Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 38, núm. 1, 2023. Pàg. 5–31. DOI: 10.2436/20.2002.01.107

Sobre l'equació de Monge-Ampère

Alessio Figalli

Resum: L'equació de Monge-Ampère és una equació en derivades parcials no lineal que apareix en molts problemes d'anàlisi i de geometria, com ara l'equació de curvatura de Gauss prescrita, la geometria afí, el transport òptim, etc. Aquesta equació prescriu el producte dels valors propis de la hessiana de u, en contrast amb l'equació el·líptica «model» $\Delta u = f$, que en prescriu la suma. L'objectiu d'aquest text és, en primer lloc, oferir una visió general de la teoria clàssica i, després, analitzar alguns avenços importants recents en aquest fascinant tema.

Paraules clau: Monge-Ampère, funcions convexes, regularitat el·líptica.

Classificació MSC2020: 35J96, 35J60.

1 Introducció

L'equació de Monge-Ampère és una equació en derivades parcials no lineal que apareix en molts problemes d'anàlisi i de geometria, com ara l'equació de curvatura de Gauss prescrita, la geometria afí, el transport òptim, etc.

En la forma clàssica, aquesta equació s'expressa com

$$\det D^2 u = f(x, u, \nabla u) \quad \text{en } \Omega, \tag{1}$$

on $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert, $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ és una funció convexa i $f\colon \Omega \times R \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ és coneguda. Dit d'una altra manera, l'equació de Monge-Ampère

Nota editorial: Aquest article forma part del projecte Articles Mirall de l'Institut d'Estudis Catalans, dins el marc del Pla d'Enfortiment de la Llengua Catalana en el Sistema Universitari i de Recerca de Catalunya impulsat pel Departament de Recerca i Universitats de la Generalitat de Catalunya i que promou la publicació en català d'articles actuals d'alt interès científic. L'article original d'Alessio Figalli, titulat «On the Monge-Ampère equation» i publicat a la revista *Astérisque* (vol. 1148, p. 477–504, `doi: 10.24033/ast.1092`), de la Société Mathématique de France, ha estat traduït per Òscar Aznar Alemany i revisat posteriorment pels editors. La traducció s'ha fet amb motiu de la concessió del premi Abel al professor Luis Caffarelli, el mes de maig de 2023, a Oslo, en part per les seves aportacions al problema de Monge-Ampère. Hem triat aquesta revisió que va fer el professor Alessio Figalli (Medalla Fields 2018) perquè, malgrat que és d'un nivell més tècnic que el dels articles que publiquem habitualment, ajuda a conèixer aquest problema, les contribucions que s'hi han fet i l'estat actual en què es troba. Volem agrair a Alessio Figalli i a la Société Mathématique de France el permís per a la traducció de l'article al català i la seva publicació al butlletí de la societat catalana de matemàtiques, així com als professors Xavier Cabré i Xavier Ros-Oton la seva col·laboració.

prescriu el producte dels valors propis de la hessiana de u, en contrast amb l'equació el·líptica «model» $\Delta u = f$, que en prescriu la suma. Com explicarem més endavant, la convexitat de la solució u és una condició necessària perquè l'equació sigui el·líptica degenerada, i així poder esperar resultats de regularitat.

L'objectiu d'aquest text és, en primer lloc, oferir una visió general de la teoria clàssica i, després, analitzar alguns avenços importants recents en aquest fascinant tema.

2 Antecedents històrics

L'equació de Monge-Ampère s'anomena així perquè primer la van formular en dues dimensions els matemàtics francesos Monge [52] i Ampère [9].

Minkowski ([50, 51]) va aconseguir els primers resultats remarcables de l'existència i la regularitat de l'equació de Monge-Ampère. Aproximant un conjunt convex fitat amb poliedres convexos amb les àrees de les cares prescrites, va demostrar l'existència d'una solució feble de «l'equació de curvatura de Gauss prescrita» (que ara s'anomena *problema de Minkowski*). Més tard, mitjançant poliedres convexos amb curvatures generalitzades als vèrtexs donades, Aleksandrov també va demostrar l'existència d'una solució feble en qualsevol dimensió i que les solucions en dues dimensions eren de classe C^1 [3, 4, 5].

Per a dimensions més altes i basant-se en els seus treballs anteriors, Aleksandrov ([6], i també Bakelman [10] en dues dimensions) va introduir una noció de solució generalitzada de l'equació de Monge-Ampère i va demostrar l'existència i unicitat de les solucions del problema de Dirichlet (vegeu la subsecció 3.2). La noció de solucions febles introduïda per Aleksandrov (conegudes ara com a *solucions d'Aleksandrov*) encara es fa servir amb freqüència i s'han dedicat molts esforços a demostrar la regularitat de les solucions d'Aleksandrov amb les hipòtesis adequades tant sobre el costat dret de l'equació com sobre les condicions de contorn.

La regularitat de les solucions febles en dimensions elevades és un problema molt delicat. Per a $n \geq 3$, Pogorelov va trobar una funció convexa a $\mathbb{R}^n$ que no és de classe C^2, però que satisfà l'equació de Monge-Ampère, amb el costat dret de l'equació analític i positiu, a l'entorn de l'origen (vegeu (15) més endavant). Ben aviat va ser evident que el problema principal en la falta de regularitat era la presència d'un segment lineal en la gràfica de u. En efecte, Calabi ([20]) i Pogorelov ([57]) van aconseguir demostrar estimacions interiors *a priori* de la segona i la tercera derivades per a solucions estrictament convexes o per a solucions sense un segment lineal amb tots dos extrems a la vora. No obstant això, per a fer les computacions necessàries per a deduir aquestes estimacions *a priori*, calia suposar certa la regularitat C^4. Per tant, una manera natural de demostrar l'existència de solucions suaus era aproximar el problema de Dirichlet amb problemes més fàcils que ja tenien solucions C^4, aplicar les estimacions de Pogorelov i Calabi per aconseguir els límits *a priori* C^2/C^3 i llavors prendre el límit dels problemes aproximants. Cheng i Yau ([21]) i Lions ([46]) van aplicar aquest argument amb èxit per obtenir la suavitat interior de les solucions.

Pel que fa a la regularitat de la vora, gràcies a la teoria de la regularitat desenvolupada per Ivochkina [39], Krylov [44] i Caffarelli, Nirenberg i Spruck [19], es pot utilitzar el mètode de continuïtat i les estimacions d'Evans-Krylov [28, 43] per a obtenir solucions suaus globals del problema de Dirichlet (vegeu la subsecció 3.3). En particular, les solucions d'Aleksandrov són suaus fins a la vora sempre que totes les dades conegudes siguin suaus.

En totes les situacions anteriors se suposa que f és positiva i prou suau. Quan f se suposa, només, acotada superiorment i inferiorment per una constant positiva, Caffarelli va demostrar la regularitat $C^{1,\alpha}$ de les solucions estrictament convexes [14]. A més, quan f és contínua (en concret $C^{0,\alpha}$), usant arguments de pertorbació, Caffarelli va demostrar les estimacions interiors $W^{2,p}$ per a qualsevol $p > 1$ (en concret, estimacions interiors $C^{2,\alpha}$) [13].

Com s'explica a la subsecció 3.5, aquests resultats es poden aplicar a obtenir la regularitat tant en el problema de Minkowski com en el problema de transport òptim. Per descomptat, només són algunes de les possibles aplicacions de la teoria de la regularitat per a Monge-Ampère. Per exemple, com es descriu a l'article de revisió [64, seccions 5 i 6], les equacions de Monge-Ampère tenen un paper clau en la geometria afí, com ara en l'estudi de les esferes afins i de les superfícies maximals afins.

3 Teoria clàssica

Aquesta secció inclou una breu visió general d'alguns resultats rellevants de l'equació de Monge-Ampère. Abans de tractar el concepte de les solucions febles i la seva regularitat, primer discutim la convexitat de les solucions i el concepte «el·lipticitat degenerada» associat a aquesta equació.

3.1 L'el·lipticitat degenerada de l'equació de Monge-Ampère

Suposem que $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una solució suau de (1) amb $f = f(x) > 0$ suau. Un mètode estàndard per a demostrar la regularitat de les solucions d'equacions diferencials parcials no lineals consisteix a diferenciar l'equació de la qual u és solució per a obtenir una equació de segon ordre lineal per a les primeres derivades. Més en concret, fixem una direcció $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ i diferenciem (1) en la direcció e. Aleshores, utilitzant la fórmula

$$\frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \det(A + \varepsilon B) = \det(A)\,\mathrm{tr}(A^{-1}B) \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ amb } A \text{ invertible},$$

obtenim l'equació

$$\det(D^2u)u^{ij}\partial_{ij}u_e = f_e \quad \text{en } \Omega. \tag{2}$$

Aquí u^{ij} denota la matriu inversa de $u_{i,j} := (D^2u)_{ij}$, els subíndexs denoten les derivades parcials (per tant, $u_e := \partial_e u$), i sumem els índexs repetits. Com que $\det D^2u = f > 0$, l'equació anterior es pot reescriure així:

$$a_{ij}\partial_{ij}u_e = \frac{f_e}{f} \quad \text{en } \Omega, \quad \text{on } a_{ij} := u^{ij}. \tag{3}$$

Per tant, per obtenir estimacions de regularitat de u_e, voldríem que la matriu a_{ij} fos una matriu definida positiva per a aplicar la teoria de la regularitat el·líptica per a equacions lineals. Però, perquè la matriu $a_{ij} = u^{ij}$ sigui definida positiva, cal que D^2u sigui definida positiva, que és exactament la condició de convexitat de u.[1]

També observem que, sense cap límit *a priori* de D^2u, la matriu a_{ij} podria tenir valors propis arbitràriament petits i per això es diu que (1) és «el·líptica degenerada».

Fixem-nos que, si es pot demostrar que

$$c_0 \,\mathrm{Id} \le D^2u \le C_0 \,\mathrm{Id} \quad \text{dins de } \Omega \tag{4}$$

per a algunes constants positives $c_0, C_0 > 0$, llavors $C_0^{-1}\,\mathrm{Id} \le (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \le c_0^{-1}\,\mathrm{Id}$ i l'equació linealitzada (3) esdevé uniformement el·líptica. Per això, demostrar (4) és un dels passos clau per a la regularitat de les solucions de (1).

