèrica és presentada per primera vegada. I el pla que Leibniz traça (i que en certa manera es reconeix incapaç de realitzar com hem vist en la darrera citació) conté elements característics essencials de realitzacions posteriors i que, al nostre parer, no han estat degudament apreciats ni pels científics ni pels

historiadors de la ciència. Dit altrament, Leibniz defineix una utopia, una mesura, amb la qual poden i han de contrastar-se les realitzacions de natura geomètrico-algebraica del segle XIX. Retenim, per ara, com a pressupòsits fonamentals del projecte de Leibniz:

- La geometria analítica és part de l'àlgebra i no de l'anàlisi geomètrica.
- Els objectes de l'àlgebra són els nombres indeterminats (cada aplicació especificarà el seu significat) i les magnituds (que podríem molt bé identificar amb les mesures sobre una escala proporcionades per aparells).
- En l'anàlisi geomètrica les "lletres" sotmeses a les regles del nou càlcul han de representar tot el contingut geomètric. Només així el càlcul pot complir amb la finalitat per a la qual ha estat concebut.
- La física exigeix una tal anàlisi geomètrica.

Com a tret característic, que veurem repetir-se al llarg de la història, assenyalem també l'essencial incomprensió i minusvaloració envers un tal projecte d'anàlisi geomètrica.

3 Hamilton i els quaternions

El segle XIX s'inicià ja amb l'acceptació generalitzada dels nombres complexos i la seva representació gràfica, factor que es mostrà essencial en la seva acceptació. Hamilton [14] n'obtingué una formulació independent de les construccions geomètriques en establir-los com a parells ordenats de nombres reals sotmesos a una determinada llei de producte. Ens remetem a Crowe [9] i a Cartan [3] per a una detallada descripció d'aquest important desenvolupament dels nombres complexos. El que ens interessa però aquí és assenyalar que constituïren un autèntic model de manipulació algebraica de "vectors" en el pla; un model que era lògic intentar estendre a l'espai tridimensional mitjançant triplets de nombres reals. Tots els intents resultaren estèrils fins que Hamilton prescindí dels triplets i hi introduí una quarta component, inventant/descobrint els quaternions.

El quaternió $q = \alpha + v^1i + v^2j + v^3k$ és vist, d'acord amb la formulació actual de la física, com una suma d'un escalar i un vector i , per tant, com l'origen més evident del modern càlcul vectorial. És aquesta, però, una visió massa moderna i emmarcada en una simplificació didàctica inherent al sistema vectorial de Gibbs-Heaviside. Una visió més "historicista"

resulta molt més enriquidora, més crítica i, per dir-ho d'alguna manera, més viva. Hamilton fou plenament conscient que havia descobert no tan sols una manera de manipular significativament objectes geomètrics de l'espai tridimensional sinó que els seus quaternions eren l'àlgebra de l'espai. I això en una forma molt més satisfactòria que no ho havien estat els complexos per al pla. En efecte:

- Totes les direccions de l'espai són tractades amb igualtat. No hi ha cap mena de distinció entre “eixos” o “coordenades” reals i imaginàries, de manera que les tres unitats quaterniòniques i, j, k resulten totalment equivalents.
- Cadascuna de les unitats quaterniòniques representava un gir de noranta graus al voltant de l'eix corresponent a la dita unitat; això sí, quan era aplicat als vectors del pla ortogonal. Comparem les formulacions complexa i quaterniònica de la mateixa rotació:

$$i(x + iy) = -y + ix \quad (1)$$

$$k(ix + jy) = kix + k jy = -iy + jx \quad (2)$$

Des del punt de vista al·gèbric, calculístic o de mera manipulació simbòlica, el formalisme complex sembla molt més eficient; però no és així des del punt de vista de la claredat conceptual, de la intel·ligibilitat geomètrica, o de les possibilitats de generalització. La fórmula complexa (1) no troba possible generalització a l'espai i la unitat imaginària i sembla tenir un doble paper: com a representació d'un inexistent o “imaginat” eix z al voltant del qual s'efectua la rotació i com una curiosa marca de distinció per a les components segons la direcció indicada per l'eix d'ordenades.

- Els quaternions oferien aquest instrument privilegiat per a la recerca en física amb el qual havia somniat Leibniz. No tan sols els símbols representaven clarament a la nostra imaginació la geometria que descrivien. Obrien un univers de possibilitats. Ja en el seu primer llibre *Lectures on Quaternions* Hamilton és conscient de la rellevància física del seu descobriment quan presenta, per primer cop, l'operador ∇ [15, pàg. 609-611]:

“Però prefereixo esmentar aquí una aplicació peculiar dels símbols fonamentals i, j, k , d'aquest càlcul que sembla molt probable que esdevingui,

en un futur, àmpliament útil en moltes investigacions *físiques* importants. Introduint per abreujar, com a nova *característica d'operació*, un símbol definit mitjançant la fórmula,

$$\triangleleft = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$$

que és concebut operant sobre tot escalar, vector o quaternió, considerats com a funcions de les tres variables escalars independents, $x, y, z \dots$ ”

El comentari de Hamilton és una “genial” anticipació del paper decisiu del nou càlcul en la formulació de la futura teoria electromagnètica de Maxwell. I també una clara indicació del perquè Hamilton no va mai considerar rellevant una formulació purament algèbrica dels quaternions, com havia fet amb els complexos.

- Serveixin per reafirmar aquestes impressions, i justificar plenament la dedicació absoluta de Hamilton al seu nou càlcul, les seves pròpies paraules després de mostrar la important fórmula del Laplacià com – $\triangleleft^2$:

“La simple *inspecció* d'aquestes *formes* hauria de ser suficient per convèncer qualsevol persona assabentada, fins i tot *lleugerament* (i no pretenc jo mateix estar-ne *molt* d'assabentat), amb les modernes investigacions en FÍSICA ANALÍTICA, en relació amb l'*atracció, calor, electricitat, magnetisme*, etc., que les equacions d'aquest article *han d'esdevenir ja* (com he suggerit abans) *extensivament útils en l'estudi matemàtic de la natura*, quan el càlcul dels quaternions haurà atret una atenció més general que la fins ara rebuda, i sigui posseït i utilitzat, com a instrument de recerca, per mans més hàbils que les meves.”

Maxwell acabà el capítol IX del volum 2 del seu *Treatise on Electricity and Magnetism* [27], dedicat a les equacions generals del camp electromagnètic, amb la formulació quaterniònica de la seva teoria, després de reconèixer que fins llavors havia evitat tot procés que exigís del lector el coneixement del càlcul dels quaternions.

Com a reflexió sobre el procés històric afegim que no pot deixar de causar certa sorpresa el fet que, concebint Hamilton els nombres complexos a partir d'una concepció *metafísica* de l'àlgebra com a ciència del pur temps, i els seus quaternions com a càlcul de la geometria de l'espai, la seva integració en un sol sistema de quaternions complexos permet una formulació integrada de l'espai-temps de la relativitat i de la teoria de

Maxwell que molt bé pot ser considerada la seva base física. Aquesta formulació, oferta per Silberstein [42] com a alternativa a la formulació minkowskiana de 1908, constitueix no tan sols una “realització” de les idees especulatives de Hamilton, sinó també una prova material que la substitució del sistema quaterniònic pel vectorial no va ser una elecció de futur: la inútil, per absent, quarta component d’un vector posició o moment passaven a ser el temps o l’energia en la nova imatge de l’univers d’Einstein-Minkowski. L’elecció, però, ja havia estat feta.

4 Grassmann

Quasi simultàniament al descobriment de Hamilton, Grassmann desenvolupava una àlgebra de l’extensió que era, ja en la seva concepció i no tan sols per les seves realitzacions, la posada en pràctica de les idees de Leibniz. Considerem cent per cent encertat el judici amb el qual Couturat conclou l’apèndix dedicat a l’àlgebra de Grassmann [8, pàg. 538]:

“En resum, el càlcul de Grassmann sembla convertir plenament en realitat la característica geomètrica concebuda per Leibniz, i mostra que la idea de Leibniz no era un mer somni. Però hi ha una tal desproporció entre la concepció d’un tal sistema per Leibniz i el molt deficient assaig que realment produí, que Grassmann sentí que calia fer una nítida distinció entre l’ideal concebut i el “sketch” (esquema) realment escrit.”

L’extrapolació del judici de Couturat al sistema vectorial modern feta per Crowe, a qui devem la citació, ens sembla totalment injustificada, com tindrem oportunitat de mostrar. La teoria de l’extensió de Grassmann té significatives diferències estructurals respecte de la teoria de Hamilton:

- No està limitada a les tres dimensions espacials. És concebuda en manera “abstracta” per a un espai geomètric de n dimensions.
- Els objectes geomètrics de Grassmann queden classificats pel seu “ordre geomètric”, corresponent al nombre d’unitats geomètriques en cada monomi o component real. Per a l’espai ordinari de tres dimensions es requereixen un total de vuit components geomètricament diferenciades en lloc de les quatre ofertes pel sistema quaterniònic. Grassmann recuperava així el producte geomètric grec, en el qual el producte de dos segments era una àrea i el de tres no alineats un volum, però sense la limitació 3-dimensional de la geometria representativa grega. La construcció “leibniziana” de Grassmann

resulta, doncs, clarament incompatible amb la cartesiana, com era d'esperar.

- Per a la seva concepció no és necessari suposar el caràcter euclidià de l'espai (o, el que és equivalent, la validesa del teorema de Pitàgores, que dóna la longitud d'un vector com la rel quadrada de la suma de quadrats de les seves components segons un eixos cartesianes). Així, mentre en els quaternions de Hamilton els avui anomenats producte escalar i producte vectorial resulten de manera natural com a parts d'un únic producte quaterniònic-geomètric que apareix en forma indestruïble de les unitats i, j, k , en Grassmann són dues estructures netament separades. El conjunt de 2^n quantitats del sistema de Grassman resulten generades a partir de les n unitats fonamentals o de primer ordre mitjançant una operació de producte "progresiu" que, només en el cas de dos vectors, pot interpretar-se com a producte vectorial. En el cas de l'espai euclidià, o d'un espai mètric en general, Grassmann introduí també el producte "regressiu" que, també en el cas de dos vectors, es correspon amb el producte escalar "modern".

Resulta ser una deformació didàctica inadmissible restringir l'àlgebra de Grassmann a una estructura en la qual només és present un dels dos productes introduïts per ell. Tant el sistema de Hamilton com el de Grassmann, aquest darrer especialitzat a tres dimensions, contenen els productes escalar i vectorial "moderns". L'adopció d'un càlcul que substituís el cartesià, reforma pendent des de Leibniz, era ja anunciada i promoguda en el *Treatise* de Maxwell, amb paraules que, com hem vist més amunt, faria posteriorment seves Heaviside en defensa del seu càlcul vectorial.[9, pàg. 134]

"Però per molts propòsits de raonament físic, clarament distingits del càlcul, resulta desitjable evitar la introducció explícita de les coordenades cartesianes, i fixar la ment de cop en un punt de l'espai en lloc de en les seves tres coordenades, i en la magnitud i direcció de la força en lloc de en les seves tres components. Aquesta manera de contemplar les quantitats geomètriques i físiques és més primitiva i natural que l'altra, encara que les idees connectades amb ella no han rebut el seu ple desenvolupament fins que Hamilton realitzà el següent gran pas en tractar amb l'espai, amb la invenció del seu càlcul de quaternions.

