

# Rectificabilitat, funcions quadrades i la conjectura $\varepsilon^2$ de Carleson

XAVIER TOLSA

**Resum:** En aquest article repassem alguns resultats clàssics sobre rectificabilitat i altres resultats més recents que hi estan relacionats, com ara el teorema del viatjant de comerç de Peter Jones o la resolució de la conjectura  $\varepsilon^2$  de Carleson. Per a aconseguir aquests darrers resultats, ha estat fonamental l'aplicació de noves idees basades en anàlisi harmònica.

**Paraules clau:** rectificabilitat, tangent, teorema del viatjant de comerç, funcions quadrades, mesures de Hausdorff.

**Classificació MSC2010:** 28A75, 28A78, 30C85.

## 1 Introducció

La noció de rectificabilitat té una gran importància en anàlisi matemàtica. Els conjunts rectificables apareixen de manera natural en l'anàlisi complexa, en la teoria d'integrals singulars de l'anàlisi harmònica, en el càlcul de variacions, en l'estudi de problemes de frontera lliure, etc. Per aquesta raó, l'obtenció de diferents criteris per a decidir la rectificabilitat o no d'un conjunt ha estat un camp de recerca important. D'aquesta qüestió, se n'ocupa especialment la teoria geomètrica de la mesura, que va ser desenvolupada per a subconjunts del pla a la primera meitat del segle XX per Bezikóvitx, i, posteriorment, per a dimensions superiors, per Federer, Marstrand, Mattila i d'altres.

En aquest article veurem alguns resultats d'anàlisi matemàtica referents a la noció de rectificabilitat i certes funcions «quadrades» que involucren certs

---

Aquest article es basa en la conferència inaugural del curs 2019–2020 de la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM) titulada «Conjunts rectificables, fractals i funcions quadràtiques».

Aquest treball està parcialment finançat per 2017-SGR-0395 (Catalunya), per MTM-2016-77635-P (MINECO, Espanya), per l'acreditació Maria de Maeztu per a Unitats d'Excel·lència (CEX2020-001084-M) i per l'European Research Council (ERC) en relació amb el programa *Horizon 2020* de la Unió Europea (Grant Agreement número 101018680).

coeficients de tipus geomètric, com les funcions de Jones o de Carleson. Comencem recordant la noció de mesura de Hausdorff  $s$ -dimensional. Donat un conjunt  $E \subset \mathbb{R}^d$  i  $s, \varepsilon > 0$ , definim

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(E) = \inf \left\{ \sum_i \text{diam}(A_i) : E \subset \bigcup_i A_i, \text{diam}(A_i) \leq \varepsilon \right\},$$

on  $\text{diam}(A_i)$  és el diàmetre de  $A_i$  (el suprem de les distàncies entre punts de  $A_i$ ) i suposem que  $\{A_i\}_i$  és una família numerable de conjunts. Aleshores, la mesura de Hausdorff  $s$ -dimensional de  $E$  està definida per

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(E).$$

Notem que el límit anterior està ben definit (tot i que pot ser infinit), ja que  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(E)$  creix quan  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En el cas  $s = 1$ ,  $\mathcal{H}^1(E)$  coincideix amb la noció habitual de longitud definida sobre corbes o altres tipus de conjunts. Anàlogament, quan  $s$  és un número natural,  $\mathcal{H}^s(E)$  és el volum  $s$ -dimensional, que coincideix amb altres definicions equivalents per a conjunts més suaus, mòdul un factor constant dependent de  $s$ . Per exemple, per a  $E \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\mathcal{H}^d$  coincideix amb la mesura de Lebesgue en  $\mathbb{R}^d$  multiplicada per una constant que només depèn de  $d$ .

Ara ja podem introduir la noció de rectificabilitat. Diem que  $E \subset \mathbb{R}^d$  és 1-rectificable si existeix una família numerable de corbes  $\Gamma_i$  de longitud finita tals que  $E$  està contingut en  $\bigcup_i \Gamma_i$ , mòdul un conjunt de longitud nul·la (remarqueu que estem identificant les nocions de longitud i de mesura de Hausdorff 1-dimensional). Això equival a dir que

$$\mathcal{H}^1\left(E \setminus \bigcup_i \Gamma_i\right) = 0.$$

Es pot demostrar que s'obté una definició equivalent si se substitueixen les corbes  $\Gamma_i$  de longitud finita per imatges Lipschitz de  $\mathbb{R}$ , és a dir, per conjunts de la forma  $g_i(\mathbb{R})$ , on  $g_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  és una funció Lipschitz, o, fins i tot, per corbes de classe  $C^1$ .

Per a un número natural  $n \geq 1$ , la noció de  $n$ -rectificabilitat és anàloga. Diem que  $E \subset \mathbb{R}^d$  és  $n$ -rectificable si existeix una família numerable de funcions Lipschitz  $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  tals que

$$\mathcal{H}^n\left(E \setminus \bigcup_i g_i(\mathbb{R}^n)\right) = 0.$$

Com en el cas  $n = 1$ , en aquesta definició podem substituir la condició Lipschitz per la condició que les funcions  $g_i$  siguin de classe  $C^1$ .

Un conjunt  $E \subset \mathbb{R}^d$  s'anomena *purament no  $n$ -rectificable* si  $E$  no té cap subconjunt de mesura  $\mathcal{H}^n$  positiva que sigui  $n$ -rectificable. Un exemple típic de conjunt purament no 1-rectificable de longitud positiva i finita és el

conjunt de Cantor planari  $1/4$ , que es construeix de la manera següent. Considerem un quadrat (tancat)  $Q^0$  en el pla de costat 1. A continuació, el substituïm per quatre quadrats  $Q_i^1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , de costat  $1/4$  continguts en  $Q^0$ , de manera que cada  $Q_i^1$  contingui una cantonada diferent de  $Q^0$ . Anàlogament, en la generació següent, cada quadrat  $Q_i^1$  se substitueix per quatre quadrats de costat  $1/16$  continguts en  $Q_i^1$  tals que cadascun contingui un vèrtex de  $Q_i^1$ . Així, en aquesta segona generació tindrem setze quadrats  $Q_i^2$  de costat  $1/16$ , amb  $i = 1, \dots, 16$ . Procedim inductivament, i denotem  $E_m = \bigcup_{i=1}^{4^m} Q_i^m$  i  $E = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$ . Com que considerem tots els quadrats anteriors tancats, es compleix que  $E \neq \emptyset$ . Aquest és el conjunt de Cantor planari  $1/4$ ; vegeu la figura 1. Notem que  $E_m$  està format per  $4^m$  quadrats de costat  $4^{-m}$  i, per tant,

$$\mathcal{H}_{4^{-m+1}}^1(E) \leq \sum_{i=1}^{4^m} \text{diam}(Q_i^m) = 2^{1/2} \quad \text{per a tot } m \geq 1.$$

Fent  $m \rightarrow \infty$ , deduïm que  $\mathcal{H}^1(E) \leq 2^{1/2}$ . Amb una mica més d'esforç es demostra que  $\mathcal{H}^1(E) > 0$ . Un resultat més complicat consisteix a demostrar que també es té que  $\mathcal{H}^1(E) \geq 2^{1/2}$ , de manera que  $\mathcal{H}^1(E) = 2^{1/2}$ . El fet que aquest conjunt és purament no 1-rectificable es pot demostrar de diverses maneres. Potser la més senzilla consisteix a observar que les seves projeccions ortogonals sobre l'eix horitzontal i sobre l'eix vertical tenen longitud nul·la, i, després, aplicar un resultat (no gaire difícil) segons el qual si un conjunt té les projeccions ortogonals de longitud nul·la en dues direccions diferents, llavors és purament no 1-rectificable; vegeu [13, capítol 18] per a més detalls.