En relació amb aquest fet, observem que, sota la condició $f(x) \ge \lambda > 0$, el producte dels valors propis de D^2u (que són positius) és fitat inferiorment. Per tant, si es pot demostrar que $|D^2u| \le C$, és fàcil arribar a la conclusió que (4) és vàlida (vegeu més detalls a [31, observació 1.1]).

En conclusió, el pas clau per a la suavitat de les solucions consisteix a demostrar que D^2u és acotada.

3.2 Solucions d'Aleksandrov

En l'estudi del problema de Minkowski, Aleksandrov va introduir la noció de solució feble de l'equació de Monge-Ampère que li permetia donar un sentit a la curvatura de Gauss dels conjunts convexos no suaus. Vegem aquest concepte fonamental.

Donat un domini convex obert Ω, la *subdiferencial* d'una funció convexa $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ve donada per

$$\partial u(x) := \{p \in \mathbb{R}^n : u(y) \ge u(x) + p \cdot (y-x) \quad \forall y \in \Omega\}.$$

Llavors es defineix la *mesura de Monge-Ampère* de u com

$$\mu_u(E) := |\partial u(E)| \quad \text{per a cada conjunt de Borel } E \subset \Omega,$$

on

$$\partial u(E) := \bigcup_{x\in E} \partial u(x)$$

1 És clar que la teoria seria similar si suposéssim que u fos còncava. La diferència real apareix si la hessiana de u és indefinida, ja que (3) esdevé hiperbòlica (i llavors s'anomena *equació de Monge-Ampère hiperbòlica*). Aquest problema també és molt interessant, però la teoria per a aquest tipus d'equació és del tot diferent de la de l'equació de Monge-Ampère clàssica i queda fora de l'abast d'aquest article.

i $|\cdot|$ denota la mesura de Lebesgue. Es pot demostrar que μ_u és una mesura de Borel (vegeu [31, teorema 2.3]). Cal destacar que, si $u \in C^2(\Omega)$, la fórmula del canvi de variable dona lloc a

$$|\partial u(E)| = |\nabla u(E)| = \int_E \det D^2 u(x)\, dx \quad \text{per a tot conjunt de Borel } E \subset \Omega,$$

i, per tant,

$$\mu_u = \det D^2 u(x)\, dx$$

(vegeu [31, exemple 2.2]).

Aquest argument genera la definició següent:

Definició 3.1 (Solucions d'Aleksandrov). Donat un conjunt obert i convex Ω i una funció $f\colon \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, una funció convexa $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ s'anomena *solució d'Aleksandrov* de l'equació de Monge-Ampère

$$\det D^2 u = f(x, u, \nabla u) \quad \text{en } \Omega$$

si $\mu_u = f(x, u, \nabla u)\, dx$ com a mesures de Borel, és a dir,

$$\mu_u(A) = \int_A f(x, u, \nabla u)\, dx \quad \forall A \subset \Omega \text{ Borel.}$$

Fixem-nos que, com que les funcions convexes són localment Lipschitz, són diferenciables gairebé pertot. Per tant, $f(x, u, \nabla u)$ és definida gairebé pertot i la definició anterior té sentit.

Per a simplificar la presentació, discutirem només el cas $f = f(x)$, però tots els arguments es poden estendre al cas $f = f(x, u, \nabla u)$ amb la condició que $\partial_u f \geq 0$ (fet necessari per a assegurar que el principi del màxim sigui vàlid; vegeu [35, capítol 17]).

De fet, inclús quan interessa resoldre l'equació de Monge-Ampère amb el costat dret suau, per a demostrar l'existència de solucions és útil tenir en compte també les mesures de Borel com a costat dret de l'equació. Per tant, donada una mesura de Borel no negativa ν dins de Ω, podem dir que u és una solució d'Aleksandrov de $\det D^2 u = \nu$ si $\mu_u = \nu$.

Una propietat fonamental de la mesura de Monge-Ampère és que és estable en condicions de convergència uniforme (vegeu [31, proposició 2.6]):

Proposició 3.2. Sigui $u_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una successió de funcions convexes que convergeixen uniformement i localment a u. Aleshores les mesures de Monge-Ampère associades μ_{u_k} convergeixen feblement* a μ_u, és a dir,

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu_{u_k} \to \int_\Omega \varphi\, d\mu_u \quad \forall \varphi \in C_c(\Omega).$$

Una altra propietat crucial d'aquesta definició és la validesa del principi de comparació (vegeu [31, teorema 2.10]):

Proposició 3.3. Suposem que $\mathcal{U} \subset \Omega$ és un conjunt obert i fitat i que $u, v\colon \Omega \to \mathbb{R}$ són dues funcions convexes que satisfan

$$\begin{cases} \mu_u \le \mu_v & \text{en } \mathcal{U}, \\ u \ge v & \text{sobre } \partial\mathcal{U}. \end{cases}$$

Aleshores,

$$u \ge v \quad \text{en } \mathcal{U}.$$

Una conseqüència directa d'aquest resultat és la unicitat i l'estabilitat de les solucions (vegeu [31, corol·laris 2.11 i 2.12]):

Corol·lari 3.4. Sigui Ω un conjunt obert i fitat i sigui $\nu_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una família de mesures de Borel no negatives que satisfan $\sup_k \nu_k(\Omega) < \infty$. Aleshores, per a qualsevol k existeix com a molt una funció convexa $u_k\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que soluciona el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mu_{u_k} = \nu_k & \text{en } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

A més a més, si $\nu_k \rightharpoonup^* \nu_\infty$ i les solucions u_k existeixen, llavors $u_k \to u_\infty$ localment de manera uniforme, on u_∞ és l'única solució de

$$\begin{cases} \mu_{u_\infty} = \nu_\infty & \text{en } \Omega, \\ u_\infty = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Finalment, aprofitant aquests resultats, es pot demostrar l'existència de solucions (vegeu [31, teorema 2.13]):

Teorema 3.5. Sigui Ω un conjunt obert, convex i fitat i sigui ν una mesura de Borel no negativa amb $\nu(\Omega) < \infty$. Aleshores existeix una única funció convexa $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que soluciona el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mu_u = \nu & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Idea de la demostració. Com que la unicitat és conseqüència del corol·lari 3.4, només cal demostrar-ne l'existència.

Gràcies a l'estabilitat del corol·lari 3.4, com que qualsevol mesura finita pot ser aproximada en la topologia feble* per una suma discreta de deltes de Dirac, només cal resoldre el problema de Dirichlet (5) quan $\nu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \, \delta_{x_i}$ amb $x_i \in \Omega$ i $\alpha_i > 0$.

Per a demostrar l'existència d'una solució s'utilitza l'anomenat *mètode de Perron*: es defineix

$$S[\nu] := \{v\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ convexa} : v\,|_{\partial\Omega} = 0,\ \mu_v \ge \nu \text{ en } \Omega\},$$

i es demostra que aquest conjunt no és buit i que és tancat en prendre màxims (és a dir, $v_1, v_2 \in S[\nu] \Rightarrow \max\{v_1, v_2\} \in S[\nu]$). Gràcies a aquestes propietats, s'obté que $u := \sup_{v \in S[\nu]} v$ encara és un element de $S[\nu]$ i aleshores aprofita la maximalitat de u per a deduir que $\mu_u = \nu$.

Vegeu [31, demostració del teorema 2.13] per a més detalls. □

De fet, si Ω és estrictament convex, un argument similar combinat amb l'existència de barreres adequades permet demostrar l'existència de solucions per a qualsevol condició de contorn contínua (vegeu, per exemple, [31, teorema 2.14]):

TEOREMA 3.6. Sigui Ω un conjunt obert, estrictament convex i fitat, sigui ν una mesura de Borel no negativa amb $\nu(\Omega) < \infty$ i sigui $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funció contínua. Aleshores existeix una única funció convexa $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que soluciona el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mu_u = \nu & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

3.3 Existència de solucions suaus i regularitat global

Com s'ha vist a la secció anterior, la unicitat de les solucions del problema de Dirichlet és vàlida fins i tot al nivell de les solucions febles. Per tant, la qüestió principal és l'existència.

L'existència de solucions suaus de l'equació de Monge-Ampère es remunta als treballs de Pogorelov [57]. S'obté mitjançant el popular mètode de continuïtat que ara descrivim breument (vegeu [35, capítol 17] i [31, secció 3.1] per a una explicació més detallada).

Suposem que Ω és un domini uniformement convex suau,[2] i considerem una funció $\bar{u}\colon \Omega \to \mathbb{R}$ uniformement convexa suau que s'anul·la sobre $\partial\Omega$. Llavors, si definim $\bar{f} := \det D^2\bar{u}$, tenim que $\bar{f} > 0$ en $\overline{\Omega}$ i $\bar{u}$ és solució de

$$\begin{cases} \det D^2\bar{u} = \bar{f} & \text{en } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suposem ara que volem resoldre

$$\begin{cases} \det D^2 u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

per a una $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ donada amb $f > 0$. Definim $\{f_t := (1-t)\bar{f} + t\,f\}_{t\in[0,1]}$, i considerem la família 1-paramètrica de problemes

$$\begin{cases} \det D^2 u_t = f_t & \text{en } \Omega, \\ u_t = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

2 Diem que un domini és *uniformement convex* si existeix un radi R tal que

$$\Omega \subset B_R(x_0 + R\nu_{x_0}) \quad \text{per a tot } x_0 \in \partial\Omega,$$

on ν_{x_0} és la normal interior de Ω en x_0. Observem que, per a un domini suau, això equival a demanar que la segona forma fonamental de $\partial\Omega$ sigui definida positiva uniformement.

El mètode de continuïtat consisteix a demostrar que el conjunt de $t \in [0,1]$ tal que (8) és resoluble de manera suau és obert i tancat alhora. Com que el problema té solució per a $t = 0$ (perquè $\bar{u}$ n'és una solució), ha d'existir una solució suau de (7).

