

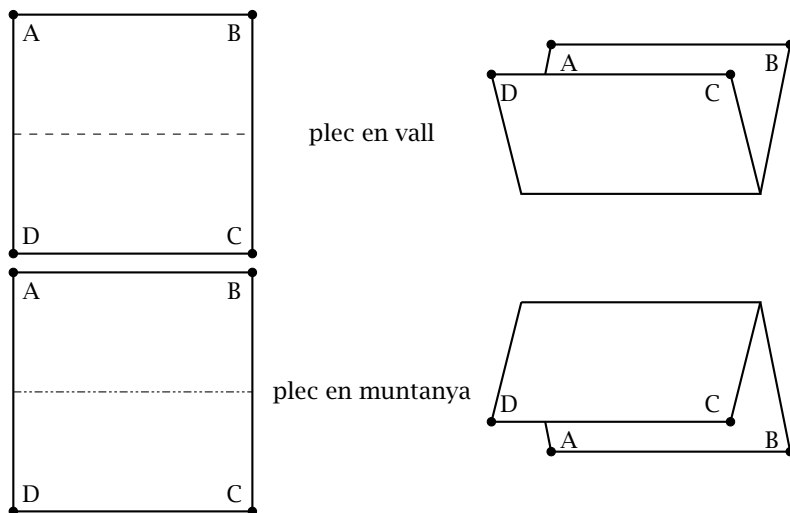
Material suplementari de l'article «Políedres i papiroflèxia modular»

JAUME COLL GUERRERO

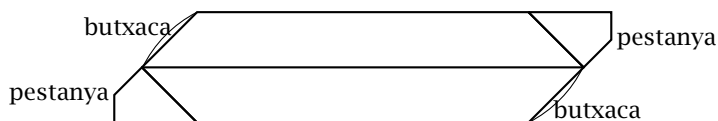
Aquest document és un suplement de la secció 2 de l'article, en què es tracta la papiroflèxia d'alguns mòduls aresta. Aquí presentem la construcció amb paper dels cinc sòlids platònics i dels tretze políedres arquimedians amb tècniques de papiroflèxia modular.

Per fer políedres de paper amb tècniques de papiroflèxia modular es poden utilitzar mòduls de tipus cara, mòduls de tipus vèrtex o mòduls de tipus aresta. El mòdul aresta general que es descriu a continuació és una generalització dels mòduls 120 i 135 de Francis Ow. Aquests darrers dos mòduls aresta es fan a partir d'un paper quadrat; de fet, la construcció d'aquests mòduls es pot fer amb qualsevol format de paper rectangular. Per fer la construcció efectiva posem el paper amb base menor o igual a l'alçada, es pot utilitzar com a paper inicial un full dinA4, que és el format estandarditzat més assequible en el mercat.

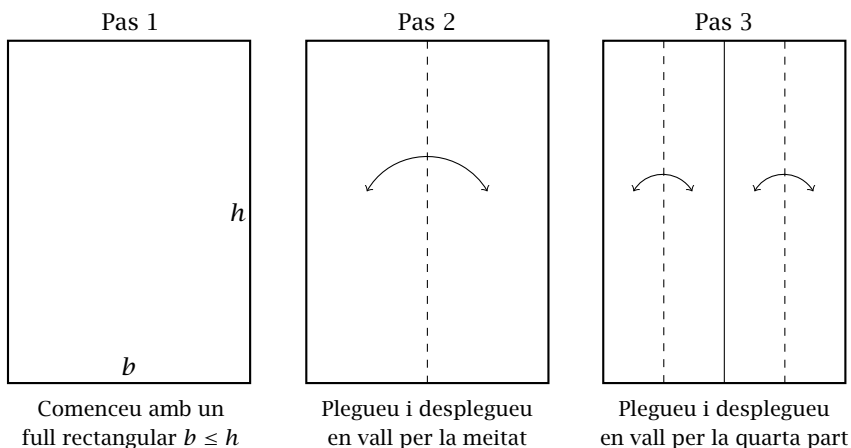
Per fer els mòduls utilitzarem els següents plecs bàsics de l'origami:



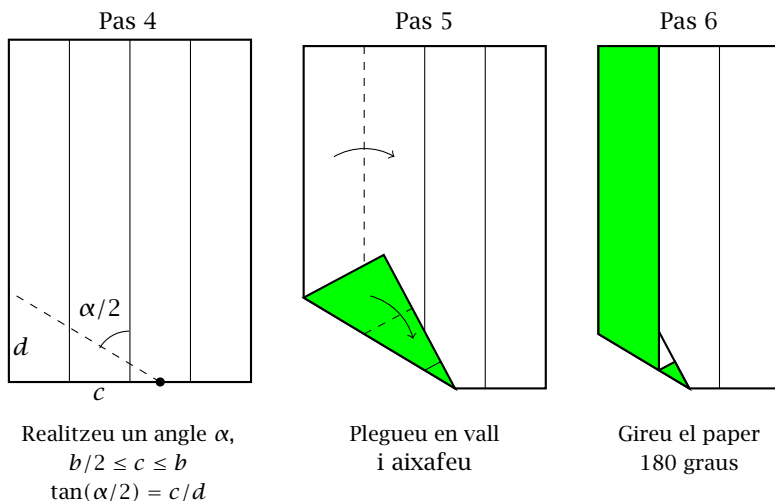
Els mòduls aresta que es descriuen a continuació tenen en cada extrem una pestanya i una butxaca. La unió de dos mòduls es fa introduint una pestanya del primer mòdul en una butxaca del segon mòdul.