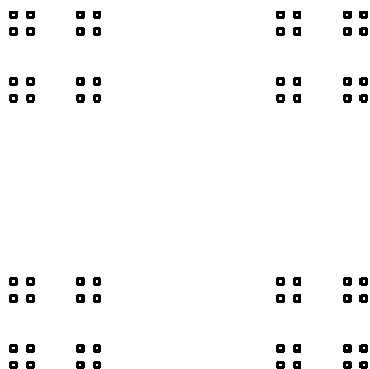


FIGURA 1: Tercera generació  $E_3$  del conjunt de Cantor planari  $1/4$ .

En aquest article presentem diferents caracteritzacions de la rectificabilitat. A la secció 2 veurem un parell de criteris clàssics en termes de l'existència de tangents i de l'existència de densitats. A la secció 3 veurem altres resultats relacionats amb la funció quadrada de Jones i el problema del viatjant de comerç. Finalment, les seccions 4 i 5 estan dedicades a la solució recent de la conjectura  $\varepsilon^2$  de Carleson, sobre la caracterització dels punts tangents d'una corba en termes de la funció quadrada  $\mathcal{E}$ .

## 2 Tangents, densitats i rectificabilitat

Remarquem que tot conjunt  $E \subset \mathbb{R}^d$   $\mathcal{H}^n$ -mesurable amb  $\mathcal{H}^n(E) < \infty$  es pot posar com  $E = F \cup G$ , on  $F$  és  $n$ -rectificable i  $G$  és purament no  $n$ -rectificable. Això es pot demostrar de la manera següent: sigui  $t = \sup_A \mathcal{H}^n(E \cap A)$ , on el suprem es pren sobre tots els conjunts de Borel,  $A$ , que són  $n$ -rectificables. Llavors, per a cada  $j \geq 1$ , sigui  $A_j$   $n$ -rectificable i de Borel tal que  $\mathcal{H}^n(E \cap A_j) \geq t - 1/j$ . Es comprova fàcilment que el conjunt  $F = \bigcup_j A_j$  és  $n$ -rectificable i  $E \setminus F$  és purament no  $n$ -rectificable. A més a més, també és senzill comprovar que la descomposició  $E = F \cup G$  és única mòdul conjunts de mesura  $\mathcal{H}^n$  nul·la.

Seguidament enunciem un criteri que caracteritza els conjunts rectificables en termes de tangents aproximades. Per fer-ho, ens cal introduir prèviament terminologia i notació addicionals. Donat un punt  $x \in \mathbb{R}^d$ , un  $n$ -pla (o varietat lineal  $n$ -dimensional)  $L \subset \mathbb{R}^d$  tal que  $x \in L$ , i un paràmetre  $0 < s < 1$ , considerem el doble con tancat amb vèrtex  $x$  i eix  $L$  donat per

$$X(x, L, s) = \{y \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(y, L) \leq s |y - x|\};$$

vegeu la figura 2. Diem que  $L$  és *tangent* a  $E$  en  $x$  si, per a tot  $0 < s < 1$ , existeix un  $r > 0$  tal que

$$E \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s) = \emptyset.$$

D'altra banda,  $L$  és *tangent aproximada* a  $E$  en  $x$  si, per a tot  $0 < s < 1$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \mathcal{H}^n(E \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s)) = 0.$$

És a dir, la mesura  $\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s))$  en relació amb  $r^n$  és negligible quan  $r \rightarrow 0$ . El lector ha de pensar que, en canvi, «típicament» la mesura  $\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))$  és comparable a  $r^n$  quan  $n \rightarrow 0$ . De fet, un resultat clàssic de teoria geomètrica de la mesura afirma que, si  $0 < \mathcal{H}^n(E) < \infty$ , llavors

$$2^{-n} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^n} \mathcal{H}^n(E \cap B(x, r)) \leq 1 \quad (2.1)$$

per a  $\mathcal{H}^n$ -quasi tot  $x \in E$ , és a dir, per a tot  $x \in E$  llevat d'un conjunt de mesura  $\mathcal{H}^n$  nul·la.

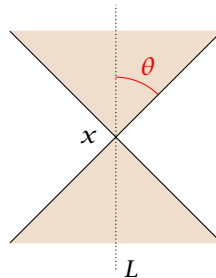


FIGURA 2: Un con en  $\mathbb{R}^2$  definit per  $X(x, L, s)$ , amb  $s$  determinat per l'angle  $\theta$ .

El teorema següent és degut a Bezikóvitx en el cas  $n = 1$ ,  $d = 2$ , i a Marstrand en el cas general [11].

TEOREMA 2.1. *Sigui  $n \in \mathbb{N}$  i sigui  $E \subset \mathbb{R}^d$  un conjunt  $\mathcal{H}^n$ -mesurable tal que  $\mathcal{H}^n(E) < \infty$ . Llavors:*

- (a)  *$E$  és  $n$ -rectificable si i només si existeix algun  $n$ -pla tangent aproximada en  $x$  per a  $\mathcal{H}^n$ -quasi tot  $x \in E$ .*
- (b)  *$E$  és purament no  $n$ -rectificable si i només si, per a  $\mathcal{H}^n$ -quasi tot  $x \in E$ , no existeix cap  $n$ -pla tangent aproximada en  $x$ .*

Observeu que l'existència o no de tangents és una propietat de tipus local, mentre que la definició de rectificabilitat és de tipus global. Noteu també que, amb una ullada ràpida a la figura 1, es pot intuir que el conjunt de Cantor planari  $1/4$  no té tangent aproximada en cap punt i, per tant, el teorema anterior ens confirma que és purament no rectificable.