Més precisament, suposant que Ω és un domini uniformement convex de classe $C^{2,\alpha}$ per a alguna $\alpha \in (0,1)$, se'n desprèn que la funció $\bar{f} = \det D^2\bar{u}$ pertany a $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Per tant, suposant que $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, podem considerar un conjunt de funcions

$$C := \{v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ funcions convexes de classe } C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),\ v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\},$$

i definir l'aplicació no lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : C \times [0,1] &\to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \\ (v,t) &\mapsto \det D^2 v - f_t. \end{aligned}$$

L'objectiu és demostrar que el conjunt

$$\mathcal{T} := \{t \in [0,1] : \text{existeix una } u_t \in C \text{ tal que } \mathcal{F}(u_t,t) = 0\}$$

no és buit i que és obert i tancat alhora en $[0,1]$. Ara explicarem els passos principals d'aquest argument.

- Es deriva que no és buit del fet que $\mathcal{F}(\bar{u},0) = 0$; per tant, $0 \in \mathcal{T}$.
- Es deriva que és obert del teorema de la funció implícita en espais de Banach (vegeu [35, teorema 17.6]). En efecte, la diferencial de Fréchet de $\mathcal{F}$ respecte a v ve donada per l'operador de Monge-Ampère linealitzat (compareu-ho amb (2))

$$D_u\mathcal{F}(v,t)[h] = \det(D^2u)u^{ij}h_{ij}, \quad h = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{9}$$

  on definim $h_{ij} := \partial_{ij}h$, u^{ij} com la inversa de $u^{ij} := \partial_{ij}u$ i sumem els índexs repetits. Fixeu-vos que, si una funció v està acotada a $C^{2,\alpha}$ i $\det D^2 v$ està acotada inferiorment, aleshores el valor propi més petit de D^2v està fitat inferiorment per una constant positiva i l'operador linealitzat esdevé el·líptic uniforme amb coeficients $C^{0,\alpha}$ (compareu-ho amb la subsecció 3.1). Per tant, la teoria clàssica de Schauder assegura la invertibilitat de $D_u\mathcal{F}(u_t,t)$ sempre que u_t sigui solució $\mathcal{F}(u_t,t) = 0$ (vegeu, per exemple, [35, capítol 6]).
- Es demostra que és tancat mitjançant estimacions *a priori* globals. En concret, el següent límit *a priori* fonamental és vàlid (vegeu [31, teorema 3.2]):[3]

TEOREMA 3.7. Sigui Ω un domini uniformement convex de classe C^3 i sigui $u \in C^4(\Omega)$ una solució de (7) amb $f \in C^2(\overline{\Omega})$ i $0 < \lambda \le f \le 1/\lambda$. Aleshores existeix una constant C que depèn només de Ω, λ, $||f||_{C^2(\overline{\Omega})}$ tal que

$$||D^2u||_{C^0(\overline{\Omega})} \le C.$$

3 La condició que $u \in C^4(\Omega)$ del teorema 3.7 no és essencial, ja que només és necessària per a justificar els càlculs de la demostració.

Com s'ha vist a la subsecció 3.1, quan se satisfà una fita uniforme de D^2u dins de $\overline{\Omega}$, l'equació de Monge-Ampère esdevé uniformement el·líptica i la teoria de la regularitat el·líptica clàssica proporciona estimacions $C^{2,\alpha}$ per a solucions de $\mathcal{F}(u_t, t) = 0$, fet que demostra que $\mathcal{T}$ és tancat, tal com es volia provar.

Gràcies a aquest argument es pot confirmar la validesa del següent resultat d'existència:

Teorema 3.8. Sigui Ω un domini uniformement convex de classe C^3. Aleshores, per a qualsevol $f \in C^2(\overline{\Omega})$ amb $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$, existeix una única solució $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de (7).

Tenint en compte que la unicitat és vàlida també al nivell de les solucions d'Aleksandrov, això demostra la regularitat $C^{2,\alpha}$ (per a qualsevol $\alpha < 1$) de les solucions d'Aleksandrov en dominis uniformement convexos C^3 amb un costat dret de l'equació de classe C^2. És interessant destacar que la condició de regularitat C^3 a la vora és necessària, tal com demostra Wang a [67].

3.4 Teoria de la regularitat de Caffarelli

Estudiem ara la regularitat de les solucions d'Aleksandrov amb condicions de suavitat més febles en el costat dret de l'equació.

Als anys noranta Caffarelli va desenvolupar una teoria de la regularitat per a solucions d'Aleksandrov que demostrava que les solucions estrictament convexes de (1) són $C^{1,\gamma}$ localment sempre que $\lambda \leq f \leq 1/\lambda$ per a alguna $\lambda > 0$ [12, 14, 15]. Destaquem que, per a solucions febles, la convexitat estricta no va implícita amb la positivitat de f (excepte per a $n = 2$) i és, de fet, necessària per a la regularitat. Vegeu la subsecció 4.1 més endavant.

El resultat següent es demostra a [14]:

Teorema 3.9. Sigui $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una solució d'Aleksandrov estrictament convexa de $\mu_u = f\,dx$ amb $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$. Aleshores, $u \in C^{1,\gamma}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per a alguna $\gamma = \gamma(n, \lambda) > 0$.

Per explicar la idea de la demostració d'aquest teorema, fixem-nos en aquesta propietat simple de les solucions de l'equació de Monge-Ampère (que és una altra manifestació de la seva el·lipticitat degenerada): si $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ és una transformació afí amb $\det A = 1$,[4] i u és una solució de l'equació de Monge-Ampère amb f al costat dret, aleshores $u \circ A$ és una solució de l'equació de Monge-Ampère amb $f \circ A$ al costat dret. Aquesta invariància afí crea obstruccions importants per a obtenir una teoria de la regularitat local. En efecte, per exemple, les funcions

$$u_\varepsilon(x_1, x_2) = \frac{\varepsilon x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2\varepsilon} + 1$$

són solucions de $\det D^2 u_\varepsilon = 1$ dins del conjunt convex $\{u_\varepsilon < 0\}$. Per tant, tret que el conjunt de nivell $\{u_\varepsilon = 0\}$ sigui prou «rodó», no hi ha cap esperança

4 Donada una transformació afí $Ax := Mx + v$, per abús de notació escrivim $\det A$ en comptes de $\det M$.

d'aconseguir estimacions *a priori* de u. La intuïció de Caffarelli el va portar a utilitzar l'anomenat *lema de John* [42]:

LEMA 3.10. Sigui $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt convex, fitat i amb interior no buit. Aleshores existeix un el·lipsoide E que satisfà

$$E \subset \mathcal{K} \subset nE, \tag{10}$$

on nE denota la dilatació de E per un factor n respecte al seu centre.

Diem que un conjunt convex $\mathcal{K}$ és *normalitzat* si

$$B_1 \subset \mathcal{K} \subset nB_1.$$

Llavors el lema 3.10 afirma que per a cada conjunt obert, convex i fitat $\mathcal{K}$ existeix una transformació afí $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $A(\mathcal{K})$ és normalitzada.

Fixem-nos que, si u és estrictament convexa, donat un punt $x \in \Omega$ i $p \in \partial u(x)$, es pot escollir $t > 0$ prou petita tal que el conjunt convex

$$S(x,p,t) := \{z \in \Omega : u(z) - u(x) - p \cdot (z - x) < t\} \tag{11}$$

està contingut estrictament dins de Ω, és a dir, $\overline{S(x,p,t)} \subset \Omega$. Llavors, si substituïm $u(z)$ per $u_x(z) := u(z) - u(x) - p \cdot (z - x) - t$, tenim que

$$\lambda\, dx \le \mu_{u_x} \le \frac{1}{\lambda}\, dx \quad \text{en } S(x,p,t), \qquad u_x = 0 \quad \text{sobre } \partial(S(x,p,t)).$$

A més, si $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ normalitza $S(x,p,t)$, aleshores $v := (\det A)^{2/n} u_x \circ A^{-1}$ és solució de

$$\lambda\, dx \le \mu - v \le \frac{1}{\lambda}\, dx \quad \text{en } A(S(x,p,t)), \qquad v = 0 \quad \text{sobre } \partial(A(S(x,p,t))). \tag{12}$$

Gràcies a aquest raonament, n'hi ha prou de demostrar el resultat quan u és una solució dins d'un conjunt convex normalitzat. Dit d'una altra manera, el teorema 3.9 és una conseqüència directa del resultat següent:

TEOREMA 3.11. Sigui Ω un conjunt convex normalitzat i u una solució de

$$\mu_u = f\, dx \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

amb $0 < \lambda \le f \le 1/\lambda$. Aleshores, u és estrictament convexa dins de Ω i $u \in C^{1,\gamma}_{\text{loc}}(\Omega)$, per a alguna $\gamma = \gamma(n,\lambda) > 0$.

Un pas clau en la demostració d'aquest teorema és demostrar que les solucions de (7) en dominis normalitzats tenen un mòdul universal de convexitat estricta. Un ingredient fonamental per a demostrar-ho és l'important resultat següent de Caffarelli [12] (vegeu també [31, teorema 4.10]):

Proposició 3.12. Sigui u una solució de

$$\lambda\, dx \leq \mu_u \leq \frac{1}{\lambda}\, dx$$

dins d'un conjunt convex Ω, $x \in \Omega$ i $p \in \partial u(x)$. Suposem que $\ell(z) := u(x) + p \cdot (z - x)$. Si el conjunt convex

$$W := \{z \in \Omega : u(z) = \ell(z)\}$$

conté més d'un punt, aleshores no pot tenir punts extremals dins de Ω.

Aquest enunciat afirma que, si una solució coincideix amb un dels seus plans de suport en més d'un punt (és a dir, no és estrictament convexa), llavors el conjunt de contacte ha de creuar el domini. En particular, això no és possible si $u|_{\partial\Omega} = 0$ (perquè llavors es deduiria que $u \equiv 0$ per la convexitat de u), fet que demostra que les solucions de (12) són estrictament convexes.

Idea de la demostració del teorema 3.11. Com s'ha vist, la proposició 3.12 implica que u és estrictament convexa. A més, per compacticitat es pot demostrar que el mòdul de convexitat estricta de u és universal (vegeu [31, secció 4.2.2]).