En la mesura que els mètodes de Descartes encara són els més familiars als estudiants de ciència, i com que són realment els més útils pel que fa al càlcul, expressarem tots els nostres resultats en forma cartesiana. No obstant això, estic convençut que la introducció de les idees, clarament distingides de

les operacions i mètodes dels quaternions, seran de gran utilitat en l'estudi de totes les parts del nostre tema, i especialment en electrodinàmica, on hem de tractar amb un gran nombre de quantitats físiques, les relacions entre les quals poden expressar-se en forma molt més simple mitjançant unes poques expressions hamiltonianes que mitjançant les equacions ordinàries.”

Són molt interessants, i polèmics, els comentaris de Crowe en relació amb l'ambigüitat del suport de Maxwell als quaternions. Resulta, però, decisiva la carta escrita per Maxwell a Tait el 1878 en la qual expressa la “irreductible” dificultat psicològica que implica per a un físic acceptar quadrats negatius [9, pàg. 137-138]

“Hi ha una altra qüestió. Es pot llaurar amb un bou i un ase junts? Els que són com vós poden escriure qualsevol cosa i demostrar qualsevol cosa amb purs 4nions, però en el període de transició el mètode bilingüe pot ajudar a introduir i explicar el (mètode) més perfecte.

Però fins i tot quan el que és perfecte hagi arribat, aquell que construeix sobre els tres eixos serà útil per a propòsits de càlcul per als Cassios del futur.

Ara bé, en un tractat bilingüe resulta, com a poc, problemàtic, trobar que el quadrat de AB sigui sempre positiu en cartesianes i sempre negatiu en 4nions, i que quan l'objecte és mencionat de forma incidental hom no sàpiga en quin llenguatge s'està parlant.

Es pot denegar als cartesianes la idea d'un vector com una cosa sensible a la vida real fins que puguin reconèixer en una regla graduada un sistema peculiar de rels quadrades de -1 ?

Resulta també estrany i inconvenient que quan discutim, per exemple, l'energia cinètica es trobi que per assegurar-ne el seu ser $+ve$ hàgim d'enganxar-hi un signe $-$ i que quan estem provant un mínim l'aparença global de la demostració ha de ser tendint a un màxim?

Què recomaneu dir en El. i Mag. en aquests casos?

Coneixeu l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann? Spottiswoode parlà d'ell a Dublín com de quelcom per sobre i més enllà dels 4nions. No l'he vist, però Sir W. Hamilton d'Edimburg solia dir que com més gran és l'extensió més petita és la intenció.”

Gibbs i, especialment, Heaviside consideraren haver resolt el problema de Maxwell amb el seu càlcul vectorial, en els quals els vectors recuperaven el seu quadrat positiu. El preu no podia ser altre que el “desmantellament” del producte quaterniònic en les seves dues components transformant els i, j, k de Hamilton de quadrat -1 en els $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ de quadrat $+1$ usats en els nostres llibres de text. No és estrany que Gibbs considerés el seu sistema en molts sentits més proper al de Grassmann que al de Hamilton, del qual retenia gran part de la notació (els i, j, k originals). Gibbs

cregué haver realitzat la síntesi físicament satisfactòria dels dos grans sistemes en competència, haver obtingut l'única àlgebra múltiple de la física. Així ha passat a la història i el llibre de Crowe representa un dels més reeixits intents d'explicació històrica completa (en el sentit de van der Waerden) d'aquesta part tan fonamental de les matemàtiques de la física. En la secció següent pretenem demostrar, també històricament, que hi ha quelcom de fonamentalment erroni en la síntesi de Gibbs-Heaviside. Que la història va errar el camí. I en ciència, com hem exposat al començament, la història es pot reviure en primera persona i esmenar els errors. Com molt bé ha assenyalat Truesdell, la història de la ciència, a cops, és indestriable de la mateixa ciència.

5 Clifford: La síntesi oblidada

Tal com hem pogut apreciar en la carta de Maxwell a Tait és clar que cap al 1878 els sistemes de Hamilton i Grassmann estaven en oberta competència. És en aquest mateix any quan Clifford publica un article intitulat “Applications of Grassmann's Extensive Algebra” [5]. Aquest article resol, històricament i d'un cop per sempre, la síntesi dels dos sistemes. Aquesta síntesi consisteix, de fet, a incloure el sistema de Hamilton en el sistema de Grassmann corresponent a un espai 3-dimensional. El sistema de Hamilton queda així plenament explicat alhora que la seva incorporació enriqueix el sistema de Grassmann amb la representació de les operacions de rotació i diferenciació. En aquest article, Clifford cometé, però, un petit error d'apreciació en declarar, sense fonament, que les unitats del sistema de Grassmann havien de ser de quadrat -1 . En la mesura que, com tindrem oportunitat de mostrar, l'error és fàcilment esmenable, podem considerar la solució de Clifford definitiva i, per tant, difícilment excusable el seu menysteniment per part de matemàtics, físics i historiadors.

L'article comença amb un preàmbul on, després d'expressar la seva profunda admiració per l'obra de Grassmann i la seva convicció de la vasta influència reservada al seu treball en el futur de la ciència matemàtica, exposa els objectius i les fites de l'article:

“Aquesta comunicació s'esforça per determinar el lloc dels quaternions i dels que en un altre lloc he denominat biquaternions en el sistema més ampli (de Grassmann) i *explicar*, per tant, les lleis d'aquestes àlgebres en termes de lleis més simples. Conté, després, una generalització d'aquests (sistemes), aplicable a qualsevol nombre de dimensions; i una demostració que l'àlgebra així ob-

tinguda és sempre un compost d'àlgebres quaterniòniques que no interfereixen entre si"

En la primera secció, intitulada "Sobre la relació del mètode de Grassmann amb els quaternions i els biquaternions; i sobre la generalització d'aquests sistemes", Clifford presenta el sistema de Grassmann d'acord amb els principis del càlcul baricèntric, forma escollida per Grassmann en el seu *Lineale Ausdehnungslehre* de 1844 [13]. Per a l'espai de tres dimensions considera quatre punts. Aquests són l'origen i tres punts més situats a distància infinita del primer al llarg de tres direccions mútuament ortogonals: $\iota_0, \iota_1, \iota_2, \iota_3$. En el marc de la característica geomètrica de Leibniz aquests símbols, conjuntament amb les lleis de manipulació (o càlcul) a les quals obeeixen, han de permetre representar directament al nostre esperit les operacions geomètriques, sense que hi calgui afegir informació addicional. El producte binari de dos punts és una unitat de longitud mesurada en la línia que uneix el primer punt amb el segon. Aquest producte de les unitats és, naturalment, polar o anticommutatiu en tenir present el sentit del desplaçament concomitant amb la mesura. El producte de tres unitats o punts és llavors l'àrea unitat mesurada i orientada sobre el pla que passa pels tres punts. Notem que els productes binaris $\iota_0\iota_1, \iota_0\iota_2, \iota_0\iota_3$ es corresponen amb la tríade de vectors unitaris ortogonals $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ del càlcul vectorial ordinari, i que el fet de situar els punts $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ a distància infinita, tot i facilitar una imatge "projectiva" de la construcció, no apareix com a estrictament necessària. És, però, la constància dels tres punts a l'infinit la que ens permet identificar els $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ obtinguts a partir de diferents orígens $O \equiv \iota_0$.

A aquesta presentació del sistema de Grassmann segueix una disquisició, de caire clarament hamiltonià, sobre els dos diferents aspectes de la noció de producte. Particularment, preferim referir-nos a dos tipus generals d'operacions a les quals resulta convenient assignar-los un mateix símbol característic de producte. Una primera en què el producte expressa un procés en el qual els dos factors tenen un mateix paper. És el cas dels dos punts en un producte binari de l'àlgebra de Grassmann. I una segona en la qual un dels factors és una operació per la qual l'altre factor queda transformat en un altre objecte d'un mateix àmbit preestablert. Per a Clifford, és clarament aquesta segona noció la que està a la base del sistema quaterniònic de Hamilton.

"Els símbols quaterniònics i, j, k ... són operacions que giren una figura un angle recte en els tres plans coordinats respectius. Se segueix d'aquí que si qualsevol d'elles és aplicada dos cops sobre la mateixa figura, la girarà dos

angles rectes, o ‘oposarà’. Hem de tenir, per tant, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.”

I l’única manera amb la qual resulta possible interpretar el producte quaterniònic com un producte del tipus proposat per Grassmann és que el segon factor sigui, al seu torn, una operació. I, en aquest cas, l’operació no rep ple significat fins que suposem un “*subjecte*” sobre el qual les dues operacions puguin ser efectuades en successió.

Després d’efectuades aquestes consideracions que no dubtem a qualificar de “cabdals”, la part tècnica, la inclusió del càlcul quaterniònic dins el càlcul de Grassmann, resulta un simple exercici “combinatori”: concebuda la idea correcta i en disposició dels estris necessaris la realització esdevé natural. Reproduïm íntegrament la demostració de Clifford i la conclusió amb la qual encapçalàvem la introducció.

“Per comparar aquests (i, j, k) amb els símbols pels quatre punts v_0, v_1, v_2, v_3 suposem que i gira la línia v_0v_2 fins a transformar-la en la v_0v_3 ; que j transforma v_0v_3 en v_0v_1 ; i que k transforma v_0v_1 en v_0v_2 . La transformació de v_0v_2 en v_0v_3 és equivalent a una translació al llarg de la línia a l’infinít v_2v_3 . Podem, per tant, escriure $i = v_2v_3$ i, anàlogament, $j = v_3v_1, k = v_1v_2$. Ara i gira v_0v_2 fins a convertir-lo en v_0v_3 ; és a dir,

$$i.v_0v_2 = v_0v_3 \quad \text{o} \quad v_0v_3 = v_2v_3.v_0v_2 = -v_2^2.v_0v_3.$$

Estem, per tant, obligats a escriure $v_2^2 = -1$ i, de forma semblant, trobem $v_1^2 = v_3^2 = -1$.

