Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 36, núm. 1, 2021. Pàg. 69–113. DOI: 10.2436/20.2002.01.98

Conjectures

Armengol Gasull

Resum: L'objectiu d'aquest treball és donar a conèixer diverses conjectures matemàtiques que tenen en comú el fet d'ocupar-se de qüestions que es poden entendre sense haver de ser un matemàtic professional. Les agruparem en tres grans blocs: les que parlen de números primers, les que involucren números naturals i, en un tercer bloc heterogeni, les que tracten problemes de diverses branques de les matemàtiques. En total parlarem, amb més o menys profunditat, de més de quaranta conjectures. També es planteja la possibilitat d'usar les conjectures com una eina de motivació per als estudiants de batxillerat i dels primers anys d'universitat, i presentar així les matemàtiques com una disciplina viva i en creixement.

Paraules clau: conjectures, teoria de números, números primers, problemes oberts, popularització de les matemàtiques.

Classificació MSC2010: 00A05, 00A09, 00A27, 11A.

Introducció

En aquest treball donarem a conèixer diverses conjectures matemàtiques, que comparteixen el fet d'afirmar qüestions que es poden entendre sense que calgui ser un matemàtic professional.[1] En particular, només considerarem conjectures tals que el seu enunciat sigui curt i autocontingut. Cadascuna d'elles es pot llegir de manera independent. El nostre objectiu, a part d'ampliar els coneixements i entretenir els lectors, és mostrar les matemàtiques no com una ciència tancada en la qual tot es coneix, ans més aviat el contrari, com una disciplina viva i en creixement. Com veurem, tot i que les conjectures que es detallen toquen diferents àmbits de les matemàtiques, la majoria d'elles són de caire teòric o lúdic i deixen de banda una de les raons de ser de les matemàtiques: la modelització i la comprensió del món. Això sí, els mateixos matemàtics que han proposat o estudiat aquestes conjectures són els que han fet avançar la matemàtica en totes les seves vessants.

1 Una altra qüestió ben diferent és el nivell i la profunditat matemàtics necessaris per a saber si són certes o falses!

FIGURA 1: Darrer teorema de Fermat.

Però, què és una conjectura matemàtica? Una possible definició seria que és un resultat consistent amb tot el que es coneix, però no s'ha pogut verificar si és cert o fals.

Tanmateix, potser podem entendre millor el que és llegint un tros de la correspondència que el 1742 van tenir el matemàtic i científic suís Leonhard Euler i el matemàtic prussià Christian Goldbach, sobre el que avui en dia es coneix com a *conjectura de Goldbach*. Euler li deia:

> Que [...] tot número enter parell és una suma de dos primers, jo ho veig com un teorema completament cert, però no ho puc provar.

Així, una conjectura és un resultat que molts matemàtics pensen que hauria de ser un teorema, però que cap d'ells no ha pogut provar. A més, aquest candidat a teorema ha resistit tots els esforços per buscar-li un contraexemple. I si la conjectura admet ser estudiada amb l'ajut de programes informàtics, s'ha pogut verificar fins a on poden arribar els ordinadors més potents disponibles fins al moment. Finalment, és possible que existeixin idees heurístiques, probabilístiques o intuïtives que també fan pensar que és certa.

Hi ha conjectures degudes a matemàtics il·lustres que han resultat certes i unes altres falses. Un dels exemples més famosos de conjectura certa és la que es va popularitzar com a *darrer teorema de Fermat*, quan encara no era un teorema. Va ser enunciat pel matemàtic i advocat francès Pierre de Fermat el 1637, i afirmava que l'equació $x^n + y^n = z^n$, per a $2 < n \in \mathbb{N}$, no tenia solucions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$; vegeu un segell dedicat al tema a la figura 1. La demostració d'aquest resultat va haver d'esperar fins al 1995, i és deguda al matemàtic anglès Andrew J. Wiles. Una altra conjectura ben famosa, però molt més tècnica sobre una caracterització topològica de les esferes 3-dimensionals, i que ja és també un teorema, és la conjectura de Poincaré demostrada el 2003 pel matemàtic rus Grigori I. Perelman.

Euler, el 1769, en un intent d'estendre el darrer teorema de Fermat, va proposar la conjectura següent, que ens servirà per a il·lustrar el cas contrari: si per a certs $n > 1$, $k > 1$ enters hi ha $(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k = y^k,$$

aleshores $n \geq k$. Un exemple conegut ja a l'antiga Grècia i coherent amb la conjectura és $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$. El primer contraexemple d'aquesta conjectura, per a $k = 5$, va ser trobat usant un programa d'ordinador per Lander i Parkin el 1966,

$$27^5 + 84^5 + 110^5 + 133^5 = 144^5,$$

i està publicat en el que potser és l'article més curt de matemàtiques ([71]): cinc línies de text i una referència. El 1986, Noam D. Elkies va trobar, també via programació, el primer contraexemple per a $k = 4$. El més senzill que es coneix és de l'any 1988 i és degut a Roger E. Frye,

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4.$$

Per a $k = 3$ la conjectura és certa, ja que, com acabem de comentar, el darrer teorema de Fermat és, avui en dia, un teorema.

Aquest treball no intenta de cap manera llistar totes les conjectures matemàtiques existents, ni tan sols presentar les més importants. El criteri que s'ha intentat seguir en la selecció feta és que els seus enunciats estiguin a l'abast d'estudiants de batxillerat o dels primers anys de carreres científiques i, també, de persones que tenen un interès ampli per les matemàtiques. Sense ànims de ser exhaustius, però per completesa, donarem els noms d'algunes conjectures famoses que no descriurem aquí i que requereixen més coneixements matemàtics per a entendre'n els enunciats: la conjectura ABC (també coneguda com a *conjectura d'Oesterlé-Masser*) o la conjectura de Birch i Swinnerton-Dyer (teoria de nombres), la conjectura de Carathéodory (geometria diferencial), la conjectura de Hadamard (combinatòria), les conjectures de Kaplansky (àlgebra), el lema de tancament o *closing lemma* de Pugh (sistemes dinàmics), la finitud de les configuracions centrals (mecànica celeste), etcètera.

En moltes de les conjectures que presentem es donen referències més detallades i, en particular, moltes de les relacionades amb teoria de nombres apareixen al llibre *Unsolved Problems in Number Theory*, de Richard K. Guy ([52]) o [6, 82]. També s'han consultat els treballs [57, 58, 59, 60, 111]. A part d'aquestes referències, s'han usat de manera sistemàtica diverses pàgines web. Així, a la Wikipedia en anglès s'han consultat les pàgines amb els títols: «List of unsolved problems in mathematics», «List of conjectures» i «Conjectures», amb els seus enllaços corresponents. També hi ha molta informació a les pàgines del *MathWorld-A Wolfram Web Resource* i a la del *CNRS-Images des mathématiques* dins la secció «Les conjectures du trimestre».

Les conjectures de què parlarem s'han dividit en tres grups. Cada grup es presenta en una secció diferent.

Així, a la secció 1 incloem les que estan estretament relacionades amb els números primers i la seva estructura. Per tant, ens ocuparem de les conjectures sobre els primers bessons, de Legendre, imposant expressions concretes per als números primers, de Goldbach, de Lemoine, d'Oppermann, de Brocard, d'Andrica, de Firoozbakht, de Cramér, de Gilbreath, segona de Hardy-Littlewood, dels primers de Germain, i de Grimm.

La secció 2 està dedicada a conjectures que involucren números naturals. Considerem les conjectures sobre els números perfectes, d'Erdős-Straus, de Brocard-Ramanujan-Erdős, de Goormaghtigh, de Carmichael, de Singmaster, de Beal, sobre la màxima persistència multiplicativa, la de no palindromia, i de Selfridge.

Finalment, a la secció 3 hi ha un popurri de conjectures sobre temes diferents. Parlem de la conjectura de Lagarias equivalent a la hipòtesi de Riemann, i les conjectures $3x+1$, jacobiana, de Casas-Alvero, sobre la normalitat de π, sobre la irracionalitat de γ, sobre la seqüència de Kolakoski, de Frankl, de Toeplitz, d'Erdős-Szekeres, del billars triangulars, del sofà, i de Levi-Hadwiger.

De manera tangencial, també parlarem al text de les conjectures de Polignac, de les cadenes de Cunningham, de Dickson, de Sierpiński i de Kakeya.

És clar que els gustos i els coneixements de l'autor també han influït en la tria feta.

A l'última secció incloem algunes reflexions sobre la utilitat tant didàctica com científica i pràctica d'estudiar conjectures matemàtiques. Com veurem, en particular moltes de les conjectures que es presenten ens proporcionen idees interessants i engrescadores per introduir els nostres alumnes en el món de la investigació i en el de la programació. En aquesta direcció, podeu llegir el blog de Ben Braun del maig del 2005: «Famous Unsolved Math Problems as Homework», penjat als blogs de l'American Mathematical Society dins de la secció «On Teaching and Learning Mathematics». També aprofitarem aquesta secció per a presentar alguns exemples famosos de propietats que són certes per a molts casos particulars i podrien fer pensar que donen lloc a una conjectura o, millor encara, a un teorema, però que finalment són falses.