Apliquem, doncs, aquesta informació a totes les escales. Més precisament, donat qualsevol punt $x \in \Omega$, $p \in \partial u(x)$ i $t > 0$ petit, considerem $u_x(z) := u(z) - u(x) - p \cdot (z - x) - t$. Aleshores, si $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ normalitza $S(x, p, t)$, la funció $v := (\det A)^{2/n} u_x \circ A^{-1}$ té les mateixes propietats de convexitat estricta que u. Utilitzant aquest fet en tots els punts x i per a tot valor de t petit, un argument d'iteració curós demostra la validesa del teorema 3.11 (vegeu la demostració de [31, teorema 4.20] per a més detalls). □

Observem que el teorema 3.8 és insatisfactori des del punt de vista de les equacions en derivades parcials: en efecte, requereix la regularitat C^2 de f per a demostrar la regularitat $C^{2,\alpha}$ de la solució, mentre que la teoria de la regularitat el·líptica suggereix que $f \in C^{0,\alpha}$ hauria de ser suficient. Això és cert, com va demostrar Caffarelli a [13] (de nou, només cal considerar conjunts convexos normalitzats):

Teorema 3.13. Sigui Ω un conjunt convex normalitzat i sigui u una solució de

$$\mu_u = f\, dx \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

amb $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$ i $f \in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Aleshores, $u \in C^{2,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

La demostració d'aquest teorema es basa en la propietat que, sota la hipòtesi que f és quasi constant (per exemple, molt propera a 1), u és molt propera a una solució de $\mu_v = dx$. Com que aquesta última funció és suau (segons el teorema 3.8), un argument d'iteració permet demostrar que la norma $C^{2,\alpha}$ de u es manté acotada (vegeu també [31, teorema 4.42]).

Seguint aquesta línia de raonament també es pot demostrar el teorema següent ([13]):

Teorema 3.14. Sigui Ω un conjunt convex normalitzat i sigui u una solució de

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

Aleshores, per a cada $p > 1$ existeix una constant positiva $\delta(p)$ tal que, si $||f - 1||_\infty \leq \delta(p)$, llavors $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Com que qualsevol funció contínua és arbitràriament propera a una constant a escales petites, s'obté el següent:

Corol·lari 3.15. Sigui Ω un conjunt convex normalitzat i sigui u una solució de

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

amb $f > 0$ contínua. Aleshores $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per a qualsevol $p < 1$.

Observació 3.16. Com s'observa a [30], aplicant les idees introduïdes a [24, 26], es pot trobar una estimació explícita per a $\delta(p)$ en funció de p en el teorema 3.14, més concretament, $\delta(p) \simeq e^{-Cp}$ per a alguna constant dimensional $C > 0$.

3.5 Algunes aplicacions

Tot seguit descrivim breument dues aplicacions de la teoria de la regularitat desenvolupada abans.

3.5.1 El problema de Minkowski Un problema clàssic en geometria convexa és prescriure una quantitat geomètrica (l'àrea superficial, la curvatura de Gauss, etc.) i trobar condicions necessàries i suficients que assegurin que tal quantitat ve d'un domini convex. En aquest apartat analitzem breument el problema de la «curvatura de Gauss prescrita».

Suposem que $K \subset \mathbb{R}^n$ és un domini obert, convex i fitat que conté l'origen i parametritzem ∂K en coordenades polars així:

$$\partial K = \{\rho(x)x : x \in \mathbb{S}^{n-1},\ \rho\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^+\}.$$

Llavors, associem a qualsevol punt $z \in \partial K$ l'aplicació normal

$$N_K(z) := \{y \in \mathbb{S}^{n-1} : K \subset \{y : \langle y, w - z\rangle \leq 0\}\}.$$

Geomètricament, l'aplicació normal troba les normals de tots els hiperplans de suport a z i es pot pensar en N_K com un anàleg de l'aplicació subdiferencial.

Per acabar, considerem l'aplicació de Gauss (multivaluada) $G_K\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$ definida per

$$G_K(x) := N_K(\rho(x)x),$$

i definim la mesura de curvatura de Gauss

$$\mu_K(E) := \mathcal{H}^{n-1}(G_K(E)) \quad \forall E \subset \mathbb{S}^{n-1} \text{ Borel},$$

on $\mathcal{H}^{n-1}$ denota la mesura de Hausdorff de dimensió $(n-1)$ a $\mathbb{S}^{n-1}$.

Pel que fa a la mesura de Monge-Ampère, es pot demostrar que μ_K és una mesura de Borel. Llavors ens fem la pregunta següent: *Donada una mesura de Borel ν a $\mathbb{S}^{n-1}$, podem trobar un conjunt obert, convex i fitat K que contingui l'origen i tal que $\mu_K = \nu$?*

A [2, 3], Aleksandrov va trobar les condicions necessàries i suficients per a assegurar l'existència d'una solució d'aquest problema. Pel que fa a l'existència de les solucions d'Aleksandrov de l'equació de Monge-Ampère, l'existència de K es demostra primer quan ν és una suma discreta de deltes de Dirac i llavors s'obté el cas general per aproximació. La demostració original d'existència d'Aleksandrov quan ν és discreta es basa en un argument topològic que es fonamenta en el teorema d'invariància del domini [2] (vegeu també [5]).

Gràcies a la teoria de la regularitat desenvolupada per Caffarelli, s'obté el resultat de regularitat següent:

Teorema 3.17. Sigui $K \subset \mathbb{R}^n$ un domini obert, convex i fitat que conté l'origen, i suposem que $\mu_K = f\, d\mathcal{H}^{n-1}$ per a alguna $f\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$, amb $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$. Aleshores ∂K és estrictament convexa i de classe $C^{1,\gamma}$. Si, a més, $f \in C^{0,\alpha}$ per a alguna $\alpha \in (0,1)$, aleshores $\partial K \in C^{2,\alpha}$.

Idea de la demostració. Com que K és convex, es pot parametritzar localment la vora com la gràfica d'una funció convexa $u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. És un fet clàssic que la curvatura de Gauss de la gràfica d'una funció $v\colon \Omega \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ve donada per

$$\frac{\det D^2 v}{(1 + |\nabla v|^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Llavors, suposant que $\mu_K = f\, d\mathcal{H}^{n-1}$, un argument d'aproximació basat en la proposició 3.2 resulta en la validesa de l'equació

$$\mu_u = f(x)(1 + |\nabla u|^2)^{\frac{n+1}{2}}\, dx,$$

on ∇u existeix en quasi tots els punts, ja que u és localment Lipschitz (perquè és convexa). En particular, μ_u és fitada localment. Si s'apliquen la proposició 3.12 i el teorema 3.9, es dedueix que ∂K és estrictament convexa i de classe $C^{1,\gamma}$. Per acabar, la regularitat $C^{2,\alpha}$ quan $f \in C^{0,\alpha}$ es deriva del teorema 3.13. □

Observació 3.18. La teoria de la regularitat per a Monge-Ampère té un paper crucial en moltes altres variants del problema de Minkowski. Per exemple, apareix en la demostració de l'existència i la unicitat de dominis convexos amb mesures harmòniques prescrites [40].

3.5.2 El problema del transport òptim Suposem que μ i ν denoten dues mesures de probabilitat en $\mathbb{R}^n$. El problema del transport òptim (amb cost quadràtic) consisteix a trobar la manera «òptima» de transportar μ a ν tenint en compte que el cost de transportar un punt des de x fins a y és $|x-y|^2$. Per tant, de manera natural, això porta a minimitzar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S(x)-x|^2\,d\mu(x)$$

sobre totes les aplicacions S que «transporten μ a ν». En termes matemàtics, això es correspon a dir que $S_\#\mu = \nu$, és a dir, per a cada funció de Borel fitada $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\,d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(S(x))\,d\mu(x).$$

Segons un teorema clàssic de Brenier [11] (vegeu també [22, 49, 58]), l'existència i la unicitat d'aplicacions òptimes és vàlida sempre que μ sigui absolutament contínua. A més, aquesta aplicació ve donada pel gradient d'una funció convexa. Això es resumeix en el teorema següent:

Teorema 3.19. Siguin μ, ν mesures de probabilitat en $\mathbb{R}^n$ amb $\mu = f\,dx$ i $\nu = g\,dy$. Aleshores:

- Existeix una aplicació de transport òptim única T que és μ-quasi pertot (μ-q. p.)
- Existeix una funció convexa semicontínua inferior $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tal que $T = \nabla u$ que és μ-q. p. i

$$\det(D^2u) = \frac{f}{g\circ\nabla u} \quad \mu\text{-q. p.}$$

Aquest teorema demostra que les aplicacions de transport òptim solucionen una equació de Monge-Ampère en un sentit feble, que generalment s'anomena *sentit de Brenier*.

Mentre que per a les solucions d'Aleksandrov es pot aplicar la teoria de la regularitat desenvolupada en les seccions anteriors, Caffarelli va observar a [15] que fins i tot per a densitats suaus no es pot esperar cap resultat de regularitat general per a les solucions de Brenier sense algunes condicions geomètriques sobre el suport de la mesura objectiu. En efecte, suposem que $n=2$ i que $X = B_1$ és la bola unitat centrada a l'origen i que $Y = (B_1^+ + e_1)\cup(B_1^- - e_1)$ és la unió de dues semiboles, on

$$B_1^+ := (B_1\cap\{x_1>0\}),\quad B_1^- := (B_1\cap\{x_1<0\}),$$

i (e_1,e_2) denota la base canònica de $\mathbb{R}^2$. Aleshores, si $f = \frac{1}{|X|}\mathbf{1}_X$ i $g = \frac{1}{|Y|}\mathbf{1}_Y$, l'aplicació de transport òptim ve donada per

$$T(x) := \begin{cases} x+e_1 & \text{si } x_1>0,\\ x-e_1 & \text{si } x_1<0,\end{cases}$$

que es correspon al gradient de la funció convexa $u(x) = |x|^2/2 + |x_1|$.

