Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 39, núm. 1-2, 2024. Pàg. 5–36. DOI: 10.2436/20.2002.01.113

# Un repàs a les rotacions en baixa dimensió

Jaume Aguadé

**Resum:** Comencem amb les rotacions de la geometria elemental i les matrius ortogonals i acabem construint de manera explícita, elemental i autocontinguda els isomorfismes clàssics entre els grups d'espinors en dimensió $< 7$ i certs grups unitaris o simplèctics. La intenció del treball és essencialment didàctica i es pot llegir com una introducció a la teoria dels grups de Lie compactes.

Paraules clau: rotació, espinor, grup de Lie, quaternions.

Classificació MSC2020: 22-01, 20G20, 22E15.

## 1 Presentació

En aquest treball de caràcter elemental —i intenció clarament didàctica—, estudiarem amb detall les rotacions i els espinors en dimensions menors que set, i els grups que formen. Abans de començar, pot ser útil incloure uns comentaris adreçats als lectors que ja coneguin la teoria bàsica dels grups de Lie compactes. Aquests lectors ja saben que, per a valors molt petits del rang $n$ hi ha coincidències entre els diagrames de Dynkin de les famílies $A_n$, $B_n$, $C_n$, $D_n$. Aquestes coincidències, juntament amb el teorema que relaciona els grups de Lie compactes connexos simples amb els diagrames de Dynkin a través dels seus sistemes d'arrels, impliquen que hi ha isomorfismes entre els representants simplement connexos d'alguns grups clàssics de rang petit. Aquests isomorfismes s'anomenen *isogènies esporàdiques*. Amb aquestes isogènies, els grups d'espinors $\mathbf{Spin}(3)$, $\mathbf{Spin}(4)$, $\mathbf{Spin}(5)$, $\mathbf{Spin}(6)$ —i només aquests— són isomorfs a certs grups simplèctics o unitaris.

L'existència d'aquestes isogènies esporàdiques és una conseqüència d'un teorema de grandíssima envergadura com és el que ens dona la classificació dels grups de Lie compactes connexos simples, però aquestes isogènies també es poden construir explícitament per mètodes que podríem qualificar d'*elementals*.[1] Són unes construccions que duen sovint l'eufemístic qualificatiu de «ben conegudes» però, més enllà del cas de **Spin**$(3)$, no és fàcil trobar-ne una exposició elemental i completa.

El primer objectiu d'aquest treball va ser construir explícitament aquestes isogènies esporàdiques i, al mateix temps, repassar certs resultats clàssics sobre la geometria de les rotacions en baixa dimensió, però ràpidament ens vam adonar que, si bé aquestes isogènies eren la nostra *Ítaca* —«sense ella no hauríem partit»—, tots els paisatges que anàvem trobant fent camí eren potser més interessants que l'objectiu final. El text va anar adquirint un fort component didàctic, i tal com el presentem ara potser es pot llegir com una *introducció a la teoria dels grups de Lie compactes*, basada en l'estudi concret de les *rotacions* en baixa dimensió i la seva relació amb els espinors.[2]

## 2 Preliminars: parlem de rotacions

Euclides, probablement per evitar les famoses *apories del moviment* (Zenó, Aquil·les...), intenta desenvolupar tota la seva geometria sense utilitzar mai el *moviment*. Tanmateix, no pot deixar de fer-ho (dissimuladament) en algun punt concret, el més escandalós dels quals és ni més ni menys que la proposició quarta del llibre primer: el *criteri CAC* de congruència de triangles. De fet, aquest criteri és indemostrable a partir dels axiomes d'Euclides: cal incloure'l a la llista d'axiomes —com va fer Hilbert— o bé disposar d'un grup prou gran de moviments, és a dir, de les rotacions i les translacions. En qualsevol cas, d'una manera o d'una altra, el concepte de *rotació* és inherent a la geometria euclidiana i el podem definir com *qualsevol transformació del pla que deixi un punt fix, conservi la distància i conservi l'orientació.*

Una conseqüència significativa dels axiomes de la geometria euclidiana és que podem identificar els punts i les rectes d'Euclides amb els punts i les rectes de l'espai afí de dimensió 2 o 3 sobre un cos ordenat arquimedià pitagòric. Si, a més, volem disposar de tots els angles, de tots els polígons regulars, del nombre $\pi$ i, en general, si volem poder utilitzar conceptes com *continuïtat, connexió* i *completesa*, aleshores aquest cos pitagòric ha de ser el cos real i hem d'identificar la geometria d'Euclides plana a la geometria afí euclidiana ordinària de $\mathbb{R}^2$. En aquest context, no és difícil demostrar que una rotació no és altra cosa que una aplicació lineal $R\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que conserva el producte escalar ordinari i conserva l'orientació. Si $M_R$ és la matriu de $R$ en la base canònica, $R$ és una rotació si i només si $M_R\, M_R^t = I$ (és a dir, si les columnes de $M_R$ (i les files) són vectors ortonormals) i $\det(M_R) = 1$.

Amb això que hem dit, el concepte de *rotació* admet una generalització òbvia a l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ en qualsevol dimensió $n$. Les matrius reals $M$ que compleixen $MM^t = I$ s'anomenen *matrius ortogonals* i, necessàriament, tenen determi-

1 Sense àlgebres de Clifford, àlgebres de Lie, sistemes d'arrels, teoria de representacions, geometria diferencial, grups de Coxeter, grups de Weyl ni, evidentment, el teorema de classificació.

2 Quan he impartit cursos sobre grups de Lie he dedicat més temps a treballar «a mà» amb els grups clàssics que no pas a fer teoria general. Aquest treball segueix les mateixes idees.

nant $\pm 1$. Formen un grup que es designa $\mathbf{O}(n)$: el *grup ortogonal* en dimensió $n$. Les rotacions s'identificaran als elements de $\mathbf{O}(n)$ de determinant 1 i formen un subgrup normal de $\mathbf{O}(n)$ que es denota amb $\mathbf{SO}(n)$: el grup *especial* ortogonal. Si incloem $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{1+n}$ com l'hiperplà $x_1 = 0$, tindrem una cadena de subgrups

$$\{I\} = \mathbf{SO}(1) \subset \mathbf{SO}(2) \subset \mathbf{SO}(3) \subset \mathbf{SO}(4) \subset \mathbf{SO}(5) \subset \mathbf{SO}(6) \subset \cdots$$

L'objectiu d'aquest treball és estudiar d'una manera minuciosa els *sis* primers grups d'aquesta cadena i relacionar-los amb els *espinors*, un concepte que ja explicarem quan arribi el moment.

La geometria afí sobre els espais vectorials complexos $\mathbb{C}^n$ és força diferent de la geometria euclidiana, però també és extraordinàriament important. Quan passem de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ el producte escalar estàndard —que és l'eina bàsica de la geometria d'Euclides— s'ha de reemplaçar pel *producte hermític*:

$$\langle (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n) \rangle := u_1\overline{v}_1 + \cdots + u_n\overline{v}_n \in \mathbb{C}.$$

En aquest nou context, les matrius que conserven el producte hermític de $\mathbb{C}^n$ són les que compleixen $MM^* = I$ on $M^* := \overline{M}^t$. S'anomenen *matrius unitàries* i formen un grup: el *grup unitari* $\mathbf{U}(n)$. Igual que abans, les matrius unitàries de determinant 1 formen un subgrup normal $\mathbf{SU}(n)$ de $\mathbf{U}(n)$ i tenim una cadena de subgrups

$$\{I\} = \mathbf{SU}(1) \subset \mathbf{SU}(2) \subset \mathbf{SU}(3) \subset \mathbf{SU}(4) \subset \mathbf{SU}(5) \subset \mathbf{SU}(6) \subset \cdots$$

### Rotacions del pla

La teoria de les rotacions del pla és tan coneguda que potser no ens adonem de totes les matemàtiques que hi ha al seu darrere, de la quantitat de matemàtica que necessitem per fonamentar-la rigorosament. Caldria parlar, com a mínim, de la teoria geomètrica dels angles, de la quadratura de la circumferència —i, per tant, del nombre $\pi$—, de les funcions trigonomètriques, del cos dels nombres complexos, de la funció exponencial complexa i de la fórmula d'Euler.[3] Aquí no toca repetir tota aquesta teoria, però sí que en farem un resum ràpid:

- Podem identificar els punts de la circumferència unitat amb els *angles*, que són els elements de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Els angles formen un grup abelià amb la suma.
- Si $A \in \mathbf{SO}(2)$, existeix un angle $\theta$ únic tal que $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. El producte de rotacions planes es correspon amb la *suma* d'angles.
- Els vectors del pla $\mathbb{R}^2$ es poden identificar amb els nombres complexos $\mathbb{C}$, de manera que la circumferència unitat $S^1$ de $\mathbb{R}^2$ coincideix amb el conjunt dels nombres complexos de mòdul 1: $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : z\overline{z} = 1\}$.

3 Podeu llegir, per exemple, el darrer capítol del llibre *Matemàtiques: comenceu per aquí* (2024, accés lliure amb llicència Creative Commons), del mateix autor que aquest treball.

- Els nombres complexos de mòdul 1 formen un grup amb la multiplicació: és el grup $\mathbf{U}(1)$. Per tant, la circumferència $S^1$ adquireix una estructura de grup (abelià) de dues maneres (que són la mateixa): si identifiquem la circumferència als angles, podem considerar la suma d'angles; si identifiquem la circumferència als complexos de mòdul 1, tenim el producte de complexos:

$$S^1 \cong \mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{U}(1) \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \{z \in \mathbb{C} : ||z|| = 1\}.$$

- Si $z$ és un nombre complex de mòdul 1, la transformació $w \mapsto zw$ és una rotació del pla $\mathbb{R}^2$ (identificat a $\mathbb{C}$). L'angle d'aquesta rotació és l'únic angle $\theta$ tal que $z = (\cos\theta, \sin\theta) = e^{i\theta}$. Els nombres complexos ens permeten donar una forma molt més compacta a l'expressió d'una rotació: una rotació del pla és la multiplicació per un nombre complex unitari.

### Rotacions en qualsevol dimensió

A la vista de tot això, podríem pensar que una rotació a $\mathbb{R}^n$ deu ser una cosa ben complicada, i encara més a mesura que $n$ es fa gran. No és així: tota rotació a $\mathbb{R}^n$ és simplement una composició de rotacions planes en plans ortogonals.[4] Més acuradament, es compleix aquest resultat notable:

*Si $R$ és una rotació de $\mathbb{R}^n$, existeix una descomposició ortogonal*

$$\mathbb{R}^n = P_0 \perp P_1 \perp \cdots \perp P_k, \quad \dim(P_0) \leq 1, \dim P_i = 2,\ i = 1, \ldots, k,$$

*tal que $R$ és la identitat sobre $P_0$ i $R$ és una rotació plana sobre cada $P_i$, $i = 1, \ldots, k$. (Observem que $P_0 = 0$ si $n$ és parell i $P_0 \cong \mathbb{R}$ si $n$ és senar.)*

Podem demostrar això d'aquesta manera. Definim $S := R + R^t$, que és una matriu simètrica i, per tant, serà diagonalitzable. Sigui $w$ un vector propi de $S$ de valor propi $\lambda$ i considerem el subespai $W := \langle w, R(w)\rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $W$ té dimensió 1, aleshores $R(w) \in W$ i $W$ és estable per $R$. Si $W$ té dimensió 2, aleshores $\lambda w = S(w) = R(w) + R^t(w)$ i, per tant, $R^2(w) = \lambda R(w) - w$, amb la qual cosa $W$ és estable per $R$. Hem demostrat que $R$ té un subespai estable $W$ de dimensió 1 o 2.

Escrivim ara $\mathbb{R}^n = W \perp W^\perp$ i procedim per inducció: arribem a la conclusió que hi ha una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ en la qual la matriu de $R$ s'expressa en forma diagonal $R = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, B_1, \ldots, B_r)$, on cada $B_i$ és una matriu $2 \times 2$. Com que $R$ és ortogonal, $\lambda_i = \pm 1$ i cada $B_i$ és també ortogonal. Fent un canvi de base ortonormal, podem aconseguir que $\det(B_i) = 1$. Agrupant per parelles els $-1$ també obtenim blocs que són rotacions de 180 graus. Quedarà, com a màxim, un $\lambda_i$ desparellat i, com que $R$ té determinant 1, serà $\lambda_i = 1$. □

4 Estem dient que cada rotació de $\mathbb{R}^n$ és, geomètricament, un objecte ben senzill perquè es redueix a un producte de rotacions planes; però no estem dient, ni molt menys, que els *grups* $\mathbf{SO}(n)$ es redueixin a un producte de grups $\mathbf{SO}(2)$!

### Una mica de topologia

L'estudi de la topologia dels grups $\mathbf{U}(n)$ i $\mathbf{O}(n)$ té un interès immens, però aquí només podem esbossar breument algunes propietats elementals. En primer lloc, tots aquests grups són, per definició, grups de matrius (reals o complexes) i, com que podem identificar l'espai vectorial real $\mathcal{M}_{n\times m}$ a $\mathbb{R}^{nm}$ i l'espai vectorial complex $\mathcal{M}_{n\times m}$ a $\mathbb{R}^{2nm}$, tots els grups de matrius hereten una topologia Hausdorff. A més, com que les operacions de multiplicació i pas a l'invers es poden escriure a partir de funcions algebraiques i, per tant, contínues, podem parlar de *grups topològics*.[5]

També és immediat observar que els grups $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$ i $\mathbf{SU}(n)$ són *compactes*:[6] són clarament tancats perquè estan definits per l'anul·lació de certes funcions algebraiques, i són acotats perquè les columnes de les matrius d'aquests grups són vectors unitaris.

Observem que, com a espai topològic, $\mathbf{U}(n)$ es pot descompondre com a $S^1 \times \mathbf{SU}(n)$, utilitzant la funció que transforma cada parella $(z, A)$ en la matriu que s'obté multiplicant per $z$ la primera fila de la matriu $A$. És una funció contínua i bijectiva que, com que els espais involucrats són compactes Hausdorff, serà un homeomorfisme. Cal remarcar que aquesta descomposició *no* és compatible amb l'estructura de grup de $\mathbf{U}(n)$: els *grups* $\mathbf{U}(n)$ i $S^1 \times \mathbf{SU}(n)$ són diferents, però els *espais topològics* $\mathbf{U}(n)$ i $S^1 \times \mathbf{SU}(n)$ són homeomorfs.