Sorprenentment, la rectificabilitat també es pot caracteritzar en termes de densitats. Donats  $E \subset \mathbb{R}^d$  i  $x \in \mathbb{R}^d$ , les densitats  $n$ -dimensionals superior i inferior de  $E$  en  $x$  són, respectivament,

$$\Theta^{*n}(x, E) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))}{(2r)^n},$$

$$\Theta_*^n(x, E) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))}{(2r)^n}.$$
(2.2)

Si aquestes densitats coincideixen, llavors  $\Theta^n(x, E) := \Theta^{*n}(x, E) = \Theta_*^n(x, E)$  s'anomena *densitat  $n$ -dimensional* de  $E$  en  $x$ . Noteu que la densitat  $\Theta^{*n}(x, E)$  ha aparegut a (2.1).

TEOREMA 2.2. *Sigui  $n \in \mathbb{N}$  i sigui  $E \subset \mathbb{R}^d$  un conjunt  $\mathcal{H}^n$ -mesurable tal que  $\mathcal{H}^n(E) < \infty$ . Llavors,*

- (a)  *$E$  és  $n$ -rectificable si i només si  $\Theta^n(x, E)$  existeix i és igual a 1 per a  $\mathcal{H}^n$ -quasi tot  $x \in E$ .*
- (b)  *$E$  és purament no  $n$ -rectificable si i només si  $\Theta_*^n(x, E) < 1$  per a  $\mathcal{H}^n$ -quasi tot  $x \in E$ .*

Aquest teorema és degut a Bezikóvitx per a  $n = 1$ ,  $d = 2$ ; a Marstrand [10] per a  $n = 2$ ,  $d = 3$ , i a Mattila [12], per a  $n, d$  arbitraris. A més a més, en el cas  $n = 1$ ,  $d = 2$ , Bezikóvitx va demostrar que si  $E$  és purament no 1-rectificable, llavors  $\Theta_*^1(x, E) \leq 3/4$  per a  $\mathcal{H}^1$ -quasi tot  $x \in E$ . Es conjectura que aquesta fita també és certa substituint  $3/4$  per  $1/2$ . Aquest és l'anomenat *problema  $1/2$*  de Bezikóvitx, que encara està obert.

Una mesura de Borel  $\mu$  de  $\mathbb{R}^d$  s'anomena  *$n$ -rectificable* si és de la forma  $\mu = \rho \mathcal{H}^n|_E$ , on  $E \subset \mathbb{R}^d$  és  $n$ -rectificable i  $\rho$  és una funció positiva de  $L^1(\mathcal{H}^n|_E)$ . L'any 1987 David Preiss ([17]) va demostrar el resultat següent, considerat una de les màximes fites de la teoria geomètrica de la mesura.

TEOREMA 2.3. *Sigui  $\mu$  una mesura de Borel en  $\mathbb{R}^d$ . Es compleix que  $\mu$  és  $n$ -rectificable si i només si la densitat*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{(2r)^n} \quad (2.3)$$

*existeix i és no nul·la per a  $\mu$ -quasi tot  $x \in \mathbb{R}^d$ .*

Remarquem que la implicació difícil del teorema és la que afirma que l'existència del límit (2.3) i el fet que sigui no nul impliquen la  $n$ -rectificabilitat de  $E$ . Notem també que, per a  $E \subset \mathbb{R}^d$  amb  $\mathcal{H}^n(E) < \infty$ , prenent  $\mu = \rho \mathcal{H}^n|_E$  deduïm que  $E$  és  $n$ -rectificable si i només si  $\Theta^n(x, E)$  existeix i és no nul per a  $\mathcal{H}^n$ -quasi tot  $x \in E$ . Clarament, hi ha una gran semblança entre aquesta afirmació i (a) en el teorema 2.2. La diferència essencial és que per a demostrar la  $n$ -rectificabilitat de  $E$ , en (a) del teorema 2.2 se suposa que la densitat  $\Theta(x, E) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^n(E \cap B(x, r))}{(2r)^n}$  és exactament 1, mentre que en el teorema anterior simplement s'afirma que el límit existeix i és no nul. Aquest fet fa que la demostració del teorema de Preiss sigui molt més complicada.

Un concepte fonamental per a demostrar el teorema de Preiss és el de mesura tangent. Diem que  $\nu$  és una mesura tangent a  $\mu$  en  $x$  si existeix una successió de radis  $r_k \rightarrow 0$  tals que les mesures  $\nu_k$  definides per

$$\nu_k(A) = \frac{1}{\mu(B(x, r_k))} \mu(x + r_k A) \quad \text{per a tot } A \subset \mathbb{R}^d$$

convergeixen feblement a  $\nu$ . De vegades, també es diu que  $\nu$  és un esclatament (*blow up* en anglès) de  $\mu$  en  $x$ . Les mesures tangents a  $\mu$  en un punt  $x$  ens aporten informació del comportament local de la mesura  $\mu$  a prop de  $x$ . En certa manera, les mesures tangents són l'anàleg a la noció de derivada per a una funció.

Es demostra que el fet que per a  $\mu$ -quasi tot  $x \in \mathbb{R}^d$  la densitat (2.3) existeix i sigui no nul·la implica que, per a  $\mu$ -quasi tot  $x$ , tota mesura tangent  $\nu$  a  $\mu$  en  $x$  és  $n$ -uniforme, és a dir, existeix una constant  $c > 0$  tal que

$$\nu(B(x, r)) = c r^n \quad \text{per a tot } x \in \text{supp}(\nu) \text{ i tot } r > 0.$$

Aquest resultat permet reduir la demostració del teorema 2.3 a l'estudi de les mesures  $n$ -uniformes. En efecte, observem que, si  $L \subset \mathbb{R}^d$  és un  $n$ -pla, llavors la mesura  $\nu = \mathcal{H}^n|_L$  és  $n$ -uniforme. Recíprocament, si es complís que tota mesura  $n$ -uniforme és de la forma  $c \mathcal{H}^n|_L$ , llavors essencialment es podria demostrar el teorema 2.3 aplicant la caracterització dels conjunts rectificables en termes de l'existència de tangents del teorema 2.1. Això s'explicaria perquè, a escales cada cop més petites, la mesura  $\mu$  tendria a ser una mesura de la forma  $c \mathcal{H}^n|_L$ , en què  $L$  seria un  $n$ -pla.

Per a  $n = 1$  o  $2$ , certament es compleix que tota mesura  $n$ -uniforme és del tipus  $c \mathcal{H}^n|_L$ , on  $L$  és un  $n$ -pla. Tanmateix, per a  $n \geq 3$  això no és correcte.

De fet, Kowalski i Preiss ([8]) van demostrar que la mesura  $\mathcal{H}^3$  sobre el con 3-dimensional de  $\mathbb{R}^4$  definit per l'equació

$$x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

és 3-uniforme. En lloc de caracteritzar les mesures  $n$ -uniformes, en el treball [17] Preiss demostra determinades propietats d'aquestes mesures que li permeten provar el teorema 2.3 mitjançant un argument de connectivitat. Remarquem que la caracterització de les mesures  $n$ -uniformes és un problema obert força difícil. De fet, fins fa poc ni tan sols se sabia si hi havia mesures  $n$ -uniformes essencialment diferents de la descrita anteriorment. Un progrés important recent és degut a Nimer [15], que mostra que n'hi ha moltes més i dona una caracterització completa de les mesures 3-uniformes còniques de  $\mathbb{R}^5$ .