Per tant, si es busca un resultat de regularitat de u, com a mínim hem de suposar que Y és connex. No obstant això, partint de la construcció anterior i considerant una seqüència de dominis Y_ε als quals s'afegeix una tira petita d'amplada $\varepsilon > 0$ per a unir $(B_1^+ + e_1) \cup (B_1^- - e_1)$, també es pot demostrar que, per a $\varepsilon > 0$ prou petita, l'aplicació òptima encara serà discontínua (vegeu [15, 29]). Per tant, la connectivitat no és suficient per a assegurar la regularitat. Com va demostrar Caffarelli [15, 17], la convexitat de Y és la condició correcta per a assegurar que una solució de Brenier és també una solució d'Aleksandrov i que, llavors, la teoria de la regularitat general de les seccions anteriors és aplicable (vegeu també [27, 65]):

Teorema 3.20. Suposem que $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ són dos conjunts oberts i fitats i que $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ són dues densitats de probabilitat que són zero fora de X, Y i estan fitades superiorment i inferiorment per una constant positiva en X, Y, respectivament. Denotem amb $T = \nabla u\colon X \to Y$ l'aplicació de transport òptim obtinguda del teorema 3.19, i suposem que Y és convex. Aleshores existeix una $\gamma > 0$ tal que $T \in C^{0,\gamma}_{\mathrm{loc}}(X)$. A més, si $f \in C^{k,\alpha}(\bar{X})$ i $g \in C^{k,\alpha}(\bar{Y})$ per a algun enter $k \geq 0$ i algun $\alpha \in (0, 1)$, i si tant X com Y són suaus i uniformement convexos, aleshores $T\colon X \to Y$ és un difeomorfisme global de classe $C^{k+1,\alpha}$.

Com es mostra, per exemple, a [34], la convexitat de l'objectiu és necessària per a la continuïtat de l'aplicació de transport òptim. I encara pitjor, com s'ha vist recentment a [41], fins i tot amb densitats constants es pot construir una aplicació de transport òptim discontínua des d'un domini convex suau fins a una petita deformació Lipschitz del mateix domini.

De manera natural, tot això motiva la pregunta següent: *Què es pot dir quan s'elimina la condició de convexitat de l'objectiu?* Com s'explica a [25, 33] (vegeu també [29] per a una descripció més precisa del conjunt singular en dues dimensions i [36] per a una demostració variacional recent del resultat de [33]), sempre es pot demostrar que l'aplicació de transport òptim és suau fora d'un conjunt tancat de mesura zero.

4 Desenvolupaments recents I: regularitat interior

A [66] Wang va mostrar que, per a qualsevol $p > 1$, existeix una funció f que satisfà $0 < \lambda(p) \leq f \leq 1/\lambda(p)$ tal que $u \notin W^{2,p}_{\mathrm{loc}}$. Aquest contraexemple constata que els resultats de Caffarelli són més o menys òptims. Ara bé, una pregunta important que quedava sense resoldre era si les solucions estrictament convexes de $\mu_u = f\,dx$ amb $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$ podrien ser com a mínim $W^{2,1}_{\mathrm{loc}}$, o fins i tot $W^{2,1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}$ per a algun $\varepsilon = \varepsilon(n, \lambda) > 0$. El tema de la regularitat $W^{2,1}_{\mathrm{loc}}$ ha estat resolt fa poc per De Philippis i Figalli a [24]. Seguint les idees que s'hi introdueixen, el resultat s'ha redefinit com a $u \in W^{2,1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}$ per a algun $\varepsilon > 0$ (vegeu [26, 63]).

Teorema 4.1. Sigui Ω un conjunt convex normalitzat i u una solució de

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

amb $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$. Aleshores existeix $\varepsilon = \varepsilon(n, \lambda) > 0$ tal que $u \in W^{2,1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

De nou, com a la subsecció 3.4, el resultat anterior és vàlid per a solucions estrictament convexes de $\mu_u = f\,dx$ amb $0 < \lambda \le f \le 1/\lambda$.

Idea de la demostració. Donat $x \in \Omega$ i $t > 0$ petit, considerem la família $\{S(x, \nabla u(x), t)\}_{x\in\Omega, t>0}$ definida a (11). Prenent $S_t(x) := S(x, \nabla u(x), t)$ com la «bola centrada de radi t centrada a x», qualsevol subdomini $\Omega' \subset\subset \Omega$ dotat d'aquesta família de «boles» és un espai de tipus homogeni en el sentit de Coifman i Weiss; vegeu [1, 18, 37]. En particular, el teorema de Stein implica que, si

$$\mathcal{M}(D^2u)(x) := \sup_{t>0} \fint_{S(x,\nabla u(x),t)} |D^2u| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$

aleshores $|D^2u| \in L\log L_{\mathrm{loc}}$, és a dir, $\int_{\Omega'} |D^2u| \log(2 + |D^2u|) \le C(\Omega')$ per a qualsevol $\Omega' \subset\subset \Omega$. L'estimació clau de [24] consisteix a demostrar que

$$||\mathcal{M}(D^2u)||_{L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \le C\,||D^2u||_{L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)},$$

per a alguna constant $C = C(n, \lambda)$.

Un cop demostrada aquesta estimació, es deriva de la convexitat de u que la norma L^1_{loc} de D^2u és fitada localment (vegeu [31, equació (4.74)]), i, per tant,[5]

$$|D^2u| \log(2 + |D^2u|) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{13}$$

Segons aquesta estimació *a priori* i un argument d'aproximació amb solucions suaus, com es veu a [24], és fàcil deduir que D^2u és una funció L^1 i aleshores $u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}$.

Tot seguit expliquem com, de fet, aquest argument implica que $u \in W^{2,1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}$. Tenint en compte (13), la mesura del conjunt en què $|D^2u|$ és gran disminueix de manera quantitativa:

$$|\{|D^2u| \ge M\}| \le \frac{1}{M\log M} \int_{|\{|D^2u|\ge M\}|} |D^2u| \log(2 + |D^2u|) \le \frac{C}{M\log M},$$

per a qualsevol M gran. En particular, si s'escull primer un M prou gran i després una $\varepsilon > 0$ prou petita, deduïm (una versió localitzada de) la fita

$$|\{|D^2u| \ge M\}| \le \frac{1}{M^{1+2\varepsilon}} |\{|D^2u| \ge 1\}|.$$

Si s'aplica aquesta estimació a totes les escales (compareu amb la idea de la demostració del teorema 3.11) conjuntament amb un lema de recobriment, s'obté

$$|\{|D^2u| \ge M^k\}| \le \frac{1}{M^{(1+2\varepsilon)k}} |\{|D^2u| \ge 1\}| \quad \forall k \ge 1,$$

i se'n deriva la integrabilitat $L^{1+\varepsilon}$ local de $|D^2u|$ (vegeu, per exemple, [31, apartat 4.8.4] per a més detalls). □

5 Aquí, la frase «Com que u és convexa, la norma L^1_{loc} de D^2u és fitada localment» pot ser confusa. En efecte, sembla que s'afirmi que la regularitat $W^{2,1}_{\mathrm{loc}}$ de u és trivial perquè la integral de $|D^2u|$ és finita localment. No és el cas, perquè, per a una funció convexa, D^2u pot ser una mesura i llavors $\int_E |D^2u|$ denota la integral de la mesura $|D^2u|$ sobre el conjunt E. Per tant, per a demostrar que $u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}$, no és suficient demostrar que $\int |D^2u|$ és finita localment, sinó que cal demostrar que $|D^2u|$ és absolutament contínua respecte a la mesura de Lebesgue.

4.0.1 Una aplicació: les equacions semigeostròfiques Les equacions semigeostròfiques són un model simple utilitzat en meteorologia per a descriure fluxos atmosfèrics a gran escala i es pot derivar de les equacions d'Euler 3D, amb l'aproximació de Boussinesq i la hidroestàtica, subjectes a una força de Coriolis forta [23]. Com que per a fluxos atmosfèrics a gran escala la força de Coriolis domina el terme d'advecció, el flux és principalment bidimensional. Per això, l'estudi de les equacions semigeostròfiques en 2D i 3D és molt similar i, per simplificar l'exposició, ens centrarem en el cas periòdic bidimensional.

El sistema semigeostròfic es pot escriure així:

$$\begin{cases} \partial_t \nabla p_t + (\mathbf{u}_t \cdot \nabla)\nabla p_t + \nabla^{\perp} p_t + \mathbf{u}_t = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0, \\ p_0 = \bar{p}, \end{cases} \tag{14}$$

on $\mathbf{u}_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $p_t \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ són funcions periòdiques que es corresponen amb la velocitat i la pressió, respectivament, i $\nabla^{\perp} p_t$ és la rotació antihorària d'angle $\pi/2$ de ∇p.

Com es mostra a [23], les consideracions energètiques demostren que és natural suposar que p_t és (-1)-convex, és a dir, la funció $P_t(x) := p_t(x) + |x|^2/2$ és convexa a $\mathbb{R}^2$. Sigui P_t^* la conjugada convexa de P_t, és a dir,

$$P_t^*(y) := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \{y \cdot x - P_t(x)\}.$$

Aleshores, suposant que $0 < \lambda \le \det(D^2 P_0^*) \le 1/\lambda$, es pot demostrar que

$$0 < \lambda \le \det(D^2 P_t^*) \le 1/\lambda \quad \forall t > 0$$

en el sentit d'Aleksandrov (vegeu [7] per a més detalls). A causa del teorema 4.1, això implica que $P_t^* \in W^{2,1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}$, que és un dels ingredients clau per a demostrar l'existència global de solucions distribucionals de (14) en el tor bidimensional [7] i en dominis tridimensionals [8].

Observació 4.2. Des d'un punt de vista físic, la fita inferior de $\det(D^2 P_0^*)$ no és natural i seria molt útil si la regularitat $W^{2,1}$ de les solucions de $\mu_u \le \frac{1}{\lambda}\, dx$ fos certa, com a mínim en dues dimensions. Malauradament, és falsa, com mostra Mooney a [55].

D'altra banda, es podria voler demostrar l'existència global de solucions suaus de (14) quan el conjunt de dades inicials és suau. Tenint en compte el resultat anàleg per a l'equació d'Euler incompressible bidimensional, una possible estratègia per a demostrar aquest resultat seria demostrar que les solucions estrictament convexes de $\mu_u = f\, dx$ amb $f \in C^{0,\alpha}$ tals que $0 < \lambda \le f \le 1/\lambda$ satisfan $||D^2 u||_{C^{0,\alpha}} \le C(n, \lambda, \alpha)||f||_{C^{0,\alpha}}$ (és a dir, el control és lineal respecte a la norma de f). Com es veu a [32], això és fals i l'existència global de les solucions suaus és un problema encara obert.