Una eina útil per a l'estudi d'aquests grups és la identificació dels espais de classes laterals $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1)$ i $\mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1)$ amb esferes. Concretament, si assignem a cada matriu ortogonal/unitària el vector unitari format per la seva primera columna, tenim aplicacions contínues exhaustives $\mathbf{SO}(n) \to S^{n-1}$ i $\mathbf{SU}(n) \to S^{2n-1}$ que factoritzen per homeomorfismes

$$\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \cong S^{n-1}, \quad \mathbf{SU}(n)/\mathbf{SU}(n-1) \cong S^{2n-1}.$$

Aquests homeomorfismes es poden explotar per demostrar inductivament propietats topològiques dels grups $\mathbf{SO}(n)$ i $\mathbf{SU}(n)$. Per exemple:

> *Per a $n \geq 1$ es compleix que $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$, $\mathbf{SU}(n)$ són connexos, $\mathbf{O}(n)$ té dos components connexos i $\mathbf{SU}(n)$ és simplement connex.*

La primera part d'aquest teorema es demostra per inducció sobre $n$, començant pel fet que $\mathbf{SO}(1) = \mathbf{SU}(1) = \{I\}$ i $\mathbf{U}(1) = S^1$. Fem-ho amb detall per al cas del grup de rotacions $\mathbf{SO}(n)$, $n > 1$. Com hem dit abans, tenim una aplicació contínua exhaustiva

$$f\colon \mathbf{SO}(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

que, com que els espais involucrats són compactes Hausdorff, serà també tancada. Si poguéssim escriure $\mathbf{SO}(n)$ com una unió disjunta $A \cup B$ de tancats

5 De fet, els grups $\mathbf{O}(n)$, $\mathbf{SO}(n)$, $\mathbf{U}(n)$ i $\mathbf{SU}(n)$ són molt més que grups topològics: són varietats diferenciables i les operacions de multiplicació i pas a l'invers són diferenciables. Direm que són *grups de Lie*. Però en aquest text elemental no volem aprofundir en aquesta direcció.

6 Com que tenim una estimació especial pels grups compactes, els distingim usant lletra **negreta**.

no buits, tindríem $S^{n-1} = f(A) \cup f(B)$ i, com que $S^{n-1}$ és un espai connex, aquesta unió no pot ser disjunta. Si $x \in f(A) \cap f(B)$, considerem $X := f^{-1}(x)$ i escrivim $X = (X \cap A) \cup (X \cap B)$, que és una unió disjunta de tancats de $X$. Observem ara que $X$ està format per totes les matrius ortogonals que tenen com a primera columna el vector $x$ i aquest subespai és clarament homeomorf a $\mathbf{SO}(n-1)$, que, per hipòtesi d'inducció, és connex. Arribem, doncs, a una contradicció i $\mathbf{SO}(n)$ també ha de ser connex. Pel que fa a $\mathbf{O}(n)$, el resultat és clar perquè $\mathbf{O}(n)$ és unió disjunta de dos tancats: $\mathbf{SO}(n)$ i el subespai de les matrius ortogonals de det $= -1$. Com que aquest subespai és homeomorf a $\mathbf{SO}(n)$, tenim ja els dos components connexos de $\mathbf{O}(n)$. Finalment, una inducció utilitzant les identificacions $\mathbf{SU}(n)/\,\mathbf{SU}(n-1) \cong S^{2n-1}$ i uns teoremes (senzills) de topologia que ara no podem entrar a discutir ens demostren que tots els grups $\mathbf{SU}(n)$ són simplement connexos. □

## 3 Rotacions en dimensió 3 i espinors

La descripció general de les rotacions en qualsevol dimensió que hem vist abans ens diu que tota rotació no trivial en tres dimensions tindrà un eix de rotació ben definit i es comportarà com una rotació en el pla perpendicular a aquest eix. És a dir, per determinar una rotació $R$ a $\mathbb{R}^3$ prendrem un vector unitari $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ —que ens indicarà l'eix— i un angle $\theta$ —que serà l'angle de rotació en el pla ortogonal a l'eix. Aleshores, la rotació $R$, que podem designar com a $R_{\theta,\vec{u}}$, deixarà fixos tots els punts de la recta $\langle \vec{u} \rangle$ i rotarà un angle $\theta$ els punts del pla $H := \langle \vec{u} \rangle^{\perp}$, entenent que una base positiva de $H$ serà qualsevol base ortonormal $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ tal que $\langle \vec{e}_1 \times \vec{e}_2, \vec{u} \rangle > 0$. Amb una mica de trigonometria elemental podem trobar fàcilment una expressió de $R_{\theta,\vec{u}}(\vec{v})$ que es coneix com a *fórmula d'Olinde Rodrigues*:

$$R_{\theta,\vec{u}}(\vec{v}) = \cos\theta\, \vec{v} + \sin\theta (\vec{u} \times \vec{v}) + (1 - \cos\theta)\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vec{u}.$$

Tenim, doncs, una bona descripció de cada rotació —tinguem en compte que $\vec{u}$ i $\theta$ no estan unívocament determinats—, però encara estem lluny d'entendre el conjunt de *totes* les rotacions de l'espai, és a dir, la topologia de $\mathbf{SO}(3)$ i la seva estructura com a grup —en particular, el producte de dues rotacions $R_{\theta,\vec{u}}\, R_{\theta',\vec{u}'}$. Per donar resposta a aquestes qüestions hem de parlar d'uns objectes anomenats *espinors*.

### Espinors

Un espinor és una parella de nombres complexos $(\zeta_1, \zeta_2)$ tals que

$$\zeta_1 \overline{\zeta}_1 + \zeta_2 \overline{\zeta}_2 = 1.$$

Si escrivim aquesta equació en coordenades reals, obtenim $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, que defineix l'esfera unitat de $\mathbb{R}^4$, és a dir, l'esfera $S^3$. En conclusió, els espinors estan en correspondència bijectiva amb els punts de l'esfera $S^3$.

Els espinors es poden multiplicar d'una manera curiosa:

$$(\zeta_1, \zeta_2)(\eta_1, \eta_2) = (\zeta_1 \eta_1 - \overline{\zeta}_2 \eta_2, \zeta_2 \eta_1 + \overline{\zeta}_1 \eta_2).$$

Aquesta estranya multiplicació i les seves propietats s'entenen molt millor si escrivim els espinors en aquesta forma matricial:

$$(\zeta_1, \zeta_2) \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\overline{\zeta}_2 \\ \zeta_2 & \overline{\zeta}_1 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, la multiplicació dels espinors és la multiplicació de matrius i podem comprovar que els espinors formen un grup: el designarem $\mathbf{Spin}(3)$.

Què podem dir de les matrius complexes $2 \times 2$ anteriors? No és difícil veure que són matrius unitàries de determinant 1, és a dir, pertanyen al grup $\mathbf{SU}(2)$. A més, tota matriu de $\mathbf{SU}(2)$ és de la forma $\begin{pmatrix} \zeta_1 & -\overline{\zeta}_2 \\ \zeta_2 & \overline{\zeta}_1 \end{pmatrix}$ per algun espinor $(\zeta_1, \zeta_2)$. Això és conseqüència de la identificació $\mathbf{SU}(2) = \mathbf{SU}(2)/\,\mathbf{SU}(1) \cong S^3$ que hem esmentat abans, però també admet una demostració elemental directa. En conclusió:

> *Un* espinor *és la primera columna d'una matriu especial unitària* $2 \times 2$. *Els espinors formen un grup designat* $\mathbf{Spin}(3)$ *que és isomorf al grup* $\mathbf{SU}(2)$. *Aquests dos grups isomorfs s'identifiquen, topològicament, a l'esfera* $S^3$.[7]

### Espinors i rotacions de l'espai

Hem introduït els espinors i el grup $\mathbf{Spin}(3)$ amb la intenció d'entendre millor les rotacions de $\mathbb{R}^3$, és a dir, el grup $\mathbf{SO}(3)$. Per comprendre la relació entre els espinors i les rotacions de l'espai, considerem les *matrius antihermítiques* de traça zero:

$$\mathcal{H}_0' := \{H \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : H + H^* = 0,\ \mathrm{tr}(H) = 0\}.$$

$\mathcal{H}_0'$ és un $\mathbb{R}$-espai vectorial i podem prendre aquesta base ortonormal:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

de manera que cada vector de $\mathbb{R}^3$ s'identifica a la matriu hermítica

$$\vec{u} = (x, y, z) \longmapsto H_{\vec{u}} := \begin{pmatrix} xi & -y - zi \\ y - zi & -xi \end{pmatrix}.$$

Aquestes propietats de les matrius $H_{\vec{u}}$ són senzilles de demostrar:

- $\mathbf{SU}(2)$ normalitza $\mathcal{H}_0'$, en el sentit que, si $U \in \mathbf{SU}(2)$, aleshores $U\,\mathcal{H}_0'\,U^* = \mathcal{H}_0'$.
- $H_{\vec{u}}\,H_{\vec{v}} = -\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle I + H_{\vec{u}\times\vec{v}}$ i $H_{\vec{v}}\,H_{\vec{u}} - H_{\vec{u}}\,H_{\vec{v}} = -2H_{\vec{u}\times\vec{v}}$.
- $H_{\vec{u}}\,H_{\vec{v}}\,H_{\vec{u}} = -\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle H_{\vec{u}} + H_{(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{u}}$. Si recordem la identitat $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle \vec{v} - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \vec{w}$, obtenim que, si $\vec{u}$ és unitari,

$$H_{\vec{u}}\,H_{\vec{v}}\,H_{\vec{u}} = -2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle H_{\vec{u}} + H_{\vec{v}}.$$

7 Pot semblar estrany que donem un nom com $\mathbf{Spin}(3)$ a un grup que no és altra cosa que el grup $\mathbf{SU}(2)$. Quan passem a dimensions superiors entendrem millor el motiu de tot això.

- Si $U \in \mathbf{SU}(2)$, existeix un vector unitari $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ i un angle $\alpha \in [0, \pi]$ tals que $U = \cos\alpha\, I + \sin\alpha\, H_{\vec{u}}$. Per comprovar això, observem que la primera columna de $U$ és un espinor $(a + bi, c + di)$ amb $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Aleshores, la identitat anterior és certa amb $\cos\alpha = a$ i $\vec{u} = (\sin\alpha)^{-1}(b, c, -d)$.

La primera propietat de la llista anterior ens diu que cada matriu de $\mathbf{SU}(2)$ i, per tant, cada espinor de $\mathbf{Spin}(3)$ dona lloc, per conjugació, a una aplicació lineal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Calculem aquesta aplicació. Sigui $U \in \mathbf{SU}(2)$, i expressem $U$ en la forma $U = \cos\alpha\, I + \sin\alpha\, H_{\vec{u}}$, on $\vec{u}$ és unitari. Volem calcular

$$(\cos\alpha\, I + \sin\alpha\, H_{\vec{u}})H_{\vec{v}}(\cos\alpha\, I + \sin\alpha\, \overline{H}_{\vec{u}})^t.$$

Tenim, aplicant les propietats que acabem d'explicar:

$$\begin{aligned} U\, H_{\vec{v}}\, U^{-1} &= (\cos\alpha\, I + \sin\alpha\, H_{\vec{u}})H_{\vec{v}}(\cos\alpha\, I + \sin\alpha\, \overline{H}_{\vec{u}})^t = \\ &= \cos^2\alpha\, H_{\vec{v}} + \sin 2\alpha\, H_{\vec{u}\times\vec{v}} - \sin^2\alpha\, H_{\vec{u}}\, H_{\vec{v}}\, H_{\vec{u}} = \\ &= \cos 2\alpha\, H_{\vec{v}} + \sin 2\alpha\, H_{\vec{u}\times\vec{v}} + 2\sin^2\alpha\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle H_{\vec{u}} = H_{\vec{w}}. \end{aligned}$$

Comparant amb la fórmula d'Olinde Rodrigues, obtenim $\vec{w} = R_{2\alpha,\vec{u}}(\vec{v})$. En conclusió:

*Hi ha un epimorfisme $\pi_3\colon \mathbf{Spin}(3) \to \mathbf{SO}(3)$ segons el qual l'espinor*

$$[\cos\alpha + ix\sin\alpha, y\sin\alpha - iz\sin\alpha]$$

*dona la rotació d'angle $2\alpha$ amb vector director $\vec{u} = (x, y, z)$.*

Clarament, el nucli de $\pi_3$ té ordre 2 i està format per les matrius $\pm I \in \mathbf{SU}(2)$. Aquest homomorfisme ens dona una excel·lent descripció topològica de $\mathbf{SO}(3)$. Recordem que $\mathbf{Spin}(3) \cong \mathbf{SU}(2) \cong S^3$. Per tant, hi ha un homeomorfisme $\mathbf{SO}(3) \cong S^3/\{\pm 1\} = \mathbb{R}P(3)$ entre el grup de les rotacions de l'espai de dimensió 3 i l'espai projectiu real de dimensió 3. Deduïm que $\mathbf{SO}(3)$ no és *simplement connex*: el seu grup fonamental té dos elements i el seu recobriment universal és l'esfera $S^3$. A més, ara que coneixem el grup fonamental de $\mathbf{SO}(3)$, podem demostrar per inducció —utilitzant la identificació $\mathbf{SO}(n)/\mathbf{SO}(n-1) \cong S^{n-1}$— que el grup fonamental de *tots* els grups $\mathbf{SO}(n)$ per $n > 2$ és el grup de dos elements.

No és difícil demostrar que el recobriment universal d'un grup topològic admet una estructura canònica de grup topològic compatible amb l'aplicació de recobriment. Això ens permet *definir* el grup dels espinors $\mathbf{Spin}(n)$ com el recobriment universal del grup de les rotacions $\mathbf{SO}(n)$. Ara bé, aquesta definició ens diu ben poc sobre l'estructura d'aquests nous grups: convé seguir llegint aquest treball.