S.1 Mòduls aresta de tipus Francis Ow

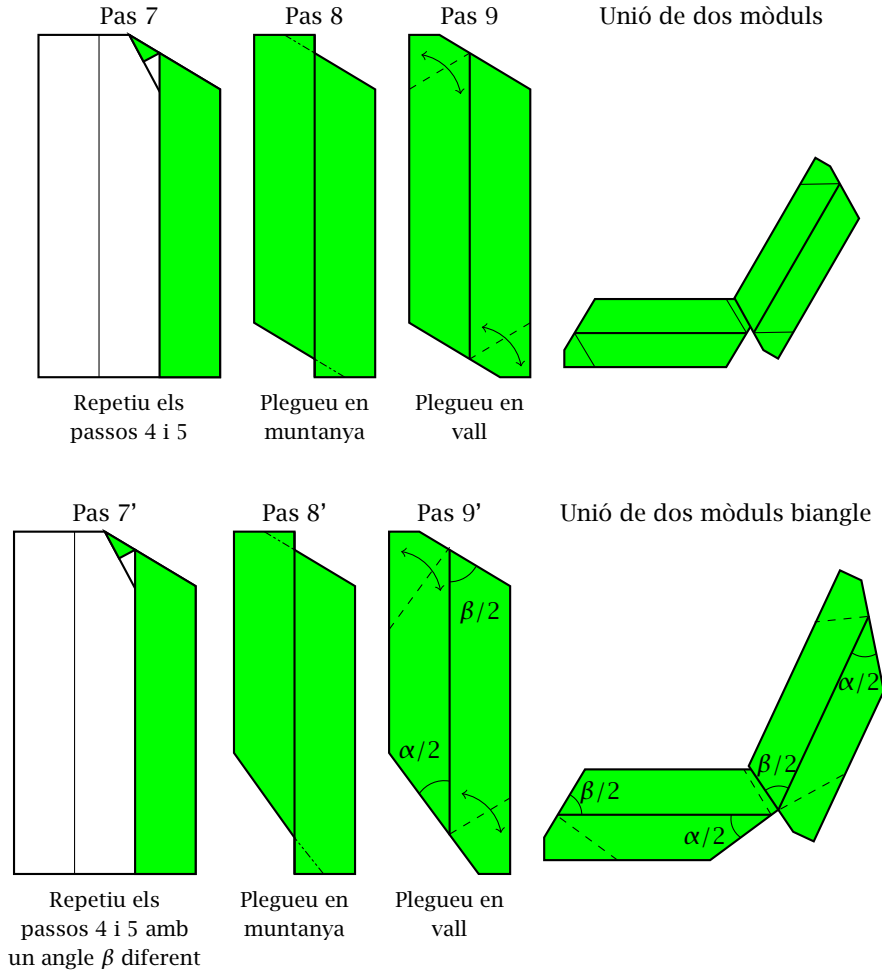


En el pas següent cal fer un plec amb un angle específic per poder construir políedres molt concrets. Per exemple, si volem construir els cinc sòlids platònics necessitarem fer mòduls aresta amb angles de 60, 90 i 108 graus que ens permetran realitzar els triangles equilàters, els quadrats i els pentàgons regulars, és a dir, els polígons dels sòlids platònics. En canvi, si volguéssim fer els tretze sòlids arquimedians, caldria fer hexàgons, octògons i decàgons, és a dir, mòduls aresta de 120, 135 i 144 graus, respectivament. Per a altres famílies de políedres, com per exemple els políedres de Catalan, caldria ajustar els angles. La realització d'un angle concret en el pas 4 pot tenir diferents subpassos.



En el pas següent tenim dues opcions: repetir el passos 4 i 5 amb el mateix angle α o fer el mateix amb un angle diferent β .

Aquesta segona opció de mòdul aresta biangle ens permet ampliar el ventall per fer altres tipus de poliedres, com per exemple prismes, antiprismes, piràmides o el sòlid de Dürer que apareix en el gravat *Melancolia I*.