Això ens permet trobar, de cop, les regles de multiplicació de les (i, j, k) . A saber, tenim:

$$jk = v_3v_1.v_1v_2 = v_2v_3 = i$$

$$ki = v_1v_2.v_2v_3 = v_3v_1 = j$$

$$ij = v_2v_3.v_3v_1 = v_1v_2 = k$$

i, finalment,

$$ijk = v_2v_3.v_3v_1.v_1v_2 = -1.$$

En ordre, per tant, d’incloure l’àlgebra dels quaternions dins la de l’*Ausdehnungslehre*, hem de fer el quadrat de cadascuna de les nostres unitats igual a -1 , com ha assenyalat Grassmann (Math. Annalen). Però goso dissentir de la seva autoritat en pensar que els símbols quaterniònics no responen en primer lloc als “Elementargröße” de l’*Ausdehnungslehre*, sinó als seus productes binaris; i, d’aquesta suposició, com hem vist, les seves lleis de multiplicació se segueixen tot d’una.”

Resulta elemental comprovar que una correspondència igualment satisfactòria entre les (i, j, k) de Hamilton i les unitats de segon ordre de les

de Grassmann, quan aquestes darreres són de quadrat positiu, és:

$$i = \iota_3 \iota_2, \quad j = \iota_1 \iota_3, \quad k = \iota_2 \iota_1$$

En conseqüència, la identificació i l'explicació de les unitats quaterniòniques com a unitats de segon ordre és independent de la "signatura" ± 3 del sistema de Grassmann per a l'espai euclidià tridimensional. En relació amb les preocupacions expressades per Maxwell aquell mateix any sobre el signe negatiu del quadrat quaterniònic queda clar que no tenen res a veure amb el desitjable caràcter positiu del quadrat d'un vector; el quadrat negatiu dels i, j, k és una característica perfectament explicada per Clifford en entendre'ls com a "*versors rectangulars*", és a dir, com a operadors de girs de 90° en cadascun dels plans respectius. La insatisfacció de Maxwell, idèntica en la forma i en el fons a la insatisfacció que causa la utilització dels nombres complexos com a àlgebra vectorial del pla euclidià, resulta de la incorrecta utilització dels quaternions com a vectors; una utilització que venia forçada tan bon punt els quaternions eren acceptats com la definitiva àlgebra geomètrica de l'espai. El treball de Clifford resitua els quaternions com a subàlgebra d'ordre parell dins una àlgebra geomètrica (aquest fou el nom triat per Clifford) generada per tres unitats. Tot possible misticisme "numèric", que encara trobem avui en dia en els defensors dels quaternions, perd la seva raó de ser: les lleis del seu producte definitori com a entitat numèrica, el genial descobriment de Hamilton gravat sobre el Brougham Bridge de Dublin, són, en qualsevol aplicació geomètrica, derivades del producte geomètric de Grassmann-Clifford. Clifford assolí així aquella clara distinció entre característica aritmètica i característica geomètrica tan ben delineada per Leibniz.

I, de fet, en el seu article Clifford respon directament a la difícil relació dels quaternions amb la física de Maxwell. Clifford afirma que en el decurs del temps es desenvolupà en Hamilton la idea de realitzar el producte entre dos vectors del mateix tipus, sense haver de considerar cap d'ells com a versors, substituint gradualment les unitats i, j, k pels símbols selectors S per la part escalar i V per la vectorial. Com que aquesta separació és la autèntica base en la qual es basà Gibbs per a la construcció del sistema vectorial vigent, és d'innegable interès constatar com Clifford refusà, tant per raons matemàtiques com físiques, aquesta solució:

"Per tal d'explicar les lleis del producte de les i, j, k en aquesta línia, hom ha de recórrer a la teoria de l'"Ergänzung," o, el que resulta el mateix, *representar* un àrea ij per un vector k perpendicular a ella. Però l'explicació no és en aquest

cas tan senzilla; i és instructiu observar que la distinció entre una quantitat i el seu “Ergänzung” p.e. entre una àrea i el seu vector representatiu, que per alguns propòsits resulta tan convenient ignorar, ha de ser reintroduïda en física. Així Maxwell distingeix especialment els dos tipus de vectors que ell anomena *força* i *flux*, i que de fet són, respectivament, funcions lineals de les unitats i dels seus productes binaris.”

Aquest paràgraf, emmarcat en el conjunt de l'article que presenta una àlgebra multilinear, suggereix que, en la visió de Clifford, un sistema vectorial com el de Gibbs resultaria ser la culminació d'un procés de “desintegració” del sistema quaterniònic iniciat pel mateix Hamilton en intentar formular dins el seu sistema proposicions tan sols expressables en el sistema de magnituds extensives ideat per Grassmann. En efecte, el producte vectorial de Gibbs, consistent en l'extensió per linealitat de les expressions $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, ignora la necessitat física de distingir entre vectors i bivectors. I li cal introduir, com a contrapartida de la deficient caracterització geomètrica, la distinció purament verbal entre vectors polars i vectors axials. La sofisticada definició del producte vectorial ordinari com a dual del producte exterior apareix així com una justificació matemàtica “a posteriori” d'un ús que, de bon començament, pot qualificar-se de físicament insatisfactori. En una terminologia inspirada alhora per Leibniz i Einstein, el càlcul vectorial és una característica geomètrica incompleta perquè no permet expressar tots els elements de la realitat geomètrico-física. Amb la seva síntesi Clifford indica que la direcció adequada als problemes plantejats per la física no està en la desintegració del sistema quaterniònic, sinó en la seva completa elucidació i integració en el de Grassmann.

Que Clifford, en realitzar la seva síntesi, tenia molt present les necessitats d'una formulació vectorial de la física queda encara més palès quan procedeix a l'eliminació de la unitat ι_0 a fi de poder tractar els que ell anomena *vectors*, que corresponen als avui anomenats vectors “lliures”. Basant-se de nou en el càlcul baricèntric elabora una explicació, al nostre entendre poc aclaridora, mitjançant la qual els símbols $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ poden passar a representar els vectors unitaris al llarg dels eixos ortogonals. Aquestes unitats de primer ordre no estan, com els *rotors* $\iota_0\iota_1, \iota_0\iota_2, \iota_0\iota_3$, amb les que comparteixen magnitud i direcció, lligades a un eix. I Clifford ràpidament afirma (la comprovació és del tot immediata) que sobre elles els versors i, j, k actuen de la mateixa manera que ho feien sobre els rotors.

Al nostre entendre, en una perspectiva actual que relativitza la importància atribuïda per Clifford al càlcul baricèntric, i que s'apropa molt

més a la concepció lògico-formal de Leibniz, hom pot prendre aquest resultat de Clifford com a punt de partida, considerant alhora els ι_r , $r = 1, 2, 3$ com a vectors unitat en tres direccions mútuament ortogonals i com a úniques unitats de primer ordre de l'àlgebra geomètrica. Aquesta versió, que requereix n unitats per a un espai de dimensió n i no $n + 1$ no resulta incompatible amb l'original presentada per Clifford si tenim present que en situar n punts a l'infinit el que realment es fa és seleccionar n direccions.

A continuació trobem expressat, sempre però amb unitats de quadrat -1 , l'associació dels símbols quaterniònics amb les unitats vectorials de primer ordre. Resulta molt interessant observar com Clifford distingeix entre una conveniència ocasional i una identificació essencial:

“Troblem que $i\iota_2 = \iota_2\iota_3.\iota_2 = \iota_3$, $j\iota_3 = \iota_1$, $k\iota_1 = \iota_2$. Aquestes regles de multiplicació coincideixen amb les de i, j, k si escrivim aquestes darreres en lloc de $\iota_1, \iota_2, \iota_3$. Per tant podem usar els mateixos símbols per representar vectors unitat segons els eixos i els versors rectangulars entorn d'ells. Però no és en cap manera cert que els vectors $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ siguin idèntics amb les àrees $\iota_2\iota_3, \iota_3\iota_1, \iota_1\iota_2$; només alguns cops resulta convenient oblidar la diferència entre ι_1 i $\iota_2\iota_3$.”

El càlcul vectorial de Gibbs obliga sempre a aquesta identificació, fins i tot en els casos en els quals resulta inconvenient, com succeeix a l'hora de representar les rotacions, el moment angular o el camp magnètic. Les distincions, si es fan, s'han de fer a part dels símbols i operacions de l'àlgebra vectorial pròpiament dita.

L'article de Clifford continua amb la consideració dels “seus” biquaternions, del pla complex de Gauss i de la generalització de l'àlgebra geomètrica a dimensió arbitrària, punts tots ells sobre els quals tornarem més endavant. I també s'hi troba una primera classificació general de les àlgebres geomètriques. En les nou pàgines de l'article s'hi troba “encapsulada” la culminació d'una recerca directament adreçada a formular una característica lineal geomètrica. Clifford, com expressà en el seu preàmbul, no pogué acabar de formular i desenvolupar de manera exhaustiva la seva síntesi, i menys defensar-la, en la decisiva dècada dels 80. Tampoc hi serien presents Grassmann, el creador del sistema i amb substancials coneixements d'electrodinàmica, i Maxwell, capaç de valorar-ne la utilització física. Gibbs i Heaviside desenvoluparen tan sols un sistema de manipulació de les magnituds vectorials mitjançant regles “ad hoc”. Només amb el total oblit de l'article de Clifford pot sostenir-se la tesi que el vigent sistema de càlcul vectorial és l'hereu dels sistemes de Grassmann i Hamilton. I és encara avui l'article de Clifford on els físics poden adonar-

se clarament de les raons per les quals convé substituir l'àlgebra vectorial usual per l'àlgebra geomètrica de Grassmann-Clifford.

6 El sistema de Gibbs i Heaviside

Cap escrit no és més il·lustratiu de la veritable natura del càlcul vectorial de Gibbs que la carta enviada per aquest a Victor Schlegel el 1888, citada en la seva pràctica totalitat en el fonamental treball de Crowe. En llegir-la no podem més que mostrar un total acord amb el mateix Crowe quan diu [9, pàg. 152]:

“L'historiador és afortunat en extrem pel fet que s'hagi conservat un esborrany d'una carta escrita per Gibbs a Victor Schlegel l'any 1888. Perquè aquesta carta contesta una multitud de preguntes interessants ... Aquesta carta és tan rica en informació que a partir d'ella podem establir la relació de Gibbs amb cada una de les figures importants en la història anterior de l'anàlisi vectorial.”

Les respostes que hi llegim no són pas, però, del tot coincidents. La consideració del “fet històric” que realment és l'article de Clifford, per bé que no tingués influència en els desenvolupaments immediatament posteriors, modifica substancialment l'apreciació històrica de l'obra de Gibbs. En alguns casos els judicis de Crowe es troben, per dir-ho així, reforçats: no tan sols expressen el que Gibbs manifestà sobre el seu treball sinó el lloc que realment el seu sistema ocupa dins un esquema comprensiu dels diversos sistemes d'àlgebra múltiple. És aquest el cas en relació amb Clifford [9, pàg. 154-155]:

“Pel que fa a la relació de Gibbs amb Clifford ens adonem que es limità a la utilització del nom de Clifford “com un refugi” en el paràgraf introductori del seu llibre d'anàlisi vectorial. ” [...]