Després de tot això que hem vist, podem pensar els espinors —d'una manera molt informal— com si fossin «rotacions amb signe». Per cada rotació hi ha dos espinors que la defineixen, i aquests dos espinors difereixen en un signe.

### Digressió # 1: el cinturó de Conway

Com que el grup fonamental de $\mathbf{SO}(3)$ té dos elements, ha d'existir algun camí $\omega$ de $\mathbf{SO}(3)$ que comenci i acabi a $I$ tal que $2\omega \sim *$ però $\omega \not\sim *$.[8] L'existència d'aquest camí es pot visualitzar molt bé amb el que es coneix com a *cinturó de Conway* (vegeu la figura 1):

> *Imaginem una cinta llarga i estreta —com un cinturó— de manera que un dels seus extrems està fixat a l'origen de* $\mathbb{R}^3$ *i l'altre extrem pot estar situat a qualsevol punt de* $\mathbb{R}^3$*. Suposem, per exemple, que la cinta és com el rectangle* $[0,2]\times[0,100]$*. En cada instant de temps* $t \in [0,100]$*, considerem una base ortonormal positiva de* $\mathbb{R}^3$ *situada al punt* $(1,t)$ *de la cinta tal que el primer vector apunta segons l'eix de la cinta, en la direcció de l'extrem lliure, el segon vector apunta cap al punt* $(0,t)$ *i el tercer vector és normal a la cinta. Cadascuna d'aquestes bases ortonormals defineix unívocament una rotació de* $\mathbb{R}^3$ *i la família uniparamètrica de bases al llarg de la cinta defineix un camí de* $\mathbf{SO}(3)$ *que comença a la identitat.*
>
> *Comencem amb la cinta plana sobre el pla horitzontal i girem l'extrem lliure* 360 *graus en sentit positiu respecte de l'eix central de la cinta. La cinta quedarà entortolligada. Això definirà un camí* $\omega$ *de* $I$ *a* $I$ *a* $\mathbf{SO}(3)$*. Si ara, sense canviar l'orientació de l'extrem lliure, intentem desentortolligar la cinta, no podrem fer-ho: el camí que hem construït no és trivial, no es pot deformar cap al camí constant. A continuació, tornem a girar l'extrem lliure* 360 *graus en el mateix sentit d'abans: haurem construït el camí* $2\omega$*. Ara la cinta estarà molt més entortolligada, però només aparentment: fàcilment podrem aconseguir, sense canviar l'orientació de l'extrem lliure de la cinta, retornar la cinta a la seva posició original. El camí* $2\omega$ *és trivial.*

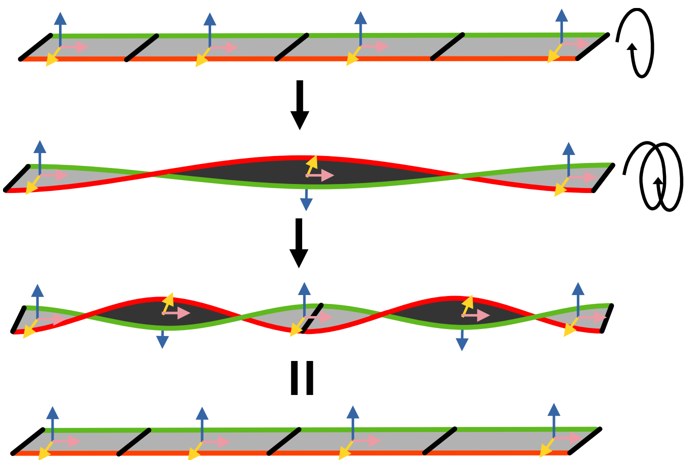

FIGURA 1: El cinturó de Conway.

8 Amb el símbol $\sim$ indiquem una *homotopia*, és a dir, $\alpha_0 \sim \alpha_1$ vol dir que hi ha una família de camins $\alpha_t$, $t \in [0,1]$, que depèn contínuament del paràmetre $t$.

**Digressió # 2: els espinors i l'electró**

L'electró té *moment angular* com un petit planeta en rotació al voltant d'un eix. En mòdul, el moment angular de tots els electrons té sempre el mateix valor: $\hbar/2$. Però el moment angular és una magnitud vectorial —com les rotacions de l'espai— i, per a cada electró concret, en un instant concret, vindrà donat per un vector $\vec{m}$ en tres dimensions: $\vec{m} = m_x\vec{x} + m_y\vec{y} + m_z\vec{z}$. Pel principi d'incertesa, no podem mesurar simultàniament els tres valors $m_x$, $m_y$, $m_z$. Suposem, doncs, que mesurem $m_x$. Pel fenomen de la quantització, quan mesurem $m_x$ obtindrem un d'aquests dos valors $\pm\hbar/2$. Segons el valor obtingut, diem que l'electró té *spin* $\pm 1/2$.

Segons el formalisme estàndard de la física quàntica, l'estat inicial del paràmetre $m_x$ es descriu per una funció d'ona $\Psi$ que és combinació lineal dels dos possibles resultats de la mesura: $\Psi = \zeta_1\Psi_+ + \zeta_2\Psi_-$, on $\zeta_1$, $\zeta_2$ són nombres complexos i $||\zeta_1||^2$, $||\zeta_2||^2$ són les probabilitats de cadascun dels dos resultats. En particular, $||\zeta_1||^2 + ||\zeta_2||^2 = 1$ i, per tant, $(\zeta_1, \zeta_2)$ és un *espinor*. És en aquest sentit que diem que el moment angular de l'electró no és un vector (una rotació), sinó que és un espinor (una «rotació amb signe»).

## 4 Rotacions en dimensió 3 i quaternions

Recordem que l'existència dels nombres complexos ens permet donar una versió més compacta de les rotacions del pla, *sense sinus ni cosinus*: els nombres complexos ens van permetre passar de la descripció real de les rotacions com a

$$R_\theta(a,b) = (\cos\theta\, a - \sin\theta\, b, \sin\theta\, a + \cos\theta\, b)$$

a la descripció de les rotacions com a *multiplicar per un nombre complex de mòdul* 1. És possible que hi hagi una estructura *més enllà dels complexos* que tingui un rol similar a les rotacions de l'espai? La resposta és sí i l'estructura és l'anell de divisió[9] dels *quaternions*, que discutirem ara.

Probablement, la millor manera de definir el cos dels nombres complexos és

$$\mathbb{C} := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),$$

de manera que $i \in \mathbb{C}$ s'identifica a la matriu $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cada nombre real $a \in \mathbb{R}$ s'identifica a la matriu $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ i, aleshores, $a + ib \in \mathbb{C}$ és la matriu $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. Amb aquesta definició de $\mathbb{C}$, les propietats de cos són immediates. En particular, el fet que tot element $z \neq 0$ tingui invers es dedueix del fet que el determinant de la matriu corresponent a $z$ és $a^2 + b^2 = ||z||^2$. Aleshores, $||zz'|| = ||z||\,||z'||$.

9 Un anell de divisió és un anell amb unitat $1 \neq 0$ en el qual tot element no nul té invers bilateral. Dit informalment, un anell de divisió és un *cos no commutatiu*.

Si ara repetim aquesta estratagema amb $a, b \in \mathbb{C}$, observem que l'existència d'inversos es perd. Si volem obtenir un cos que amplïi el cos dels complexos, cal fer una petita modificació utilitzant la conjugació de $\mathbb{C}$. Amb la definició següent sí que obtenim una $\mathbb{R}$-àlgebra de divisió de dimensió 4:

$$\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z & -\overline{w} \\ w & \overline{z} \end{pmatrix} : z, w \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Els elements de $\mathbb{H}$ s'anomenen *quaternions* i compleixen aquestes propietats senzilles de demostrar:

- Si identifiquem $z \in \mathbb{C}$ amb $\left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{smallmatrix}\right)$, tenim que $\mathbb{C}$ és un subcòs de $\mathbb{H}$. Si definim $j := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}$, veiem que $j^2 = -1$ i que $k := ij = -ji$, amb la qual cosa en el pas de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{H}$ hem perdut la commutativitat de la multiplicació. Cada $q \in \mathbb{H}$ s'escriu com a $q = z + jw$ amb $z, w \in \mathbb{C}$ i també com a $q = a + ib + jc + kd$ amb $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. $\mathbb{H}$ és, doncs, una $\mathbb{R}$-àlgebra associativa amb unitat, de dimensió 4, no commutativa.
- $\mathbb{H}$ també està dotat d'una conjugació $q \mapsto \overline{q}$ que és $\mathbb{R}$-lineal, generalitza la conjugació de $\mathbb{C}$ i compleix $\overline{pq} = \overline{q}\,\overline{p}$ —és a dir, és un *antiautomorfisme* de $\mathbb{H}$. El conjugat de $a + ib + jc + kd$ és $a - ib - jc - kd$. Interpretant —com hem fet— els quaternions com a matrius complexes $2 \times 2$, si $q$ és la matriu $H$, aleshores $\overline{q}$ és la matriu $H^*$.
- L'existència d'inversos per a cada $q \neq 0$ es garanteix pel fet que la matriu corresponent a $q$ té determinant $||q||^2$, i aquesta interpretació ens dona la multiplicativitat de la norma a $\mathbb{H}$: $||pq|| = ||p||\,||q||$. Tenim, doncs, que $\mathbb{H}$ és un anell de divisió i una $\mathbb{R}$-àlgebra normada.
- Una altra manera d'escriure un quaternió $q$ és en la forma $q = \lambda + \vec{u}$, on $\lambda = (q + \overline{q})/2 \in \mathbb{R}$ s'anomena *part real* o *part escalar* de $q$ i $\vec{u} = (q - \overline{q})/2 \in \langle i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$ es denomina *part vectorial* de $q$. Els quaternions amb part escalar zero direm que són *quaternions purs*. Si $||q|| = 1$, podem escriure
$$q = \cos\alpha + \sin\alpha\,\vec{u},$$
on $\alpha \in [0, \pi]$ i $\vec{u} \in \mathbb{H}$ és pur de norma 1, unívocament determinat si $q \notin \mathbb{R}$.
- Si $u$, $v$ són quaternions purs, es compleix
$$uv = -\langle u, v \rangle + u \times v,$$
en què $u \times v$ s'entén mirant $u$, $v$ com a vectors en la base ortonormal $i$, $j$, $k$.
- **Fórmula d'anticommutació.** Una identitat trivial molt útil és
$$p\,\overline{q} + q\,\overline{p} = 2\langle p, q \rangle,$$
que té com a conseqüència que dos quaternions $p$, $q$ són ortogonals (com a vectors de $\mathbb{R}^4$) si compleixen $p\,\overline{q} = -q\,\overline{p}$. D'altra banda, si $q \in \mathbb{H}^*$ i

considerem la conjugació $c_q \colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ com un isomorfisme $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}^4$, la fórmula anterior ens permet comprovar que $c_q$ conserva el producte escalar de $\mathbb{R}^4$ i és, per tant, una aplicació *ortogonal*.

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ és la part escalar de $q$, es compleix aquesta identitat:

$$q^2 - 2\lambda q + ||q||^2 = 0.$$

  En particular, les solucions de $x^2 = -1$ són tots els quaternions unitaris purs, és a dir, els punts de l'esfera unitat de $\langle i, j, k\rangle_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^3$.[10]
- Trivialment, el centre de l'anell de divisió $\mathbb{H}$ és $\mathbb{R}$. Això ens permetrà determinar fàcilment el grup d'automorfismes de $\mathbb{H}$ (pàgina 21).

### Àlgebra lineal sobre els quaternions

La teoria bàsica dels espais vectorials s'estén sense problemes al cas que els escalars no formin un cos, sinó un anell de divisió. Per tant, podem fer àlgebra lineal amb els quaternions com a escalars i, per abús de llenguatge, parlarem de $\mathbb{H}$-*espais vectorials*. Cal només tenir presents alguns petits detalls:

- La no commutativitat de $\mathbb{H}$ dona importància a la distinció entre $\mathbb{H}$-espais vectorials per la dreta i $\mathbb{H}$-espais vectorials per l'esquerra, segons que el producte d'un escalar $q \in \mathbb{H}$ i un vector $\vec{e}$ s'escrigui $\vec{e}q$ o $q\vec{e}$. En el nostre cas, considerarem que tots els $\mathbb{H}$-espais vectorials són per l'esquerra.
- Si $\varphi \colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ és una aplicació $\mathbb{H}$-lineal bijectiva, l'aplicació $\varphi^{-1}$ també és $\mathbb{H}$-lineal i podem parlar, per tant, del grup lineal $\mathrm{GL}(n, \mathbb{H})$.
- Si $A$ és una matriu $n \times n$ amb coeficients a $\mathbb{H}$, l'aplicació $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ amb $\vec{v} \in \mathbb{H}^n$ *no* és $\mathbb{H}$-lineal, però $\vec{v} \mapsto \vec{v}A$ sí que ho és. En conseqüència, en un $\mathbb{H}$-espai vectorial per l'esquerra, les matrius actuen per la dreta sobre vectors fila. Si ho fem així, tenim isomorfisme entre les matrius $n \times n$ i les aplicacions $\mathbb{H}$-lineals de $\mathbb{H}^n$ a $\mathbb{H}^n$ (que formen un $\mathbb{H}$-espai vectorial *per la dreta*) i els isomorfismes lineals $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ s'identifiquen a les matrius invertibles $n \times n$.
- Com que la multiplicació de $\mathbb{H}$ no és commutativa, la teoria clàssica del determinant deixa de ser vàlida. Per exemple, $M = \left(\begin{smallmatrix} i & j \\ j & i \end{smallmatrix}\right)$ és clarament invertible ($M^2 = -2I$) però, si intentem calcular-ne el determinant (multiplicant els factors en qualsevol ordre), sempre obtenim zero.[11]
- Quan treballem amb matrius quaternióniques, ni la transposició ni la conjugació no respecten el producte de matrius. En canvi, la conjugació seguida de la transposició sí que és un antiautomorfisme: $(AB)^* = B^*A^*$.

10 Veiem, doncs, que el conegut fet que el nombre d'arrels d'un polinomi no pot superar el grau del polinomi deixa de ser cert si la multiplicació no és commutativa.

11 Per a una discussió més a fons sobre l'extensió del determinant complex a un determinant quaterniònic, vegeu N. Cohen, S. de Leo, «The quaternionic determinant», *Electron. J. Linear Algebra*, 7 (2000), 100–111.