### 3 El teorema del viatjant de comerç de Peter Jones i els coeficients $\beta$

Els resultats descrits a la secció anterior en els teoremes 2.1, 2.2 i 2.3 són de naturalesa qualitativa. Tanmateix, per a l'aplicació a certs problemes d'anàlisi harmònica relacionats amb les integrals singulars i les singularitats evitables per a les funcions holomorfes acotades, són necessaris resultats de tipus més quantitatiu. Aquesta va ser la motivació que va portar Peter Jones a demostrar el 1989 el que es coneix com a *teorema del viatjant de comerç de l'analista*, un resultat que ha estat molt influent en l'anàlisi geomètrica de les darreres dècades. Per a enunciar aquest resultat, necessitem definir primer els coeficients  $\beta_\infty$ : donat un cub  $Q \subset \mathbb{R}^d$ , denotem

$$\beta_{\infty,E}(Q) = \inf_L \left\{ \sup_{y \in E \cap Q} \frac{\text{dist}(y,L)}{\ell(Q)} \right\},$$

on l'ínfim es pren sobre totes les rectes  $L \subset \mathbb{R}^d$  i  $\ell(Q)$  és la longitud del costat de  $Q$ . És a dir,  $2\ell(Q)\beta_{\infty,E}(Q)$  és l'amplada de la banda més estreta que conté  $E \cap Q$ . El coeficient  $\beta_{\infty,E}(Q)$  és invariant per escales i mesura com és de proper a una recta el conjunt  $E \cap Q$ , de manera que, en particular,  $\beta_{\infty,E}(Q) = 0$  si  $E \cap Q$  està contingut en alguna recta  $L$ ; vegeu la figura 3.

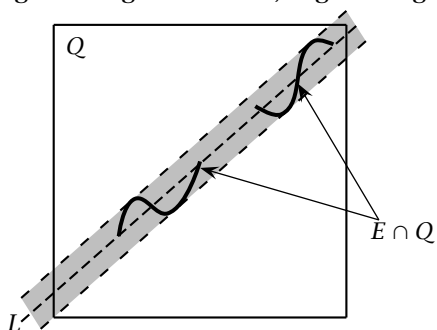


FIGURA 3: La banda d'amplada mínima que conté  $E \cap Q$  (ombrejada a la figura) coincideix amb  $2\beta_{\infty,E}(Q)\ell(Q)$ . El conjunt  $E \cap Q$  està format en aquest cas per les dues corbes en negra.

TEOREMA 3.1 ([7]). *Un conjunt  $E \subset \mathbb{R}^d$  està contingut en una corba de longitud finita si i només si*

$$\sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_{\infty, E}(3Q)^2 \ell(Q) < \infty, \tag{3.1}$$

on  $\mathcal{D}$  és la família de tots els cubs diàdics de  $\mathbb{R}^d$  i  $3Q$  denota el cub concèntric amb  $Q$  de costat  $3\ell(Q)$ . En aquest cas, la longitud de la corba més curta  $\Gamma$  que conté  $E$  satisfà

$$c^{-1} \mathcal{H}^1(\Gamma) \leq \text{diam}(E) + \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_{\infty, E}(3Q)^2 \ell(Q) \leq c \mathcal{H}^1(\Gamma), \tag{3.2}$$

on  $c > 0$  és una constant absoluta dependent només de  $d$ .

Notem que el resultat proporciona una estimació òptima, llevat de constants, de la longitud de la corba més curta que connecta tots els punts del conjunt  $E$ . Aquesta és la raó per la qual rep el nom de *teorema del viatjant de comerç*. Remarquem que aquest teorema va ser provat per a subconjunts de  $\mathbb{R}^2$  per Jones a [7], mentre que l'extensió a subconjunts de  $\mathbb{R}^d$  amb  $d \geq 3$  d'una de les implicacions del teorema (concretament, del fet que si  $E$  està contingut en una corba  $\Gamma$ , llavors la segona desigualtat de (3.2) és vàlida) és deguda a Okikiolu [16].

Per a entendre l'equació (3.2), considerem el cas en què el conjunt  $E$  coincideix amb la corba  $\Gamma$ . Considerem també aproximacions  $\Gamma_k$  de  $\Gamma$  formades per segments de longitud comparable a  $2^{-k}$ , com a la figura 4.

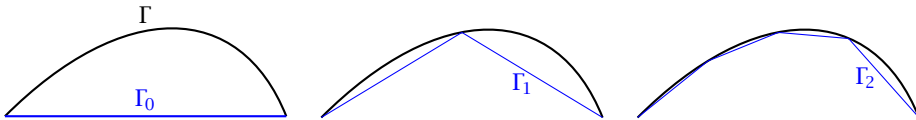


FIGURA 4: La corba  $\Gamma$  i les successives aproximacions  $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ .

Essencialment, els coeficients  $\beta_{\infty, \Gamma}$  mesuren l'increment de longitud entre aproximacions successives  $\Gamma_k$  de  $\Gamma$ , de manera que<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}^1(\Gamma_{k+1}) - \mathcal{H}^1(\Gamma_k) \approx \sum_{Q \in \mathcal{D}: \ell(Q)=2^{-k}} \beta_{\infty, \Gamma}(3Q)^2 \ell(Q). \tag{3.3}$$

Això es deu al fet que, pel teorema de Pitàgores, quan substituïm un segment de longitud  $\ell$  per dos altres segments que formen un triangle d'altura  $h \leq \ell$  com en la figura 5, l'increment de longitud és:

$$\sqrt{(2h)^2 + \ell^2} - \ell \approx \left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \ell = \beta^2 \ell,$$

on  $\beta \ell$  és l'amplada de la banda més estreta que conté el triangle.

<sup>1</sup> La notació  $a \approx b$  significa que  $a$  i  $b$  són comparables, és a dir, que existeix una constant absoluta  $C > 0$  tal que  $C^{-1}b \leq a \leq Cb$ .



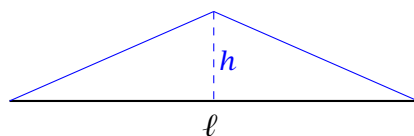


FIGURA 5: L'increment de longitud entre el segment de la base i la corba formada pels altres dos costats del triangle és comparable a  $\beta^2 \ell$ , on  $\beta \ell = h$  és l'amplada de la banda més estreta que conté el triangle.