“Encara que Gibbs fa esment tan sols de Clifford i Grassmann en el paràgraf introductori del seu *Elements of Vector Analysis*, la carta citada prèviament deixa clar que el seu deute principal no era amb Clifford ni amb Grassmann, sinó amb els quaternionistes.”

També és el cas en la relació amb Hamilton [9, pàg. 153- 154]:

“... ens assabentem que Gibbs començà la seva recerca d'una anàlisi vectorial amb “alguns coneixements dels mètodes de Hamilton ...” i acabà amb mètodes que eren “gairebé els de Hamilton ...” Rarament es troben afirmacions més fortes en el sentit de mostrar una continuïtat històrica. És clar que Gibbs no era més que un herètic menor en relació amb l'ortodòxia quaterniònica.”

Aquesta continuïtat històrica es veu reforçada encara més en considerar el testimoni de l'altre creador, amb Gibbs, de la vigent anàlisi vectorial. Heaviside ens diu [9, pàg. 163]:

“Fins al 1888 creia que era l'únic que feia treball vectorial basat en principis físics positius; vaig rebre llavors una còpia del *Vector Analysis* del Prof. Gibbs (no publicat, 1881-4). Era una mena de sinopsi condensada d'un tractat. Encara que diferent en aparença, era essencialment la mateixa àlgebra i anàlisi vectorial a les quals jo havia estat conduït. ...

Vaig pacificar Tait considerablement (durant una curta correspondència que vàrem tenir) negant qualsevol idea de descobriment d'un nou sistema. Vaig confessar haver obtingut el meu sistema a partir del de Hamilton i Tait per eliminació i simplificació, però igualment vaig reivindicar haver difós un coneixement efectiu dels vectors, i haver concebut un sistema completament pràctic.”

Amb Crowe, i per raons addicionals, jutgem com és d'altament significatiu que Heaviside no faci esment de Grassmann, no havent-hi cap raó per creure que hagués sentit parlar de Grassmann abans de rebre el llibret de Gibbs el 1888. Hem vist abans com el judici de Clifford sobre l'evolució del pensament de Hamilton aportava raons matemàtiques precises d'aquesta continuïtat històrica; una línia Hamilton-Gibbs-Heaviside que és clarament divergent amb la de Grassmann-Clifford. I és aquí on ens veiem en la necessitat d'aprofundir l'anàlisi de la relació Gibbs-Grassmann més enllà de les ambigües conclusions de Crowe, que deixa en mans de Schlegel el judici final. Precisament del seguidor de Grassmann de qui, a la pàg. 94 ha dit “Schlegel era un home en el qual l'entusiasme excedia les capacitats crítiques”. Schlegel, en la seva resposta a l'abans esmentada carta de Gibbs, digué [9, pàg. 154-155]:

“He comprès a partir de la vostra carta com heu arribat a idees similars a les de Grassmann però independentment d'ell; repetidament he estat testimoni d'aquest fenomen: quan el temps és arribat —quan el desenvolupament de la ciència exigeix un determinat descobriment— aquest descobriment és realitzat per un cert nombre d'investigadors.”

Aquesta afirmació resulta incomprensible provinent d'un deixeble directe de Grassmann a menys que, com succeí també amb Tait en relació amb Hamilton, anteposés l'interès de la memòria del seu mestre a tota altra consideració. El reconeixement explícit de Gibbs a l'obra de Grassmann, unit a la seva severa crítica als quaternionistes, teòricament els principals competidors de les teories de Grassmann, són factors suficients per justificar el judici de Schlegel: a través de Gibbs s'obrien pas les idees

que el seu mestre havia estat el primer de concebre i formular. No li calia ni potser li interessava en excés analitzar la connexió entre les estructures matemàtiques de Grassmann i Gibbs. Són aquestes consideracions de Schlegel un exemple típic d'història "whig", si bé en ell orientades més pel passat (fidelitat a Grassmann) que pel present (justificació del sistema de Gibbs). I com a tal història "whig" té l'efecte de deturar la investigació, d'excloure de l'àmbit de la recerca els elements més pertorbadors en la complexitat de la trama històrica presa en la seva totalitat. A causa de l'especial relació de la ciència amb la seva pròpia història, aquesta exclusió d'una recerca en profunditat del que implicava l'obra de Gibbs envers la de Grassmann, no només ha estat i és una llacuna històrica sinó també científica.

Comencem per constatar la significativa diferència entre els reconeixements fets a Grassmann per part de Gibbs i de Clifford. En la seva carta Gibbs afirma [45, pàg. 107-109] o [9, pàg. 152-153]:

"El meu contacte amb el treball de Grassmann va ser també degut al tema de l'electricitat i magnetisme, en particular amb la nota per ell publicada en el *Crelle Jour.* el 1877 ...

De totes maneres, vaig veure que els mètodes que estava utilitzant, encara que molt propers als de Hamilton, eren quasi exactament els de Grassmann. Vaig procurar-me les dues edicions de l'*Ausdenungslehre*, però no puc dir que els trobés de fàcil lectura. De fet mai vaig tenir la perseverància d'aprofundir-ne cap, i potser he obtingut més idees dels seus articles miscellanis que d'ells.

No sóc, però, conscient que els escrits de Grassmann exercissin cap influència particular sobre el meu A-V, encara que vaig estar prou content en el paràgraf introductori de cobrir-me a mi mateix darrere de dos noms distingits (Grassmann i Clifford) en fer canvis de notació que pressentia que disgustarien els quaternionistes. De fet, si vostè llegeix acuradament el llibret podrà veure que tot se segueix amb la inexorable lògica de l'àlgebra a partir del problema que em vaig plantejar a mi mateix molt abans del meu contacte amb Grassmann.

No tinc cap dubte que vós considereu, com jo, els mètodes de Grassmann superiors als de Hamilton. Em semblà, doncs, que podia ser del vostre interès saber com començant amb algun coneixement dels mètodes de Hamilton i influït tan sols pel desig d'obtenir l'àlgebra més senzilla per a l'expressió de les relacions de geometria, física, ... vaig ser conduït essencialment a l'àlgebra de vectors de Grassmann, independentment de qualsevol influència d'ell o de qualsevol altre."

En canvi, per a Clifford, és a l'*Ausdehnungslehre* on aprecia el veritable abast de l'obra de Grassmann [5]:

“Fins fa poc no tenia coneixement de l'*Ausdenungslehre*, i només en sabia el que està contingut en els articles geomètrics de l'autor en el *Crelle's Journal* i en *Hankel's Lectures on Complex Numbers*. Em sigui, per tant, potser, permès expressar la meva profunda admiració per aquest treball extraordinari, i la meva convicció que els seus principis exerciran una vasta influència en el futur de la ciència matemàtica.”

Aquesta tan diferent comprensió de l'obra de Grassmann, manifestada per Clifford i Gibbs, queda plenament reflectida en els dos sistemes algebraics per ells proposats. La reformulació feta per Clifford de la teoria de Grassmann (de fet la caracteritza i declara com una aplicació) incorpora de manera natural les operacions de gir, fins aleshores representades pels símbols quaterniònics i, j, k de Hamilton. El càlcul vectorial de Gibbs, sense cap lligam genètic amb l'obra de Grassmann, i sí en canvi fortament vinculat a Hamilton a través del *Treatise on E. and M.* de Maxwell, perd aquesta capacitat de simbolització directa de les rotacions. De fet Gibbs utilitza per designar els tres vectors unitaris les mateixes lletres i, j, k de Hamilton, mentre Heaviside introdueix la didàctica modificació d'escriure-les en negreta **i, j, k**. L'anàlisi detallada de l'article de Clifford realitzada a la secció anterior ens fa concloure de manera difícilment controvertible que l'anàlisi vectorial de Gibbs-Heaviside no pot en cap manera considerar-se ni fruit ni hereva de l'obra de Grassmann. Grassmann i Clifford foren senzillament utilitzats com a pantalla o arma propagandística en la consolidació d'una desviació nascuda i desenvolupada en el marc general de la tradició quaterniònica. Una desviació que va poder finalment triomfar a causa de la seva aliança amb l'injuriat cartesianisme, l'"adversari natural de l'àlgebra geomètrica". Un cartesianisme que, revitalitzat sota la forma d'àlgebra matricial i tensorial, ha estat la base de fonamentals avenços en matemàtica pura i aplicada. Però que molt bé poden no ser, amb el seu "culte" a les components i a l'excessiva generalitat, el llenguatge més adequat per a la geometria i la física. Com a testimoni actual d'aquesta preocupació podem citar Regge [39, pàg. 936-937]:

“El primer pas, o millor consell, en la “group manifold approach to unified gravity” és prendre's seriosament el càlcul de formes i usar-lo en lloc del càlcul tensorial convencional. El principal avantatge és que els càlculs són molt més simples i les seves interpretacions física i geomètrica més transparents. ...

... el càlcul de formes és bàsicament d'una tal simplicitat comparat amb el càlcul tensorial estàndard que, a llarg termini, ha de vèncer.”

La continuació de la carta de Gibbs a Schlegel deixa ben clar aquest ali-

neament de Gibbs amb el nou cartesianisme algebraic i abstracte, antítesi del càlcul específic de natura geomètrico-física de Grassmann i Clifford [45, pàg. 109]:

“A l’entretemps, no obstant això, he après de Grassmann que tot això no és més que un cas especial, tan sols una petita part d’un camp molt més ampli. Quant ampli és aquest camp als meus ulls, ho podeu apreciar en el meu *Multiple Algebra* on les nocions, essencialment les de Grassmann, són presentades amb una lleugera diferència de perspectiva i notació.

Tornant al meu *Vector Analysis*. Les meves expressions diàdiques no són productes *algebraics* sinó aquella classe de producte més general mencionada per Grassmann, aquells que no posseeixen lleis *especials*, és a dir, productes *indeterminats*. En l’ús principal que fem d’elles es corresponen, penso jo, als seus productes oberts o “lückenhältige”, com penso que veureu en fer un estudi detallat. En el meu V.A. no utilitzo cap signe per indicar aquest producte, la qual cosa és filosòficament apropiada en correspondre a l’absència de qualsevol llei *especial*. No obstant això, a cops, he trobat convenient tenir un signe especial com en la meua M.A. on vaig utilitzar el símbol $\parallel$ que serveix per mantenir les lletres separades, en ser la unió menys propera, en cert sentit, que en altres productes.

Les primeres pàgines del capítol III del meu V.A. donen, crec, una imatge exacta de la manera com vaig ser conduït a aquest producte. No va ser la definició abstracta la que es va presentar primer per si mateixa, sinó l’expressió mateixa exigint una interpretació.

Aquestes expressions diàdiques o sumes de productes indeterminats corresponen de nou al que és generalment conegut com a matrius, un tema que com sabeu ha estat àmpliament debatut en els darrers temps. A creure que la meua notació no és del tot dolenta m’hi ha portat el fet d’haver obtingut amb gran facilitat resultats que aparentment altres han obtingut amb considerable dificultat. M’aventuro a dir que el mateix pot dir-se de notacions més estrictament conformes a les de Grassmann.”