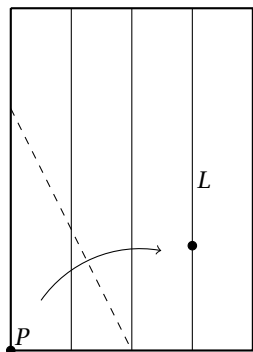


Recordem que per unir dos mòduls cal introduir la pestanya d'un mòdul en la pestanya del segon mòdul. La grandària de la pestanya final del mòdul depèn de l'angle, cosa que fa que existeixin algunes variants en els plecs finals del mòdul i variants a l'hora d'unir-los.

A continuació veurem com es fan efectius aquests mòduls per a angles molt concrets.

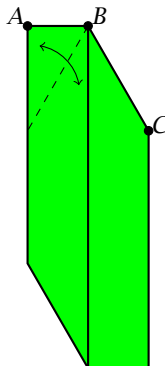
S.1.1 Mòdul aresta de 60 graus La construcció de l'angle de 60 graus és un cas particular extrem del mètode general. En aquest cas prenem el valor $c = b/2$ i això fa que la pestanya del mòdul sigui un triangle en lloc d'un quadrilàter.

Pas 4

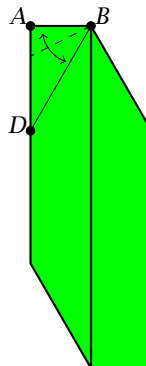


Plegueu en vall
Porteu el punt P al segment L

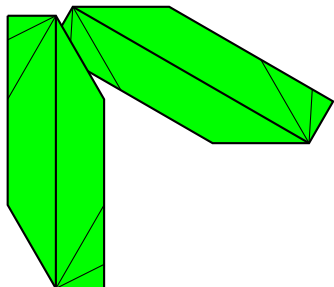
Pas 9.1



Pas 9.2



En els passos 9.1 i 9.2 plegueu i desplegueu en vall la bisectriu dels angles $\angle ABC$ i $\angle ABD$, respectivament, porteu el costat superior AB al costats BC i BD , respectivament.



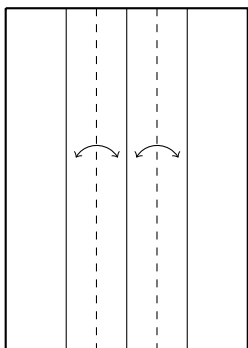
Unió de dos mòduls



Amb aquest mòdul es poden construir els tres sòlids platònics formats per triangles: tetràedre (6 mòduls), octàedre (12 mòduls) i icosaèdre (30 mòduls).

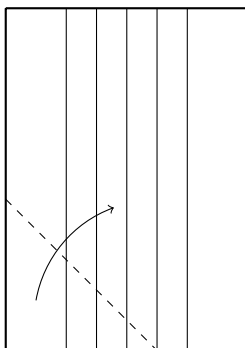
S.1.2 Mòdul aresta de 90 graus

Pas 4.1



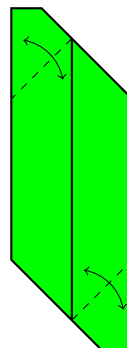
Plegueu i desplegueu en vall

Pas 4.2



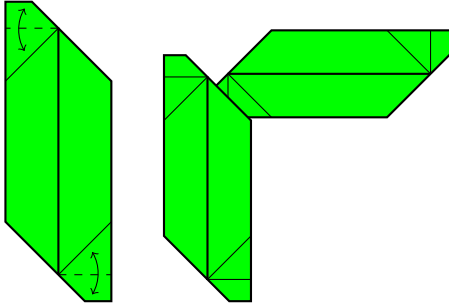
Plegueu en vall

Pas 9.1



Plegueu i desplegueu en vall

Pas 9.2



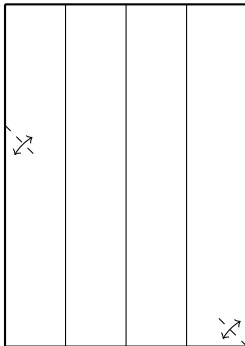
Unió de dos mòduls



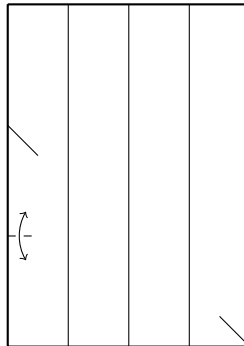
Amb dotze d'aquests mòduls
podem fer un cub