- Quan els coeficients de les matrius pertanyen a un domini no commutatiu pot passar que una matriu tingui inversa per un costat i no per l'altre, o que en tingui pels dos costats, però siguin diferents. Aquests fets patològics no passen en el cas de les matrius quaterniòniques, precisament perquè podem identificar les matrius amb les aplicacions lineals i una aplicació lineal $\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ exhaustiva o injectiva és automàticament bijectiva.
- Per decidir si una matriu quaterniònica és invertible i per calcular-ne la inversa, podem mirar l'àlgebra $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ com a subàlgebra de $\mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ de la manera següent: si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$, $A$ defineix una aplicació $\mathbb{H}$-lineal $A\colon \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$, que ens podem mirar com a aplicació $\mathbb{C}$-lineal $A_{\mathbb{C}}\colon \mathbb{C}^{2n} \to \mathbb{C}^{2n}$. Aleshores, $A$ és invertible si i només si $\det A_{\mathbb{C}} \neq 0$. Evidentment, si $A^{-1}$ existeix, també existeix $A_{\mathbb{C}}^{-1}$ i, per tant, $\det(A_{\mathbb{C}}) \neq 0$. Recíprocament, si $\det A_{\mathbb{C}} \neq 0$, aleshores $A_{\mathbb{C}}$ és bijectiva i $A$ també. Per tant, $A$ té inversa.

De cara al que farem més endavant, ens convé explicitar clarament la inclusió de les matrius quaterniòniques en les matrius complexes de mida doble. Denotem amb $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ la base canònica de $\mathbb{H}^n$ i considerem aquesta $\mathbb{C}$-base de $\mathbb{H}^n$

$$\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n, j\vec{e}_1, \ldots, j\vec{e}_n.$$

Recordem que mirem $\mathbb{H}^n$ com a $\mathbb{H}$-mòdul per l'esquerra i, per tant, les matrius actuen per la dreta. Per coherència, també les matrius complexes actuaran per la dreta. Sigui $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ i escrivim $A = A_1 + A_2 j$ amb $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Aleshores, un càlcul senzill mostra que l'aplicació $\mathbb{H}$-lineal donada per $A$ és la mateixa que l'aplicació $\mathbb{C}$-lineal donada per la matriu

$$A_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix}.$$

És fàcil comprovar que aquesta aplicació $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H}) \to \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ és un homomorfisme d'anells i respecta l'operació $A \mapsto A^*$.

El producte hermític de $\mathbb{C}^n$ es pot generalitzar als vectors de $\mathbb{H}^n$, però ara cal fer atenció a l'ordre dels factors i al fet que les matrius actuen per la dreta:[12]

- $\langle \vec{u} + \vec{u}', \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}', \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{v}' \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}' \rangle$, $\langle p\vec{u}, q\vec{v} \rangle = p\,\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \overline{q}$;
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$;
- $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = ||\vec{u}||^2$ on $||\vec{u}||$ és el mòdul de $\vec{u}$ com a vector de $\mathbb{R}^{4n}$;
- (no degenerat) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ per a tot $\vec{v}$ si i només si $\vec{u} = 0$;
- $\langle \vec{u}A, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\, A^* \rangle$.

12 En el cas $n = 1$, la notació $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ és ambigua perquè pot fer referència al producte escalar dels quaternions $\vec{u}$, $\vec{v}$ com a vectors de $\mathbb{R}^4$ o al producte hermític de $\vec{u}$, $\vec{v}$ com a vectors de $\mathbb{H}^1$.

## Els grups simplèctics

Lamentablement, hi ha dues famílies de grups que reben el mateix nom de *grups simplèctics*, com a conseqüència del fet que hi ha dos conceptes diferents de *matriu simplèctica*. Haurem de deduir del context de quina de les dues famílies estem parlant. Per distingir-los, utilitzarem notacions diferents i, a més, com que els grups d'una de les famílies són compactes i els de l'altra no ho són, en cas de dubte direm que parlem del grup simplèctic compacte o del grup simplèctic no compacte.

**Els grups simplèctics no compactes.** El pas de la geometria euclidiana a la *geometria simplèctica* —important a la mecànica hamiltoniana, l'òptica geomètrica i la mecànica quàntica, entre altres camps— comença substituint el producte escalar (simètric) per un producte antisimètric. Més concretament, suposem que $V$ és un espai vectorial de dimensió finita sobre un cos $k$ de característica zero. Una estructura simplèctica sobre $V$ ve donada per una 2-forma bilineal $\omega$ que compleixi

1. $\omega(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ per a tot $\vec{v} \in V$.
2. Si $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ per a tot $\vec{v} \in V$, aleshores $\vec{u} = 0$.

La matriu de $\omega$ és antisimètrica i invertible i això implica immediatament que la dimensió de $V$ ha de ser parella $2n$. A més, podem trobar una base de $V$ en la qual la matriu de $\omega$ tingui la forma $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, on $I$ és la matriu identitat $n \times n$.

De la mateixa manera que a la geometria euclidiana ens interessen els automorfismes que conserven la forma quadràtica estàndard de $\mathbb{R}^n$ —les transformacions ortogonals—, en la geometria simplèctica ens interessen els automorfismes que conserven la forma simplèctica estàndard $\Omega$ —en direm, naturalment, *transformacions simplèctiques*.

És senzill de veure que una matriu $M$ és simplèctica si compleix $M^t \Omega M = \Omega$. Aquestes matrius formen un subgrup de $\mathrm{GL}_{2n}(k)$ que denotarem amb $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$. Aquests grups s'anomenen *grups simplèctics* i obtenim una cadena de subgrups

$$\mathrm{Sp}_2(k) \subset \mathrm{Sp}_4(k) \subset \mathrm{Sp}_6(k) \subset \cdots$$

completant cada matriu simplèctica amb una matriu identitat. Com que les matrius $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ són simplèctiques per a tot $\lambda \neq 0$, veiem que els grups $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ no són compactes.

En el cas particular $n = 1$ és immediat que $\mathrm{Sp}_2(k) = \mathrm{SL}_2(k)$. La igualtat deixa de ser certa en dimensions superiors, però sí que és cert en general que $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ és un subgrup de $\mathrm{SL}_{2n}(k)$. Aquest fet que el determinant de tota matriu simplèctica és igual a 1 no és evident a partir de la condició $M^t \Omega M = \Omega$, però es pot demostrar amb aquest raonament:

Comencem recordant que tota aplicació lineal $\phi\colon V \to V$ indueix aplicacions lineals $\phi_i\colon \bigwedge^i V \to \bigwedge^i V$ en els productes exteriors. En particular, si $V$ és de dimensió $m$, l'espai vectorial $\bigwedge^m V$ és de dimensió 1 i l'aplicació $\phi_m\colon \bigwedge^m V \to \bigwedge^m V$ és la multiplicació pel determinant de $f$. Sigui ara $V$ un espai vectorial simplèctic amb 2-forma $\omega \in V^* \wedge V^*$. Prenem una base $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ de $V$ en la qual la matriu de $\omega$ sigui $\Omega$, és a dir,

$$\omega = \vec{u}_1^* \wedge \vec{v}_1^* + \cdots + \vec{u}_n^* \wedge \vec{v}_n^*,$$

on $\vec{u}_1^*, \dots, \vec{u}_n^*, \vec{v}_1^*, \dots, \vec{v}_n^*$ és la base dual de $V^*$. Sigui $M$ una matriu simplèctica i sigui $\phi\colon V \to V$ l'aplicació lineal induïda per $M$ en la base anterior. El fet que $M$ sigui simplèctica es traduirà en el fet que $\phi_2^*(\omega) = \omega$, on $\phi^*\colon V^* \to V^*$ és l'aplicació dual. Considerem $\omega^n := \omega \wedge \cdots \wedge \omega \in \bigwedge^{2n}(V^*)$. Aleshores, $\det(\phi)\, \omega^n = \phi_{2n}^*(\omega^n) = \omega^n$ i tot es redueix a demostrar que $\omega^n \neq 0$. Si observem que, per a tot $i$, $j$, els elements $\vec{u}_i^* \wedge \vec{v}_i^*, \vec{u}_j^* \wedge \vec{v}_j^* \in \bigwedge^2(V^*)$ commuten, veurem immediatament que

$$\omega^n = \vec{u}_1^* \wedge \vec{v}_1^* \wedge \cdots \wedge \vec{u}_n^* \wedge \vec{v}_n^* \neq 0. \qquad \square$$

**Els grups simplèctics compactes.** El producte hermític de $\mathbb{H}^n$ ens permet estendre els conceptes de matriu ortogonal (real) i matriu unitària (complexa) al cas quaterniònic. En direm *matrius simplèctiques* (però no les hem de confondre amb les matrius simplèctiques de l'apartat anterior): una matriu $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ és simplèctica (en aquest nou context) si conserva el producte hermític:

$$\langle \vec{u}A, \vec{v}A\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \text{ per tot } \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{H}^n.$$

Vegem algunes primeres propietats de les matrius simplèctiques.

- Clarament una matriu simplèctica representa una aplicació bijectiva i, per tant, és una matriu invertible, i la inversa també és simplèctica. Per tant, les matrius simplèctiques formen un grup que designarem $\mathbf{Sp}(n)$.
- El grup $\mathbf{Sp}(1)$ s'identifica al grup multiplicatiu dels quaternions de mòdul 1 i, per la mateixa definició de $\mathbb{H}$, aquest grup és $\mathbf{SU}(2)$. Topològicament, es tracta de $S^3$, l'esfera de dimensió 3.
- Si $A \in \mathbf{Sp}(n)$, $A$ conserva la norma de $\mathbb{H}^n$, i recíprocament.
- Igual que en el cas del grup unitari $\mathbf{U}(n)$, les matrius simplèctiques estan caracteritzades per la propietat $A A^* = I$, que és equivalent a $A^* = A^{-1}$ i és equivalent a $A^* A = I$.
- L'aplicació $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H}) \to \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ que hem construït anteriorment dona una inclusió de grups $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{U}(2n)$. En particular, els grups $\mathbf{Sp}(n)$ són compactes: ja sabem que $\mathbf{U}(2n)$ és compacte i és clar que $\mathbf{Sp}(n)$ és tancat (es pot definir a partir d'equacions algebraiques).
- Els grups $\mathbf{Sp}(n)$ són connexos i simplement connexos. La demostració és la mateixa que hem indicat a la pàgina 9 i utilitza $\mathbf{Sp}(n)\,/\,\mathbf{Sp}(n-1) \cong S^{4n-1}$.

En resum:

*El mateix concepte de* matriu que conserva el producte intern*, aplicat a les tres àlgebres de divisió* $\mathbb{R}$*,* $\mathbb{C}$ *i* $\mathbb{H}$*, ens proporciona tres famílies infinites de grups compactes:* $\mathbf{O}(n)$*,* $\mathbf{U}(n)$*,* $\mathbf{Sp}(n)$*,* $n \geq 1$*.*

**Relació entre les dues famílies de grups simplèctics.** Entre el grup simplèctic no compacte $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ de les matrius $M \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ tals que $M^t\Omega M = \Omega$ i el grup simplèctic compacte $\mathbf{Sp}(n) \subset \mathbf{U}(2n)$ de les matrius $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{H})$ tals que $MM^* = I$ hi ha aquesta relació:

$$\mathbf{Sp}(n) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n) = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathbf{SU}(2n).$$

Demostrem aquesta identitat. Si tenim la matriu $A = A_1 + A_2 j \in \mathbf{Sp}(n)$, considerem la matriu $A_{\mathbb{C}} \in \mathbf{U}(2n)$ que hem definit a la pàgina 17 Aleshores, $\overline{A}_{\mathbb{C}}^t A_{\mathbb{C}} = I$ ens dona

$$\overline{A}_1^t A_1 + A_2^t \overline{A}_2 = \overline{A}_2^t A_2 + A_1^t \overline{A}_1 = I, \quad \overline{A}_1^t A_2 - A_2^t \overline{A}_1 = \overline{A}_2^t A_1 - A_1^t \overline{A}_2 = 0.$$

D'altra banda,

$$A_{\mathbb{C}}^t \,\Omega\, A_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \overline{A}_2^t A_1 & -A_1^t \overline{A}_2 & \overline{A}_2^t A_2 + A_1^t \overline{A}_1 \\ -\overline{A}_1^t A_1 & -A_2^t \overline{A}_2 & -\overline{A}_1^t A_2 + A_2^t \overline{A}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

i hem demostrat que $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$. Recíprocament, si $M \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) \cap \mathbf{U}(2n)$, tenim $M^t\Omega M = \Omega$ i, al mateix temps, $M^{-1} = M^*$. Deduïm que $\Omega^t M = \overline{M}\Omega^t$ i això implica que $M$ és de la forma $A_{\mathbb{C}}$ per a alguna matriu $A \in \mathbf{Sp}(n)$. □

En conclusió:

*Si volem prescindir dels quaternions, podem definir el grup simplèctic* $\mathbf{Sp}(n)$ *com el grup format per les matrius complexes* $2n \times 2n$ *que conserven, simultàniament, la forma hermítica i la forma simplèctica.*

## Els quaternions i les rotacions de $\mathbb{R}^3$

Abans hem vist que els espinors —que hem identificat amb els elements del grup $\mathbf{SU}(2)$— ens donen les rotacions de l'espai de dimensió 3. Ara hem pogut identificar els espinors amb els quaternions de norma 1. En aquest apartat integrarem aquests dos fets i veurem com el grup multiplicatiu dels quaternions $\mathbb{H}^*$ ens dona una excel·lent descripció del grup de les rotacions $\mathbf{SO}(3)$.