Acabarem aquesta introducció amb un aspecte del qual a vegades s'oblida parlar a l'hora d'enfrontar-se a una conjectura: hi ha la possibilitat que una conjectura no sigui ni certa ni falsa. Per il·lustrar aquesta darrera afirmació, posarem un parell d'exemples. El més famós és el relacionat amb l'anomenada *hipòtesi del continu*. Ho expliquem breument.

Si hi ha dos conjunts entre els quals podem definir una aplicació bijectiva, es diu que tenen la mateixa cardinalitat. Així, els conjunts $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$ tenen cardinalitat numerable, o també anomenada $\aleph_0$, que es llegeix com *alef sub zero*. Per altra banda, els conjunts $(0,1)$, $[0,1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ tenen la mateixa cardinalitat que el conjunt de tots els subconjunts de $\mathbb{N}$, i aquesta es denota com $2^{\aleph_0}$. Així, sorgeix una pregunta molt natural: *hi ha algun conjunt amb una cardinalitat intermèdia entre* $\aleph_0$ *i* $2^{\aleph_0}$*?* De fet, aquesta pregunta va ser el primer problema d'una llista de vint-i-tres que va posar el matemàtic alemany David Hilbert a la comunitat matemàtica, l'any 1900 a París en el Segon Congrés Internacional de Matemàtics.

La no existència de conjunts amb cardinalitat entre $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ és precisament el que s'anomena *hipòtesi del continu*. L'any 1939, Kurt Gödel, matemàtic, filòsof i especialista en lògica austroamericà, va demostrar que la hipòtesi del continu és compatible amb tots els altres axiomes de la teoria de conjunts. Per tant, mai no se'n podrà demostrar la falsedat. L'any 1963, el matemàtic nord-americà Paul Cohen va demostrar la indecidibilitat de la hipòtesi del continu. Això vol dir que tant si suposem que la hipòtesi del continu és certa com si considerem que és falsa, no comporta cap contradicció amb els axiomes esmentats. En altres paraules, tant si haguéssim conjecturat l'existència d'aquest conjunt com si haguéssim conjecturat la seva no existència, mai ho hauríem pogut demostrar.

És curiós observar que abans que es demostrés el darrer teorema de Fermat, fins i tot s'especulava que pogués ser un resultat indecidible; en relació amb això, consulteu l'interessant treball de John H. Conway ([29]). De fet, en el seu treball Conway demostra l'existència d'enunciats similars al presentat a la conjectura $3x + 1$, de la qual parlarem més endavant, que són indecidibles.

1 Conjectures sobre números primers

Euclides ja va demostrar que hi ha infinits primers i, de fet, entre els dos llibres [81, 92] hi ha una dotzena de proves diferents d'aquest fet; vegeu també [99]. A més, es coneixen moltes propietats sobre la seva distribució. Per exemple, el 1896, el matemàtic francès Jacques Hadamard i el matemàtic belga Charles-Jean de la Vallée-Poussin van provar, usant idees del matemàtic alemany Georg Friedrich B. Riemann, que si $\pi(n)$ denota el nombre de números primers menors o iguals que n,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)\ln(n)}{n} = 1.$$

Per una banda, hi ha propietats interessants dels primers que són fàcils de demostrar. Per exemple, que per a tot $m \in \mathbb{N}$ hi ha com a mínim m números consecutius de manera que cap d'ells és primer, o que per a tot primer $p \geq 5$, el residu de p^2 entre 24 és sempre 1. Per a demostrar la primera propietat, podem prendre $(m+1)! + k$, per a $k = 2, 3, \ldots, m+1$, i, clarament, cada $(m+1)! + k$ no és primer ja que és divisible per k. La prova de la segona és equivalent a veure que $p^2 = 24\ell + 1$, per a un cert $\ell \in \mathbb{N}$, o, en altres paraules, a veure que $(p+1)(p-1)$ és divisible per 24. Considerem els tres números consecutius: $p - 1 < p < p + 1$. És clar que $p - 1$ i $p + 1$ són ambdós parells i, encara més, un d'ells ha de ser múltiple de 4. D'una manera similar, donats tres números consecutius, 3 ha de dividir-ne un d'aquests. Com que p és primer, en el nostre cas ha de dividir o bé $p - 1$ o bé $p + 1$. En resum, $(p-1)(p+1)$ ha de tenir els divisors 2, 3, 4 i, per tant, ha de ser divisible per 24, tal com volíem provar. Per altra banda, hi ha propietats dels primers molt difícils de demostrar.

En aquesta secció enunciarem diverses conjectures sobre els primers i la seva distribució. Les quatre primeres inclouen els coneguts com els quatre *problemes de Landau*, ja que el matemàtic alemany Edmund Landau els va enunciar al Congrés Internacional de Matemàtics del 1912. Com veurem, n'hi ha de dos tipus. Les de Goldbach i Lemoine usen els primers com una mena de descomposició additiva de tots els enters positius. Totes les altres n'estudien la distribució.

Conjectura sobre els primers bessons. Hi ha infinites parelles de números primers de la forma p, $p + 2$.

Les primeres parelles de primers bessons són $(3, 5)$, $(5, 7)$, $(11, 13)$, $(17, 19)$. És fàcil raonar que 5 és l'únic número que apareix a dues parelles diferents. L'any 2018, la parella més gran de primers bessons coneguda era $2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} \pm 1$, formada per números amb més de 380 000 xifres.

101	**103**	**107**	**109**	113	127	131	**137**	**139**	**149**	**151**	157
163	167	173	**179**	**181**	**191**	**193**	**197**	**199**	211	223	**227**
229	233	**239**	**241**	251	257	263	**269**	**271**	277	**281**	**283**

TAULA 1: Primers entre 100 i 292. En negreta (en dues tonalitats), els parells bessons.

Aquesta conjectura va ser estesa el 1849, pel matemàtic francès Alphonse de Polignac, qui va preguntar-se si per a tot número natural k hi ha infinits primers de manera que p i $p+2k$ siguin ambdós primers. Aquesta segona propietat es coneix com a *conjectura de Polignac*. Observeu que per a la conjectura que ens ocupa $k=1$.

La conjectura sobre els primers bessons sembla que és de les més antigues en teoria de nombres, tot i que els progressos més grans cap a la seva possible demostració són molt recents. L'any 2013, Yitang Zhang ([116]) va provar que hi ha un k menor que 35 milions, de manera que existeixen infinites parelles de números primers que difereixen $2k$. Més concretament, el seu teorema ens diu que

$$\liminf_{n\to\infty}(p_{n+1}-p_n) < 7\times 10^7,$$

on, com sempre, p_n indica el primer enèsim. Avui en dia s'està rebaixant significativament aquesta fita amb les contribucions de James Maynard i Terence Tao.

Una de les maneres (no senzilles) de demostrar l'existència d'infinits primers és provar que la sèrie $\sum_{p \text{ primer}} 1/p$ és divergent; vegeu [1, 28, 41]. És molt curiós observar que el matemàtic noruec Viggo Brun va demostrar el 1919 ([16]) que si considerem la sèrie formada pels inversos dels primers bessons,

$$\sum_{p,\,p+2 \text{ primers}} \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+2}\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+ \\ +\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{29}+\frac{1}{31}\right)+\cdots,$$

aquesta és convergent. El valor de la seva suma es coneix avui en dia com la *constant de Brun*, B_2, i el seu valor aproximat és 1.90216 ([83, 28]). Malauradament, aquest resultat no prova la conjectura, ja que és coherent amb el fet que sigui certa o falsa. El que sí que dona és una via per a intentar demostrar-la: provar que B_2 és irracional.

CONJECTURA DE LEGENDRE. Per a tot $0 < n \in \mathbb{N}$ hi ha un número primer p que satisfà $n^2 < p < (n+1)^2$.

La conjectura de Legendre ve recollida a diferents textos i s'atribueix al matemàtic francès Adrien-Marie Legendre, que va viure a cavall dels segles XVIII i XIX. El resultat relacionat més important és degut al matemàtic xinès Jing-Run Chen ([26]), qui el 1975 va provar que la conjectura és certa si s'admet que p sigui o bé primer o bé semiprimer. Recordem que un número es diu semiprimer si és el producte de dos primers, eventualment iguals.

Un resultat similar, però més dèbil, va ser conjecturat el 1845 pel matemàtic francès Joseph L. F. Bertrand. Aquest afirmava que per a tot $3 < n \in \mathbb{N}$ hi ha un número primer p que satisfà $n < p < 2n - 2$, i va verificar-ho per a tots els números menors que 3×10^6. La conjectura de Bertrand es va convertir en teorema quan va ser demostrada pel matemàtic rus Pafnuti L. Txebixev el 1852.