Aleshores, sumant (3.3) des de  $k = 0$  fins a  $\infty$ , tenim que

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) - \mathcal{H}^1(\Gamma_0) \approx \sum_{Q \in \mathcal{D}} \beta_{\infty, \Gamma} (3Q)^2 \ell(Q),$$

amb  $\mathcal{H}^1(\Gamma_0) = \text{diam}(\Gamma_0)$ , de manera que obtenim (3.2). Tot i que aquest argument no és prou rigorós i cal modificar-lo adequadament (sobretot en el cas de conjunts  $E$  arbitraris), sí que ens proporciona la idea principal que hi ha darrere de la demostració del teorema 3.1.

A continuació enunciem un resultat de Bishop i Jones de l'any 1994 que caracteritza les tangents a una corba de Jordan en termes dels coeficients  $\beta_{\infty, \Gamma}$ . Per fer-ho, és convenient canviar els cubs  $Q$  en la definició dels coeficients  $\beta_{\infty}$  per boles  $B(x, r)$ . Més concretament, donats un conjunt  $E \subset \mathbb{R}^d$  i una bola  $B$ , denotem

$$\beta_{\infty, E}(B) = \inf_L \left\{ \sup_{y \in E \cap B} \frac{\text{dist}(y, L)}{r(B)} \right\},$$

on l'ínfim es pren sobre totes les rectes  $L \subset \mathbb{R}^d$  i  $r(B)$  denota el radi de  $B$ . També escriurem  $\beta_{\infty, E}(x, r)$  en lloc de  $\beta_{\infty, E}(B(x, r))$ . Tenim:

TEOREMA 3.2 ([4]). *Si  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  una corba de Jordan. Aleshores, llevat d'un conjunt de mesura  $\mathcal{H}^1$  nul·la,*

$$\int_0^1 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ per a } x \in \Gamma \iff \Gamma \text{ té una tangent en } x. \quad (3.4)$$

Remarquem que la funció

$$J(x) = \int_0^1 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)^2 \frac{dr}{r}$$

rep el nom de *funció quadrada de Jones*. Prèviament als treballs de Jones relacionats amb el teorema del viatjant de comerç, en l'estudi de la suavitat de les funcions dins l'anàlisi de Fourier, havien aparegut altres funcions més o menys anàlogues. El teorema del viatjant de comerç de Peter Jones està parcialment inspirat en tècniques i resultats d'aquest camp.

Els resultats anteriors s'han estès a conjunts  $n$ -rectificables, amb  $n > 1$ , de diverses maneres. En particular, David i Semmes, a la dècada del 1990, van definir i estudiar la noció de  $n$ -rectificabilitat uniforme [5], que es pot

caracteritzar en termes de certs coeficients  $\beta_{p,E}$  que definim tot seguit. Donat un conjunt  $\mathcal{H}^n$ -mesurable  $E \subset \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , i  $r > 0$ , denotem

$$\beta_{p,E}(x, r) = \inf_L \left( \frac{1}{r^n} \int_{E \cap B(x,r)} \left( \frac{\text{dist}(y, L)}{r} \right)^p d\mathcal{H}^n(y) \right)^{1/p},$$

on l'ínfim es pren sobre tots els  $n$ -plans  $L \subset \mathbb{R}^d$ .

En lloc d'enunciar cap resultat relacionat amb rectificabilitat uniforme, que potser ens portaria massa lluny, enunciem un resultat més recent en termes dels coeficients  $\beta_{2,E}$ , degut a Azzam i Tolsa.

**TEOREMA 3.3.** *Sigui  $E \subset \mathbb{R}^n$   $\mathcal{H}^n$ -mesurable i tal que  $\mathcal{H}^n(E) < \infty$ . Llavors,  $E$  és  $n$ -rectificable si i solament si*

$$\int_0^1 \beta_{2,E}(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \quad \text{per a } \mathcal{H}^n\text{-quasi tot } x \in E. \tag{3.5}$$

El fet que els conjunts  $n$ -rectificables satisfan (3.5) va ser demostrat a [18] i la implicació contrària, a [1]. Remarquem que, més recentment, la relació entre els coeficients  $\beta_{2,E}$  i la rectificabilitat ha estat essencial per a resoldre diversos problemes de frontera lliure per part de Naber i Valtorta [14].

### 4 La conjectura $\varepsilon^2$ de Carleson

En aquesta secció parlarem de la resolució de la conjectura  $\varepsilon^2$  de Carleson. Lennart Carleson és un matemàtic suec que ha fet contribucions fonamentals a l'anàlisi harmònica i a la teoria dels sistemes dinàmics. És especialment conegut per haver demostrat que la sèrie de Fourier de qualsevol funció de  $L^2([0, 2\pi])$  convergeix puntualment quasi per a tot punt. Entre moltes altres distincions, va rebre el premi Abel l'any 2006.

Per a poder enunciar la conjectura  $\varepsilon^2$  de Carleson, ens cal introduir prèviament els coeficients  $\varepsilon(x, r)$ . Sigui  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  una corba de Jordan, i siguin  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  les components acotada i no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , respectivament. Donats  $x \in \Gamma$ ,  $r > 0$ , siguin  $I^+(x, r)$  i  $I^-(x, r)$  arcs de longitud màxima continguts en  $\Omega^+ \cap \partial B(x, r)$  i  $\Omega^- \cap \partial B(x, r)$ , respectivament; vegeu la figura 6.

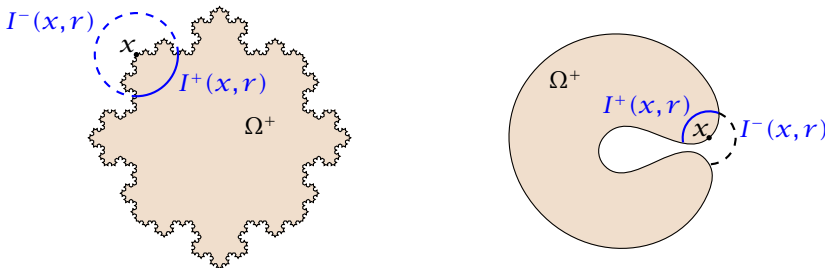


FIGURA 6: Dos dominis de Jordan  $\Omega^+$ , amb els arcs  $I^+(x, r)$ ,  $I^-(x, r)$ , corresponents a certs  $x$ ,  $r$ .