A l'apartat *Espinors i rotacions de l'espai*, de la pàgina 11, hem vist, d'una manera molt explícita, com els elements de $\mathbf{SU}(2)$ actuen per conjugació sobre $\mathcal{H}_0'$, un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 3. D'altra banda, com que $\mathbb{R}$ és el centre de $\mathbb{H}$, i sabem (pàgina 16) que la conjugació per un quaternió $q \neq 0$ conserva el producte escalar de $\mathbb{R}^4$, tindrem que $c_q$ dona un automorfisme ortogonal de $\langle i, j, k\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H}$, el subespai (real) dels quaternions purs. Observem que aquest subespai de $\mathbb{H}$, si el mirem dins de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, com hem fet quan hem definit els quaternions, coincideix amb $\mathcal{H}_0'$. D'aquesta manera, l'acció dels quaternions de norma 1 per conjugació sobre $\langle i, j, k\rangle_{\mathbb{R}}$ és exactament la mateixa que l'acció de $\mathbf{SU}(2)$ sobre $\mathcal{H}_0'$ que hem estudiat detalladament a l'apartat 3.

En definitiva, de la mateixa manera que els nombres complexos ens van proporcionar una manera molt més simple de descriure les rotacions del pla

$$z \longmapsto zz_0 \quad \text{vs.} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

també els quaternions ens donen una descripció molt més simple de les rotacions de l'espai de tres dimensions:

$$h \longmapsto p_0 h p_0^{-1} \quad \text{vs.} \quad R_{\theta,\vec{u}}(\vec{v}) = \cos\theta\,\vec{v} + \sin\theta(\vec{u}\times\vec{v}) + (1-\cos\theta)\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\vec{u}.$$

Fem ara explícita la relació entre un quaternió unitari $q \in \mathbb{H}$ i una rotació descrita geomètricament en la forma $\mathbb{R}_{\theta,\vec{u}}$:

$$q = \cos\alpha + \sin\alpha(xi + yj + zk) \leftrightsquigarrow R_{2\alpha,\overrightarrow{(x,y,z)}},$$

entenent, però, que a cada rotació de $\mathbf{SO}(3)$ li corresponen dos quaternions (o dos espinors) $\pm q$. Observem també que l'eix de la rotació associada a un quaternió $p$ és simplement el vector $p - \overline{p} \in \langle i,j,k\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H}$ perquè $p(p - \overline{p})p^{-1} = p - \overline{p}$.

### Digressió # 3: automorfismes de $\mathbb{H}$

Ara podem descriure fàcilment els automorfismes de $\mathbb{H}$. Curiosament, el comportament patològic de $\mathbb{C}$ respecte dels automorfismes —recordem que l'axioma de l'elecció ens permet demostrar l'existència d'una infinitat no numerable d'automorfismes de $\mathbb{C}$— no es generalitza al cas dels quaternions. El motiu rau en el fet que $\mathbb{R}$ és el *centre* de $\mathbb{H}$ i qualsevol automorfisme (i també qualsevol antiautomorfisme) ha de respectar el centre. Per tant, si $\phi\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ és un (anti)automorfisme, aleshores $\phi$ és $\mathbb{R}$-lineal i, en conseqüència, és continu i ve donat per una matriu real $4 \times 4$. Per estudiar els automorfismes de $\mathbb{H}$ ens convé considerar simultàniament els automorfismes i els antiautomorfismes. Observem que, en tot cas, $\phi$ ha de conservar les solucions de l'equació $q^2 = -1$ i aquestes solucions (pàgina 16) formen l'esfera unitat dins de $\langle i,j,k\rangle_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$. Per tant, $\phi$ donarà un isomorfisme lineal de $\mathbb{R}^3$ que conservarà la norma i, per tant, vindrà donat per una matriu ortogonal. Si $\phi$ té determinant 1, serà una rotació i, segons hem vist, $\phi$ serà la conjugació per un quaternió de norma 1. Si $\phi$ té determinant $-1$, tindrem que $c\phi$ serà la conjugació per un quaternió de norma 1, on $c$ és l'antiautomorfisme de $\mathbb{H}$ donat per la conjugació. En conclusió, tots els automorfismes de $\mathbb{H}$ són interns i tots els antiautomorfismes seran producte d'un automorfisme intern per la conjugació $c$. Pel que hem vist abans, deduïm que els automorfismes de $\mathbb{H}$ formen el grup $\mathbf{SO}(3)$.

### Rotacions en dimensió 3: conclusió

L'estudi de les rotacions de $\mathbb{R}^3$ ens ha dut a tres descripcions d'un mateix objecte

$$\mathbf{SU}(2) \cong \mathbf{Spin}(3) \cong \mathbf{Sp}(1),$$

el recobriment universal de $\mathbf{SO}(3)$, un grup amb un subgrup normal $\{\pm I\}$ amb quocient $\mathbf{SO}(3)$, de manera que, topològicament, obtenim el recobriment universal

$$S^3 \longrightarrow \mathbb{R}P^3.$$

Com hem dit abans, donar tres noms diferents a un mateix grup quedarà justificat quan vegem, més endavant, que les tres famílies $\mathbf{SU}(n)$, $\mathbf{Spin}(n)$ —que hem definit com el recobriment universal de $\mathbf{SO}(n)$— i $\mathbf{Sp}(n)$ divergeixen quan $n$ creix.

### Digressió # 4: l'aplicació de Hopf

El grup $\mathbf{Sp}(1)$ està format pels quaternions de mòdul 1 i, per tant, admet com a subgrup el grup $\mathbf{U}(1)$, format pels complexos de mòdul 1. Això ens permet considerar l'espai de les classes laterals $\mathbf{Sp}(1)/\mathbf{U}(2)$. Topològicament, $\mathbf{Sp}(1)$ s'identifica a l'esfera $S^3$ i $\mathbf{U}(1)$ s'identifica a la circumferència $S^1$, que actua per la dreta sobre $S^3$. Aleshores, $\mathbf{Sp}(1)/\mathbf{U}(2)$ és un espai topològic que podem identificar fàcilment de la manera següent. Pensem $S^2$ com l'esfera unitat dins dels quaternions purs i escollim com a punt base el punt $i \in S^2 \subset \langle i, j, k \rangle_{\mathbb{R}}$. Aleshores, la representació $S^3 = \mathbf{Spin}(3) \to \mathbf{SO}(3)$ ens dona una acció ortogonal de $S^3$ sobre $\mathbb{R}^3$ i, en conseqüència, una acció de $S^3$ sobre l'esfera $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Aleshores, si $q \in S^3$, podem considerar $qi\overline{q} \in S^2$. En conclusió, tenim una aplicació contínua

$$\eta\colon S^3 \longrightarrow S^2,$$

que es coneix com a *aplicació de Hopf* i té propietats remarcables com aquestes:

- Ens permet identificar $\mathbf{Sp}(1)/\mathbf{U}(2)$ amb l'esfera $S^2$. En particular, l'aplicació $\eta$ és un *fibrat principal* i una *fibració* i, localment, es comporta com un producte de $S^2$ per $S^1$, que és la *fibra*. Geomètricament, podem descompondre l'esfera tridimensional com a unió disjunta de circumferències, una per a cada punt de l'esfera 2-dimensional. A Internet[13] hi podeu trobar moltes representacions gràfiques magnífiques d'aquesta descomposició.
- $\eta$ va ser el primer exemple d'una aplicació homotòpicament no trivial entre esferes de dimensions diferents. Heinz Hopf va poder demostrar que tota aplicació contínua de $S^3$ a $S^2$ és homotòpicament equivalent a un *múltiple* enter de $\eta$, en un sentit que ara no explicitarem, i, d'aquesta manera, va demostrar que $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}\eta$, el primer càlcul d'un grup d'homotopia d'esferes $\pi_k(S^n)$ amb $k > n$. S'ha afirmat que aquest resultat de Hopf representa el moment fundacional de la *teoria d'homotopia*.

Hi ha una senzilla relació entre l'aplicació de Hopf i la *geometria projectiva*. Recordem que, si $V \neq 0$ és un $k$-espai vectorial —encara que $k$ sigui només un anell de divisió—, podem definir el seu espai projectiu $P(V)$ com el *conjunt*

13 Vegeu, per exemple, aquesta `figura` de l'entrada «Hopf fibration» de la Wikipedia.

dels subespais de dimensió 1 de $V$, i aquest espai $P(V)$ és l'àmbit natural de la geometria lineal. Si $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, obtenim els espais projectius reals i complexos

$$\begin{aligned} * &= \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \mathbb{R}P^3 \subset \mathbb{R}P^4 \subset \cdots, \\ * &= \mathbb{C}P^0 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \subset \mathbb{C}P^3 \subset \mathbb{C}P^4 \subset \cdots \end{aligned}$$

i, si $k = \mathbb{H}$, obtenim els espais projectius quaterniònics

$$* = \mathbb{H}P^0 \subset \mathbb{H}P^1 \subset \mathbb{H}P^2 \subset \mathbb{H}P^3 \subset \mathbb{H}P^4 \subset \cdots,$$

en els quals la geometria lineal es comporta pràcticament igual que en els casos clàssics reals i complexos llevat que, degut a la no commutativitat de la multiplicació a $\mathbb{H}$, no es compleix el *teorema de Papos*. En els tres casos anteriors, podem identificar la recta projectiva amb la compactificació per un punt de la recta afí, és a dir, amb l'esfera de la dimensió corresponent: $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$, $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$, $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$.

En els tres casos real, complex i quaterniònic, cada subespai de dimensió 1 de $k^{n+1}$ està determinat per un vector unitari, i dos vectors unitaris defineixen el mateix subespai si un s'obté de l'altre multiplicant per un escalar de mòdul 1. Això ens permet identificar $kP^n$ amb el quocient (topològic) de l'esfera unitat de $k^{n+1}$ per l'acció de l'esfera unitat de $k$:

$$\mathbb{R}P^n = S^n/\pm 1, \quad \mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/S^1, \quad \mathbb{H}P^n = S^{4n+3}/S^3.$$

Per a $n = 1$ obtenim

$$S^1 \cong \mathbb{R}P^1 = S^1/\pm 1, \quad S^2 \cong \mathbb{C}P^1 = S^3/S^1, \quad S^4 \cong \mathbb{H}P^1 = S^7/S^3.$$

En el cas real obtenim $S^1 \to S^1$, que és l'aplicació $z \mapsto z^2$ que es denota per $2\iota$. En el cas complex obtenim l'aplicació de Hopf $\eta$ i en el cas quaterniònic obtenim una generalització de l'aplicació de Hopf

$$\nu\colon S^7 \longrightarrow S^4,$$

que també és una aplicació no homotòpicament trivial significativa.

Precisament la relació que hem comentat entre les aplicacions de Hopf $2\iota$, $\eta$ i $\nu$ i la geometria projectiva ens dona la clau de la seva no trivialitat homotòpica. Considerem, per exemple, el cas de $\eta\colon S^3 \to S^2$. No és difícil veure que el pla projectiu $\mathbb{C}P^2$ s'obté adjuntant a la recta projectiva $\mathbb{C}P^1 = S^2$ una bola de dimensió 4 a través de l'aplicació $\eta$. Aleshores, si $\eta$ fos homotòpica a l'aplicació constant, tindríem que $\mathbb{C}P^2$ seria homotòpicament equivalent a $S^2 \vee S^4$. Això és impossible perquè la cohomologia de $\mathbb{C}P^2$ i la cohomologia de $S^2 \vee S^4$ són diferents.

La importància que l'aplicació de Hopf va tenir en el desenvolupament de la teoria d'homotopia va fer que es busquessin generalitzacions a dimensions superiors, del tipus $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ amb fibra $S^n$. Per a $n = 0, 1, 3$ els plans projectius real, complex i quaterniònic ens donen aplicacions com aquesta i la pregunta va ser si es podia anar més enllà. Resulta que per construir una aplicació de tipus Hopf $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ n'hi ha prou que la presumpta fibra $S^n$ tingui una *multiplicació contínua amb unitat* i la construcció és tan senzilla com això:

- Considerem aquestes dues construccions topològiques elementals:
  - La *suspensió*. Si $X$ és un espai, la seva suspensió és l'espai
  $$\Sigma X := (X \times [0,1])/\{(x,0) \sim (x',0), (x,1) \sim (x',1) : x, x' \in X\}.$$
  - La *juntura*. Si $X$, $Y$ són espais, la seva juntura és l'espai
  $$X * Y := (X \times Y \times [0,1])/\mathcal{R};$$
  $$\mathcal{R} := \{(x,y,0) \sim (x,y',0), (x,y,1) \sim (x',y,1) : x, x' \in X,\ y, y' \in Y\}.$$

  Si $Y$ és l'espai amb un únic punt, aleshores $X * Y$ es coneix com el *con* de $X$, i es denota $CX$.
  - La *cofibra homotòpica*. Si $f\colon X \to Y$ és una aplicació contínua, la cofibra homotòpica de $f$ és l'espai quocient
  $$(Y \cup_f CX) := (X \cup CY)/\{(x,0) \sim f(x) : x \in X\}.$$
  El cas més interessant és quan $X$ és una esfera $S^n$ i $CX$ és una bola tancada $e^{n+1}$. En aquest cas, diem que la cofibra homotòpica de $f\colon S^n \to Y$ és l'espai que s'obté *adjuntant* a $Y$ una *cel·la* de dimensió $n+1$.
- No és difícil comprovar que les dues operacions anteriors transformen esferes en esferes (llevat d'homeomorfisme): $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$, $S^n * S^m \cong S^{n+m+1}$.
- Si $S^n$ admet una multiplicació amb unitat, podem considerar l'aplicació
$$f\colon S^{2n+1} \cong S^n * S^n \longrightarrow \Sigma S^n \cong S^{n+1}, \quad f([x,y,t]) := [xy,t],$$
que, per a $n = 0,1,3$, és, llevat d'homotopia, l'aplicació de Hopf. A més, si utilitzem $f$ per adjuntar a $S^{n+1}$ una cel·la $e^{2n+2}$, obtenim un espai $S^{n+1} \cup_f e^{2n+2}$, que podem interpretar com el *pla projectiu* associat a $S^n$.