CONJECTURES OBTINGUDES IMPOSANT EXPRESSIONS CONCRETES PER ALS NÚMEROS PRIMERS. Hi ha infinits primers de cada una de les formes següents:

$$n^2 + 1, \quad n! + 1, \quad n! - 1, \quad 2^n + 1, \quad 2^n - 1.$$

La qüestió sobre l'existència d'infinits primers de la forma $n^2 + 1$ es remunta a Euler, és el quart problema dels de la llista de Landau i també apareix en una conjectura dels matemàtics britànics Godfrey H. Hardy i John E. Littlewood ([54, 103]) que, de fet, afirma el mateix per a números de la forma $An^2 + Bn + C$, per a molts valors enters de A, B i C. Òbviament, per exemple, no hi ha primers de les formes $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ o $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Segons Shanks [102], entre els números enters n entre 1 i 180 000 n'hi ha 11 223 per als quals $n^2 + 1$ és primer. Un exemple concret de primer és $(4 \times 10^{34})^2 + 1$.

Segons que coneix l'autor, els números primers més grans coneguts de les dues formes següents són $150209! + 1$ i $208003! - 1$.

En una línia similar, el matemàtic prussià Johann P. G. L. Dirichlet el 1837 va demostrar que, variant $n \in \mathbb{N}$, qualsevol expressió $An + B$ amb A i B enters coprimers dona lloc a infinits números primers.

Els números primers de la forma $2^n + 1$ s'anomenen *primers de Fermat*. Ara demostrarem que si $2^n + 1 > 2$ és primer, aleshores $n = 2^m$.

Per començar, és fàcil provar que per a tot $0 < k$, $a \neq b \in \mathbb{R}$, $a - b$ divideix $a^k - b^k$. Això és degut a la igualtat

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Si considerem $2^n + 1$, on n no és una potència de 2, tenim que $n = rs$ per a un cert s, senar. Aleshores, prenent $a = 2^r$, $b = -1$ i $k = s$, en la igualtat anterior tenim que $2^r + 1$ divideix $2^{rs} - (-1)^s = 2^n + 1$, i, per tant, $2^n + 1$ no és primer.

En conseqüència, els únics números $2^n + 1$ que poden ser primers són els de la forma $2^{2^m} + 1 =: F_m$, que són els anomenats *números de Fermat*. Se sap, des dels temps de Fermat, que els F_m són primers per a $m = 0, 1, 2, 3, 4$. Euler va provar que F_5 té el factor 641. La seva descomposició en factors primers és

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417.$$

De fet, no es coneix cap més número de Fermat que sigui primer, i avui en dia es comença a pensar que potser no n'hi haurà cap més.

Els números primers de la forma $2^n - 1$ s'anomenen *primers de Mersenne*, en honor al matemàtic francès Marin Mersenne (1588–1648). En parlarem en la secció següent, quan estudiem els números perfectes.

CONJECTURA DE GOLDBACH. Tot número enter parell, més gran que 2, és suma de dos números primers.

Aquesta conjectura és un dels problemes oberts més famosos en matemàtiques. Com ja hem dit a la introducció, apareix el 1742 a partir de la correspondència entre Christian Goldbach i Leonhard Euler. Per exemple,

$$100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53.$$

Avui en dia se sap que és certa per a tots els naturals fins a 4×10^{18}. De fet, el que Goldbach va començar proposant és que tot número enter més gran que 5 era suma de tres números primers (bé, de fet, ell va dir tot número més gran que 2, ja que, per aquell temps, encara es considerava 1 com a primer) i Euler li va respondre que la seva conjectura era conseqüència de la que hem enunciat. L'afirmació de Goldbach, també coneguda com a *conjectura dèbil de Goldbach*, es considera provada per Harald Helfgott el 2013 ([56]), tot i que encara no ha estat publicada a cap revista amb procés de revisió.

Un dels avenços més importants en la direcció de provar la conjectura de Goldbach és degut de nou a Jing-Run Chen. El 1973 va demostrar que per a n parell prou gran, n és o bé la suma de dos primers o bé la suma d'un primer i un semiprimer ([25]).

Un altre resultat molt relacionat és el del recent treball de Terence Tao ([109]), en què l'autor prova que tot número senar més gran que 1 és suma de, com a màxim, cinc primers.

CONJECTURA DE LEMOINE. Tot número senar, més gran que 5, és la suma d'un número primer i el doble d'un número primer.

Aquesta conjectura és molt semblant a l'anterior. Va ser proposada el 1894 pel matemàtic i enginyer francès Émile Lemoine. Hardy i Littlewood la van llistar com a Conjectura I en un dels seus treballs. Per exemple,

$$47 = 13 + 2 \times 17 = 37 + 2 \times 5 = 41 + 2 \times 3 = 43 + 2 \times 2.$$

Canviant els primers per altres tipus de números, com per exemple quadrats de números naturals, hi ha resultats amb el mateix esperit que aquesta conjectura i la de Goldbach. Així, Lagrange va demostrar que tot enter positiu és suma de quatre quadrats.

CONJECTURA D'OPPERMANN. Per a tot $1 < n \in \mathbb{N}$, hi ha un parell de números primers p i q que satisfà $n(n-1) < p < n^2 < q < n(n+1)$.

La conjectura d'Oppermann és molt similar a la de Legendre, però encara més restrictiva. Va ser enunciada pel matemàtic danès Ludvig Oppermann el 1877.

CONJECTURA DE BROCARD. Per a tot $n \geq 2$ hi ha com a mínim quatre números primers entre p_n^2 i p_{n+1}^2, on p_n denota l'enèsim número primer.

Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic i meteoròleg francès Henri Brocard a principis del segle XX. Per exemple, entre $p_2^2 = 9$ i $p_3^2 = 25$ tenim cinc números primers: 11, 13, 17, 19, 23. L'expressió de la conjectura en una fórmula és $\Delta(n) = \pi(p_{n+1}^2) - \pi(p_n^2) \geq 4$, on recordem que $\pi(n)$ denota el nombre de primers menors o iguals que n. Així, els primers valors de Δ per a $n \geq 2$ són: $5, 6, 15, 9, 22, 11, 27, 47, 16, \ldots$

CONJECTURA D'ANDRICA. Per a tot $n \geq 1$ es compleix que $A(n) := \sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n} < 1$, on p_n denota l'enèsim número primer.

Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic romanès Dorin Andrica el 1986 ([2]). Per exemple, és fàcil veure que $A(n) < 1$ quan $p_n = m$ i $p_{n+1} = m + 2$ són una parella de primers bessons, ja que $A(n) = \sqrt{m+2} - \sqrt{m} < 0.51$, per a $m \geq 3$. De fet, la conjectura ens diu que el forat entre dos primers consecutius, $p_{n+1} - p_n$, compleix $p_{n+1} - p_n < 1 + 2\sqrt{p_n}$. S'ha comprovat que $A(n) < 1$ fins a $n = 10^{16}$ i el valor màxim fins al moment és $A(4) = \sqrt{11} - \sqrt{7} \approx 0.67$; vegeu a la figura 2 la gràfica de A per a $n \leq 1000$. Fins i tot a [112] es proposa que $A(n) < 1/2$, per a $n > 30$.

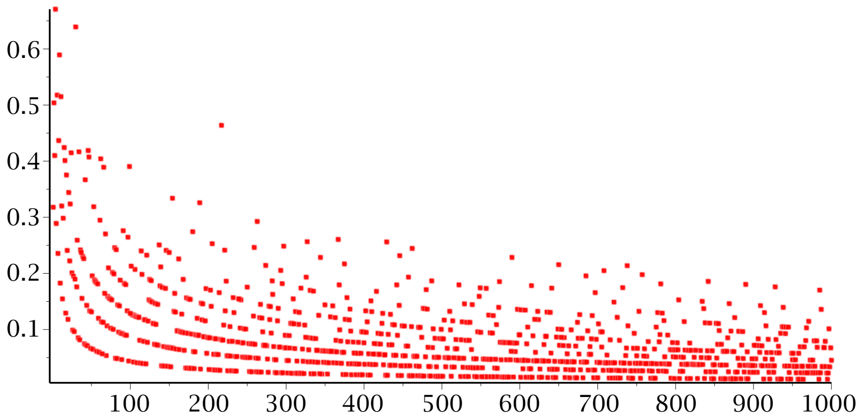

FIGURA 2: Valors de $\sqrt{p_{n+1}} - \sqrt{p_n}$ per a $1 \leq n \leq 1000$.

CONJECTURA DE FIROOZBAKHT. La funció $\sqrt[n]{p_n}$, on p_n denota l'enèsim número primer, és estrictament decreixent.