El producte diàdic de Gibbs, primer esquema del producte directe de matrius i del producte tensorial és, en darrer terme, una juxtaposició d’objectes. Com a tal conserva els elements de partida, sense establir-ne cap relació específica, sense la producció de cap nou “objecte determinat”. Aquestes relacions físiques o geomètriques, que apreciem per primer cop al marge de qualsevol estructura algebraica determinada, les interpretem com a “contingudes” en l’expressada juxtaposició. Diametralment oposat és el camí de l’àlgebra geomètrica proposat per Leibniz, Grassmann i Clifford: el producte indicat per mera juxtaposició és el producte geomètric totalment determinat per la natura dels factors simbolitzats, i

que, per si sol, és capaç de donar compte de totes les relacions geomètriques (i físiques). La geometria i la física, que constitueixen una part de la natura, s'expressen directament i de forma senzilla en aquesta “característica geomètrica”, per dir-ho en la terminologia de Leibniz. L'exemple més clar de la divergència entre els dos enfocaments l'aporten les equacions de Maxwell: mentre Gibbs i Heaviside fragmenten les dues equacions quaternioniques de Maxwell en dues equacions escalars i dues vectorials, l'àlgebra de Grassmann–Clifford les converteix en una única equació [31]. Les crítiques de Maxwell als quaternions semblen sobradament justificades, però de cap manera constitueixen una defensa ni ofereixen una base suficient per al sistema de l'anàlisi vectorial. La història, és a dir, els protagonistes concrets, van fer la seva elecció d'acord amb allò que consideraven més convenient. Una de les més belles construccions matemàtiques del XIX, l'àlgebra geomètrica que realitzava per fi la proposta de Leibniz i que obriria les portes de futurs avenços en física, va ser senzillament ignorada. La vàlua i el paper en el camp de la ciència de l'obra de Grassmann quedaven bloquejats i sepultats sota el vernís, res més que això, d'un tardà i ben merescut reconeixement.

7 L'àlgebra geomètrica al nostre segle. Un inexplicable oblit

Dyson, matemàtic i físic eminent, en una memorable *Gibbs Lecture* el 17 de gener de 1972 sota el patrocini de l'AMS adreçà el tema de les oportunitats perdudes d'un contacte fructífer entre les matemàtiques i la física. Dues de les oportunitats perdudes assenyalades per Dyson fan referència directa al tema que ens ocupa: les equacions de Maxwell i el càlcul vectorial. Respecte de les primeres diu [11]:

“Però els matemàtics del segle dinou varen fallar miserablement en no copsar l'oportunitat no menys gran que els oferí Maxwell el 1865. Si haguessin pres les equacions de Maxwell tan seriosament com Euler es prengué les de Newton, haurien descobert, entre d'altres coses, la teoria einsteniana de la relativitat especial, la teoria dels grups topològics i les seves representacions lineals i, probablement, àmplies porcions de la teoria de les equacions diferencials hiperbòliques i de l'anàlisi funcional. Una gran part de la física i matemàtica del segle XX podia haver estat creada en el segle XIX, senzillament explorant fins al final els conceptes matemàtics als quals condueixen de manera natural les equacions de Maxwell.”

Més endavant, en relació amb el tema “quaternions i vectors” diu:

“L’any 1844 tingueren lloc dos successos remarcables, la publicació de Hamilton del seu descobriment dels quaternions i la publicació de Grassmann del seu *Ausdehnungslehre*. Amb l’avantatge de perspectiva que ens dóna el pas del temps podem veure que la de Grassmann era la més gran contribució a les matemàtiques, perquè contenia el germen de molts dels conceptes de l’àlgebra moderna, i hi incloïa l’anàlisi vectorial com un cas especial. ... Quan el treball de Grassmann va ser finalment conegut, els matemàtics es trobaven dividits en quaternionistes i antiquaternionistes, i gastaven més energies polemitzant a favor i en contra dels quaternions que a intentar comprendre com Grassmann i Hamilton podien acomodar-se conjuntament en un esquema més ampli. En conseqüència va quedar en mans del físic Gibbs la presentació conjunta per primer cop a la seva lliçó de 1886 de les idees essencials de Grassmann i Hamilton. Les darreres paraules de la seva lliçó són: “Hem començat estudiant àlgebres múltiples; acabem, crec, estudiant l’àlgebra múltiple.”

No sé quants matemàtics purs van sentir o llegir la lliçó de Gibbs. Si l’haguessin estudiada amb cura, aviat se n’haurien adonat que Gibbs no havia realment aconseguit unificar les nocions de quaternió i de vector. Ben al contrari, en posar les dues nocions l’una al costat de l’altra havia fet explícita la manca de qualsevol mena de compatibilitat entre elles. La seva lliçó hauria d’haver suggerit a qualsevol matemàtic atent la qüestió: “Com pot ser que les propietats de l’espai tridimensional siguin representades igualment bé per dues estructures algebraïques tan diferents i incompatibles?” Si aquesta qüestió hagués estat clarament plantejada, la resposta hauria quasi amb certesa arribat aviat. I la resposta hagués dut inevitablement a una teoria completa de les representacions univaluades i bivaluades del grup de rotacions de tres dimensions. Els vectors constitueixen la més simple representació univaluada no trivial, i els quaternions la més simple representació bivaluada. També, els quaternions són els prototip de les que després serien anomenades representacions espinorials. El desenvolupament de la teoria de les representacions espinorials, que de fet comença el 1913 amb Elie Cartan i fou completada a la dècada dels 30 amb contribucions substancials dels físics Pauli i Dirac, podia haver-se accelerat uns 40 anys. És impossible dir quins efectes un tal desenvolupament accelerat hauria tingut en altres branques de la matemàtica pura, però difícilment els efectes haurien deixat de ser substancials.”

De fet, en la perspectiva geomètrica que hem substanciat històricament en les seccions anteriors, aquestes dues grans oportunitats perdudes constitueixen dues facetes d’una mateixa temàtica. Dyson, a qui no se li escapa el caràcter defectuós de la síntesi de Gibbs, perd de nou, al nos-

tre entendre, la gran oportunitat d'unir-les i alhora de superar un error històric manifest en la seva exposició. És aquest el de la incompatibilitat dels sistemes de Grassmann i Clifford i l'assimilació del sistema vectorial a l'àlgebra de Grassmann. Hem vist explícitament com Clifford, que en la seva plena joventut ja era considerat un matemàtic de primera fila [38], es plantejà clarament el problema (cosa que no féu en absolut Gibbs uns quants anys més tard) i el resolgué satisfactòriament. Resulta poc més que increïble que Gibbs ignorés el treball de Clifford, al qual no fa cap esment, quan ell mateix publicà l'any següent en el volum 2 de l'*Am. Jour. Math.* un article intítulat "On the fundamental formulae of dynamics". Que ho ignori Dyson més de cent anys després ens fa considerar molt seriosament l'afirmació de Speiser [43] que els físics no sols han oblidat sinó que obliden que han oblidat.

Tan sols a partir de l'estat actual de la teoria de grups, una teoria abstracta que troba aplicacions a la física a través de representacions lineals de la més diversa mena, pot afirmar-se que els quaternions són un exemple de representació bivaluada. Els quaternions eren, per a Hamilton i Clifford, la simbolització directa d'operacions de rotació, amb indicació explícita del sentit de rotació [29]. En el sistema de Grassmann-Clifford, certament superior al de Hamilton, hi continua estant present aquesta mateixa característica. La perfecta integració de les operacions geomètriques fonamentals, és a dir, del grup ortogonal que caracteritza la geometria física, fou la gran aportació de Clifford al sistema de Grassmann en substituir el producte exterior pel producte geomètric. La formulació detallada d'aquesta teoria dels "grups geomètrics" no fou, com s'assenyala a [25], obra de Clifford. És la nostra opinió, argumentada fàcilment a partir de [29] i [30], que una tal formulació se segueix trivialment del seu article de 1878 i de la fórmula de Cayley per a les rotacions. En un context inicialment no geomètric, però formalment equivalent, va ser formulada per Lipschitz [24]. La seva contribució, com la de Clifford, també ha estat "ignorada per la història"; fets que, ignorats en els textos científics i l'ensenyament d'avui, "clamen al cel", com expressivament reflecteix el títol del ja esmentat article [25].

És tan sols en l'anàlisi vectorial de Gibbs, sense cap lligam genètic amb l'àlgebra de Grassmann i que fou generada per alteració substancial de l'estructura quaterniònica eliminant-ne el caràcter operacional dels símbols i, j, k , que l'àlgebra geomètrica residual és incapaç de representar les operacions de rotació. Aquestes han de ser introduïdes, mitjançant el recurs a l'àlgebra lineal, en forma d'unes matrius (el grup $SO(3)$) i una representació lineal en termes de components cartesianes, contràriament

als “principis geomètrics” professats, entre altres, pel mateix Heaviside! Una representació que, a més, resulta ser “infidel” en tant que no disposa de capacitat simbòlica per indicar el sentit en el qual s’ha efectuat la rotació o per expressar el caràcter més fonamental de la periodicitat 4π que mostren construccions tan simples com la banda de Möbius opaca, les “tisoires de Dirac”. La falsa solució de Gibbs a un problema que ja havia trobat la seva solució féu possible la recerca de les representacions “cartesianes complexes” o espinorials que representessin “fidelment les rotacions” i les transformacions de Lorentz. Els càlculs realitzats amb elles no són, potser, emprant les pròpies paraules de Heaviside citades abans en connexió amb la proposta de Leibniz, correctes exercicis matemàtics d’una matemàtica cega a la geometria de la física? No són, potser, els espais espinorials “interns” de la física teòrica del nostre segle un resultat d’aquesta ceguesa del mètode cartesià-matricial denunciada per Heaviside? No ens ha portat, potser, el formalisme matemàtic a confondre els símbols per realitats definint electrons i fotons com a determinades representacions de grups “externs” actuant sobre espais “interns”? No serà, potser, el càlcul geomètric de Grassmann-Clifford l’eina matemàtica que pot “vivificar” i regeometritzar la representació física del món, com ho era ja el 1878? Aquella oportunitat perduda no ha estat, potser, l’origen d’una greu desviació del camí més simple i natural amb conseqüències per a la física que van molt més enllà d’un simple retard? Esperem que la natura d’aquests interrogants contribueixi a excusar-nos, davant del lector que no comparteixi els punts de vista aquí exposats, de la inusual vehemència de moltes de les afirmacions del present assaig.