S.1.3 Mòdul aresta de 108 graus

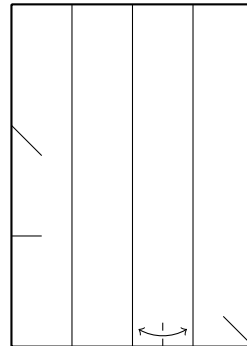
Pas 4.1



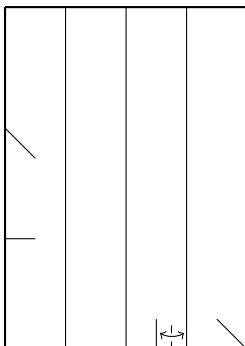
Pas 4.2



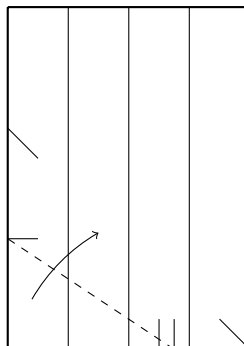
Pas 4.3



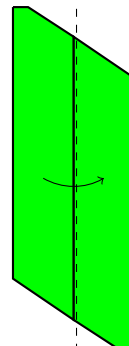
Pas 4.4



Pas 4.5

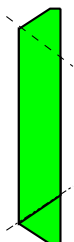


Pas 9.1

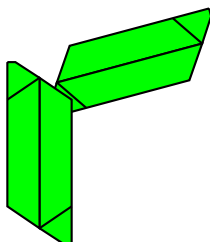


En els passos 4.1 a 4.4 plegueu i desplegueu en vall, i en els passos 4.5 i 9.1 plegueu en vall.

Pas 9.2

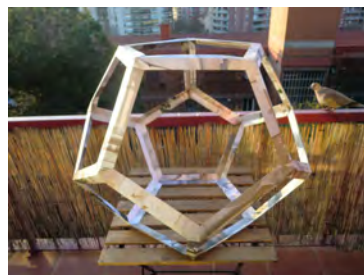


Pas 9.3



Mòdul final

Unió de dos mòduls

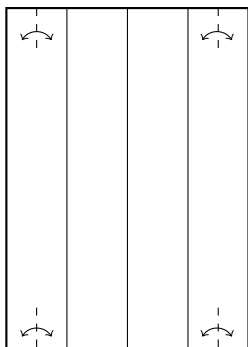


En el pas 9.2 feu el plec superior en vall i el plec inferior en muntanya.

Unint trenta d'aquests mòduls podem construir un dodecàedre. De fet, en aquest mòdul el que es fa és construir un angle de $2 \cdot \arctan(1.375) = 107.945 \dots$ graus en lloc d'un angle de 108 graus i, per tant, es comet un error relatiu del 0.05%, inapreciable per a l'ull humà.

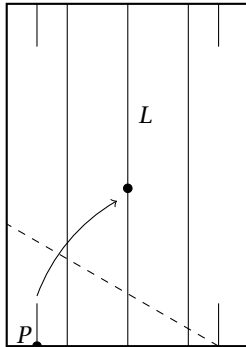
S.1.4 Mòdul aresta de 120 graus Amb els tres tipus de mòduls anteriors (60, 90 i 108 graus) es poden fer els cinc sòlids platònics; per fer els políedres arquimediens ens caldran altres tipus de mòdul aresta que tinguin angles de 120 graus (hexàgons), 135 graus (octògons) i 144 graus (decàgons).

Pas 4.1

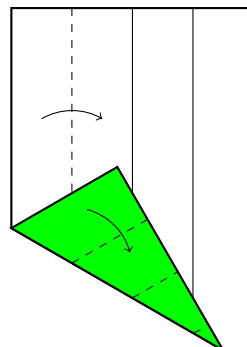


Plegueu i desplegueu en vall

Pas 4.2

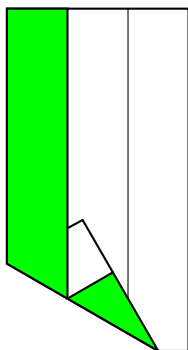
Plegueu en vall
Porteu el punt P al segment L

Pas 4.3



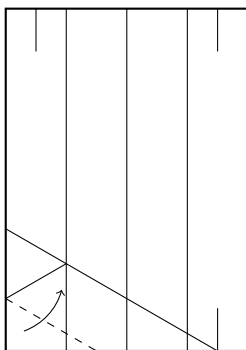
Plegueu en vall i aixafeu

Pas 4.4



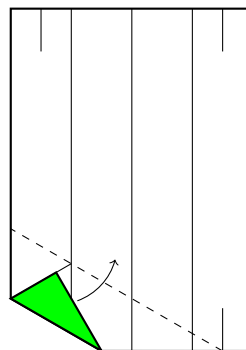
Desplegueu el paper

Pas 4.5

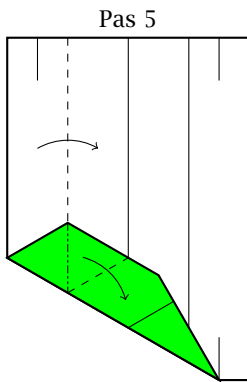


Plegueu en vall

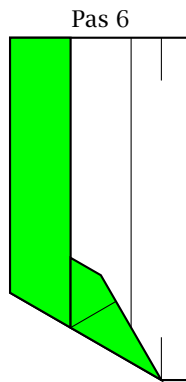
Pas 4.6



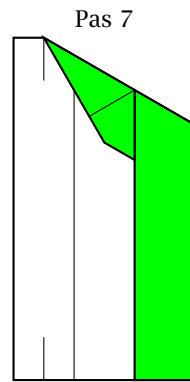
Plegueu en vall



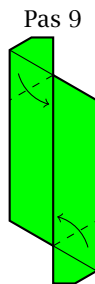
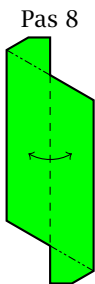
Plegueu en vall i aixafeu