Va ser proposada pel matemàtic iranià Farideh Firoozbakht el 1982. S'ha verificat per a tots els primers menors que 2^{64}.

Conjectura de Cramér. Es compleix que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\ln^2(p_n)} = 1,$$

on p_n denota l'enèsim número primer.

L'enunciat que donem és una versió una mica més forta que la conjectura que va proposar el matemàtic suec Harald Cramér el 1936, segons la qual $p_{n+1}-p_n = O(\ln^2(p_n))$, i que és la que s'intenta provar avui en dia. El mateix Cramér va demostrar que si la hipòtesi de Riemann, de la qual parlarem més endavant, fos certa, aleshores $p_{n+1}-p_n = O(\sqrt{p_n}\ln(p_n))$. Recordem que es diu que $f(n) = O(g(n))$ si existeix $N \in \mathbb{N}$ i $K \in \mathbb{R}$ tals que per a tot $n \geq N$, $|f(n)| \leq Kg(n)$. El 1931, Westzynthius ja va demostrar que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}-p_n}{\ln(p_n)} = \infty.$$

Conjectura de Gilbreath. Sigui $\{p_n\}_n$ la successió dels números primers ordenats. Per a tot $0 < n \in \mathbb{N}$, definim $d_n^{(1)} = p_{n+1}-p_n$ i, de manera recurrent, per a tot $k > 0$, $d_n^{(k+1)} = |d_{n+1}^{(k)} - d_n^{(k)}|$. Aleshores, per a tot $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, es compleix que $d_1^{(k)} = 1$.

El seu nom es deu al màgic nord-americà Norman L. Gilbreath, que la va formular el 1958, quan era estudiant. Tot i el nom amb què es coneix, l'any 1878 el matemàtic autodidacte francès François Proth ja l'havia proposat i intentat demostrar.

Per exemple, en els càlculs següents es comprova que $d_1^{(k)} = 1$, per a $k \leq 6$.

$$\begin{array}{l}
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,\ldots\\
1,2,2,4,2,4,2,4,6,2,\ldots\\
1,0,2,2,2,2,2,2,4,\ldots\\
1,2,0,0,0,0,0,2,\ldots\\
1,2,0,0,0,0,2,\ldots\\
1,2,0,0,0,2,\ldots\\
1,2,0,0,2,\ldots
\end{array}$$

Se sap que $d_1^{(k)} = 1$, per a $k \leq 3.4\times 10^{11}$. Paul Erdős va especular sobre el fet que aquesta conjectura és certa, però segurament passarien més de dos-cents anys abans no es pogués demostrar. La raó principal és que no és semblant a altres tipus de problemes estudiats pels quals hi ha eines matemàtiques molt potents i ben desenvolupades. De fet, el matemàtic hongarès és famós per la qualitat i la quantitat dels seus treballs i pel gran nombre de col·laboradors que va tenir. D'altra banda, fins i tot hi ha una pàgina a la Wikipedia dedicada exclusivament a les seves conjectures. Quan s'està escrivint aquest article hi ha una llista de dotze conjectures obertes i catorze de resoltes, de les quals només una ha resultat ser falsa.

SEGONA CONJECTURA DE HARDY-LITTLEWOOD. Sigui $\pi(x)$ la funció que compta el nombre de números primers menors o iguals que x. Aleshores $\pi(x+y) \leq \pi(x) + \pi(y)$ per a tot $x \geq 2$, $y \geq 2$.

Aquesta conjectura va ser proposada el 1923 per Hardy i Littlewood al mateix temps que una primera conjectura que generalitzava la de l'existència d'infinites parelles de primers bessons ([54, 93]). Per exemple,

$$\begin{aligned} 16\,252\,325 = \pi(3 \times 10^8) < \pi(10^8) + \pi(2 \times 10^8) = \\ = 5\,761\,455 + 11\,078\,937 = 16\,840\,392. \end{aligned}$$

És curiós observar que, el 1974, Richards va demostrar que ambdues conjectures de Hardy-Littlewood són incompatibles; vegeu, de nou, [93].

CONJECTURA DELS PRIMERS DE GERMAIN. Hi ha infinites parelles de números primers de la forma p, $2p+1$.

Aquesta conjectura és similar a la dels primers bessons. Un número primer p es diu que és un *primer de Germain* si $S(p) = 2p+1$ és també primer. Aquests números van ser considerats per primer cop per la matemàtica francesa Marie-Sophie Germain (1776–1831) en els seus intents de provar el darrer teorema de Fermat. Uns quants d'aquests són $2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89, \ldots, 491, 509, 593, \ldots$ i el més gran que es coneix té més de 380 000 xifres.

Una seqüència de números de la forma $[p, S(p), S(S(p)), \ldots, S^k(p)]$, on $S^m(p) = S(S^{m-1}(p))$, en la qual tots els seus elements són primers s'anomena *cadena de Cunningham* ([30]), en honor al matemàtic britànic Allan Cunningham (1842–1928). En aquesta cadena, tots els elements menys l'últim són primers de Germain. Un exemple de cadena completa, és a dir, que no es pot allargar més, de mida 6 és $[89, 179, 359, 719, 1439, 2879]$, ja que $5759 = 13 \times 443$. Es conjectura també que per a tot $k \in \mathbb{N}$ hi ha infinites cadenes de Cunningham de mida k. A la vegada, aquesta nova conjectura va ser estesa el 1904 per la coneguda com a *conjectura de Dickson* ([35]), que no descrivim amb detall. En poques paraules, afirma que fixades $k \in \mathbb{N}$ expressions afins en n del tipus considerat per Dirichlet, $An + B$ amb coeficients naturals, en molts casos aquestes donen lloc simultàniament a k números primers, per a infinits valors de n.

CONJECTURA DE GRIMM. Donats k números naturals consecutius, $n+1, \ldots, n+k$ de manera que cap d'ells és primer, hi ha k primers diferents, $q_1, q_2, \ldots, q_k$, no necessàriament ordenats, tals que cada q_j divideix $n+j$ per a $1 \leq j \leq k$.

Per exemple, els tretze números consecutius entre 114 i 126 són compostos (no primers) i tenen, respectivament, els divisors primers 2, 23, 29, 13, 59, 17, 3, 11, 61, 41, 31, 5, i 7, tots diferents. Aquesta conjectura va ser proposada per Grimm en un article del 1969 ([49]).

2 Conjectures sobre números naturals

Recollim aquí diferents conjectures que tenen en comú el fet d'involucrar números naturals, però en les quals l'objectiu no és l'estudi dels números primers. Algunes d'aquestes consideren equacions diofàntiques, és a dir, equacions amb coeficients enters (i moltes d'elles polinomials) per a les quals només es busquen solucions enteres.

CONJECTURA SOBRE ELS NÚMEROS PERFECTES. Hi ha infinits números perfectes.

Es diu que un número natural n és perfecte si és igual a la suma de tots els seus divisors menors que ell mateix. Així, el més petit és $6 = 1 + 2 + 3$. El primer a estudiar-los va ser Euclides, qui ja va demostrar que si $2^n - 1$ és primer, aleshores $2^{n-1}(2^n - 1)$ és un número perfecte. Com ja hem comentat, els primers de la forma $M_n = 2^n - 1$ s'anomenen *primers de Mersenne*, i no és difícil veure que una condició necessària perquè $2^n - 1$ sigui primer és que n sigui primer. Això es deu al fet que si $n = pq$, aleshores

$$2^n - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + \cdots + 2^p + 1),$$

ja que $x^q - 1 = (x - 1)(x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1)$. La condició no és suficient, com mostra l'exemple $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$. Ara bé, hi ha una caracterització dels casos primers introduïda el 1878 pel matemàtic francès Édouard Lucas i completada el 1930 pel matemàtic nord-americà Derrick H. Lehmer. Avui en dia, aquesta condició es coneix com el *test de primeritat de Lucas-Lehmer*; vegeu ([63, 98]) i les seves referències. Aquest test ens diu que si per a tot $n \in \mathbb{N}$ introduïm la seqüència de números de Lucas-Lehmer

$$L_{n+1} = L_n^2 - 2, \quad L_1 = 4,$$

aleshores, per a $n \geq 3$, $M_n = 2^n - 1$ és primer si, i només si, M_n divideix L_{n-1}.

FIGURA 3: El 39è primer de Mersenne, trobat el 2001.

Per exemple, com que $M_3 = 7$ divideix $L_2 = 14$, tenim que 7 és primer. D'una manera similar, $M_5 = 31$ divideix $L_4 = 37\,634 = 31 \times 1214$ i, per tant, 31 és primer. En canvi, es pot comprovar que M_{11} no divideix L_{10}. De fet, el 1876, Lucas va utilitzar el seu resultat per a demostrar que M_{127} és un número primer (de trenta-nou xifres). Avui en dia és el més gran trobat sense l'ajut de cap ordinador.