En particular, si $S^n$ és un grup —com ho són $S^0 = \{\pm 1\}$, $S^1 = \mathbf{U}(1)$ i $S^3 = \mathbf{Sp}(1)$—, ja tenim l'aplicació de Hopf $S^{2n+1} \to S^{n+1}$ que volíem, però no cal que $S^n$ compleixi tots els axiomes de grup, només el que afirma l'existència de l'element neutre! El cas és que un teorema clàssic de Frank Adams —molt difícil, si bé s'han trobat demostracions força més senzilles que l'original d'Adams— afirma que les úniques esferes que poden tenir una multiplicació contínua amb unitat són $S^0$, $S^1$, $S^3$ i $S^7$ i, en conseqüència, les úniques aplicacions de tipus Hopf que poden existir són les tres que ja coneixem: $2\iota$, $\eta$, $\nu$ i una hipotètica $\sigma\colon S^{15} \to S^8$ amb fibra $S^7$, si és que realment $S^7$ —que no sembla que puguem identificar amb cap grup conegut— admet com a mínim una multiplicació contínua amb unitat.[14]

14 $S^7$ sí que admet aquesta multiplicació, però aquest fet —de conseqüències immenses— el discutirem en algun altre lloc.

## 5 Rotacions en dimensió 4

Volem estudiar ara les rotacions de l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ amb la intenció de trobar, potser, alguna relació entre el grup $\mathbf{Spin}(4)$ —que hem definit de manera abstracta com el recobriment universal de $\mathbf{SO}(4)$— i algun grup conegut. Com veurem, l'estudi del grup $\mathbf{SO}(4)$ és molt bonic, i també és ben singular perquè $\mathbf{Spin}(4)$ és l'*únic* grup d'espinors que té una descomposició no trivial com a producte cartesià.

Considerem l'aplicació

$$\pi_4 \colon \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1) \longrightarrow \mathbf{SO}(4)$$

definida d'aquesta manera: identifiquem $\mathbb{R}^4$ amb $\mathbb{H}$ i definim $\pi_4(p, q)$ com l'aplicació $\mathbb{R}$-lineal $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ donada per

$$h \longmapsto p\, h\, \overline{q}.$$

Al llarg d'aquest apartat, per simplificar, escriurem $\pi$ en lloc de $\pi_4$. La fórmula d'anticommutació ens diu que $\pi(p, q)$ conserva el producte escalar, és a dir, $\pi(p, q) \in \mathbf{O}(3)$ i, com que $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1)$ és un espai connex, tenim que $\pi(p, q) \in \mathbf{SO}(3)$. Que $\pi$ és un homomorfisme de grups és evident. Les rotacions $\pi(p, 1)$ i $\pi(1, p)$ per $p \in \mathbf{Sp}(1)$ reben el nom d'*isoclíniques*.

Vegem primer que $\pi$ és una aplicació exhaustiva. Sigui $A \in \mathbf{SO}(4)$ i sigui $(a, b, c, d)$ la primera columna de $A$. Aleshores, si $p := a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, observem que $B := \pi(\overline{p}, 1)A$ deixa fix el primer vector de la base canònica de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, amb la qual cosa $B \in \mathbf{SO}(3)$ —entès com el subgrup de $\mathbf{SO}(4)$ de les matrius amb primera fila i primera columna igual a $(1, 0, \dots, 0)$— i, com hem vist en l'estudi de les rotacions de $\mathbb{R}^3$, existeix un quaternió unitari $q$ tal que $\phi = \pi(q, q)$. En conclusió, $A = \pi(pq, q)$ i hem comprovat que $\pi$ és exhaustiva. D'altra banda, és clar que el nucli de $\pi$ és el subgrup diagonal $\{(1, 1), (-1, -1)\}$.

Per tot això, podem afirmar que el recobridor universal de $\mathbf{SO}(4)$ és $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1)$ i això ens duu a identificar

$$\mathbf{Spin}(4) = \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1),$$

de manera que cada rotació de l'espai euclidià de quatre dimensions ve determinada per una parella de quaternions unitaris, única llevat del signe.

Observem que, com ja havíem anunciat, si bé $\mathbf{Spin}(3) \cong \mathbf{SU}(2) \cong \mathbf{Sp}(1)$, aquests isomorfismes ja no es mantenen si augmentem la dimensió en una unitat. Tanmateix, $\mathbf{Spin}(4)$ no ens aporta cap grup nou més enllà de les famílies $\mathbf{SU}(n)$ i $\mathbf{Sp}(n)$.[15] Amb les definicions que hem donat, la compatibilitat entre

15 Espòiler: Cal arribar a la dimensió 7 perquè els grups $\mathbf{Spin}(n)$ es mostrin com una família independent de les famílies $\mathbf{SU}(n)$ i $\mathbf{Sp}(n)$.

les descripcions que tenim de les rotacions de $\mathbb{R}^3$ i les de $\mathbb{R}^4$ és immediata: tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sp}(1) \cong \mathbf{Spin}(3) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\pi_3"] & \mathbf{Spin}(4) \cong \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1) \arrow[d, "\pi_4"] \\
\mathbf{SO}(3) \arrow[r, "\iota"] & \mathbf{SO}(4)
\end{tikzcd}$$

on $\iota$ ve donada per la inclusió de $\mathbb{R}^3 = \langle i, j, k\rangle_{\mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$, $\Delta$ és l'aplicació diagonal i $\pi_3$, $\pi_4$ són les representacions que hem explicat en aquest text.

L'epimorfisme $\pi$ també ens permet obtenir una bona descripció de l'estructura de grup de $\mathbf{SO}(4)$. Considerem aquests tres subgrups de $\mathbf{SO}(4)$

$$\begin{aligned}
H_l &= \{\pi(p,1) : p \in \mathbf{Sp}(1)\} \cong \mathbf{Sp}(1),\\
H_r &= \{\pi(1,p) : p \in \mathbf{Sp}(1)\} \cong \mathbf{Sp}(1),\\
H_\Delta &= \{\pi(p,p) : p \in \mathbf{Sp}(1)\} \cong \mathbf{SO}(3).
\end{aligned}$$

Observem que $H_l$ i $H_r$ són normals a $\mathbf{SO}(4)$, commuten entre ells i tenen intersecció $\{\pm I\}$. En tots dos casos, el grup quocient és $\mathbf{SO}(3)$. El grup $H_\Delta$ no és normal i les classes laterals s'identifiquen a $\mathbf{Sp}(1)$ com a espais topològics.

L'epimorfisme $\pi$ també ens permet obtenir una bona descripció de la *topologia* de l'espai $\mathbf{SO}(4)$. D'entrada, $\mathbf{SO}(4)$ s'identifica a l'espai quocient de $S^3 \times S^3$ per l'acció diagonal de l'aplicació antipodal $\tau$, però, d'altra banda, l'aplicació $f(p,q) = (p, pq)$ de $S^3 \times S^3$ ens dona un homeomorfisme

$$(S^3 \times S^3)/\tau \cong (S^3/\tau) \times S^3,$$

on l'acció de $\tau$ sobre l'espai de l'esquerra és diagonal. En conclusió, topològicament —no com a grup!— $\mathbf{SO}(4)$ s'identifica al producte $\mathbb{R}P^3 \times S^3 = \mathbf{SO}(3) \times \mathbf{Sp}(1)$.

Finalment, voldríem relacionar la descripció de $\mathbf{SO}(4)$ anterior amb la *geometria* de les rotacions en quatre dimensions. Recordem que tota matriu de $\mathbf{SO}(4)$ es pot escriure, prenent una base ortonormal adient, en la forma

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

És a dir, hi ha dos plans invariants ortogonals i sobre cada pla tenim una rotació d'angle $\alpha$ i $\beta$, respectivament. Com podem llegir els plans invariants i els angles de rotació de la rotació $\pi(p,q)$? D'ençà que Cayley va descriure per primera vegada (1855) les rotacions en quatre dimensions com a productes de quaternions $x \mapsto px\overline{q}$, diversos autors com Klein, Hurwitz o Coxeter van completar aquesta teoria que desenvoluparem a continuació.

**Rotacions no isoclíniques.** Considerem dos quaternions unitaris $p, q \neq \pm 1$ i escrivim-los en la forma

$$\begin{aligned} p &= \cos\alpha + \sin\alpha\, u, \\ q &= \cos\beta + \sin\beta\, v, \end{aligned}$$

on $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ i $u$, $v$ són quaternions unitaris purs. Suposem, en primer lloc, que $u \neq \pm v$ i definim

$$\begin{aligned} x_1^+ &= 1 + uv, \quad x_2^+ = u - v, \\ x_1^- &= 1 - uv, \quad x_2^- = u + v. \end{aligned}$$

Uns càlculs elementals demostren aquestes propietats de $x_1^+$, $x_2^+$, $x_1^-$, $x_2^-$ (tingueu en compte les fórmules de la pàgina 16):

- $||x_1^+||^2 = ||x_2^+||^2 = 2 - 2\langle u, v\rangle$; $||x_1^-||^2 = ||x_2^-||^2 = 2 + 2\langle u, v\rangle$; $x_1^+$, $x_2^+$, $x_1^-$, $x_2^-$ són ortogonals dos a dos.
- Com que estem suposant $u \neq \pm v$, normalitzant els quaternions $x_1^+$, $x_2^+$, $x_1^-$, $x_2^-$, obtenim una base ortonormal de $\mathbb{H}$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial. A més, podem afirmar que aquesta base és *positiva*. Això es dedueix d'aquest resultat:

  *Si $u$, $v$ són quaternions purs, aleshores, per la desigualtat de Cauchy-Schwarz,*
  $$\det(1, u, v, uv) = ||u||^2\, ||v||^2 - \langle u, v\rangle^2 \geq 0.$$

  Per comprovar-ho, recordem la fórmula del producte vectorial triple $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \langle \vec{a}, \vec{c}\rangle \vec{b} - \langle \vec{a}, \vec{b}\rangle \vec{c}$ i recordem també que en dimensió 3 tenim aquesta relació entre el determinant i el producte vectorial: $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \times \vec{e}_3\rangle$. Aleshores:

  $$\begin{aligned} \det(1, u, v, uv) &= \det(1, u, v, -\langle u, v\rangle + u \times v) = \\ &= \det(u, v, u \times v) = \langle u, v \times (u \times v)\rangle = \\ &= \langle u, ||v||^2 u - \langle u, v\rangle\, v\rangle = ||u||^2\, ||v||^2 - \langle u, v\rangle^2 \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

  En el cas de la base $x_1^+$, $x_2^+$, $x_1^-$, $x_2^-$ és fàcil veure que el seu determinant és igual a $4\det(1, u, v, uv) > 0$.
- L'acció de $\pi(p, q)$ compleix aquestes fórmules:

$$\begin{aligned} p\, x_1^+\, \overline{q} &= \cos(\alpha + \beta)\, x_1^+ + \sin(\alpha + \beta)\, x_2^+, \\ p\, x_2^+\, \overline{q} &= -\sin(\alpha + \beta)\, x_1^+ + \cos(\alpha + \beta)\, x_2^+, \\ p\, x_1^-\, \overline{q} &= -\cos(\alpha - \beta)\, x_1^- + \sin(\alpha - \beta)\, x_2^-, \\ p\, x_2^-\, \overline{q} &= -\sin(\alpha - \beta)\, x_1^- + \cos(\alpha - \beta)\, x_2^-. \end{aligned}$$

- Les fórmules anteriors demostren que $H^+ := \langle x_1^+, x_2^+\rangle$ i $H^- := \langle x_1^-, x_2^-\rangle$ són plans ortogonals invariants per $\pi(p,q)$ i que $\pi(p,q)$ és la rotació plana d'angle $\alpha+\beta$ en el pla $H^+$ i la rotació plana d'angle $\alpha-\beta$ en el pla $H^-$.

El cas $u = \pm v$ es comporta pràcticament igual. Per exemple, si $u = v$, seguim tenint el pla invariant $H^- = \langle 1, u\rangle$ sobre el qual $\pi(p,q)$ és la rotació plana d'angle $\alpha-\beta$. Escollim ara un quaternió pur unitari $w$ ortogonal a $u$ i definim $H^+ := \langle w, uw\rangle$. Aleshores, $H^+$ i $H^-$ són dos plans invariants ortogonals i uns càlculs com els anteriors ens mostren que $\pi(p,q)$ actua sobre $H^+$ com la rotació plana d'angle $\alpha+\beta$. Observem que, pel resultat anterior sobre el determinant, la base que hem pres és positiva. El cas $u = -v$ és exactament igual, excepte que ara $H^- := \langle w, uw\rangle$ i $H^+ = \langle 1, u\rangle$.

Estudiem ara l'existència d'altres *plans invariants* en la rotació $\pi(p,q)$ amb $p,q \neq \pm 1$. Si descartem el cas $\alpha = \beta = \pi/2$ —en el qual $\pi(p,q)$ té, evidentment, infinits plans invariants—, demostrarem que els plans $H^+$ i $H^-$ anteriors són els únics plans invariants de $\rho := \pi(p,q)$.

Suposem que $H \neq H^+, H^-$ és un pla invariant i sigui $h \in H$ tal que $h = h^+ + h^-$ amb $h^+ \in H^+$, $h^- \in H^-$ i $h^+, h^- \neq 0$. Les hipòtesis que hem fet sobre $\alpha$, $\beta$ impliquen que $\rho(h) \neq \pm h$ i que com a mínim una de les dues parelles de vectors $(h^+, \rho(h^+))$ i $(h^-, \rho(h^-))$ és linealment independent. En particular, $h$ i $\rho(h)$ formen una base de $H$. Pel que hem vist més amunt sobre la rotació $\rho$, el polinomi anul·lador de $\rho$ sobre $H^+$ és $x^2 - 2\cos(\alpha+\beta)\,x + 1$ i el polinomi anul·lador de $\rho$ sobre $H^-$ és $x^2 - 2\cos(\alpha-\beta)\,x + 1$. Calculem ara $\rho^2(h)$:

$$\rho^2(h) = 2\cos(\alpha+\beta)\rho(h^+) - h^+ + 2\cos(\alpha-\beta)\rho(h^-) - h^-.$$

Com que estem suposant que $H$ és un pla invariant, tindrem $\rho^2(h) - h = \lambda h + \mu\rho(h)$ i, com que $H^+ \cap H^- = \{0\}$, obtenim aquestes dues igualtats:

$$(2\cos(\alpha+\beta) - \mu)\rho(h^+) = \lambda h^+,$$
$$(2\cos(\alpha-\beta) - \mu)\rho(h^-) = \lambda h^-,$$

que impliquen (recordem que com a mínim una de les dues parelles $(h^+, \rho(h^+))$ i $(h^-, \rho(h^-))$ és linealment independent) $\lambda = 0$ i $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha-\beta)$, que es contradiu amb la hipòtesi $p,q \neq \pm 1$.