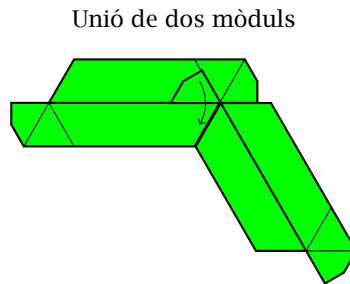
Gireu el paper 180 graus



Repetiu els passos 4.2 a 5

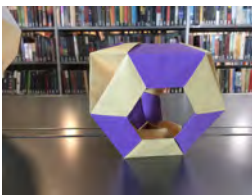


Plegueu en vall



Cal introduir la pestanya dins la butxaca

Amb el mòdul aresta 120 de Francis Ow es poden construir nou dels tretze políedres arquimedians: tetràedre truncat, cub truncat, icosaèdre truncat (pilota de futbol), cubooctàedre, cub xato, dodecàedre xato, icosidodecàedre, petit rombicuboctàedre i petit rombicoidodecaèdre.



Amb aquest mòdul també es poden construir altres poliedres que tinguin per cares hexàgons regulars, pentàgons regulars, quadrats o triangles equilàters, com per exemple el poliedre de Sommerville o alguns poliedres del llibre *Perspectiva corporum regularium*, publicat el 1568 per Wenzel Jamnitzer (1508–1585), orfebre de la ciutat alemanya de Nüremberg.



Sòlid de Sommerville



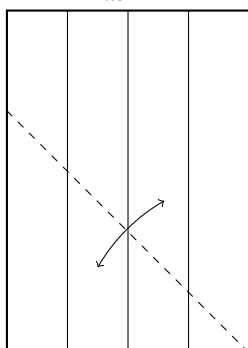
Wenzel Jamnitzer AIII3



Wenzel Jamnitzer AIII6

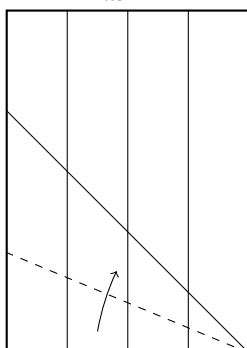
S.1.5 Mòdul aresta de 135 graus

Pas 4.1



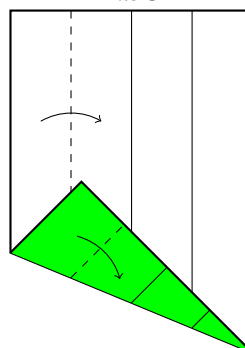
Plegueu i desplegueu
en vall

Pas 4.2



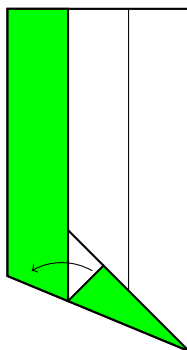
Plegueu en vall

Pas 5



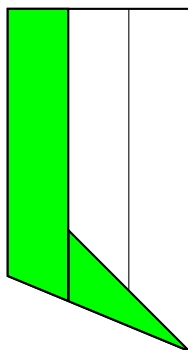
Plegueu en vall
i aixafeu

Pas 6



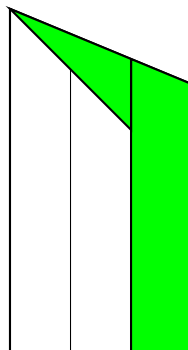
Plegueu en vall

Pas 7



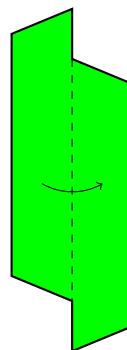
Gireu el paper
180 graus

Pas 8

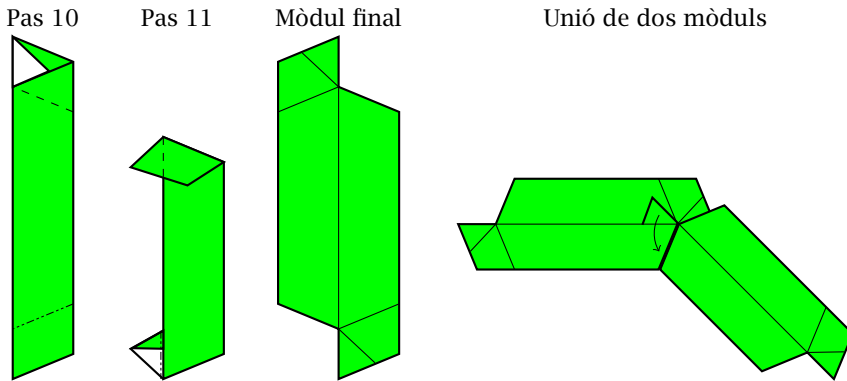


Repetiu els
passos 4.1 a 6

Pas 9



Plegueu en vall



Cal introduir la pestanya dins la butxaca

Amb el mòdul aresta 135 de Francis Ow es poden construir els dos políedres arquimedians amb octògons:

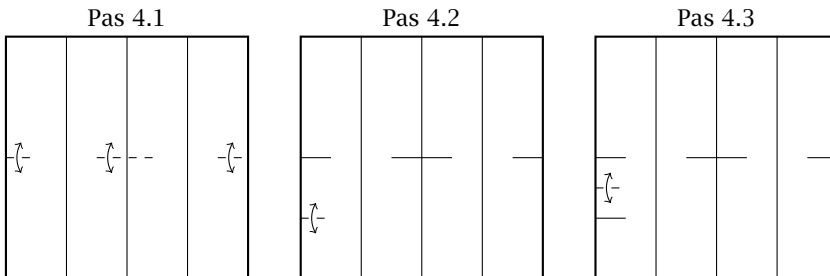


Cub truncat

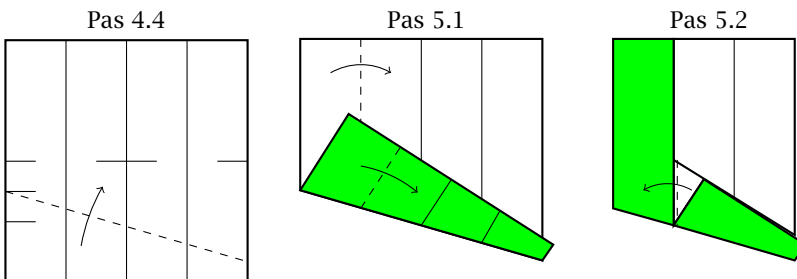


Gran rombicuboctàedre

S.1.6 Mòdul aresta de 144 graus El següents diagrames per al mòdul aresta de 144 graus també es poden fer començant amb un rectangle de base inferior a l'alçària ($b \leq h$).



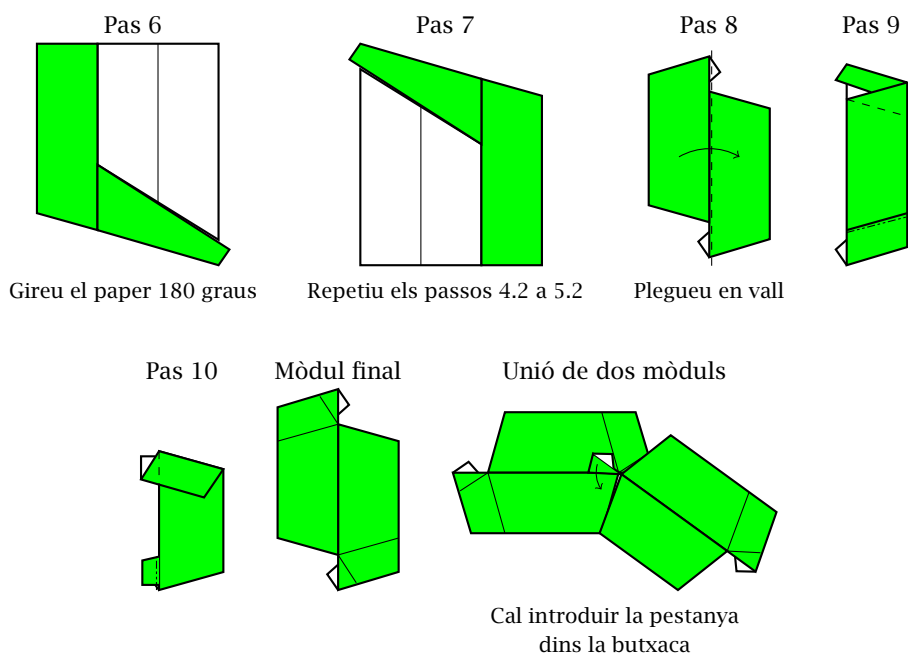
En els passos 4.1 a 4.3 plegueu i desplegueu en vall.