A finals del 2018 es va trobar el primer de Mersenne més gran conegut fins avui, que correspon a $n = 82\,589\,933$, és el que fa 51, té més de 24×10^6 dígits i també és el número primer més gran conegut. A la figura 3 es mostra un segell dedicat al 39è primer de Mersenne.

Tots els números perfectes coneguts són de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$. Els quatre primers ja van ser donats per Euclides i són 6, 28, 496 i 8128. Els tres següents eren coneguts al segle XII pel matemàtic egipci Ismail ibn Fallus:

$$\begin{aligned} 33\,550\,336 &= 2^{12}(2^{13} - 1), \\ 8\,589\,869\,056 &= 2^{16}(2^{17} - 1) \text{ i} \\ 137\,438\,691\,328 &= 2^{18}(2^{19} - 1). \end{aligned}$$

A Europa no es van trobar fins al segle XVI. Euler, al segle XVIII, va provar que tots els números perfectes parells eren de la forma $2^{n-1}(2^n - 1)$. Aquest resultat se sol conèixer com el *teorema d'Euclides-Euler*. Avui en dia es coneixen cinquanta-un números perfectes parells i el més gran correspon al primer de Mersenne esmentat a dalt.

Com a conseqüència del teorema d'Euclides-Euler, tots els números perfectes parells acaben en 6 o en 8. Provem-ho. Recordem que n ha de ser primer, i si $n > 2$, aleshores o bé $n = 4m + 1$ o bé $n = 4m + 3$. En el primer cas,

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(2^n - 1) &= 2^{4m}(2^{4m+1} - 1) = 16^m(2 \times 16^m - 1) \equiv \\ &\equiv 6^m(2 \times 6^m - 1) \equiv 6(12 - 1) \equiv 6 \pmod{10}, \end{aligned}$$

ja que $6^m \equiv 6 \pmod{10}$. Recordem que, donats $r, s \in \mathbb{N}$, $r \equiv s \pmod{10}$ si, i només si, acaben amb la mateixa xifra. D'una manera similar, si $n = 4m + 3$,

$$2^{n-1}(2^n - 1) = 4 \times 16^m(8 \times 16^m - 1) \equiv 4 \times 6(8 \times 6 - 1) \equiv 4(8 - 1) \equiv 8 \pmod{10}.$$

Per tant, el resultat es compleix per a tots els números perfectes més grans que 6. Per a 6 és trivial.

L'expressió en base dos de tots els números perfectes coneguts és ben curiosa i es dedueix clarament de la igualtat

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(2^n - 1) &= 2^{n-1}(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2^2 + 2 + 1) = \\ &= 2^{2n-2} + 2^{2n-3} + \cdots + 2^{n+1} + 2^n + 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Així,

$$\begin{aligned} 6_{10} &= 110_2, \\ 28_{10} &= 11\,100_2, \\ 496_{10} &= 111\,110\,000_2, \\ 8128_{10} &= 1\,111\,111\,000\,000_2. \end{aligned}$$

D’altra banda, és curiós observar que tot número parell perfecte és la suma dels primers $2^n - 1$ números enters i, també, si és més gran que 6, la suma de tots els senars al cub fins a $2^{(n+1)/2} - 1$. Per exemple,

$$\begin{aligned}
6 &= 2^1(2^2-1) = 1+2+3,\\
28 &= 2^2(2^3-1) = 1+2+3+4+5+6+7 = 1^3+3^3,\\
496 &= 2^4(2^5-1) = 1+2+3+\cdots+29+30+31 = 1^3+3^3+5^3+7^3,\\
8128 &= 2^6(2^7-1) = 1+2+3+\cdots+126+127 =\\
&= 1^3+3^3+5^3+\cdots+13^3+15^3,\\
33\,550\,336 &= 2^{12}(2^{13}-1) = 1+2+3+\cdots+8190+8191 =\\
&= 1^3+3^3+5^3+\cdots+125^3+127^3.
\end{aligned}$$

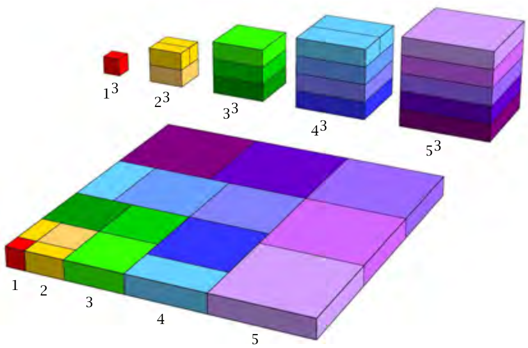

FIGURA 4: Prova sense paraules d’una fórmula per trobar la suma dels cubs.

Aquesta segona propietat es deu al fet que

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

vegeu la figura 4. Per tant,

$$\begin{aligned}
1^3+3^3+\cdots+(2m-1)^3 &= (1^3+2^3+\cdots+(2m)^3) - (2^3+4^3+\cdots+(2m)^3) =\\
&= \frac{(2m)^2(2m+1)^2}{4} - 2^3\frac{m^2(m+1)^2}{4} = m^2(2m^2-1).
\end{aligned}$$

Així, prenent $m^2 = 2^{n-1}$ obtenim el resultat desitjat. La major part dels resultats presentats en aquesta secció han estat extrets de l’excel·lent treball de revisió [113].

En resum, es conjectura que hi ha infinits números perfectes, i també es pensa que no n’hi haurà cap de senar. De fet, si n’hi hagués algun, hauria de ser més gran que 10^{1500}; vegeu [88].

CONJECTURA D'ERDŐS-STRAUS. Per a tot $2 < k \in \mathbb{N}$, hi ha tres números naturals ℓ, m i n tals que

$$\frac{4}{k} = \frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}.$$

Paul Erdős i Ernst G. Straus van formular aquesta conjectura el 1948; vegeu [39] i les seves referències. Està relacionada amb les anomenades *fraccions egípcies*, que era la forma en què els antics egipcis representaven els números racionals. De fet, se sap que tot número racional és suma d'un nombre finit de fraccions de la forma $1/n$, totes diferents. Aquesta és una representació del número en fraccions egípcies i no ha de ser necessàriament única. Per exemple,

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10},$$

$$\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510} = \frac{1}{5} + \frac{1}{29} + \frac{1}{1233} + \frac{1}{3\,039\,345}.$$

Al papir de Rhind hi ha una taula de fraccions egípcies per a molts números de la forma $2/k$; vegeu [96]. De fet, les matemàtiques varen ser molt importants a la civilització egípcia; vegeu la figura 5.

FIGURA 5: Esfinx de Gizeh amb la piràmide de Kefren de fons.

No és difícil provar que, si la conjectura fos falsa, el primer contraexemple seria un número k primer. En efecte, si $k = pq$, amb $p, q \in \mathbb{N}$, aleshores l'expressió desitjada de $4/k$ es pot obtenir a partir de la de $4/p$ o $4/q$ com segueix:

$$\frac{4}{k} = \frac{1}{p} \times \frac{4}{q} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\ell} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{p\ell} + \frac{1}{pm} + \frac{1}{pn}.$$

S'ha vist que la conjectura és certa per a tot $k \leq 10^{17}$.

Quan certes congruències es compleixen, és fàcil trobar la descomposició d'Erdős-Straus. Per exemple, si $k \equiv 2 \pmod 3$, és a dir, $k = 3j + 2$, $j \in \mathbb{N}$, tenim

$$\frac{4}{k} = \frac{4}{3j+2} = \frac{1}{3j+2} + \frac{1}{j+1} + \frac{1}{(j+1)(3j+2)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)/3} + \frac{1}{k(k+1)/3}.$$

Molt més en general, ja se sap que el resultat és cert sempre que

$$k \not\equiv 1,\ 121,\ 169,\ 289,\ 361,\ 529 \pmod{840},$$

com observa Guy al seu llibre [52], a partir de resultats de diversos autors; vegeu també [62].

El mateix problema, però per a fraccions de la forma $5/k$, es coneix com a *conjectura de Sierpiński* i és deguda al matemàtic polonès Waclaw Sierpiński, famós en particular per definir el fractal conegut com a *triangle de Sierpiński*; vegeu la figura 6.

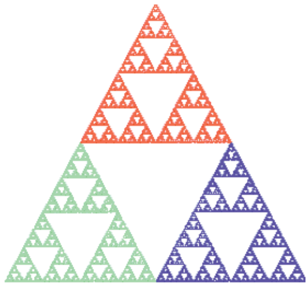

Figura 6: Triangle de Sierpiński.