No són, però, els científics capficats en els problemes més o menys immediats els únics a negligir la fonamental aportació de Clifford. El mateix Crowe, que dedica a Clifford la secció IV.6, immediata precedent al capítol dedicat a Gibbs i Heaviside, arriba a citar la introducció de l’article de Clifford però en cap moment passa a analitzar la que és la seva contribució fonamental a la història de la matemàtica. En canvi, sí que entra a analitzar amb cert detall el treball didàctic de Clifford *Elements of Dynamic*, aquell darrere del qual s’escudà Gibbs en la seva introducció. Així Crowe escriu [9, pàg. 140]:

“El més important dels escrits de Clifford per aquesta història és el seu *Elements of Dynamic* concebut com el primer d’una sèrie de textos elementals.”

El motiu pel qual Crowe detura la seva recerca de l’obra de Clifford en aquest punt és clara, i plenament coincident amb els interessos de Gibbs.

Com clarament es llegeix en les citacions que fa d'aquest treball didàctic de Clifford, les definicions de producte escalar i de producte vectorial hi són donades sense fer referència al producte quaterniònic, que conté els dos en forma indissoluble. Hi ha, però, un petit detall que impedeix a Crowe (i al mateix Gibbs) considerar Clifford com a veritable creador del càlcul vectorial modern: el signe del producte escalar de dos vectors, que continua sent negatiu. Per tant, sentència Crowe, "Clifford usà el producte escalar en el sentit quaterniònic i no en el modern". Aquesta consideració de Crowe queda fortament relativitzada si atenem a un altre escrit de Clifford. Es tracta d'un "collage" de dues parts netament diferenciades. La primera és un resum comunicat a la London Math. Society el 10 de març de 1876 i publicat en els corresponents Proceedings. Escrit un any abans que Grassmann publicués el seu intent de donar compte dels quaternions dins el seu sistema, i potser abans que Clifford llegís l'*Ausdehnungslehre*, anticipa i en bona mesura explica l'article publicat el 1878. Hi escriu [6, pàg. 397-398]:

"En la teoria dels quaternions els símbols ijk , quan són usats com a multiplicadors, representen no coses sinó operacions de gir; per tant, $i^2 = -1$ i no 0. Però si els mirem com a vectors, els podem usar per representar la geometria del pla que passa pels extrems de ijk , sobre la base dels principis del càlcul baricèntric. Llavors $\rho = ix + ji + kz$ representarà el punt on talla el pla amb *pes* $x + y + z$. Reproduïrem l'àlgebra de *Grassmann* si atenem només a la part *vectorial* dels productes binaris, i a la part *escalar* del ternari. Consideracions físiques, però, ens porten a considerar i^2 com un escalar (no zero) fins i tot quan i és considerat com a vector (no com a versor). Per aquests propòsits no importa si el fem $= -1$ o $+1$.

Proposo aquí estendre aquesta suposició a la representació de Grassmann en general: p. e., prenc n unitats $i_1 i_2 \dots i_n$ de manera que $i_s^2 = +1$ i $i_r i_s = -i_s i_r$. Tots els productes de factors lineals han de contenir, per tant, tan sols termes d'ordre senar o termes d'ordre parell. No poden haver-hi termes d'ordre superior al n -èsim i el nombre sencer de termes és 2^n com en Grassmann; p. e. en els dos casos tenim una àlgebra lineal associativa de 2^n unitats, però l'àlgebra de Grassmann és *nilpotent* i tan sols hi apareixen formes homogènies; mentre aquesta és *idempotent*, i admet formes *senars* i formes *parelles*, que no són en general homogènies. És convenient usar els símbols *selectius* $V_0, V_1, \dots V_n$ anàlegs als S i V de Hamilton, per separar aquelles parts de qualsevol expressió que siguin d'ordre $0, 1 \dots n$ respectivament."

Clifford, per tant, el 1876, havia definit amb tota claredat l'àlgebra de Clifford per a un espai euclidià de signatura $\pm n$. Ho havia fet dins l'esquema general de Grassmann, integrant els dos productes interior i

exterior en un de sol, com succeeix també en el sistema de Hamilton. I com no succeeix en la seva introducció didàctica a la dinàmica ni en el càlcul vectorial de Gibbs-Heaviside. Havia declarat explícitament la irrellevància per a consideracions geomètriques de caràcter vectorial del signe positiu o negatiu del producte escalar. I havia triat explícitament la possibilitat que aquest fos positiu. També havia declarat, per primer cop, la importància geomètrica que podien tenir combinacions no homogènies, però de paritat definida. De fet aquests elements, l'ús dels quals encara és refusat avui dia per la més moderna geometria diferencial, són els que caracteritzen els grups ortogonals com a estructures immersides dins de l'àlgebra geomètrica de Clifford.

La segona part consisteix en un esborrany de tres pàgines sense data, trobat entre els seus papers i publicat pòstumament, en el qual es planteja la integració dels quaternions en el sistema de Grassmann tot introduint la “primera” de les modificacions esmentada: que les unitats siguin de quadrat -1 , la mateixa proposta que Grassmann fa en el seu article de 1877 [6, pàg. 398-401].

“Examinaré ara les conseqüències de fer, en un sistema de n nombres alternats $\iota_1 \iota_2 \dots \iota_n$ (nom donat per Hankel a les quantitats extensives de Grassmann), la primera de les modificacions enunciades; a saber, suposaré que el quadrat de cadascuna de les unitats és -1 . Després investigaré si es pot fer alguna suposició que sigui anàloga a la segona llei hamiltoniana $\iota_1 \iota_2 \iota_3 = -1$.”

És una autèntica dissort tant el fet que aquest esborrany no estigui datat com el fet que estigui manifestament incomplet, mancant-li la “Class IV. $n \equiv 3 \pmod{4}$ ” en la qual hagués escrit explícitament l'àlgebra de Clifford per a l'espai euclidià de signatura -3 . Amb tot, en la “Class I. $n \equiv 0 \pmod{4}$ ” tracta l'espai euclidià de signatura -4 , en el qual $\omega = \iota_1 \iota_2 \iota_3 \iota_4$, i expressa sense cap ambigüitat la tesi fonamental del seu article de 1878:

“Per tant, per a $n = 4$ l'expressió més general en la (sub)àlgebra parella és

$$w + x\iota_2\iota_3 + y\iota_3\iota_1 + z\iota_1\iota_2 + \omega(w' + x'\iota_2\iota_3 + y'\iota_3\iota_1 + z'\iota_1\iota_2) = q + \omega r,$$

que és precisament el que en una altra part he anomenat un *biquaternió*, ja que els productes $\iota_2\iota_3$, $\iota_3\iota_1$, $\iota_1\iota_2$, satisfan les lleis dels símbols hamiltonians i, j, k , i, per tant les quantitats q, r són quaternions en el sentit ordinari.”

Com a detall digne d'interès, cal esmentar que els operadors de rotació en tot espai quadridimensional prenen la forma d'aquest biquaternió de Clifford, degudament normalitzat. Per a la signatura -4 utilitzada

per Clifford queda integrada en una única combinació lineal l'operació per a la qual Cayley havia requerit dos quaternions independents. Per a la signatura introduïda per Minkowski, $\epsilon_4^2 = +1$, el biquaternió de Clifford representa la forma matemàtica precisa del bispinor complex de Dirac [34] i, sotmès a la corresponent normalització, que n'elimina dos paràmetres, correspon exactament amb una transformació de Lorentz tal com es troba formulada en el grup $SL(2, \mathbb{C})$ [30]. Les conseqüències físiques que se segueixen de manera natural d'una tal similitud matemàtica, visibles tan sols en la formulació geomètrica de Grassmann–Clifford, i molt mediatitzades en el formalisme mecànic–quàntic habitual que utilitza estructures matricials del tot irrelevantes, han estat tractades en [35] i [36]. Tots ells constitueixen desenvolupaments molt diferents dels que Dyson assenyalava com a “necessari corollari” d'una adequada atenció matemàtica al problema de la relació entre els sistemes de Grassmann i de Hamilton.

L'article de Clifford de 1878 constitueix, doncs, una d'aquestes grans oportunitats perdudes per a la ciència. I, com a tal, planteja tota una sèrie de qüestions força peculiars a l'historiador, però també al científic. Cal, òbviament, evitar caure en la temptació d'escriure una ciència-ficció paral·lela en la qual l'oportunitat s'hagués aprofitat. Una tal construcció seria més propera a les reconstruccions racionals de la ciència que a la mateixa ciència. La ja citada visió de Dyson, en la qual es manté la fictícia imatge d'un progrés unidireccional que l'acció humana tan sols pot accelerar o retardar, constitueix un exemple palès. Queda clar que no pretenem negar la validesa de la idea de progrés; ben al contrari, assenyalant l'íntima connexió entre Leibniz, Grassmann i Clifford, i també en menor mesura amb Hamilton, Maxwell i Heaviside, constatem, més que no defensem *a priori*, aquesta idea de progrés. El que refusem és el caràcter ineluctable del progrés, sostraure l'activitat científica de l'univers propi de l'acció humana, negant-li el seu caràcter contingent. Ens neguem a admetre una posició “absoluta” de les concepcions d'avui en un univers platònic transcendent, i també el caràcter pressuposadament “markovià” del progrés científic, segons el qual la història anterior a ahir pot ser senzillament oblidada i deixada en mans d'una història professional que mai no interactuarà amb la ciència d'avui. I resituem en l'individu concret la plena responsabilitat i importància que el correspon, com a únic i veritable protagonista de la història. L'informe negatiu d'Ernst Eduard Kummer [9, p.81], que impedí l'accés de Grassmann a la Universitat, o la mort de Grassmann, Clifford i Maxwell en el curt període 1978-79 han fet més que canviar la història de l'anàlisi vectorial com concedeix Crowe a la pàg. 143 del seu llibre: són fets històrics que han determinat, no en petita mesura,

el que l'anàlisi vectorial és avui.

Hi ha fets, com els que acabem de citar, que a causa del seu caràcter "vital" tenen una connotació temporal que els fa irreversibles. Els homes passen, però les obres queden. N'hi ha d'altres, com les publicacions de Clifford o el "testament" de Lenin, que seria del tot improcedent ignorar-los en una anàlisi històrica que pretengui aportar quelcom a la concepció del món present. Són fets sobre els quals no es pot passar per sobre adduint l'irrellevant paper que van tenir en el desenvolupament històric immediatament posterior. Fer-ho és limitar-se a escriure la crònica del vencedor en el més pur estil "whig" denunciat fa ja molts anys per Butterfield [2]. En relació amb la síntesi de Clifford de 1878, Dyson, físic i matemàtic, fa recurs a una història "whig" per motivar pedagògicament un diàleg constructiu entre físics i matemàtics. Segurament li manquen "eines històriques" per evitar caure en la temptació de "simplificar" la història. D'altra banda, un historiador, Crowe, cau en la mateixa temptació "whig". En aquest cas, tant a causa de la manca de "curiositat científica" per a desenvolupaments que a primera vista semblen "colaterals" al tema objecte d'estudi, com per acceptar tàcitament el judici "whig" que sanciona sempre la ciència "oficial". Existeix una profunda semblança entre l'anterior exposició de Dyson, crític amb Gibbs des d'una perspectiva de físic teòric, i la de Crowe, historiador que defensa Gibbs des d'una perspectiva àmpliament compartida en tots els altres camps de la física. Diu aquest [9, pàg. 77]

"Per tal que un matemàtic d'aquell temps (1844) derivés el sistema modern d'anàlisi vectorial a partir del llibre de Grassmann, hauria d'haver fet (1) llegir i entendre el llibre (tasca no senzilla), (2) eliminar porcions matemàticament substancials del llibre (com l'anàlisi puntual), (3) limitar la presentació a l'espai tridimensional, (4) redefinir algunes de les idees fonamentals (com la de producte exterior), (5) canviar l'estructura i l'èmfasi del treball, (6) separar la presentació de les idees filosòfiques contingudes en ell, i (7) afegir-hi idees que ja estaven a la literatura de l'època, però que eren desconegudes per Grassmann, com el desenvolupament de la representació geomètrica dels nombres complexos i els teoremes de Green i de Gauss. Ningú en aquell moment o en un moment posterior no va realitzar aquests set treballs. Mostrarem a continuació que passarien més de vint anys fins que algú en realitzés el primer, és a dir, abans que algú llegís, comprengué i apreciés completament el llibre de Grassmann."