Siguin  $\theta^\pm(x, r)$  els angles dels arcs  $I^\pm(x, r)$ . Llavors, denotem

$$\varepsilon(x, r) = \max(|\pi - \theta^+(x, r)|, |\pi - \theta^-(x, r)|).$$

La funció quadrada  $\mathcal{E}$  de Carleson està definida per

$$\mathcal{E}(x) = \int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

Recordem que, per definició, una recta  $L \subset \mathbb{R}^2$  és una tangent a  $\Gamma$  en  $x$  si, per a tot  $0 < s < 1$ , existeix un  $r > 0$  tal que

$$\Gamma \cap B(x, r) \setminus X(x, L, s) = \emptyset.$$

Diem que  $L$  és una tangent per al domini de Jordan  $\Omega^+$  (en què  $\Gamma = \partial\Omega^+$ ) si, a més, es compleix que una component de  $B(x, r) \setminus X(x, u, s)$  està continguda en  $\Omega^+$  i l'altra en  $\Omega^-$  (per a tot  $s \in (0, 1)$  i  $r$  prou petit dependent de  $s$ ).

La conjectura  $\varepsilon^2$  de Carleson afirma que, llevat d'un subconjunt de longitud nul·la de  $\Gamma$ ,  $\mathcal{E}(x) < \infty$  si i solament si  $\Omega^+$  té una tangent en  $x$ . Aquesta conjectura ha estat demostrada recentment:

**TEOREMA 4.1.** *Sigui  $\Gamma$  una corba de Jordan i  $\Omega^+$ ,  $\Omega^-$  les components acotada i no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , respectivament. Aleshores, llevat d'un conjunt de mesura  $\mathcal{H}^1$  nul·la,*

$$\int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ per a } x \in \Gamma \iff \Omega^+ \text{ té una tangent en } x. \quad (4.1)$$

El fet que  $\mathcal{E}(x) < \infty$  per a  $\mathcal{H}^1$ -quasi tot punt  $x$  on existeix una tangent per  $\Omega^+$  va ser demostrat per Chris Bishop a la seva tesi doctoral l'any 1987 (dirigida per Peter Jones), i fou publicat posteriorment en un article conjunt de Bishop, Carleson, Garnett i Jones [3]. La implicació contrària, que podem considerar com la més difícil, va ser demostrada recentment en un treball conjunt de Jaye, Tolsa i Villa [6]. Notem que en el cas en què  $\mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$ , la corba  $\Gamma$  és 1-rectificable i, per tant, té una tangent aproximada per a  $\mathcal{H}^1$ -quasi tot  $x \in \Gamma$ . Per tant, el cas més interessant és aquell en què  $\mathcal{H}^1(\Gamma) = \infty$ , on  $\Gamma$  pot ser purament no 1-rectificable (és el cas de la corba tipus floc de neu a l'esquerra de la figura 6).

La primera vegada que s'esmenta la conjectura  $\varepsilon^2$  és a la tesi doctoral de Bishop, el qual es va plantejar aquesta qüestió per les seves connexions amb la mesura harmònica. De fet, la seva demostració de « $\mathcal{E}(x) < \infty \Rightarrow$  existeix una tangent a  $\Omega^+$  en  $x$ , per a  $\mathcal{H}^1$ -quasi tot  $x \in \Gamma$ » es basa en una coneguda estimació per la mesura harmònica deguda a Beurling i en el fet que la mesura harmònica és mútuament absolutament contínua amb la mesura de longitud en els punts tangents d'una corba de Jordan. Posteriorment, Bishop proposa la conjectura  $\varepsilon^2$  a l'article [2], que atribueix a Carleson. Tanmateix, sembla que Carleson no va formular aquesta conjectura en cap article seu i probablement

no la va escriure explícitament enlloc, tot i que és evident que coneixia aquest problema, tenint en compte que és coautor de [3].

Observem la semblança entre les afirmacions (3.4) i (4.1). És natural preguntar-se si un teorema es pot deduir de l'altre. De fet, és fàcil comprovar que per a tot punt tangent  $x \in \Gamma$ , si  $r$  és un radi prou petit, llavors

$$\varepsilon(x, r) \leq c \beta_{\infty, \Gamma}(x, r),$$

per a alguna constant fixada  $c$ . Això es pot deduir amb arguments geomètrics senzills. Fixeu-vos en la figura 7: si denotem per  $y$  i  $z$  els extrems de l'arc  $I^+(x, r)$ , com en la figura, és clar que el triangle amb vèrtexs  $x, y, z$  ha d'estar contingut en la banda d'amplada mínima que conté  $\Gamma \cap B(x, r)$  (aquí suposem que  $B(x, r)$  és tancada). Per tant,  $\beta_{\infty, \{x, y, z\}}(x, r) \leq \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ , o equivalentment, l'altura del triangle des del vèrtex  $x$  fins al costat  $yz$  ha de ser més petita que l'amplada de l'esmentada banda. És a dir,  $r \cos \frac{\theta^+(x, r)}{2} \leq 2r \beta_{\infty, \infty}(x, r)$ . Per tant,

$$|\pi - \theta^+(x, r)| \approx \left| \sin \frac{\pi - \theta^+(x, r)}{2} \right| = \left| \cos \frac{\theta^+(x, r)}{2} \right| \leq 2 \beta_{\infty, \Gamma}(x, r).$$

Evidentment, la mateixa estimació és certa canviant  $\theta^+(x, r)$  per  $\theta^-(x, r)$ , i llavors deduïm que efectivament  $\varepsilon(x, r) \leq c \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ . A partir d'aquest fet i del teorema 3.2 obtenim una nova demostració de la implicació « $\Leftarrow$ » en (4.1), diferent de l'original de Bishop.

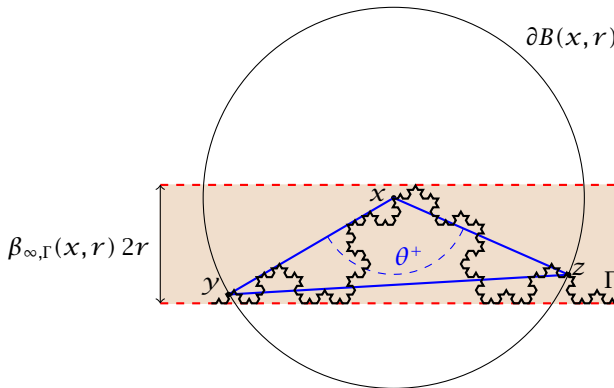


FIGURA 7: Comparació entre  $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$  i  $\varepsilon(x, r)$ .

D'altra banda, la desigualtat contrària,  $\varepsilon(x, r) \geq c \beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ , és falsa. En efecte, observeu que a la figura 8 tenim un exemple en què  $\varepsilon(x, r) = 0$ , mentre que  $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) > 0$ .

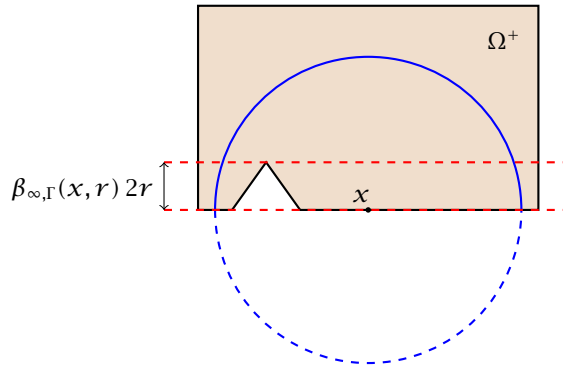


FIGURA 8: Un cas en què  $\varepsilon(x, r) = 0$  i  $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r) > 0$ .