Si permetem que un dels valors ℓ, m, n sigui enter negatiu, és molt fàcil descompondre $4/k$ com volem. La clau es troba en el fet que si $k = 2j + 1$ és senar, aleshores tenim

$$\frac{4}{k} = \frac{4}{2j+1} = \frac{1}{j} + \frac{1}{j+1} - \frac{1}{j(j+1)(2j+1)} = \frac{1}{\frac{k-1}{2}} + \frac{1}{\frac{k+1}{2}} - \frac{1}{k\left(\frac{k-1}{2}\right)\left(\frac{k+1}{2}\right)};$$

consulteu de nou [62].

Conjectura de Brocard-Ramanujan-Erdős. Les úniques solucions naturals de l'equació $n! + 1 = m^2$ són les parelles $(n, m) \in \{(4, 5), (5, 11), (7, 71)\}$.

Aquesta conjectura va ser proposada per primer cop pel matemàtic i meteoròleg francès Henri Brocard en un parell de treballs el 1876 i el 1885, pel famós matemàtic indi Srinivasa Ramanujan el 1913 i, també, per Paul Erdős; vegeu [9]. El 1993, Overholt va demostrar que si la conjectura ABC, esmentada a la introducció, fos certa, aleshores l'equació considerada tindria un nombre finit de solucions naturals; vegeu [89].

Una qüestió que recorda aquesta conjectura va ser proposada el 2005 per C. M. Tomaszewski quan es preguntava si els únics números que a la vegada són triangulars i factorials són 1, 6 i 120. Recordem que els números triangulars són els números naturals $1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$. Per tant, la qüestió és equivalent a: *Són les parelles* $(n, m) \in \{(1, 1), (3, 3), (5, 15)\}$ *les úniques solucions naturals de* $2(n!) = m(m + 1)$*?*

Una altra qüestió semblant és sobre l'equació d'Erdős-Moser, $1^n + 2^n + \cdots + (m-1)^n = m^n$, de la qual es conjectura que té com a única solució $1 + 2 = 3$.

CONJECTURA DE GOORMAGHTIGH. Les úniques solucions amb $x > y > 1$, $m, n > 2$, i $x, y, n, m \in \mathbb{N}$ de l'equació

$$\frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}$$

són $(x, y, m, n) = (5, 2, 3, 5)$ i $(x, y, m, n) = (90, 2, 3, 13)$.

El matemàtic i enginyer belga René Goormaghtigh la va formular el 1917. Clarament,

$$\frac{5^3 - 1}{5 - 1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31 \quad \text{i} \quad \frac{90^3 - 1}{90 - 1} = \frac{2^{13} - 1}{2 - 1} = 8191.$$

A partir de la identitat $x^m - 1 = (x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x^2 + x + 1)$, tenim que les dues igualtats anteriors són equivalents a

$$111_5 = 11\,111_2 \quad \text{i} \quad 111_{90} = 1\,111\,111\,111\,111_2,$$

respectivament, on k_ℓ denota l'expressió d'un número natural en base ℓ. Així, si la conjectura és certa, 31 i 8191 serien els únics números naturals que s'expressen en dues bases diferents com a tires successives de números 1. Aquest tipus de números s'anomenen *repunits*. L'etimologia del nom és clara: repetició d'unitats. Observeu que tots els números de Mersenne, $2^n - 1$ són repunits en base 2.

CONJECTURA DE CARMICHAEL. Sigui $\varphi(n)$ el nombre d'enters positius menors o iguals que $n \in \mathbb{N}$ que són coprimers amb n. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$ existeix un $m \neq n$ tal que $\varphi(n) = \varphi(m)$.

Recordem que es diu que dos números naturals són coprimers si el seu màxim comú divisor és 1. La funció φ s'anomena *funció φ d'Euler*. Per exemple, $\varphi(20) = 8$, ja que 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19 són els únics coprimers amb 20, menors que ell.

El matemàtic nord-americà Robert D. Carmichael va formular la conjectura el 1922, quinze anys després de pensar que tenia una demostració del mateix resultat; vegeu [18, 19]. Se sap que si no fos certa, el contraexemple hauria de tenir més de 10^{10} xifres.

Per exemple, $\varphi(69) = \varphi(92) = \varphi(138) = 44$. També, per a tot primer $p > 2$, $\varphi(p) = \varphi(2p) = p - 1$. Una manera de provar-ho és usar la propietat que si el $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$, aleshores $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Per tant, com que per a $p > 2$, primer, $\operatorname{mcd}(2, p) = 1$, $\varphi(2p) = \varphi(2)\varphi(p) = \varphi(p)$.

CONJECTURA DE SINGMASTER. Hi ha un valor $S \in \mathbb{N}$ tal que qualsevol número diferent de 1 apareix al triangle de Tartaglia, com a màxim, S cops.

Aquest triangle de números combinatoris es coneix a Occident amb els noms *triangle de Tartaglia* o *de Pascal*, deguts al matemàtic italià Niccolò Fontana (ca. 1499–1557), anomenat *Tartaglia*, i al matemàtic francès Blaise Pascal (1623–1662). Tot i així, sembla que a Europa es va usar abans a França

(Gersònides, segle XIV) i Alemanya (Petrus Apianus, segle XVI). De fet, molt abans, ja es coneixia a l'Índia, a Pèrsia (Iran) o a la Xina. Per exemple, a l'Índia al voltant del segle II abans de Crist ja l'usava el matemàtic indi Acharya Pingala, a l'Iran se l'anomena *triangle de Khayyám*, en honor a l'astrònom i matemàtic Omar Khayyám (1048–1131) i a la Xina se'l coneix com a *triangle de Yang Hui* pel matemàtic del mateix nom que va viure entre 1238 i 1298. De fet, sembla que a Pèrsia i a la Xina aquest triangle era conegut fins i tot una mica abans dels matemàtics que li donem nom. A la figura 7 se'n pot veure una reproducció del 1303, que usa números xinesos tradicionals i una altra amb numeració actual. És curiós observar que hi ha una errada al gravat xinès. S'assigna el valor 34 a $\binom{7}{3}$ en lloc del valor 35, tot i que el seu valor simètric $\binom{7}{4}$ és correcte; vegeu també [111, p. 57].

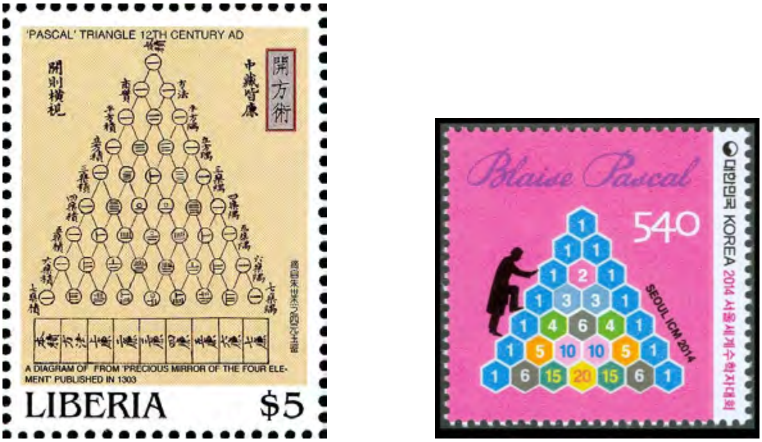

FIGURA 7: Triangles de Tartaglia/Pascal.

El matemàtic britànic David Singmaster va proposar la conjectura que ens ocupa, el 1971. Ell mateix va provar el 1975 que hi ha infinits valors que apareixen com a mínim sis vegades. Un d'ells és 120,

$$120 = \binom{120}{1} = \binom{120}{119} = \binom{16}{2} = \binom{16}{14} = \binom{10}{3} = \binom{10}{7}.$$

De fet, se sap que

$$m = \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+1}{n-k} = \binom{n}{k+2} = \binom{n}{n-k-2},$$

on per a cada $i \in \mathbb{N}$, n i k venen donats per les igualtats $n = F_{2i+2}F_{2i+3} - 1$, $k = F_{2i}F_{2i+3} - 1$, on F_j és el j-èsim número de Fibonacci (amb $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$) i $m = \binom{n+1}{k+1}$; vegeu [104]. L'únic número conegut que apareix vuit cops és

$$3003 = \binom{3003}{1} = \binom{3003}{3002} = \binom{78}{2} = \binom{78}{76} = \binom{15}{5} = \binom{15}{10} = \binom{14}{6} = \binom{14}{8}.$$

Així, en cas de ser certa la conjectura, $S \geq 8$. Sembla que Singmaster pensava que S podria ser 10 o 12. El que sí que és fàcil veure és que qualsevol $1 < m \in \mathbb{N}$ apareix un nombre finit de vegades. Això es deu al fet que el valor m només pot aparèixer a les primeres $m + 1$ files.

Conjectura de Beal. Si $A, B, C, \ell, m, n \in \mathbb{N}$ són enters positius, amb $\ell, m, n > 2$ i tals que

$$A^\ell + B^m = C^n,$$

aleshores A, B i C tenen un factor primer en comú.