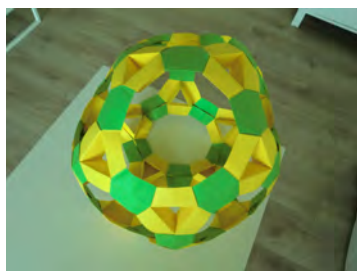
Plegueu en vall

Plegueu en vall i aixafeu

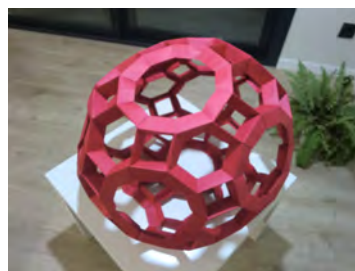
Plegueu en vall i amagueu



Amb aquest mòdul aresta de 144 graus es poden construir els dos políedres arquimèdians amb decàgons:



Dodecàedre truncat



Gran rombicuboctaedre

En el procediment anterior es construeix un angle

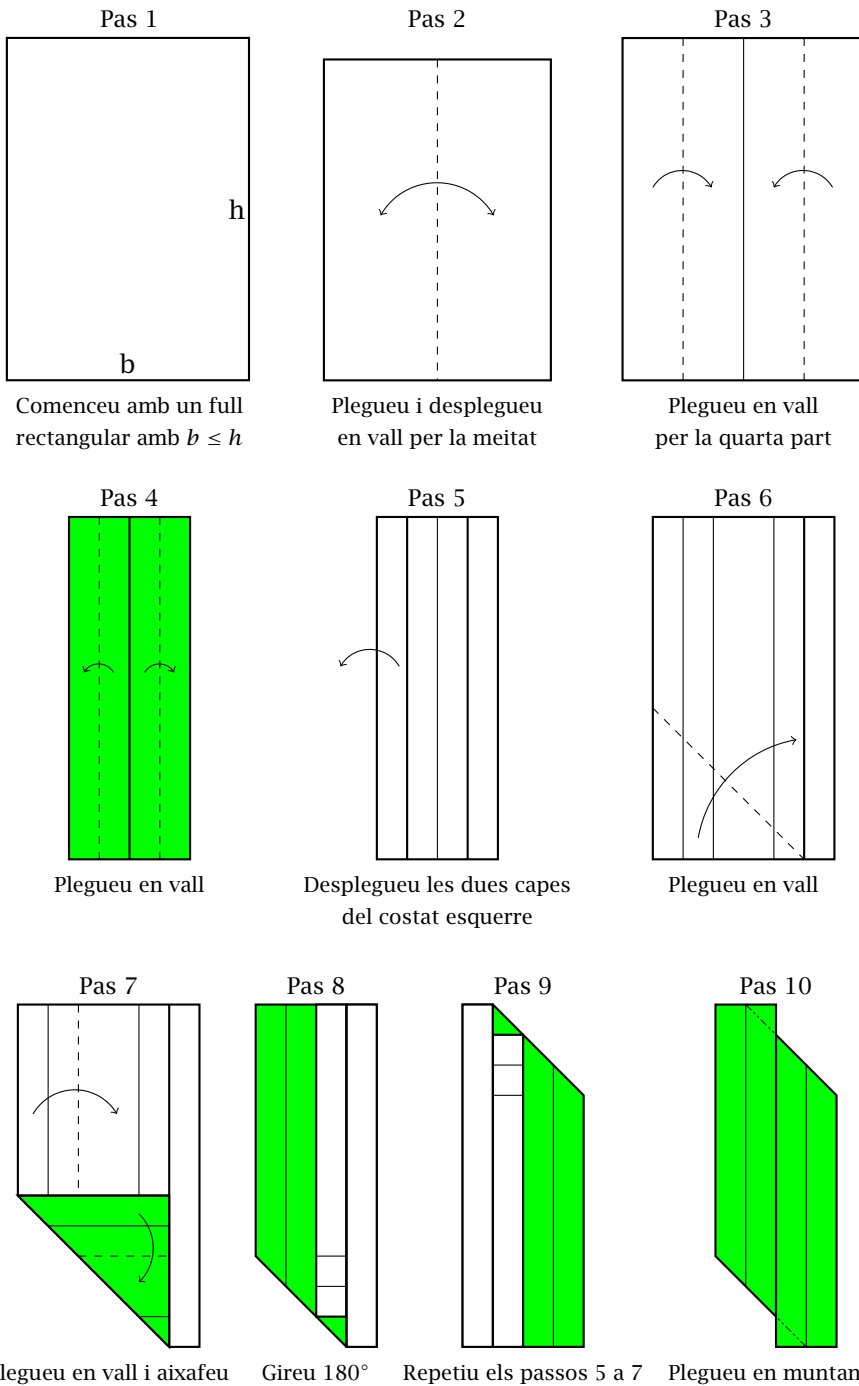
$$\alpha = 2 \cdot \arctan(2 + \sqrt{2}) = 147.35 \dots \text{ graus}$$