**Rotacions isoclíniques.** Resta només estudiar el cas de les rotacions *isoclíniques*, és a dir, el cas en què $p = 1$ o $q = 1$. En aquest cas, hi ha infinits plans invariants i cada quaternió $h \neq 0$ pertany a un d'aquests plans. Concretament, sigui $p$ un quaternió unitari $p = \cos\alpha + \sin\alpha\, u \neq \pm 1$ i sigui $h \in \mathbb{H} - \{0\}$. Si apliquem la identitat $p^2 = 2\cos\alpha\, p - 1$, veiem que $p^2 h = 2\cos\alpha\, ph - h \in \langle h, ph\rangle$ i $\langle h, ph\rangle$ és un pla invariant per $\pi(p,1)$ i, anàlogament, $\langle h, h\overline{p}\rangle$ és un pla invariant per $\pi(1,p)$.

Si $w$ és un quaternió unitari pur ortogonal a $u$, podem prendre la base ortonormal positiva (pàgina 27) de $\mathbb{H}$ formada per $1$, $u$, $w$, $uw$ i observem que $\pi(p,1)$ és la rotació d'angle $\alpha$ en cadascun dels plans invariants ortogonals $\langle 1,u\rangle$ i $\langle w,uw\rangle$. En canvi, $\pi(1,p)$ és la rotació d'angle $-\alpha$ a $\langle 1,u\rangle$ i la rotació d'angle $\alpha$ a $\langle w,uw\rangle$. Veiem, doncs, que les rotacions isoclíniques es classifiquen en dos tipus: les que giren angles iguals en dos plans invariants ortogonals i les que giren angles oposats en dos plans invariants ortogonals ($\pm I$ pertany als dos tipus). Les primeres s'obtenen per multiplicació per l'esquerra per un quaternió unitari i, les segones, per multiplicació per la dreta per un quaternió unitari. Aquesta distinció es correspon als dos subgrups normals de $\mathbf{SO}(4)$ —no conjugats, és clar— $H_l$ i $H_r$ que hem considerat abans.

### Digressió # 5: rotacions de l'espaitemps

L'espaitemps de la teoria de la relativitat (especial, és a dir, sense gravetat) no és l'espai euclidià $\mathbb{R}^4$ perquè la coordenada *temps* $(t)$ es comporta de manera diferent de les tres coordenades *espacials* $(x,y,z)$ i, per tant, el concepte de *rotació* requerirà una definició diferent de la que hem utilitzat en la geometria euclidiana de $\mathbb{R}^n$, és a dir, en els altres apartats d'aquest text. Expliquem de manera molt succinta —que vol dir que ho explicarem necessàriament malament—[16] quina és la *distància* que hem d'utilitzar a $\mathbb{R}^4$ quan l'identifiquem a l'espaitemps de la teoria de la relativitat.

Considerem un sistema de referència inercial $S$ amb un sistema de coordenades ortonormal $x$, $y$, $z$ i un rellotge que mesura el temps $t$,[17] i un altre sistema inercial $S'$ amb coordenades $x'$, $y'$, $z'$ i un rellotge que mesura el temps $t'$. A cada esdeveniment el sistema $S$ li assignarà unes coordenades $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ i el sistema $S'$ li assignarà unes altres coordenades $(x',y',z',t')\in\mathbb{R}^4$. Suposem que, quan $t=0$, també $t'=0$ i els orígens de $S$ i $S'$ coincideixen. Suposem que en l'instant $t=t'=0$ un fotó surt de l'origen i tenim un observador a $S$ i un altre a $S'$ que volen calcular la velocitat del fotó. Suposem que aquest fotó passa per un punt $P$. Aleshores, $S$ detectarà el fotó en el punt $P$ amb coordenades $(x,y,z)$ en l'instant $t$ i $S'$ detectarà el fotó en el mateix punt $P$ amb coordenades $(x',y',z')$ en l'instant $t'$. És a dir, $S$ observarà que el fotó ha recorregut una distància $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en un temps $t$ i $S'$ observarà que el fotó ha recorregut una distància $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ en un temps $t'$. Per l'axioma fonamental de la teoria de la relativitat, $S$ i $S'$ han d'arribar al mateix valor per a la velocitat del fotó. Per tant,

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{t}=c=\frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{t'}.$$

Aquest raonament ens diu que el punts en què s'anul·la la forma quadràtica

$$Q(X,Y,Z,T)=X^2+Y^2+Z^2-c^2T^2$$

16 Si voleu més detalls sobre tot el que explicarem ara, llegiu el llibre imprescindible *Geometria diferencial i relativitat*, de Joan Girbau, en el qual trobareu molt ben explicat tot el que aquí hem de resumir excessivament.

17 De fet, un rellotge a cada punt de l'espai, tots sincronitzats.

segons l'observador de $S$ són els mateixos punts en què s'anul·la segons l'observador de $S'$. Dit amb més exactitud: sigui $A$ el canvi de coordenades (que no coneixem) entre $(x, y, z, t)$ i $(x', y', z', t')$, i sigui $Q^A$ la quàdrica transformada de $Q$ per $A$; aleshores,

$$Q(\vec{e}) = 0 \iff Q^A(\vec{e}) = 0.$$

Això implica[18] que les dues quàdriques difereixen en una constant no nul·la. A partir d'aquí, fent uns càlculs més o menys llargs,[19] podem deduir:

- Les clàssiques fórmules de Lorentz que expressen el canvi de coordenades $(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t')$ en funció de la velocitat $v$ de $S'$ respecte de $S$ (sempre que $|v| < c$).
- $\lambda = 1$ i el canvi de coordenades *conserva la forma quadràtica $Q$*.

El que ens interessa de tot això és aquest darrer punt: a l'espaitemps, els moviments han de respectar la forma $Q$, que, per tant, fa el paper que fa la forma quadràtica $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$ a l'espai euclidià. En conclusió, deixant de banda les translacions, el grup dels moviments rígids de l'espaitemps estarà format per les matrius reals invertibles $4 \times 4$ que conservin la forma quadràtica $Q = X^2 + Y^2 + Z^2 - c^2T^2$, una forma quadràtica no singular de rang 4 i índex 1 equivalent a la forma $X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2$. Aquestes matrius formen el que es coneix com a *grup de Lorentz*. El denotarem amb $\mathrm{O}(3, 1)$ i és el grup del qual volem dir alguna cosa en aquesta digressió.

Si $\Gamma$ és la matriu diagonal $(1, 1, 1, -1)$ —és a dir, la matriu de la forma quadràtica $Q$ anterior—, aleshores

$$\mathrm{O}(3,1) = \{A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) : A^t \Gamma A = \Gamma\}$$

és clarament un subgrup de $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$. Podem considerar el subgrup $\mathbf{O}(3)\times\mathbf{O}(1) \subset \mathrm{O}(3,1)$ tenint en compte les transformacions ortogonals de les tres primeres coordenades i el canvi de signe de l'última coordenada.

$\mathrm{O}(3, 1)$ no és compacte: per a cada $\lambda \in \mathbb{R}$ podem considerar la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mu & \lambda \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(3,2)$$

18 És curiós que molts llibres de teoria de la relativitat ometen aquest punt (una excepció és el llibre de Bernard Schutz), és a dir, de la igualtat dels conjunts de punts en què les quàdriques s'anul·len passen a la igualtat de les formes, sense cap comentari. Matemàticament, el problema es planteja en aquests termes: siguin $f$ i $g$ dos polinomis irreductibles en $n$ variables tals que el conjunt de zeros de $f$ sigui el mateix que el conjunt de zeros de $g$, és a dir, $V(\langle f \rangle) = V(\langle g \rangle)$, en el llenguatge de la geometria algebraica; podem deduir que $\langle f \rangle = \langle g \rangle$? Si el cos base és algebraicament tancat, la resposta és sí i es dedueix immediatament del Nullstellensatz, però, si el cos és $\mathbb{R}$, com en el nostre cas, la resposta és no: $x^2 + y^2$ i $x^2 + 2y^2$ tenen els mateixos zeros a $\mathbb{R}^2$ i no difereixen en una constant. Cal alguna hipòtesi addicional. Afortunadament, el llibre *Afinitats, moviments i quàdriques*, d'Agustí Reventós, sí que tracta el tema (apèndix D) i demostra que, si $f$ i $g$ són de grau dos sobre $\mathbb{R}$, amb els mateixos conjunts de zeros, i un d'ells compleix que té un zero *regular* (és a dir, amb gradient no nul), aleshores $f$ i $g$ difereixen en una constant no nul·la. Com que en el cas de la forma quadràtica $Q$ la condició de regularitat es compleix, podem afirmar que $Q = \lambda Q^A$.

19 Ho podeu trobar molt ben explicat al llibre citat de Joan Girbau.

amb $\mu = \sqrt{1+\lambda^2}$. Usualment, aquestes matrius s'escriuen utilitzant les funcions trigonomètriques hiperbòliques:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R},$$

que recorda l'expressió de les rotacions amb sinus i cosinus. Es pot demostrar que el subgrup $\mathbf{O}(3) \times \mathbf{O}(1)$ és un subgrup compacte maximal de $\mathrm{O}(3,1)$.

És clar que les matrius de $\mathrm{O}(3,1)$ tenen determinant $\pm 1$ i tenim, per tant, un homomorfisme de grups $\det\colon \mathrm{O}(3,1) \to \mathbb{Z}/2$ que és exhaustiu i, en particular, ens diu que el grup de Lorentz no és connex. Tal com fem amb el grup ortogonal, definim $\mathrm{SO}(3,1)$ com el subgrup normal de $\mathrm{O}(3,1)$ de les matrius de determinant 1.

Ara apareix un fenomen que no tenim en el cas dels grups ortogonals clàssics. Hi ha encara un altre homomorfisme exhaustiu $\theta\colon \mathrm{O}(3,1) \to \mathbb{Z}/2$ que es defineix d'aquesta manera: si $A \in \mathrm{O}(3,1)$, escrivim $A = \left(\begin{smallmatrix} M & v \\ w^t & \mu \end{smallmatrix}\right)$ amb $\mu \in \mathbb{R}$. De la condició $A^t \Gamma A = \Gamma$ es dedueix $\mu^2 = v^t v + 1 = ||v||^2 + 1 \geq 1$. Per tant, $\mu \neq 0$ i podem definir $\theta(A) := \mu/|\mu| \in \{\pm 1\} = \mathbb{Z}/2$. Resulta que $\theta$ és un homomorfisme, però no conec cap demostració elemental d'aquest fet. Resulta que $\theta$ s'identifica amb un concepte general de formes quadràtiques que s'anomena *norma espinorial* i que, per la seva mateixa definició, és un homomorfisme. En definitiva, tenim un epimorfisme

$$\mathrm{O}(3,1) \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$$

que ens diu que $\mathrm{O}(3,1)$ té, com a mínim, quatre components connexes —són exactament quatre— i ens permet definir aquest subgrup normal *connex*

$$\mathrm{SO}^+(3,1) := \{A \in \mathrm{O}(3,1) : \det(A) = \theta(A) = 1\}.$$

Ara podríem començar a estudiar un grup $\mathrm{Spin}(3,1)$ que fos un recobriment doble de $\mathrm{SO}^+(3,1)$, identificar-lo a algun altre grup conegut (coincideix amb el grup simplèctic no compacte $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{C})$), etc., però serà millor que ho deixem aquí.

## 6 Rotacions en dimensió 5

En aquest apartat estudiarem les rotacions de l'espai euclidià $\mathbb{R}^5$, amb la mateixa intenció dels casos anteriors: veure si podem identificar els espinors en dimensió 5 amb algun grup conegut. Avancem que la resposta que trobarem serà que $\mathbf{Spin}(5)$ s'identifica a $\mathbf{Sp}(2)$. Per veure-ho, considerem aquest $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió 5:

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & q \\ \overline{q} & -\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H}) : \lambda \in \mathbb{R},\, q \in \mathbb{H} \right\}.$$

Observem:

- $V$ està format per les matrius hermítiques quaterniòniques de traça zero: $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{H}) : M^* = M,\ \mathrm{tr}(M) = 0\}$. Escriurem els vectors de $V$ en la forma $[\lambda, q]$ i prendrem com a base ortonormal de $V$ la formada per les matrius $[1,0]$, $[0,1]$, $[0,i]$, $[0,j]$, $[0,k]$.
- $\mathbf{Sp}(2)$ actua sobre $V$ per conjugació. Això és evident pel punt anterior i pel fet que, per definició, les matrius de $\mathbf{Sp}(2)$ compleixen $Q^{-1} = Q^*$.
- Un càlcul immediat mostra que, si $M \in V$, aleshores $M^2 = ||M||^2 I$, on la norma l'entenem amb el producte escalar euclidià de $V$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial. Com a conseqüència d'això, la conjugació per una matriu de $\mathbf{Sp}(2)$ conserva la norma de $V = \mathbb{R}^5$ i, per tant, és una transformació ortogonal.
- Tenim, per tant, un homomorfisme $\mathbf{Sp}(2) \to \mathbf{O}(5)$ i, com que $\mathbf{Sp}(2)$ és connex, la imatge estarà continguda en el component de la identitat:

$$\pi_5\colon\ \mathbf{Sp}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(5).$$

Recordem l'epimorfisme $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1) \to \mathbf{SO}(4)$ de la secció anterior. És evident que, si identifiquem $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ amb l'hiperplà $\lambda = 0$ de $V$ i identifiquem $\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1)$ amb les matrius diagonals de $\mathbf{Sp}(2)$, aleshores l'homomorfisme $\pi_5\colon\ \mathbf{Sp}(2) \to \mathbf{SO}(5)$ és una extensió de la representació de les rotacions en dimensió 4 i tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_4"] & \mathbf{Sp}(2) \arrow[d, "\pi_5"] \\
\mathbf{SO}(4) \arrow[r, "\iota"] & \mathbf{SO}(5)
\end{tikzcd}$$

Calculem el nucli de $\pi_5$, és a dir, les matrius $Q \in \mathbf{Sp}(2)$ que commuten amb totes les matrius de $V$. La commutativitat amb $[1,0]$ implica que $Q$ és diagonal. La commutativitat amb $[0,1]$ implica que $Q$ és de la forma $pI$ amb $||p|| = 1$. Finalment, la commutativitat amb totes les matrius $[0,q]$ per a tot $q$ implica que $p$ és central a $\mathbb{H}$ i, per tant, $Q = \pm I$.