Aquesta conjectura va ser formulada el 1993 pel banquer i matemàtic aficionat Andrew Beal, mentre investigava extensions del cèlebre darrer teorema de Fermat, del qual ja hem parlat a la introducció. L'exemple $7^3 + 13^2 = 2^9$ mostra per què es demana que tots els exponents siguin més grans que 2. És clar que hi ha altres solucions amb A, B i C no coprimers. Per exemple, per a $k \geq 1$, $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ o $3^{3k} + (2 \times 3^k)^3 = 3^{3k+2}$.

Conjectura sobre la màxima persistència multiplicativa. Donat $n \in \mathbb{N}$, sigui $\Pi(n) \in \mathbb{N}$ el producte de totes les seves xifres. Denotem com $\mathrm{Pm}(n) \in \mathbb{N}$ el mínim enter k tal que $\Pi^k(n) = \Pi^{k+1}(n)$, on $\Pi^0(n) = n$ i $\Pi^k(n) = \Pi(\Pi^{k-1}(n))$. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Pm}(n) \leq 11$.

Donat $n \in \mathbb{N}$, el valor $\mathrm{Pm}(n)$ s'anomena *persistència multiplicativa* de n. El seu significat es veu més clarament posant-ne un exemple. Si considerem $n = 68\,889$, tenim que $\Pi(68889) = 6 \times 8 \times 8 \times 8 \times 9 = 27\,648$. Si continuem aplicant successivament Π, obtenim

$$68\,889 \to 27\,648 \to 2688 \to 768 \to 336 \to 54 \to 20 \to 0 \to 0 \to 0 \to \cdots,$$

és a dir, que $\mathrm{Pm}(68889) = 7$, ja que $\Pi^7(68889) = \Pi^8(68889) = 0$ i no hi ha hagut cap coincidència anterior entre dos valors consecutius de les iteracions. Els números més petits amb persistències multiplicatives $1, 2, \ldots, 11$ són 10, 25, 39, 77, 679, 6788, 68 889, 2 677 889, 26 888 999, 3 778 888 999, $M = 277\,777\,788\,888\,899$. De fet, se sap que no apareixen persistències més altes per a $n < 10^{233}$.

Aquesta conjectura comença amb el treball de Neil J. A. Sloane ([106]) publicat el 1973 al *Journal of Recreational Mathematics*. Observem que, per exemple, $\Pi(M) = 2^{19}3^47^6$. En general, una primera simplificació ja observada per ell és que la descomposició en factors primers de qualsevol $\Pi(n)$ amb persistència més gran que 3 ha de ser o bé $2^i3^j7^k$ o $3^i5^j7^k$ i, per tant, només cal estudiar la persistència d'aquests dos tipus de números. L'afirmació és certa, ja que, com que $\Pi(n)$ és producte de números d'una xifra, $\Pi(n) = 2^i3^j5^k7^m$, amb els exponents enters més grans o iguals que zero, i a més, si apareixen a la vegada el 2 i el 5, és a dir, si $i > 0$ i $k > 0$, $\Pi^\ell(2^i3^j5^k7^m) = 0$, per a tot $0 < \ell \in \mathbb{N}$, ja que $2^i3^j5^k7^m$ acaba en zero.

S'ha estudiat també el problema quan els números estan expressats en altres bases; vegeu per exemple [32]. El treball citat ataca el problema des del punt de vista dels sistemes dinàmics.

Conjectura de no palindromia. Sigui $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'aplicació definida per $f(n) = n + \mathrm{rever}(n)$, on rever és l'aplicació que inverteix l'ordre de les xifres de n. Aleshores hi ha infinits valors de n tals que si es consideren tots els números $f^k(n)$, per a $0 < k \in \mathbb{N}$, on $f^0 = \mathrm{Id}$ i $f^k(n) = f(f^{k-1}(n))$, cap d'ells és capicua. A més, el menor d'aquests números és 196.

Com en la conjectura anterior, comencem amb un cas senzill per entendre millor l'enunciat. Per exemple, si prenem $n = 183$, $f(183) = 183 + 381 = 564$, i tenim

$$183 \to 564 \to 564 + 465 = 1029 \to 1029 + 9201 = 10\,230 \to 10\,230 + 3201 = 13\,431,$$

que és capicua. Si es comença amb $n = 89$, es necessiten vint-i-quatre iteracions per trobar un valor capicua, que és 8 813 200 023 188. Resulta que si es comença amb $n = 196$, encara no s'ha trobat cap iterat que sigui capicua, tot i els milions que se n'han fet ([87]). Es desconeix qui va ser el primer que va estudiar aquesta qüestió; la referència més antiga és un treball de Lehmer ([73]) a la revista belga de divulgació matemàtica *Sphinx*, que només es va publicar entre 1931 i 1939. La qüestió es va tornar a popularitzar a partir del treball de Trigg ([110]), publicat el 1967. En anglès, els números n tals que cap dels seus iterats és capicua s'anomenen de vegades *números de Lychrel* (gairebé un anagrama del nom Cheryl).

Els primers números que podrien ser de Lychrel són

$$196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 879, 887, 978, 986, \ldots$$

A la figura 8 fem la gràfica de la funció h que assigna a cada $n \in \mathbb{N}$ el mínim valor $h(n) \le 1000$ que fa que $f^{h(n)}$ sigui capicua, o 1000 en cas que cap dels 1000 primers iterats ho sigui. Per claredat, restringim la gràfica a la banda $1 \le h(n) \le 40$. Els pics que presenta corresponen als tretze valors de la llista anterior. Observeu que, per a tots els altres valors, $h(n)$ és, com a màxim, 24. De totes maneres, es pot veure que hi ha valors $n > 1000$ tals que $h(n)$ és molt més gran. L'autor agraeix a Toni Guillamon que hagi compartit el codi que permet generar aquesta figura.

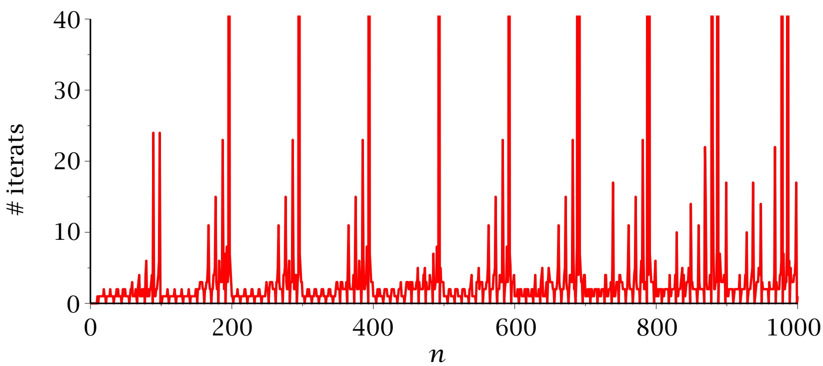

Figura 8: Possibles números de Lychrel.

En resum, avui en dia no es coneix cap número de Lychrel en base 10. Per altra banda, sí que se sap que hi ha números de Lychrel en base 2. Per exemple, $n = 10\,110_2$ (que correspon a 22 en base 10) ho és. Això es deu al fet que $f^4(n) = 10\,110\,100_2$, ja que

$$10\,110_2 \to 10\,110_2 + 01\,101_2 = 100\,011_2 \to 1\,010\,100_2 \to 1\,101\,001_2 \to 10\,110\,100_2,$$

$f^8(n) = 1\,011\,101\,000_2$, $f^{12}(n) = 101\,111\,010\,000_2$, i, en general, com es demostra a [15], després de $4m$ iteracions s'arriba a un número que comença en 10, després té $m+1$ uns, segueix un 01 i acaba amb $m+1$ zeros.

Els palíndroms formats per frases han estat sempre un tema de gran interès. N'hi ha molts i de molt macos; vegeu la figura 9.

FIGURA 9: Palíndroms donats per frases capicua.

CONJECTURA DE SELFRIDGE. El menor número senar $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \times 2^n + 1$ és no primer, per a tot $n \in \mathbb{N}$, és $k = k_0 = 78\,557$.

En general, un número senar $k \in \mathbb{N}$ es diu de Sierpiński si $k \times 2^n + 1$ és no primer per a tot $n \in \mathbb{N}$. Així, en altres paraules, la conjectura afirma que k_0 és el menor número de Sierpiński. De fet, el 1960 Sierpiński va provar que hi ha infinits números de Sierpiński. Els primers que es coneixen són k_0, 271 129 i 271 577. La prova que k_0 ho és es deu al matemàtic nord-americà John L. Selfridge, qui va fer la conjectura que ens ocupa el 1962. Actualment, els únics candidats a desbancar el valor k_0 són 21 181, 22 699, 24 737, 55 459, i 67 607. Per a tots els altres valors de $k < k_0$, hi ha un $n(k)$ de manera que $k \times 2^{n(k)} + 1$ és primer. De fet, fins al 2017 hi havia el 10 223 a la llista anterior, però es va demostrar que $10\,223 \times 2^{31\,172\,165} + 1$ és primer.