En el fons, i de forma prou explícita, ambdós defensen l'acompliment ineluctable d'una història que mena del passat al present per un camí

determinat i en el qual les actuacions humanes es limiten a accelerar la marxa (els “whig”) o a frenar-la (els “tories”), a afavorir o retardar la realització dels “treballs d’Hèrcules” per part del científic-heroi. La història humana, però, no s’amotilla a una tal descripció programàtica transcendent:

- (1) Certament cal comptar a Clifford entre els que arribaren a una comprensió plena del treball de Grassmann. Una comprensió que unida al seu profund coneixement dels quaternions li permeté realitzar el propi somni de Grassmann: incloure en el seu sistema els quaternions de Hamilton. El ple reconeixement a la seva obra consta en el títol del seu treball, refusant atribuir-se ni que sigui com a codescobridor l’estructura algebraica que avui porta el seu nom.
- (3) Naturalment que els quaternions apareixen vinculats a l’espai tridimensional, però no li calgué a Clifford limitar l’estructura matemàtica a aquesta dimensió. I de fet, com hem vist amb els seus biquaternions, l’associació continua sent vàlida en qualsevol espai que contingui com a subespai l’espai euclidià ordinari.
- (4 i 3) No li calgué cap redefinició del producte exterior. És la simple unió d’aquest amb l’interior, unió feta també per Grassmann, el que dóna origen a un únic producte geomètric. El mecanisme de projecció, ja iniciat per Hamilton amb els selectors “S” i “V”, completa les operacions físicament significatives. De fet, en la majoria dels casos que hem tingut oportunitat d’analitzar en el context de les teories físiques, el fraccionament en parts del producte geomètric respon tan sols a la necessitat de descriure una única realitat física complexa en termes de la nostra capacitat de representació tridimensional. El producte geomètric ens permet prescindir de les fragmentàries representacions visuals en l’elaboració teòrica i la conducció dels càlculs, exactament com anuncià Leibniz. Però a qualsevol nivell és capaç d’oferir-nos, per projecció, la totalitat de les facetes accessibles al nostre mode de representació tridimensional.
- (3, 5 i 6) No sembla que Clifford manifestés desacord o insatisfacció amb l’abast, presentació, estructura o èmfasi de l’*Ausdehnungslehre*. Ben al contrari, la seva lectura directa sembla haver incrementat enormement la seva consideració envers Grassmann.
- (7) Clifford certament tingué en consideració la representació geomètrica dels nombres complexos. I la seva conclusió és que res no

aporta al cas de l'espai tridimensional [5]:

“Siguin les unitats i_2, i_3 ; un producte de qualsevol nombre parell de funcions lineals ha de ser de la forma $a + bi_2i_3$. Sigui $i = i_2i_3$, llavors $i^2 = -1$; i un tal producte parell és el nombre complex ordinari $a + bi$. En el mètode de Gauss tot vector del pla és representat mitjançant la seva raó respecte del vector unitat i_2 , és a dir, i_2 i i_3 són substituïts per 1 i i . Això dóna un artificial encara que altament útil valor al producte de dos vectors. Podem aplicar una interpretació similar a l'àlgebra de quatre unitats, denotant els punts i_0, i_1, i_2, i_3 mitjançant els símbols ω, i, j, k , i conseqüentment els seus plans polars $\omega i_0, \omega i_1, \omega i_2, \omega i_3$ amb els símbols 1, $\omega i, \omega j, \omega k$; però no em sembla que cap resultat útil pugui seguir-se d'aquesta imitació del pla dels nombres de Gauss.”

L'artificialitat del pla de Gauss i la més que dubtosa utilitat pedagògica que se'n deriva han estat tractades amb tot detall a [32] i [33].

Els set punts assenyalats per Crowe en el camí que mena de l'àlgebra de Grassmann al càlcul vectorial “modern” són tots rellevants, però Clifford realitzà en la forma prevista per Crowe tan sols el primer. I no porta al passat i encara vigent càlcul vectorial, sinó directament al proposat futur càlcul geomètric [19]. Gibbs, certament, no realitzà bé el primer punt com queda explícitament manifest en la seva carta a Schlegel. I realitzà tots els altres ignorant simplement l'obra fonamental de Grassmann.

A la vista de tractaments històrics, superficials com el de Dyson, o veritablement professionals com el de Crowe, cal prendre's molt seriosament les paraules de Butterfield [2, pp.22-23]

“El perill en qualsevol panoràmica del passat és que argüim en cercle i imputem a la història lliçons que la història mai no ha ensenyat i que la recerca històrica mai no ha descobert -lliçons que són realment inferències fetes a partir de la particular organització que hem donat al nostre coneixement. Podem creure en alguna doctrina de l'evolució o alguna idea de progrés i podem usar-la en la nostra interpretació de la història dels segles; però allò que la nostra història aporta no és evolució sinó més aviat la clara imatge de com són de tortuosos i perversos els camins del progrés, amb quina forma tan malèvola i malgastadora es gira i capgira, i pren qualsevol altre camí que no sigui el camí recte a l'objectiu, i quan sovint sembla anar a la deriva, i ser desviada per qualsevol conjectura, per retornar a nosaltres -si és que retorna- per la porta del darrere.”

Què han de fer l'historiador i el científic posats davant d'un fet històric com aquest que, precisament quant a la seva general ignorància i menys-teniment, tanta transcendència té per al camí de la ciència? L'única alternativa acceptable és la de fer entrar de nou la idea "oblidada" en interacció amb el conjunt de coneixements científics que s'han desenvolupat al seu marge. És a dir, reintegrar-la al corrent històric de la ciència. Fer conscient el científic d'avui que la pròpia història de la disciplina que practica és una tasca que específicament correspon a l'historiador. Per la seva formació inicial, intraparadigmàtica, el científic ha rebut, en el millor dels casos, una visió històrica "whig" de la seva disciplina, amb els seus herois i un desenvolupament quasi lineal del no-coneixement al coneixement. Només l'acció efectiva de l'historiador pot ampliar les limitades perspectives de la formació inicialment rebuda i apropar-lo a una visió més completa del procés històric en el qual ell mateix participa amb la seva recerca i també amb la seva docència. La tasca és delicada, perquè la història "whig", que en ser lineal-acumulativa té un sentit per al científic, no pot ser substituïda per una eclèctica enciclopèdia del pensament científic de tots els temps en la qual només quedi l'element acumulatiu. La tasca de l'historiador científic es presenta, per dir-ho metafòricament, com una reconstrucció multilíneal, arborescent, basada i contrastada en tants llocs com sigui possible amb el conjunt acumulat de dades històriques.

És la permanent reconstrucció d'aquest Arbre de la Ciència (en majúscules per la seva essencial unitat) la tasca global en la qual troba un lloc i un sentit l'activitat de cada investigador individual. La tasca del científic és fer créixer l'arbre amb noves branques i noves fulles que li permetin una més plena captació de la "llum de la natura". És obvi que, per al seu òptim estat, cal eliminar les fulles seques i procedir a podes periòdiques de les branques que es mostren improductives. La tasca de l'historiador és, en canvi, el conjunt de la història passada de l'arbre, des de l'origen del pensament humà fins al dia d'ahir (encara que la tasca en els dos extrems sigui impossible, d'una banda per manca de dades i, de l'altra, per manca d'interès històric justament pel fet de coincidir amb un interès ben present dels científics). L'article de Clifford de 1878 assenyala el punt on la comunitat científica va podar una branca per afavorir-ne el desenvolupament d'una altra. La tasca de l'historiador pròpiament acaba assenyalant les circumstàncies que precediren la poda, la poda mateixa i els intents de revifalles posteriors. Els vestigis o testimonis recollits suggereixen que sobre aquesta branca tallada hi pot créixer un vigorós empelt que superi ràpidament en alçada i gruix la branca "vectorial". És tasca dels científics estudiar la viabilitat de l'empelt, practicar-lo si així ho creuen convenient

i fer-lo créixer amb la seva activitat. I per dirigir aquest procés científic resulten rellevants els coneixements aportats pels historiadors sobre l'evolució i els resultats produïts per les diferents escoles de jardineria, és a dir, pel vessant metodològic de la historiografia.

Així, doncs, amb una intenció purament informativa i sense entrar en una anàlisi detallada que requeriria diversos treballs "científics", passem a fer esment dels que han estat els vestigis i l'autèntica base històrica d'una revifalla de l'àlgebra geomètrica al nostre segle, i també de quin és l'estat actual del seu desenvolupament. El vestigi més important va ser el "redescobriment" per Dirac, sota forma matricial complexa, d'una específica àlgebra de Clifford. Apareixia així, de forma mistificada, com a element matemàtic que possibilitava la relació entre la teoria de la relativitat i la mecànica quàntica. Va ser Riesz qui primer reformulà el 1946 [40] la teoria de Dirac en una forma específicament geomètrica, en la qual les matrius eren substituïdes per la tètrada ortonormal de vectors associada a un sistema de coordenades cartesianes de l'espai de Minkowski. Això li permeté, l'any 1953 [41], formular també de manera geomètrica l'equació de Dirac en relativitat general. Una de les aportacions fonamentals de Riesz va ser una redefinició dels espinors, primer com a elements de l'àlgebra de Clifford i després com a col·lectius de tals elements, donant una base geomètrica als que fins llavors havien estat elements d'un espai abstracte "intern". Finalment, Hestenes, en una sèrie pràcticament ininterrompuda de treballs inicià el 1966 [18]—[21] una reelaboració de la teoria de Dirac partint de l'àlgebra de Clifford real de l'espai de Minkowski (en la versió de Riesz les components podien ser nombres complexos). Hestenes posà de manifest la natura essencialment geomètrica de la unitat imaginària en les equacions quàntiques. A part d'aquesta línia de treball, destinada a mostrar el caràcter fonamental de l'àlgebra geomètrica de Clifford en les teories més avançades de la física, Hestenes i Sobczyk [19] han tractat de presentar una primera síntesi del conjunt d'implicacions matemàtiques de l'àlgebra de Clifford. Tres reunions d'abast internacional amb participació conjunta de matemàtics i físics han tingut lloc a Canterbury [4], Montpel·lier [28] i Gant [1]. Finalment, i ja en el terreny pedagògic, fent ús tan sols de l'àlgebra geomètrica de l'espai euclidià tridimensional, Hestenes ha elaborat una nova presentació de la mecànica clàssica [20] i Jancewicz de la teoria electromagnètica [22], que han permés una comparació directa amb les presentacions tradicionals basades en l'àlgebra vectorial i l'àlgebra de les matrius de Pauli.