### 5 Idees principals per a la demostració de la implicació « $\Rightarrow$ » en (4.1)

En aquesta darrera secció descriurem les idees principals de [6] per a demostrar que, mòdul un conjunt de longitud nul·la,

$$\int_0^1 \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty \text{ per a } x \in \Gamma \Rightarrow \Omega^+ \text{ té una tangent en } x. \quad (5.1)$$

Una de les dificultats importants per provar (5.1) es deu al fet que els coeficients  $\varepsilon(x, r)$  són força inestables. És a dir, el valor de  $\varepsilon(x, r)$  pot canviar dràsticament si  $x$  o  $r$  canvien lleugerament. A més a més, pot ocórrer que  $\varepsilon(x, r)$  sigui nul, mentre que  $\varepsilon(x, r/2)$  no. En canvi, els coeficients  $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$  són molt més estables, i és fàcil comprovar que  $\beta_{\Gamma, \infty}(x, r/2) \lesssim \beta_{\Gamma, \infty}(x, r)$ . Aquesta és una de les raons per introduir uns nous coeficients  $\alpha_\varphi(x, r)$ .

Donada una funció radial  $\varphi \in C^\infty$ , positiva, i de la classe de Schwartz,<sup>2</sup> i donat  $r > 0$ , denotem  $\varphi_r(x) = \frac{1}{r^2} \varphi(\frac{x}{r})$ . Donat  $x \in \Gamma$ , considerem el coeficient

$$\alpha_\varphi(x, r) = \left| \int_{\Omega^+} \varphi_r(x - y) dy - \int_{\mathbb{R}_+^2} \varphi_r(y) dy \right|.$$

Observeu que el cas en què  $\Omega^+$  sigui un semiplà amb vora  $\Gamma$  passant per  $x$ , llavors  $\alpha_\varphi(x, r) = 0$  per a tot  $r > 0$  (el mateix passa amb el coeficient  $\varepsilon(x, r)$  i amb  $\beta_{\infty, \Gamma}(x, r)$ ). De fet, integrant en coordenades polars es pot comprovar que

$$\int_0^\infty \alpha_\varphi(x, r)^2 \frac{dr}{r} \lesssim \int_0^\infty \varepsilon(x, r)^2 \frac{dr}{r}.$$

<sup>2</sup> En cas que el lector desconegui què és la classe de Schwartz, pot pensar que  $\varphi$  simplement és una funció  $C^\infty$  amb suport compacte, o bé la funció  $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$ .

A partir d'aquí es dedueix que, si la integral en (5.1) és finita, llavors també

$$\int_0^1 \alpha_\varphi(x, r)^2 \frac{dr}{r} < \infty.$$

La demostració de la implicació (5.1) té dues parts principals. La primera consisteix a obtenir el resultat següent:

LEMA 5.1. *Sigui  $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$  un domini de Jordan i  $\Gamma = \partial\Omega^+$ . Sigui  $\varphi(x) = e^{-|x|^2}$ . Sigui  $\mu$  una mesura amb suport a  $\Gamma$  tal que  $\mu(B(x, t)) \leq t$  per a tot  $x \in \mathbb{R}^2$  i  $t > 0$ . Sigui  $B$  una bola centrada en  $\Gamma$  tal que*

$$\mu(B) \geq r(B). \quad (5.2)$$

Per a tot  $\varepsilon > 0$ , existeix  $\delta > 0$ , tal que si

$$\int_{10B} \int_0^{10r(B)} [\varepsilon(x, t)^2 + \alpha_\varphi(x, t)^2] d\mu(x) \frac{dt}{t} \leq \delta \mu(10B), \quad (5.3)$$

llavors

$$\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \varepsilon.$$

La demostració d'aquest lema és la part més nova i difícil de [6]. Es duu a terme per arguments de compacitat. La idea és la següent. Suposem que el lema no és cert. Llavors existeixen una successió de dominis de Jordan  $\Omega_k^+$ , mesures  $\mu_k$  i boles  $B_k$  que satisfan (5.2) i (5.3), amb  $\delta = 1/k$ , tals que  $\beta_{\infty, \Gamma_k}(B_k) \geq \varepsilon$ . Reescalant, podem suposar que  $B_k = B(0, 1)$ , i llavors passant al límit (en la distància de Hausdorff) i prenent una successió parcial si cal, «idealment» arribem a un domini  $\Omega^+$  i una mesura  $\mu$  tals que  $F_r(x)$  s'anulla a  $\text{supp } \mu \cap 10B \subset \Gamma = \partial\Omega^+$ , on

$$F_r(x) := \int_{\Omega^+} \frac{1}{r^2} \exp(|x - y|^2/r^2) dy - \frac{\pi}{2}.$$

Observem que  $F_r$  és una funció real analítica i, per tant,  $\text{supp } \mu \cap 10B$  està contingut en una varietat real analítica. L'objectiu llavors és demostrar que  $\Gamma \cap B$  és una recta. Això contradiria el fet que  $\beta_{\infty, \Gamma_k}(B) \geq \varepsilon$  per a tot  $k$  (la qual cosa implica que  $\beta_{\infty, \Gamma}(B) \geq \varepsilon$  passant al límit).

L'argument descrit en el paràgraf anterior té una dificultat important (que es resol adequadament a [6]): els dominis i les corbes de Jordan no són estables per pas al límit en la distància de Hausdorff. De fet, si tenim que  $\Omega_k^+ \rightarrow G^+$ ,  $\overline{\Omega_k^-} \rightarrow G^-$ ,  $\Gamma_k \rightarrow G_0$ , localment en la distància de Hausdorff, pot ocórrer que  $G_0$  ni tan sols coincideixi amb la frontera de  $G^+$  o  $G^-$ .