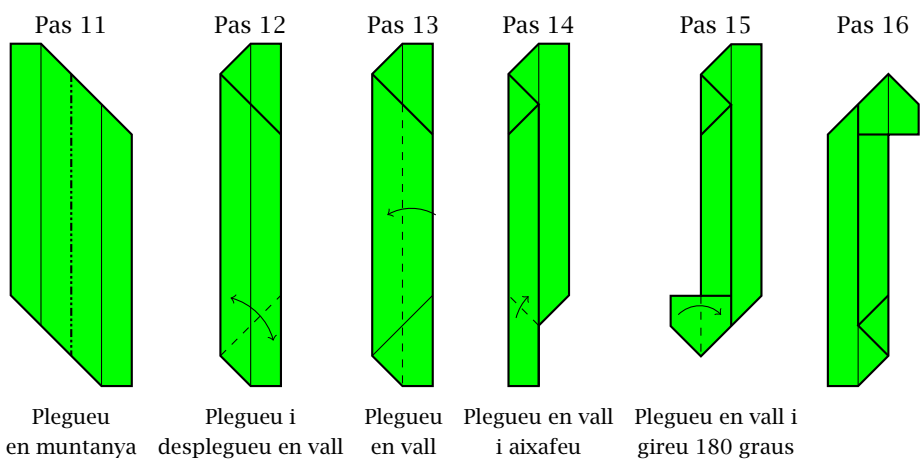
en lloc d'un angle de 144 graus i, per tant, es comet un error relatiu del 2.32%.

S.2 El Kantenmodul de Carmen Sprung

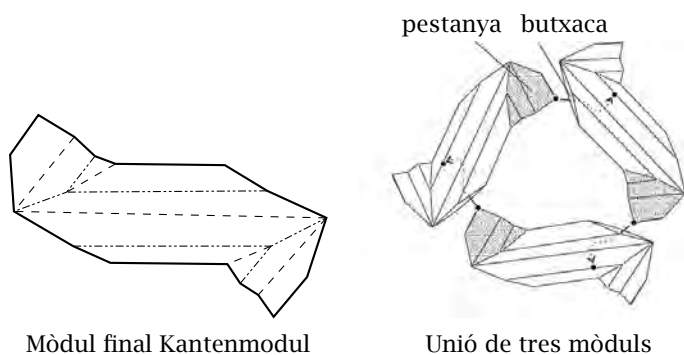
Carmen Sprung va fer aquest mòdul de tipus aresta per construir un icosaèdre. Per idear aquest mòdul la creadora es va inspirar en el mòdul del dodecàedre rombic de Nick Robinson. La manera diferent d'encaixar les pestanyes amb les butxaques del Kantenmodul de Carmen Sprung i la seva flexibilitat fan que

sigui un mòdul de tipus aresta molt més versàtil i resistent que els mòduls aresta del tipus Francis Ow.





En repetir els passos 12 a 15, en el pas 16 obtindrem el mòdul aresta Kantenmodul.



La unió de dos mòduls forma un angle de 60 graus, i la unió de tres mòduls, un triangle equilàter, cosa que permet fer deltaedres, és a dir, políedres totes les cares dels quals són triangles equilàters, com la família dels vuit deltaedres convexos, o fer triangulacions de molts políedres.



Els vuit deltaedres convexos



Triangulació icosidodecaèdre



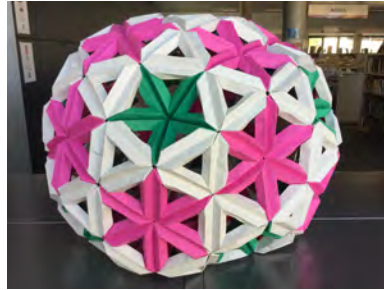
Sòlids platònics

De fet, amb aquest mòdul es poden fer quatre dels cinc sòlids platònics. Invertint de muntanya a vall el plec del segment central del Kantenmodul es pot aconseguir un mòdul de 90 graus, que ens permetrà fer el cub. Aquest és l'angle intern més gran que es pot assolir amb el Kantenmodul per fer un polígon regular. El dodecaèdre es pot realitzar amb el mòdul de 108 graus o amb el mòdul de 120 graus de Francis Ow.

El Kantenmodul permet realitzar cúpules geodèsiques o fullerianes mitjançant triangulacions d'un icosaèdre. L'enèsima triangulació d'un icosaèdre consisteix a dividir cada aresta de longitud L en n parts iguals i d'aquesta manera cada triangle equilàter es transforma en $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ nous triangles equilàters de costat L/n . Per tant, el nombre de cares d'una n -triangulació és $C_n = 20n^2$ i el nombre d'arestes, $A_n = 3C_n/2 = 30n^2$. La 4-triangulació de la imatge següent està construïda amb 480 mòduls arestes del tipus Kantenmodul.



Cúpula,
4-triangulació d'un icosaèdre



Triangulació d'un icosaèdre
doblement truncat

CENTRE DE FORMACIÓ DE PERSONES ADULTES RAFAEL FARRÉ (MOLINS DE REI)
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
jaume.coll.guerrero@uab.cat