8 Conclusió

La magnitud del bloqueig, l'abast veritablement històric de les seves conseqüències, és un motiu de discussió present al si de la comunitat científica. La reflexió històrica sobre el conjunt de la física del segle XX resta en gran manera incompleta si es negligeix l'important paper que han tingut l'àlgebra vectorial i els reiterats "redescobriments" de l'àlgebra de Clifford-Grassmann sota formes matricials del tot alienes a la seva capacitat de representació directament geomètrica. Les àlgebres de Pauli i Dirac, l'important paper dels grups de matrius complexes $SU(2)$ i $SL(2, \mathbb{C})$ en la formulació física de les rotacions de l'espai ordinari i les transformacions de Lorentz de l'espai-temps, podrien deixar de ser "genials aportacions" de la física del XX per passar amb tota propietat a ser considerades com recargolades reformulacions d'una estructura matemàtica del XIX. Aquesta és, per descomptat, la nostra modesta opinió basada tant en l'anàlisi històrica sumàriament detallada en aquest treball com en la pràctica docent a la Facultat de Física de la U.B. però, fonamentalment, en una tasca de recerca centrada entorn de les aplicacions de les àlgebres de Clifford a la física clàssica i quàntica. Jacques Monod afirmà que la modèstia convé al savi, però no a les idees en què creu i que ha de defensar. De cap manera puc pretendre la consideració de "savi", i una de les primeres i més grans lliçons que dona una aproximació històrica és la humilitat i el reconeixement davant les veritables manifestacions de geni sobre les quals descansa la nostra ciència. Però és en mans de l'historiador de la ciència i del científic d'avui en qui recau exclusivament la tasca de treure a la llum, valorar i defensar aquelles idees i principis que, després de la mort dels seus creadors, continuen il·luminant el futur. I la característica geomètrica de Leibniz, en la realització concreta assolida per Grassmann i Clifford, ens sembla que és una d'elles. Que la natura és intel·ligible i que una eina indispensable per al seu coneixement és un llenguatge geomètric "natural" és, ho reconeixem, una suposició. Una suposició raonable des de la perspectiva d'un coneixement històric que va de Galileu a Hestenes i que la mateixa història de la ciència, és a dir, ni menys ni més que la mateixa ciència, contribuirà a confirmar o refutar.

References

- [1] F. Brackx, R. Delanghe, H. Serras (eds.) *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, (Reidel, Dordrecht, 1993).

- [2] H. Butterfield *The Whig Interpretation of History* (W.W. Norton and Co., N. York, 1965, (1931))
- [3] E. Cartan - E. Study, "Nombres complexes", *Oeuvres Complètes* vol.II, pp. 107-246 (Éd. C.N.R.S., Paris, 1984, (Encyclop. Sciences Math., 1908))
- [4] J. S. R. Chisholm and A. K. Common (eds.), *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, (NATO ASI Series C183) (Reidel, Dordrecht, 1986).
- [5] W. K. Clifford, "Applications of Grassmann's extensive algebra", *Amer. J. Math.* **1**, 350-358 (1878).
- [6] W. K. Clifford, "On the Classification of Geometric Algebras" (unfinished), pages 397-401 in *Mathematical Papers by W. K. Clifford*, R. Tucker ed. (London, 1887)
- [7] W. K. Clifford, *The Common Sense of Exact Sciences* (Dover, N.York, 1955).
- [8] L. Couturat, *La Logique de Leibniz, d'après des documents inédits* (Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim, 1961 (Paris, 1901))
- [9] M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, (Univ. Notre Dame Press, Notre Dame, 1967) and (Dover, N. York, 1985).
- [10] H. Freudenthal, *Mathematics as an Educational Task*, (Reidel, Dordrecht, 1973).
- [11] F. J. Dyson, "Missed Opportunities", *Bull. A. M. S.* **78**, 635-652, (1972)
- [12] J. W. Gibbs, "On Multiple Algebra", *Proc. Am. Ass. Adv. of Science* **35**, 37-66, (1886); reprinted in *The Scientific Papers of J.W. Gibbs* vol. 2 (N.Y. 1961)
- [13] H. Grassmann, *Teoria de la Extensión* (Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires, 1947) (Die Lineale Ausdehnungslehre, 1844)
- [14] W. R. Hamilton, "Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples", *Trans. Royal Irish Acad.* **17**, 293-422 (1837).
- [15] W. R. Hamilton, *Lectures on Quaternions* (Hodges and Smith, Dublin, 1853).

- [16] O. Heaviside, *Electromagnetic Theory vol. 1*, (Chelsea P.C. , N.Y., 1971, (1893)).
- [17] W. Heisenberg, *La imagen de la naturaleza en la física actual*, (Ariel, 1976) (Das Naturbild der heutigen Physik, Rowohlt Verlag (1955))
- [18] D. Hestenes, *Space-Time Algebra* (Gordon and Breach, New York, 1987, (1966)).
- [19] D. Hestenes and G. Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus* (Reidel, Dordrecht, 1984).
- [20] D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics*, (Kluwer, Dordrecht, 1990, (1986)).
- [21] D. Hestenes, "The Zitterbewegung Interpretation of Quantum Mechanics", *Found. Phys.* **20**, 1213-1232 (1990).
- [22] B. Jancewicz, *Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics*, (World Scientific, Singapore, 1988)
- [23] G. W. Leibnitz, *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern*, C. I. Gerhardt (ed.) (Mayer and Müller, Berlin, 1889 and Georg Olms Verlag, Hildesheim, 1987) (en français).
- [24] R. Lipschitz, "Principes d'un calcul algébrique qui contient comme espèces particulières le calcul des quantités imaginaires et des quaternions." *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **91**, 619-621 and 660-664, (1880).
- [25] R. Lipschitz, "Anonymous ultramundane correspondence" *Annals of Math.* **69**, 247-251, (1959).
- [26] P. Lounesto, R. Mikkola, V. Vierros, CLICAL, (Helsinki Univ. of Technology, Res. Report A248, 1987).
- [27] J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. 2* (Dover, N. York, 1954 (1891)(1873)).
- [28] A. Micali and R. Boudet (eds.) *Proceedings of the Second International Conference on Clifford Algebras and Their Applications to Physics*. (Kluwer, Dordrecht/Boston, 1992).
- [29] A. Molina, L. Navarro, J. M. Parra, "On angular velocity in rigid-body kinematics", *Eur. J. Phys.* **5**, 160-162 (1984).

- [30] J. M. Parra, “Algebres de Clifford i transformacions de Lorentz”, *Treballs de Física* **2** (3), 1-18 (1990).
- [31] J. M. Parra, “Diferencial de Clifford i operador de Laplace en una varietat Riemanniana”, *Treballs de Física* **2** (3), 19-37 (1990).
- [32] J. M. Parra, “Los números complejos: una oportunidad para analizar la *complejidad* de la docencia universitaria” pp. 295-304 de *La pedagogia universitària* (Horsori, Barcelona, 1991).
- [33] J. M. Parra, “Complex numbers or geometric algebra? A historical and present-day choice”, *Proceed. History Physics Teaching*, Cambridge 1990 (European Phys. Soc. Pub. 1992?).
- [34] J. M. Parra, “On Dirac and Dirac-Darwin-Hestenes equations”, pp. 463-477 a A. Micali, R. Boudet i J. Helmstetter (eds.) *Proceedings of the Second International Conference on Clifford Algebras and Their Applications to Physics* (Kluwer, Dordrecht/Boston, 1992).
- [35] J. M. Parra, “Relativistic invariance of Dirac’s equation revisited” pp. 233-242 a *Recent Developments in Gravitation* A. Feinstein and J. Ibáñez eds. (World Scientific, 1992)
- [36] J. M. Parra, “Some basic results in Hestenes’ real Clifford algebra approach to Dirac’s theory” (preprint 27 pp. 1992)
- [37] J. M. Parra, “Clifford Algebras. Towards a Common Language for Mathematicians and Physicists. Some Suggested Notations”, *Advances in Applied Clifford Algebras* **2**, 145-168 (1992)
- [38] J. M. Parra, “William Kingdon Clifford, als 150 anys del seu naixement”, *SCM/Notícies*, Maig 1995, 10-12.
- [39] T. Regge, “Group manifold approach to unified gravity”, 933-1006 in *Relativité, groupes et topologie*, B. S. DeWitt and R. Stora eds. (Elsevier, Amsterdam, 1984)
- [40] M. Riesz, “Sur certaines notions fondamentales en théorie quantique relativiste” (1946) in pp. 123-148 *C.R. 10ème Congrès Math. Scandinaves* (Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen 1947). Reprinted in L. Garding and L. Hormander (eds.): *Marcel Riesz, Collected Papers* (Springer, Berlin, 1988) pp. 545-570.

- [41] M. Riesz, "L'équation de Dirac en relativité générale", in pp. 241-259 *C.R. 12ème Congrès Math. Scandinaves* (Lund, 1953)
- [42] L. Silberstein, *The Theory of Relativity*, (MacMillan, London, 1914).
- [43] D. Speiser, "Relativity in Euler's work" in M. G. Doncel, A. Hermann, L. Michel, A. Pais (eds.), *Symmetries in Physics (1600-1980)* (Universitat Autònoma de Barcelona-World Scientific, 1987).
- [44] B. L. van der Waerden, "Exclusion Principle and Spin" pàg. 199 de *Theoretical Physics in the XXth. Century, Pauli Memorial Volume*, (Fierz and Weisskopf eds., Interscience, 1958).
- [45] L. P. Wheeler, *Josiah Willard Gibbs. The History of a Great Mind*, (Archon Books, 1970 (1951))
- [46] A. N. Whitehead, *The Aims of Education And Other Essays*, (MacMillan, 1929), (Mentor Books, 1949), (Paidós, B. Aires, 1957)
- [47] E. P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", Adress given at the Gauss Centennial, Göttingen 19 Feb. 1955, in T. L. Saaty and F. J. Weyl (eds.) *The Spirit and Uses of Mathematical Sciences* (McGraw-Hill, New York, 1969).