4.1 Sobre la convexitat estricta de les solucions febles

Com s'ha mencionat, la convexitat estricta no és només una condició tècnica, sinó que és necessària per a aconseguir la regularitat. En efecte, com va descobrir Pogorelov, existeixen solucions d'Aleksandrov de l'equació de Monge-Ampère amb costats drets positius suaus que no són C^2. Per exemple, la funció

$$u(x_1, x') := |x'|^{2-2/n}(1 + x_1^2), \quad (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad n \geq 3, \tag{15}$$

és $C^{1,1-2/n}$ i és solució de $\det D^2 u = c_n(1 + x_1^2)^{n-2}(1 - x_1^2) > 0$ dins de $B_{1/2}$. A més, la fita $0 < \lambda \leq \det D^2 u \leq 1/\lambda$ no és suficient per a la regularitat C^1: la funció

$$u(x_1, x') := |x'| + |x'|^{n/2}(1 + x_1^2), \quad (x_1, x') \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3,$$

només és Lipschitz i compleix $0 < \lambda \leq \det D^2 u \leq 1/\lambda$ en una petita regió convexa en un entorn de l'origen.[6]

Aleksandrov va mostrar a [4] que, a diferència del que veiem en els contraexemples anteriors, totes les solucions bidimensionals de $\mu_u \geq \lambda\, dx > 0$ són estrictament convexes. A [16], Caffarelli va generalitzar aquests exemples a solucions que degeneren al llarg dels subespais, i va demostrar que les solucions es poden degenerar només en subespais de dimensions inferiors a $n/2$.

Com que no es pot esperar regularitat C^1 per a solucions no estrictament convexes, és normal preguntar-nos si podem obtenir estimacions d'integrabilitat per a les segones derivades.

En la secció anterior hem demostrat que les solucions estrictament convexes de $0 < \lambda\, dx \leq \mu_u \leq \frac{1}{\lambda}\, dx$ són $W^{2,1+\varepsilon}_{\mathrm{loc}}$ per a algun $\varepsilon = \varepsilon(n, \lambda) > 0$. Si anomenem Σ el «conjunt singular» de punts en què u no és estrictament convexa, és a dir,

$$\Sigma := \{x \in \Omega : \exists z \in \Omega \setminus \{x\} \text{ i } p \in \partial u(x) \quad \text{s.t.} \quad u(z) = u(x) + \langle p, z - x\rangle\},$$

6 De fet, per a $n \geq 3$, fins i tot es pot construir una solució d'Aleksandrov de $\det D^2 u = 1$ que sigui Lipschitz en una bola petita $B_\rho(0)$. Per comprovar-ho, suposem que $\eta > 0$ i definim $v_\eta(x) := \eta(|x'| + |x'|^{n/2}(1 + x_1^2))$. Aleshores, si $\eta > 0$ és prou gran, se'n deriva que $\det D^2 v_\eta \geq 1$ dins de $B_\rho(0)$ per a algun valor $\rho > 0$ petit.

Suposem que $w_\eta \colon B_\rho(0) \to \mathbb{R}$ és l'envolupant convexa de $v_\eta|_{\partial B_\rho(0)}$. És un fet clàssic que $\det D^2 w_\eta = 0$ en el sentit d'Aleksandrov (vegeu, per exemple, [56]). A més, com que $v_\eta \geq 0$, se'n deriva que $w_\eta \geq 0$. Per acabar, com que $v_\eta(x_1, 0) = 0$ per a $x_1 = \pm\rho$, tenim que $w_\eta(x_1, 0) = 0$ per a $|x_1| \leq \rho$.

Suposem ara que u és la solució d'Aleksandrov de

$$\begin{cases} \det D^2 u = 1 & \text{en } B_\rho, \\ u = v_\eta & \text{sobre } \partial B_\rho, \end{cases}$$

donada pel teorema 3.6. Aleshores, segons la proposició 3.3, tenim que $v_\eta \leq u \leq w_\eta$ dins de B_ρ. Això implica en particular que $u(x_1, 0) = 0$ per a $|x_1| \leq \rho$, que, combinat amb

$$u(x_1, x') \geq v_\eta(x_1, x') \geq \eta|x'|,$$

demostra que u només és Lipschitz.

llavors ens podríem preguntar si les segones derivades de u es poden concentrar a Σ. Recentment Mooney ha descartat aquesta possibilitat [53] mostrant que la mesura de Hausdorff de dimensió $(n-1)$ de Σ s'anul·la. D'aquest fet, Mooney va deduir la regularitat $W^{2,1}$ de les solucions sense cap condició de convexitat estricta. De fet, en un article posterior [54], va poder reforçar aquest resultat amb una petita millora de la integralitat logarítmica i va demostrar que era un resultat òptim.

Teorema 4.3. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert i $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una funció convexa que satisfaci $\mu_u = f\,dx$ per a alguna $0 < \lambda \le f \le 1/\lambda$. Aleshores, $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) = 0$ i $u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. A més, existeix una $\eta = \eta(n) > 0$ tal que

$$\int_{\Omega'} |D^2u| \log(2 + |D^2u|)^\eta \, dx < \infty \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

D'altra banda, si $M > 0$ és prou gran, es pot construir una solució u amb $f \equiv 1$ tal que

$$\int_{\Omega'} |D^2u| \log(2 + |D^2u|)^M \, dx = +\infty \quad \text{per a algun } \Omega' \subset\subset \Omega.$$

5 Desenvolupaments recents II: regularitat de la vora

La teoria de la regularitat interior per a les solucions d'Aleksandrov es fonamenta en diferents propietats geomètriques de seccions $S(x, p, y)$ de u que estan contingudes estrictament dins de Ω (vegeu (11)). En particular, es pot demostrar que, si u és una solució estrictament convexa de $\lambda\,dx \le \mu_u \le \frac{1}{\lambda}\,dx$ i $S_t(x) := S(x, \nabla u(x), t)$ està continguda compactament dins de Ω, llavors $S_t(x)$ és comparable a un el·lipsoide de volum $t^{n/2}$ (vegeu, per exemple, [31, lema 4.6]).

Per a desenvolupar una teoria de regularitat de la vora, és vital entendre la geometria de les seccions $S_t(x)$ quan $x \in \partial\Omega$. Savin ho ha fet recentment a [59, 60, 61] amb la introducció de noves tècniques per a obtenir versions globals de tots els resultats de regularitat anteriors amb condicions de regularitat adequades per a les condicions de contorn. Vegem-ne els resultats principals.

Suposem que $0 \in \partial\Omega$, que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert, convex i fitat que satisfà

$$B_\rho(\rho e_n) \subset \Omega \subset B_{1/\rho}(0) \cap \{x_n > 0\} \tag{16}$$

per a alguna $\rho > 0$, i que $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ satisfà

$$\mu_u = f\,dx \quad \text{en } \Omega \tag{17}$$

per a alguna $0 < \lambda \le f \le 1/\lambda$. Estenem u fent que valgui $+\infty$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ (si cal, restant una funció lineal), suposem que $\ell(x) \equiv 0$ és el pla tangent a u a l'origen, és a dir,

$$u \ge 0, \quad u(0) = 0, \quad \text{i} \quad u(x) \not\ge \varepsilon x_n \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{18}$$

El primer resultat de [59] mostra que, si $u \approx |x|^2$ al llarg de $\partial\Omega \cap \{x_n \leq \rho\}$, llavors les seccions $S_t(0) := \{x \in \Omega : u(x) < t\}$ són comparables a semi-el·lipsoides per a t petites. Més precisament, el següent és vàlid:

TEOREMA 5.1. Suposem que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert, convex i fitat que satisfà (16) i que $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció convexa que satisfà (17) per a alguna $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$. Suposem que es compleix (18) i que

$$\beta|x|^2 \leq u(x) \leq \frac{1}{\beta}|x|^2 \quad \text{sobre } \partial\Omega \cap \{x_n \leq \rho\} \tag{19}$$

per a alguna $\beta > 0$. Aleshores, per a qualsevol $t > 0$ petit, existeix un el·lipsoide $\mathcal{E}_t$ de volum $t^{n/2}$ tal que

$$\left(\frac{1}{K}\mathcal{E}_t\right) \cap \overline{\Omega} \subset S_t(0) \subset (K\mathcal{E}_t) \cap \overline{\Omega},$$

on $K > 1$ només depèn de n, λ, ρ i β. A més, l'el·lipsoide $\mathcal{E}_t$ és comparable a una bola de radi $\sqrt{t}$, llevat d'una possible translació en la direcció x_n de mida $|\log t|$. En concret, existeix una transformació lineal $A_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de la forma

$$A_t(x) = x - \tau x_n, \quad \tau = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n, \quad \text{i} \quad |\tau| \leq K|\log t|,$$

tal que $\mathcal{E}_t = A_t(B_{\sqrt{t}}(0))$.

L'última part d'aquest resultat dona informació sobre el comportament de les segones derivades a prop de l'origen. En efecte, heurísticament, aquest resultat afirma que dins de $S_t(0)$ les segones derivades tangencials estan acotades uniformement per dalt i per sota, mentre que les segones derivades mixtes estan acotades per $|\log t|$. Això és molt interessant, ja que μ_u només està acotada per dalt i per sota i perquè tant les dades de la vora com la vora només són $C^{1,1}$.

Com a conseqüència del teorema 5.1 i de les estimacions interiors demostrades a la subsecció 3.4, a [60, 61] Savin va obtenir les estimacions $C^{2,\alpha}$ i $W^{2,p}$ globals següents.