Finalment, demostrem que $\pi_5$ és exhaustiva. Sigui $A \in \mathbf{SO}(5)$ i sigui $[\lambda, q] \in V$ un eix de $A$. No és restrictiu suposar que $||[\lambda, q]|| = 1$ i $\lambda \geq 0$. Sigui ara

$$\mu := \sqrt{\frac{1+\lambda}{2}}, \quad p := \frac{q}{2\mu}, \quad Q := \begin{pmatrix} \mu & -p \\ \overline{p} & \mu \end{pmatrix}.$$

Es compleix que $Q \in \mathbf{Sp}(2)$ i que $Q\,[1,0]\,Q^* = [\lambda, q] \in V$. Aleshores $B := \pi_5(Q)^{-1} A\, \pi_5(Q) \in \mathbf{SO}(4)$ perquè fixa l'eix $[1,0]$. Per tant, $B$ pertany a la imatge de $\pi_5$ i $A$ també.

Observem que els dos subgrups normals $H_l$, $H_r$ de les rotacions isoclíniques de $\mathbf{SO}(4)$ passen a ser conjugats a $\mathbf{SO}(5)$. No tinc constància que s'hagi fet un estudi dels eixos i els plans invariants com el que hem explicat a l'apartat de les rotacions en dimensió 4.

En conclusió, **Sp**(2) és el recobriment universal de **SO**(2) i podem identificar

$$\mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2).$$

Una vegada més, tampoc no ens ha calgut descobrir cap grup nou per descriure els espinors en dimensió 5.

## 7 Rotacions en dimensió 6

Estem arribant al límit del que considerem *baixa dimensió* en aquest treball: estudiarem les rotacions en dimensió 6 i veurem com també les podem descriure utilitzant uns espinors apropiats que, novament, identificarem amb algun dels grups que ja coneixem. Recordem que hem identificat **Spin**(5) amb **Sp**(2) i recordem també que hem vist (pàgina 20) que **Sp**(2) és un subgrup de **SU**(4), concretament, $\mathbf{Sp}(2) = \mathbf{SU}(4) \cap \mathrm{Sp}_4(\mathbb{C})$. Això ens pot dur a intuir que potser podrem identificar el grup **Spin**(6) amb **SU**(4) i, efectivament, aquesta intuïció és correcta, però alguns detalls seran més complicats que en les dimensions inferiors.[20] Per començar, ens caldrà repassar alguns conceptes d'àlgebra multilineal.

Sigui $V = \mathbb{C}^n$ amb el producte hermític ordinari i la base canònica $e_1, \ldots, e_n$. Ens interessa considerar aquestes representacions de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: l'acció natural sobre $V$, l'acció sobre $V^*$ donada per

$$(A \cdot \omega)(e) = \omega(\overline{A}^t e) = \omega(A^* e)$$

i les accions naturals que es desprenen d'aquestes dues sobre els productes exteriors $\bigwedge^k V$ i $\bigwedge^k V^*$, per $k = 1, \ldots, n$. A partir d'aquí, observem:

- Hi ha un isomorfisme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$-equivariant $\alpha : \bigwedge^k V^* \to (\bigwedge^k V)^*$ donat pel determinant: $\alpha(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k)\,(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k) := \det(\omega_i(u_j))$.
- Tenim una *dualitat* $d\colon V \to V^*$ definida així:

  $$d(e)\,(u) := \langle u, e\rangle.$$

  $d$ és bijectiva i *semilineal* en el sentit que $d(\lambda e) = \overline{\lambda}\, d(e)$. Direm que $d$ és un c-isomorfisme. Observem que $d$ és $\mathbf{U}(n)$-equivariant. També podem considerar el c-isomorfisme $\bigwedge^k d\colon \bigwedge^k V \to \bigwedge^k V^*$.
- Si $n = 2k$, podem considerar aquesta *forma bilineal simètrica* $B$ sobre $\bigwedge^k V$:

  $$B(u_1 \wedge \cdots \wedge u_k, v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) := \det(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k).$$

  Aquesta forma bilineal dona lloc, de manera natural, a un isomorfisme $b\colon \bigwedge^k V \to (\bigwedge^k V)^*$ i és senzill comprovar que $b$ és $\mathbf{SU}(n)$-equivariant.

20 Seguirem el camí indicat per Paul Garret a *Sporadic isogenies to orthogonal groups* (2015).

- Combinant les aplicacions anteriors

$$\bigwedge^k V \xrightarrow{\bigwedge^k d} \bigwedge^k V^* \xrightarrow{\alpha} (\bigwedge^k V)^* \xleftarrow{b} \bigwedge^k V$$

  obtenim un c-isomorfisme $J\colon \bigwedge^k V \to \bigwedge^k V$ que és $\mathbf{SU}(n)$-equivariant.
- Sigui $W := \mathrm{Fix}(J)$ el conjunt dels $\rho \in \bigwedge^k V$ fixos per $J$. Observem que $W$ *no* és un subespai vectorial de $\bigwedge^k V$ —perquè $J$ no és lineal—, però sí que és un $\mathbb{R}$-subespai vectorial. D'altra banda, és clar que $W$ és tancat per l'acció de $\mathbf{SU}(n)$ —perquè $J$ és equivariant.

Per a l'estudi del grup $\mathbf{Spin}(6)$ ens interessa l'aplicació $J$ en el cas $n = 4$

$$J\colon \bigwedge^2 \mathbb{C}^4 \longrightarrow \bigwedge^2 \mathbb{C}^4,$$

que no és difícil de calcular de manera explícita. Considerem la base canònica $e_{ij} := e_i \wedge e_j$, $i < j$, de $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$. Un càlcul senzill ens dona

$$\begin{aligned} J(e_{12}) &= e_{34}, & J(e_{34}) &= e_{12}, & J(e_{13}) &= -e_{24}, \\ J(e_{24}) &= -e_{13}, & J(e_{23}) &= e_{14}, & J(e_{14}) &= e_{23}. \end{aligned}$$

És a dir, la matriu de $J$ com a aplicació $\mathbb{R}$-lineal en la base

$$\{e_{12}, e_{34}, ie_{12}, ie_{34}, e_{13}, e_{24}, ie_{13}, ie_{24}, e_{23}, e_{14}, ie_{23}, ie_{14}\}$$

és

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir d'aquí obtenim aquesta base de $W$ com a $\mathbb{R}$-espai vectorial:

$$\begin{aligned} w_0 &:= ie_{13} + ie_{24}, & w_1 &:= e_{24} - e_{13}, & w_2 &:= -e_{14} - e_{23}, \\ w_3 &:= ie_{23} - ie_{14}, & w_4 &:= e_{12} + e_{34}, & w_5 &:= ie_{12} - ie_{34}. \end{aligned}$$

Recordem que sobre $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$ —i, per tant, sobre $W$— hi tenim una forma bilineal simètrica $B$. Si calculem els valors que pren $B$ sobre la $\mathbb{R}$-base de $W$, observem que obtenim una matriu diagonal amb 2 a la diagonal. És a dir, $B$ és un producte escalar (real) definit positiu sobre $W$ i $\{w_i/\sqrt{2} : i = 0, \dots, 5\}$ és una base ortonormal respecte de $B$. D'altra banda, l'acció de $\mathbf{SU}(4)$ conserva la forma bilineal $B$. En conclusió, hem obtingut un homomorfisme de grups

$$\mathbf{SU}(4) \longrightarrow \mathbf{O}(6).$$

Com que els grups $\mathbf{SU}(n)$ són connexos, tenim

$$\pi_6\colon \mathbf{SU}(4) \longrightarrow \mathbf{SO}(6).$$

A continuació, demostrem que el nucli de $\pi_6$ és $\{\pm I\}$. Suposem que $A = (a_{ij}) \in \mathbf{SU}(4)$ és tal que deixa fixos els elements de la base de $W$. A partir d'aquí és fàcil veure que $A$ actua trivialment sobre $\bigwedge^2 \mathbb{C}^4$: per a cada $i < j$ tindrem $Ae_i \wedge Ae_j = e_i \wedge e_j$; prenem $k \neq i, j$ i, considerant els coeficients de $e_{ik}$, $e_{jk}$ i $e_{ij}$ a la igualtat anterior, arribem a

$$a_{ii}a_{kj} = a_{ki}a_{ij}, \quad a_{ji}a_{kj} = a_{ki}a_{jj}, \quad a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij} = 1.$$

Deduïm que $A$ ha de ser diagonal i el producte de dos elements qualssevol de la diagonal ha de ser igual a 1, que només és possible si $A = \pm I$.

Relacionem ara $\pi_6\colon \mathbf{SU}(4) \to \mathbf{SO}(6)$ amb l'epimorfisme $\pi_5\colon \mathbf{Sp}(2) \to \mathbf{SO}(5)$ de l'apartat anterior. Recordem que havíem vist que $\mathbf{Sp}(2)$ s'identifica al subgrup de $\mathbf{SU}(4)$ format per les matrius que conserven la forma alternada no degenerada sobre $V$ donada per $\Omega = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ en la base canònica $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ (pàgina 20). Aquesta forma dona una aplicació lineal $\omega\colon \bigwedge^2 V \to \mathbb{C}$ que compleix

$$\omega(e_{12}) = \omega(e_{14}) = \omega(e_{23}) = \omega(e_{34}) = 0, \quad \omega(e_{13}) = \omega(e_{24}) = 1$$

i, per tant, $\omega(w_0) = 2i$ i $\omega(w_i) = 0$ per $i \neq 0$. Això ens diu que un element de $\mathbf{SU}(4)$ conserva $\omega$ si i només si deixa fix $w_0$. En conclusió, $\pi_6\colon \mathbf{SU}(4) \to \mathbf{SO}(6)$ envia $\mathbf{Spin}(5) = \mathbf{Sp}(2)$ a $\mathbf{SO}(\langle w_0 \rangle^\perp) = \mathbf{SO}(5)$. Ara caldrà relacionar aquest epimorfisme de $\mathbf{Spin}(5)$ a $\mathbf{SO}(5)$ amb $\pi_5$: es compleix que aquest diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Sp}(2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_5"] & \mathbf{SU}(4) \arrow[d, "\pi_6"] \\ \mathbf{SO}(5) \arrow[r, "\iota"] & \mathbf{SO}(6) \end{tikzcd}$$

La manera elemental de demostrar la commutativitat d'aquest diagrama és fent un càlcul directe: prenem una matriu arbitrària $A \in \mathbf{Sp}(2)$, calculem explícitament la matriu $\pi_6(A_{\mathbb{C}})$ i la comparem amb la matriu $\pi_5(A)$.[21]

Finalment, demostrarem que $\pi_6$ és exhaustiva. Considerem, doncs, una matriu $R \in \mathbf{SO}(6)$ per a la qual volem trobar $P \in \mathbf{SU}(4)$ tal que $\pi_6(P) = R$. Escrivim

$$R(w_0) = \lambda w_0 + \mu w, \quad w \in \langle w_0 \rangle^\perp,\ ||w||^2 = ||w_0||^2 = 2,\ \lambda^2 + \mu^2 = 1.$$

Sigui $S \in \mathbf{SO}(\langle w_0 \rangle^\perp)$ una rotació qualsevol tal que $S(w) = w_1$, de manera que $SR(w_0) = \lambda w_0 + \mu w_1$. Ja sabem que existirà $A \in \mathbf{Sp}(2) \subset \mathbf{SU}(4)$ tal que $S = \pi_6(A)$. Considerem la matriu complexa diagonal

$$M := \mathrm{Diag}(\lambda i - \mu, \lambda i + \mu, -i, -i).$$

21 Per fer aquest càlcul i trobar la base $w_0, \ldots, w_5$ que fa que el diagrama sigui commutatiu vaig utilitzar `sagemath`, en particular, aquest `script` (accessible des de la versió electrònica de l'article). Seria bonic trobar una demostració breu i no computacional de la commutativitat del diagrama, però la veritat és que fer aquest càlcul amb `sagemath` també té el seu encant.

Tenim que $M \in \mathbf{SU}(4)$ i $\pi_6(M)(w_0) = \lambda w_0 + \mu w_1$. Aleshores $\pi_6(M^{-1})\pi_6(A)R(w_0) = w_0$, amb la qual cosa existirà $B \in \mathbf{Sp}(2)$ tal que $\pi_6(M^{-1})\pi_6(A)R = \pi_6(B)$ i deduïm que $R$ és a la imatge de $\pi_6$.

## 8 Conclusió

Hem completat el nostre objectiu de donar descripcions explícites, detallades i coherents de les *isogènies esporàdiques* entre els grups d'espinors $\mathbf{Spin}(k)$ per $k < 7$ i grups de les famílies $\mathbf{SU}(n)$ i $\mathbf{Sp}(n)$, i hem obtingut aquest diagrama commutatiu:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Spin}(3) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{Spin}(4) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{Spin}(5) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbf{Spin}(6) \arrow[d, equal] \\
\mathbf{Sp}(1) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\pi_3"] & \mathbf{Sp}(1) \times \mathbf{Sp}(1) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_4"] & \mathbf{Sp}(2) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_5"] & \mathbf{SU}(4) \arrow[d, "\pi_6"] \\
\mathbf{SO}(3) \arrow[r, "\iota"] & \mathbf{SO}(4) \arrow[r, "\iota"] & \mathbf{SO}(5) \arrow[r, "\iota"] & \mathbf{SO}(6)
\end{tikzcd}$$

Esperem que, més enllà de l'interès que aquestes isogènies clàssiques puguin tenir, el camí que hem seguit —i les digressions que hem fet— puguin ser útils per iniciar-se en l'estudi dels *grups de Lie compactes* i les seves apassionants propietats geomètriques i topològiques.[22]

Catedràtic de topologia jubilat
Universitat Autònoma de Barcelona
Jaume.Aguade@uab.cat

22 Si us ha agradat aquest estudi de les rotacions en dimensió $< 7$, no us perdeu els fets extraordinaris que succeeixen en dimensió 8.