El segon lema principal per a la demostració de (5.1) és el següent:

LEMA 5.2. *Sigui  $\theta > 0$  i  $\varepsilon > 0$ . Sigui  $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^2$  un domini de Jordan i  $\Gamma = \partial\Omega^+$ . Sigui  $B_0$  una bola centrada en  $\Gamma$  i sigui  $\mu$  una mesura amb suport a  $\Gamma \cap B_0$  tal que  $\mu(B(x, t)) \leq t$  i que satisfà*

- $\mu(B_0) \gtrsim r(B_0)$ .
- $\beta_{\infty, \Gamma}(B) \leq \delta$  per a tota bola  $B$  centrada en  $\Gamma$  tal que  $\mu(B) \geq \theta r(B)$ .
- Per a una funció radial  $\varphi \in C^\infty$ , positiva, amb suport compacte, es compleix que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{100r(B_0)} \alpha_\varphi(x, t)^2 \frac{dt}{t} d\mu(x) \leq \delta \mu(\mathbb{R}^2).$$

Si  $\theta > 0$  és prou petit i  $\delta = \delta(\theta)$  també és prou petit, llavors existeix un graf Lipschitz  $\Lambda$  tal que

$$\mu(\Lambda) \geq \frac{1}{2} \mu(B_0).$$

Aquest lema es demostra mitjançant tècniques de rectificabilitat quantitativa i arguments de temps de parada inspirats per tècniques desenvolupades per David i Semmes [5] i Léger [9]. Un ingredient essencial prové d'una estimació de Fourier que afirma que, si  $\Gamma_A \subset \mathbb{R}^2$  és el graf d'una funció Lipschitz  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  amb pendent prou petit i suport compacte i denotem  $\Omega_A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > A(x_1)\}$ , llavors

$$\int_{\Gamma_A} \int_0^\infty \alpha_{\varphi, \Omega_A}(x, r)^2 \frac{dr}{r} d\mathcal{H}^1(x) \approx \|A'\|_2^2.$$

Notem que aquesta estimació ens diu, en particular, que si la integral de l'esquerra és molt petita, llavors  $\Omega_A$  és molt proper al semiplà superior de  $\mathbb{R}^2$ , ja que  $\|A'\|_2 \ll 1$ .

Per deduir la implicació (5.1) a partir dels lemes 5.1 i 5.2, raonem de la manera següent. Suposem que existeix un conjunt  $E \subset \Gamma$  amb  $\mathcal{H}^1(E) > 0$  tal que, per a tot  $x \in E$ ,  $\mathcal{E}(x) < \infty$  però la tangent en  $x$  no existeix. Sigui  $F \subset E$  amb  $0 < \mathcal{H}^1(F) < \infty$  i sigui  $\mu = \frac{1}{6} \mathcal{H}^1|_F$ . Reduint  $F$  i reescalant si cal, podem suposar que  $\mu(B(x, r)) \leq r$  per a tot  $x \in \mathbb{R}^2$  i  $r > 0$ , i que, per a tot  $x \in F$ ,

$$\int_0^1 [\varepsilon(x, r)^2 + \alpha_\varphi(x, r)^2] \frac{dr}{r} \leq \delta.$$

Per propietats estàndard de les mesures de Hausdorff, trobem una bola  $B_0$  tal que  $\mu(B_0) \approx r(B_0) \leq 1$ . Aplicant els dos lemes anteriors, trobem un subconjunt 1-rectificable  $F_0 \subset F$  tal que  $\mathcal{H}^1(F_0) > 0$ . Per tant, aquest conjunt té tangent aproximada a gairebé tot punt (respecte a  $\mathcal{H}^1$ ), pel teorema 2.1. A més, aplicant novament el lema 5.1 és fàcil comprovar que aquestes tangents aproximades són tangents al domini  $\Omega^+$ . Això contradueix la suposició inicial sobre l'existència del conjunt  $E \subset \Gamma$  amb  $\mathcal{H}^1(E) > 0$  tal que, per a tot  $x \in E$ ,  $\mathcal{E}(x) < \infty$  però la tangent en  $x$  no existeix.

## Referències

- [1] AZZAM, J.; TOLSA, X. «Characterization of  $n$ -rectifiability in terms of Jones' square function: Part II». *Geom. Funct. Anal.*, 25 (5) (2015), 1371–1412.
- [2] BISHOP, C. J. «Some questions concerning harmonic measure». A: *Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications* (Chicago, IL, 1990). Nova York: Springer, 1992, 89–97. (IMA Vol. Math. Appl.; 42)
- [3] BISHOP, C. J.; CARLESON, L.; GARNETT, J. B.; JONES, P. W. «Harmonic measures supported on curves». *Pacific J. Math.*, 138 (2) (1989), 233–236.
- [4] BISHOP, C. J.; JONES, P. W. «Harmonic measure,  $L^2$  estimates and the Schwarzian derivative». *J. Anal. Math.*, 62 (1994), 77–113.
- [5] DAVID, G.; SEMMES, S. «Singular integrals and rectifiable sets in  $\mathbb{R}^n$ : Beyond Lipschitz graphs». *Astérisque*, 193 (1991), 152 p.
- [6] JAYE, B.; TOLSA, X.; VILLA, M. «A proof of Carleson's  $\varepsilon^2$ -conjecture». *Ann. of Math. (2)*, 194 (1) (2021), 97–161.
- [7] JONES, P. W. «Rectifiable sets and the traveling salesman problem». *Invent. Math.*, 102 (1) (1990), 1–15.
- [8] KOWALSKI, O.; PREISS, D. «Besicovitch-type properties of measures and submanifolds». *J. Reine Angew. Math.*, 379 (1987), 115–151.
- [9] LÉGER, J. C. «Menger curvature and rectifiability». *Ann. of Math. (2)*, 149 (3) (1999), 831–869.
- [10] MARSTRAND, J. M. «Hausdorff two-dimensional measure in 3-space». *Proc. London Math. Soc. (3)*, 11 (1961), 91–108.
- [11] MARSTRAND, J. M. «The  $(\varphi, s)$  regular subsets of  $n$ -space». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 113 (1964), 369–392.
- [12] MATTILA, P. «Hausdorff  $m$  regular and rectifiable sets in  $n$ -space». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205 (1975), 263–274.
- [13] MATTILA, P. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and rectifiability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 44)
- [14] NABER, A.; VALTORTA, D. «Rectifiable-Reifenberg and the regularity of stationary and minimizing harmonic maps». *Ann. of Math. (2)*, 185 (1) (2017), 131–227.
- [15] NIMER, A. D. «Conical 3-uniform measures: a family of new examples and characterizations». Preprint (2016). [Disponible en línia a: arXiv:1608.02604] [Apareixerà a *J. Diff. Geom.*]
- [16] OKIKIOLU, K. «Characterization of subsets of rectifiable curves in  $\mathbb{R}^n$ ». *J. London Math. Soc. (2)*, 46 (2) (1992), 336–348.
- [17] PREISS, D. «Geometry of measures in  $\mathbb{R}^n$ : distribution, rectifiability, and densities». *Ann. of Math. (2)*, 125 (3) (1987), 537–643.



- [18] TOLSA, X. «Characterization of  $n$ -rectifiability in terms of Jones' square function: part I». *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54 (4) (2015), 3643-3665.

ICREA, PASSEIG LLUÍS COMPANYYS 23, 08010 BARCELONA  
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA,  
08193 BELLATERRA  
I CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA, 08193 BELLATERRA  
xtolsa@mat.uab.cat