TEOREMA 5.2. Suposem que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert, uniformement convex i fitat, que $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció convexa que satisfà (17) per a alguna $0 < \lambda \leq f \leq 1/\lambda$ i suposem que tant $u|_{\partial\Omega}$ com $\partial\Omega$ són de classe $C^{1,1}$. Suposem també que u se separa quadràticament a $\partial\Omega$ del seu pla tangent, és a dir,

$$u(z) - u(x) \geq \langle \nabla u(x), z - x\rangle + \beta|z - x|^2 \quad \forall x, z \in \partial\Omega$$

per a alguna $\beta > 0$. Aleshores:

- Existeix $\varepsilon > 0$ tal que $u \in W^{2,1+\varepsilon}(\overline{\Omega})$.
- Per a qualsevol $p > 1$, si $\|f - 1\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \leq e^{-Cp}$, aleshores $u \in W^{2,p}(\overline{\Omega})$.
- Suposem que $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ i que tant $u|_{\partial\Omega}$ com $\partial\Omega$ són de classe $C^{2,\alpha}$. Aleshores $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Com es veu a [59], la condició que u se separa quadràticament a $\partial\Omega$ del seu pla tangent es verifica, per exemple, sempre que $\partial\Omega$ i $u|_{\partial\Omega}$ són de classe C^3 amb Ω uniformement convex.

6 Desenvolupaments recents III: suavitat de la primera funció pròpia

Sigui Ω un conjunt uniformement convex suau. En l'article [48], P.-L. Lions va investigar l'existència i la unicitat del primer valor propi per a l'operador de Monge-Ampère, és a dir, l'existència d'una funció convexa no trivial $\psi_1 \in C^{1,1}(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ i una constant positiva λ_1 tals que

$$(\det D^2\psi_1)^{1/n} = -\lambda_1\psi_1 \quad \text{en } \Omega, \qquad \psi_1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{20}$$

Com es mostra a [48], la parella (λ_1, ψ_1) és essencialment única. Més precisament, si $\psi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció convexa no trivial i λ és una constant positiva tal que

$$(\det D^2\psi)^{1/n} = -\lambda\psi \quad \text{en } \Omega, \qquad \psi = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega,$$

aleshores $\lambda = \lambda_1$ i $\psi = \theta\psi_1$ per a una constant positiva θ.

Fent servir la fórmula algebraica

$$(\det A)^{1/n} = \inf\left\{\mathrm{tr}(AB) : B \text{ simètrica definida positiva, } \det B \geq \frac{1}{n^n}\right\}, \tag{21}$$

es pot demostrar que

$$\lambda_1 = \inf\left\{\lambda_1(a_{ij}) : a_{ij} \in C(\overline{\Omega}),\ a_{ij} \text{ simètrica definida positiva, } \det(a_{ij}) \geq \frac{1}{n^n}\right\},$$

on $\lambda_1(a_{ij})$ és el primer valor propi de l'operador el·líptic lineal $a_{ij}\partial_{ij}$. A més, utilitzant de nou (21), es pot aproximar l'equació de Monge-Ampère amb les equacions de Hamilton-Jacobi-Bellman de la forma

$$\mathcal{A}^\epsilon\psi := \inf\Big\{a_{ij}\partial_{ij}\psi : a_{ij} \in C(\overline{\Omega}),\ a_{ij} \text{ simètrica definida positiva,} \\ \det(a_{ij}) \geq \frac{1}{n^n},\ \mathrm{tr}(a_{ij}) \leq \frac{1}{\epsilon}\Big\},$$

i deduir una interpretació estocàstica interessant per a λ_1 (vegeu [47, 48] per a més detalls).

Com s'ha vist a la subsecció 3.2, molts resultats per a l'equació $\mu_u = f(x)\,dx$ es poden estendre al cas general $\mu_u = f(x, u, \nabla u)\,dx$ sempre que $\partial_u f \geq 0$, ja que això assegura la validesa del principi del màxim. Una conseqüència interessant del resultat de Lions és la validesa del principi del màxim també quan f decreix lleugerament respecte a u. Més precisament, l'equació $\mu_u = F(x, u)\,dx$ té una solució única sempre que $\partial_u(F(x, u)^{1/n}) > -\lambda_1$ (vegeu [48, corol·lari 2]).

Fixem-nos que, en vista de la regularitat $C^{1,1}$ de ψ_1, a prop de la vora de Ω es pot escriure $|\psi_1(x)| = g(x)\,d_{\partial\Omega}(x)$, on $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció

Lipschitz estrictament positiva i $d_{\partial\Omega}(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ denota la funció distància a la vora. En altres paraules, ψ_1 resol l'equació de Monge-Ampère de la forma

$$\det D^2\psi_1(x) = G(x)\, d_{\partial\Omega}(x)^n \quad \text{en } \Omega, \qquad \psi_1 = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{22}$$

on $G(x) \geq c_0 > 0$ és Lipschitz.

Com que el costat dret de l'equació s'anul·la a $\partial\Omega$, (22) és degenerada a prop de la vora i ha estat un problema durant més de 30 anys saber si ψ_1 és suau fins a la vora. La solució només l'han aconseguit recentment, primer Hong, Huang i Wang en dues dimensions [38] i després Savin [62] i Le i Savin [45] en dimensions arbitràries.

Més precisament, considerem la classe general d'equacions de Monge-Ampère

$$\mu_u = f\, dx \quad \text{en } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \qquad f(x) = G(x)\, d_{\partial\Omega}(x)^s, \tag{23}$$

on $s > 0$ i G és una funció contínua estrictament positiva. A [62] Savin va demostrar l'estimació de regularitat C^2 a la vora que enunciem a continuació:

Teorema 6.1. Suposem que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert, convex i fitat que satisfà (16) i que $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció convexa que satisfà (23). Suposem que (18) i (19) se satisfan i que $u|_{\partial\Omega\cap B_\rho(0)}$ és de classe C^2 per a alguna $\rho > 0$. Aleshores u és C^2 a 0. Més precisament, existeixen un vector τ perpendicular a e_n, un polinomi quadràtic $Q \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ i una constant $a > 0$ tals que

$$u(x + \tau x_n) = Q_0(x') + a x_n^{2+s} + o(|x'|^2 + x_n^{2+s}) \quad \forall x = (x', x_n) \in B_\rho(0).$$

Com a conseqüència d'aquest resultat, com que (20) és de forma (23) amb $s = n$, Savin va obtenir la regularitat C^2 global de la primera funció pròpia:

Corol·lari 6.2. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt uniformement convex de classe C^2 i sigui ψ_1 la primera funció pròpia (vegeu (20)). Aleshores $\psi_1 \in C^2(\overline{\Omega})$.

Mitjançant un enfocament pertorbatiu basat en el teorema 6.1, Le i Savin van millorar la regularitat C^2 de la vora a $C^{2,\beta}$. Més precisament, van demostrar l'estimació puntual següent:

Teorema 6.3. Suposem que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ és un conjunt obert, convex i fitat que satisfà (16) i que $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ és una funció convexa que satisfà (23). Suposem que (18) i (19) se satisfan i que $u|_{\partial\Omega\cap B_\rho(0)}$ és de classe $C^{2,\beta}$ per a alguna $\beta \in (0, \frac{2}{2+s})$ i $\rho > 0$. Suposem també que $G \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega} \cap B_\rho(0))$ per a alguna $\gamma \geq \frac{\beta(2+s)}{2}$. Aleshores u és $C^{2,\beta}$ a 0. Més precisament, existeixen un vector τ perpendicular a e_n, un polinomi quadràtic $Q \colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ i una constant $a > 0$ tals que

$$u(x + \tau x_n) = Q_0(x') + a x_n^{2+s} + O(|x'|^2 + x_n^{2+s})^{1+\beta/2} \quad \forall x = (x', x_n) \in B_\rho(0).$$

Com a conseqüència d'aquest resultat, s'obté la regularitat $C^{2,\beta}$ global de la primera funció pròpia per a qualsevol $\beta < \frac{2}{2+n}$.

Destaquem que normalment, quan es treballa amb equacions el·líptiques, un cop s'obté la regularitat $C^{2,\beta}$, s'arriba a la regularitat superior fàcilment amb les estimacions de Schauder, tot i que no en aquest cas a causa de l'elevada degeneració de l'equació. La idea clau de [45] consisteix a fer tant una transformació hodògrafa com una transformada de Legendre parcial per a deduir que (una transformació adequada de) la primera funció pròpia satisfà una equació de tipus Grushin degenerada amb coeficients de Hölder. Quan això s'aconsegueix, Le i Savin arriben a la suavitat global de ψ_1 aplicant estimacions de Schauder als operadors de tipus Grushin.

Corol·lari 6.4. Sigui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt uniformement convex de classe C^∞ i sigui ψ_1 la primera funció pròpia (vegeu (20)). Aleshores, $\psi_1 \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Agraïments

L'autor dona les gràcies a Yash Jhaveri i Connor Mooney pels comentaris útils de la primera versió del manuscrit. L'autor ha rebut finançament del European Research Council a través de «Regularity and Stability in Partial Differential Equations (RSPDE)».

Referències

[1] Aimar, H.; Forzani, L.; Toledano, R. «Balls and quasi-metrics: a space of homogeneous type modeling the real analysis related to the Monge-Ampère equation». *J. Fourier Anal. Appl.*, 4 (4-5) (1998), 377–381.

[2] Alexandroff, A. «Application of the theorem on domain invariance to existence proofs». *Izv. AN USSR*, 3 (1939), 243–256.

[3] Alexandroff, A. «Existence and uniqueness of a convex surface with a given integral curvature». *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 35 (1942), 131–134.

[4] Alexandroff, A. «Smoothness of the convex surface of bounded Gaussian curvature». *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.)*, 36 (1942), 195–199.

[5] Alexandrov, A. D. *Convex Polyhedra*. Berlín: Springer-Verlag, 2005. Traduït de l'edició russa de 1950 per N. S. Dairbekov, S. S. Kutateladze i A. B. Sossinsky. Amb comentaris i bibliografia de V. A. Zalgaller i annexos de L. A. Shor i Yu. A. Volkov. (Springer Monogr. Math.)

[6] Aleksandrov, A. D. «Dirichlet's problem for the equation $\mathrm{Det}\,||z_{ij}|| = \varphi(z_1,\dots,z_n,z,x_1,\dots,x_n)$. I». *Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astronom.*, 13 (1) (1958), 5–24. [En rus]

[7] Ambrosio, L.; Colombo, M.; De Philippis, G.; Figalli, A. «Existence of Eulerian solutions to the semigeostrophic equations in physical space:

the 2-dimensional periodic case». *Comm. Partial Differential Equations*, 37 (12) (2012), 2209–2227.

[8] Ambrosio, L.; Colombo, M.; De Philippis, G.; Figalli, A. «A global existence result for the semigeostrophic equations in three dimensional convex domains». *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34 (4) (2014), 1251–1268.

[9] Ampère, A. M. «Mémoire contenant l'application de la théorie». *Journal de l'École Polytechnique* (1820).

[10] Bakel'man, I. Ya. «Generalized solutions of Monge-Ampère equations». *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 114 (1957), 1143–1145. [En rus]

[11] Brenier, Y. «Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions». *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 (4) (1991), 375–417.

[12] Caffarelli, L. A. «A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity». *Ann. of Math. (2)*, 131 (1) (1990), 129–134.

[13] Caffarelli, L. A. «Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation». *Ann. of Math. (2)*, 131 (1) (1990), 135–150.

[14] Caffarelli, L. A. «Some regularity properties of solutions of Monge Ampère equation». *Comm. Pure Appl. Math.*, 44 (8-9) (1991), 965–969.

[15] Caffarelli, L. A. «The regularity of mappings with a convex potential». *J. Amer. Math. Soc.*, 5 (1) (1992), 99–104.

[16] Caffarelli, L. A. «A note on the degeneracy of convex solutions to Monge Ampère equation». *Comm. Partial Differential Equations*, 18 (7-8) (1993), 1213–1217.

[17] Caffarelli, L. A. «Boundary regularity of maps with convex potentials. II». *Ann. of Math. (2)*, 144 (3) (1996), 453–496.

[18] Caffarelli, L. A.; Gutiérrez, C. E. «Real analysis related to the Monge-Ampère equation». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (3) (1996), 1075–1092.

[19] Caffarelli, L.; Nirenberg, L.; Spruck, J. «The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. I. Monge-Ampère equation». *Comm. Pure Appl. Math.*, 37 (3) (1984), 369–402.

[20] Calabi, E. «Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens». *Michigan Math. J.*, 5 (1958), 105–126.

[21] Cheng, S. Y.; Yau, S. T. «On the regularity of the Monge-Ampère equation $\det(\partial^2 u/\partial x_i \partial s x_j) = F(x,u)$». *Comm. Pure Appl. Math.*, 30 (1) (1977), 41–68.

[22] Cuesta, J. A.; Matrán, C. «Notes on the Wasserstein metric in Hilbert spaces». *Ann. Probab.*, 17 (3) (1989), 1264–1276.

[23] Cullen, M. J. P. *A Mathematical Theory of Large-Scale Atmosphere/Ocean Flow*. Imperial College Press, 2006.

[24] De Philippis, G.; Figalli, A. «$W^{2,1}$ regularity for solutions of the Monge-Ampère equation». *Invent. Math.*, 192 (1) (2013), 55–69.

[25] De Philippis, G.; Figalli, A. «Partial regularity for optimal transport maps». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 121 (2015), 81–112.

[26] De Philippis, G.; Figalli, A.; Savin, O. «A note on interior $W^{2,1+\epsilon}$ estimates for the Monge-Ampère equation». *Math. Ann.*, 357 (1) (2013), 11–22.

[27] Delanoë, P. «Classical solvability in dimension two of the second boundary-value problem associated with the Monge-Ampère operator». *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 8 (5) (1991), 443–457.

[28] Evans, L. C. «Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations». *Comm. Pure Appl. Math.*, 35 (3) (1982), 333–363.

[29] Figalli, A. «Regularity properties of optimal maps between nonconvex domains in the plane». *Comm. Partial Differential Equations*, 35 (3) (2010), 465–479.

[30] Figalli, A. «Sobolev regularity for the Monge-Ampère equation, with application to the semigeostrophic equations». *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 411 (2013), 103–118, 242. Teoriya Predstavleniĭ, Dinamicheskie Sistemy, Kombinatornye Metody. XXII.

[31] Figalli A. *The Monge-Ampère Equation and its Applications*. Zúric: European Mathematical Society (EMS), 2017. (Zur. Lect. Adv. Math.)

[32] Figalli, A.; Jhaveri, Y.; Mooney, C. «Nonlinear bounds in Hölder spaces for the Monge-Ampère equation». *J. Funct. Anal.*, 270 (10) (2016), 3808–3827.

[33] Figalli, A.; Kim, Y.-H. «Partial regularity of Brenier solutions of the Monge-Ampère equation». *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 28 (2) (2010), 559–565.

[34] Figalli, A.; Rifford, L.; Villani, C. «Necessary and sufficient conditions for continuity of optimal transport maps on Riemannian manifolds». *Tohoku Math. J. (2)*, 63 (4) (2011), 855–876.

[35] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 2a ed. Berlín: Springer-Verlag, 1983. (Grundlehren Math. Wiss.; 224)

[36] Goldman, M.; Otto, F. «A variational proof of partial regularity for optimal transportation maps». *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 53 (5) (2020), 1209–1233.

[37] Gutiérrez, C. E.; Huang, Q. «Geometric properties of the sections of solutions to the Monge-Ampère equation». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352 (9) (2000), 4381–4396.

[38] Hong, J.; Huang, G.; Wang, W. «Existence of global smooth solutions to Dirichlet problem for degenerate elliptic Monge-Ampère equations». *Comm. Partial Differential Equations*, 36 (4) (2011), 635–656.

[39] Ivochkina, N. M. «Classical solvability of the Dirichlet problem for the Monge-Ampère equation». Questions in quantum field theory and statis-

tical physics 4. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 131 (1983), 72–79. [En rus]

[40] Jerison, D. «Prescribing harmonic measure on convex domains». *Invent. Math.*, 105 (2) (1991), 375–400.

[41] Jhaveri, Y. «On the (in)stability of the identity map in optimal transportation». *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 58 (3) (2019), article núm. 96, 25 p.

[42] John, F: «Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions». A: *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*. Nova York: Interscience Publishers, 1948, 187–204.

[43] Krylov, N. V. «Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 46 (3) (1982), 487–523, 670. [En rus]. Traducció en anglès a: *Math. USSR-Izv.*, 20 (3) (1983), 459–492.

[44] Krylov, N. V. «Boundedly inhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 47 (1) (1983), 75–108. [En rus]. Traducció en anglès a: *Math. USSR-Izv.*, 22 (1) (1984), 67–97.

[45] Le, N. Q.; Savin, O. «Schauder estimates for degenerate Monge-Ampère equations and smoothness of the eigenfunctions». *Invent. Math.*, 207 (1) (2017), 389–423.

[46] Lions, P.-L. «Sur les équations de Monge-Ampère. I». *Manuscripta Math.*, 41 (1-3) (1983), 1–43.

[47] Lions, P.-L. «Bifurcation and optimal stochastic control». *Nonlinear Anal.*, 7 (2) (1983), 177–207.

[48] Lions, P.-L. «Two remarks on Monge-Ampère equations». *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 142 (1985), 263–275.

[49] McCann, R. J. «Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps». *Duke Math. J.*, 80 (2) (1995), 309–323.

[50] Minkowski, H. «Allgemeine Lehrsätze über die convexen Polyeder». *Gött. Nachr.*, 1897 (1897), 198–219.

[51] Minkowski, H. «Volumen und Oberfläche». *Math. Ann.*, 57 (4) (1903), 447–495.

[52] Monge, G. «Sur le calcul intégral des équations aux differences partielles». *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1784).

[53] Mooney, C. «Partial regularity for singular solutions to the Monge-Ampère equation». *Comm. Pure Appl. Math.*, 68 (6) (2015), 1066–1084.

[54] Mooney, C. «$W^{2,1}$ estimate for singular solutions to the Monge-Ampère equation». *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 14 (4) (2015), 1283–1303.

[55] Mooney, C. «Some counterexamples to Sobolev regularity for degenerate Monge-Ampère equations». *Anal. PDE*, 9 (4) (2016), 881–891.

[56] Oberman, A. M.; Silvestre, L. «The Dirichlet problem for the convex envelope». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 363 (11) (2011), 5871–5886.

[57] POGORELOV, A. V. «The regularity of the generalized solutions of the equation $\det(\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$». *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 200 (1971), 534–537. [En rus]

[58] RÜSCHENDORF, L.; RACHEV, S. T. «A characterization of random variables with minimum L^2-distance». *J. Multivariate Anal.*, 32 (1) (1990), 48–54. *Corrigendum* a: *J. Multivariate Anal.*, 34 (1) (1990), 156.

[59] SAVIN, O. «A localization property at the boundary for Monge-Ampère equation». A: *Advances in Geometric Analysis*. Somerville, MA: International Press, 2012, 45–68. (Adv. Lect. Math. (ALM); 21)

[60] SAVIN, O. «Pointwise $C^{2,\alpha}$ estimates at the boundary for the Monge-Ampère equation». *J. Amer. Math. Soc.*, 26 (1) (2013), 63–99.

[61] SAVIN, O. «Global $W^{2,p}$ estimates for the Monge-Ampère equation». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141 (10) (2013), 3573–3578.

[62] SAVIN, O. «A localization theorem and boundary regularity for a class of degenerate Monge-Ampere equations». *J. Differential Equations*, 256 (2) (2014), 327–388.

[63] SCHMIDT, T. «$W^{2,1+\varepsilon}$ estimates for the Monge-Ampère equation». *Adv. Math.*, 240 (2013), 672–689.

[64] TRUDINGER, N. S.; WANG, X.-J. «The Monge-Ampère equation and its geometric applications». A: *Handbook of Geometric Analysis. No. 1*. Somerville, MA: International Press, 2008, 467–524. (Adv. Lect. Math. (ALM); 7)

[65] URBAS, J. «On the second boundary value problem for equations of Monge-Ampère type». *J. Reine Angew. Math.*, 487 (1997), 115–124.

[66] WANG, X.-J. «Some counterexamples to the regularity of Monge-Ampère equations». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123 (3) (1995), 841–845.

[67] WANG, X.-J. «Regularity for Monge-Ampère equation near the boundary». *Analysis*, 16 (1) (1996), 101–107.

ETH ZÜRICH, DEPARTMENT OF MATHEMATICS
RÄMISTRASSE 101,
8092 ZÚRIC, SUÏSSA
alessio.figalli@math.ethz.ch