Per als números de la forma $k \times 2^n - 1$, que es diuen *de Riesel*, en honor al matemàtic suec Hans Ivar Riesel, hi ha resultats i problemes similars. En aquest cas, el menor k trobat que compleix la propietat desitjada és 509 203.

3 Altres conjectures

Aquesta secció és d'un caire miscel·lani, ja que comprèn moltes àrees diferents de la matemàtica.

Versió de Lagarias de la hipòtesi de Riemann. Si $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$, aleshores

$$\sum_{d\,|\,n} d \le H_n + \exp(H_n)\ln(H_n),$$

amb igualtat només per a $n = 1$.

En l'enunciat, els valors H_n són les sumes parcials de la sèrie harmònica i són coneguts com a *números harmònics*, i $\sigma(n) = \sum_{d/n} d$ és la funció *suma dels divisors de n*. Per exemple, $\sigma(6) = 12$ i, de fet, per a tots els números perfectes $\sigma(n) = 2n$. Es té que $H_6 + \exp(H_6)\ln(H_6) \approx 12.83$; vegeu també la figura 10. Tot i que la conjectura anterior només involucra conceptes senzills, Lagarias a [68] prova que és equivalent a la famosa *hipòtesi de Riemann*, enunciada pel matemàtic alemany el 1859. Recordem-la breument. Considerem la funció *zeta de Riemann* definida com segueix: al semiplà complex $\mathrm{Re}(s) > 1$, és la sèrie convergent

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

i al semiplà tancat complementari, és la seva extensió analítica; vegeu [37, 38, 91]. És conegut que aquesta funció només té una singularitat a $s = 1$, que és un pol simple. La hipòtesi de Riemann afirma que tots els zeros no reals de ζ estan sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Si la conjectura fos certa, implicaria un coneixement millor de la distribució dels números primers i tindria moltes aplicacions en altres problemes de la matemàtica i la física; vegeu de nou [37, 68]. De fet, avui en dia aquesta conjectura està considerada una de les més importants en matemàtiques.

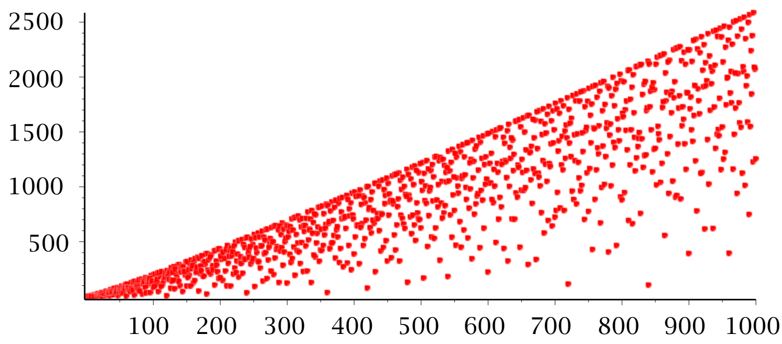

Figura 10: Valors de $H_n + \exp(H_n)\ln(H_n) - \sigma(n)$ per a $n \le 1000$.

CONJECTURA $3x+1$. Si per a qualsevol $x_0 \in \mathbb{N}$, considerem la successió $\{x_n\}_{n>0}$

$$x_{n+1} = g(x_n) = \begin{cases} \dfrac{3x_n+1}{2}, & \text{quan } x_n \text{ és senar,} \\ \dfrac{x_n}{2}, & \text{quan } x_n \text{ és parell,} \end{cases}$$

hi ha un $N = N(x_0)$ tal que $\{x_n\}_{n>N}$ és la successió $2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$

Per exemple, si comencem amb $x_0 = 11$, la successió és $11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1, 2, 1, \ldots$ En llenguatge dinàmic, la conjectura ens diu que l'òrbita de tota condició inicial natural acaba en l'òrbita 2-periòdica $\{1, 2\}$. A la figura 11 es mostren els 164 iterats que es necessiten per a arribar fins a 2, si $x_0 = 6171$. De fet, per primer cop $x_{164} = 2$ i el més allunyat és $x_{46} = 487\,700$. Se sap que el resultat és cert per a tot x_0 menor que 87×2^{60}. Hi ha molta més informació als articles de revisió [24, 67, 69]. Segons l'autor d'un d'ells, Jeffrey C. Lagarias, «aquesta conjectura és un problema extraordinàriament difícil, completament fora de l'abast de les matemàtiques d'avui en dia».

De vegades es presenta una versió equivalent de la conjectura en la qual el $\frac{3x_n+1}{2}$ es canvia simplement per un $3x_n+1$ en la definició de g. Aquesta equivalència es deu al fet que $3x_n+1$ és sempre parell. És clar que aleshores la conjectura té un enunciat equivalent al que afirma que tota successió $\{x_n\}_{n>0}$ té els termes $4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, \ldots$ per a $n > N(x_0)$. Òbviament, com que les òrbites s'allarguen, el nou valor de $N(x_0)$ per al qual la successió arriba al seu comportament límit augmenta.

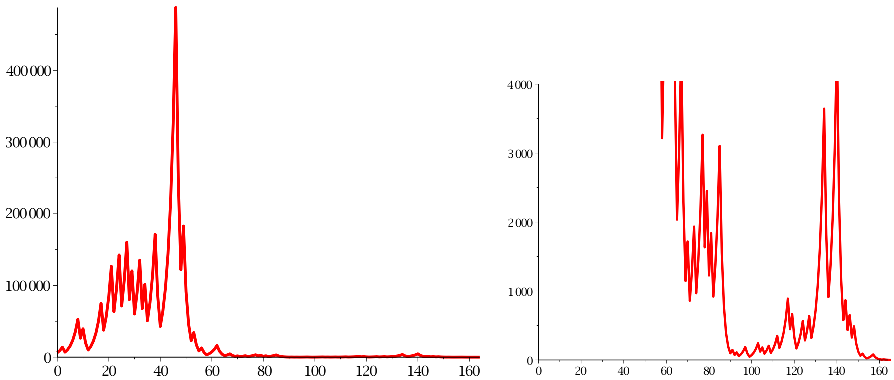

FIGURA 11: Òrbita corresponent a $x_0 = 6171$ fins a arribar al valor 2 i ampliació dels darrers valors.

Sembla que la primera persona que va estudiar aquesta qüestió va ser el matemàtic alemany Lothar Collatz, pels volts del 1930. També es coneix com a *conjectura de Collatz*, *conjectura d'Ulam*, *problema de Kakutani* o *problema de Syracuse*.

El resultat no és cert per a $x_0 \in \mathbb{Z}$ no positius. Començant amb $x_0 \in \{0, -1, -5, -17\}$ apareixen quatre comportaments finals diferents. Per exemple, tenim $-5, -7, -10, -5, -7, -10, \ldots$ De moment no s'han trobat altres comportaments finals.

L'aplicació g es pot estendre als números reals o als complexos, com

$$g(z) = \frac{z}{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}z\right) + \frac{3z+1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{2}z\right) = \frac{1+4z-(1+2z)\cos(\pi z)}{4}.$$

Aquesta aplicació presenta dinàmiques complicades; vegeu [23, 75].

Conjectura jacobiana. Si $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ és una aplicació polinomial tal que $\det(DF(\mathbf{x})) \equiv c$, on $0 \neq c \in \mathbb{C}$, aleshores F és globalment invertible (i la seva inversa també és polinomial).

Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic alemany Ott-Heinrich Keller el 1939 per a polinomis amb coeficients enters i, amb el temps, es va estendre al cas general. De vegades se l'anomena, també, *problema de Keller*. L'afirmació que la inversa és polinomial està entre parèntesis perquè ja s'ha provat que, si F és globalment invertible, aleshores obligatòriament la inversa és també polinomial. De fet, pels resultats de Bialynicki-Birula i Rosenlicht del 1962 i de Rudin del 1995, se sap que fins i tot n'hi ha prou amb provar només que F és injectiva. Per a tenir més informació sobre la conjectura i referències dels resultats que descrivim a continuació, podeu consultar la monografia d'Arno van den Essen sobre el tema ([44]).

Recordem que DF indica la matriu jacobiana de l'aplicació. Així, si F admet una inversa global diferenciable, diguem-ne G, tenim que $G(F(\mathbf{x})) \equiv \mathbf{x}$. Derivant, obtenim $DG(F(\mathbf{x}))DF(\mathbf{x}) \equiv \mathrm{Id}$. Prenent determinants, tenim que

$$\det(DG(F(\mathbf{x}))\ \det(DF(\mathbf{x})) \equiv 1,$$

i, en conseqüència, $\det(DF(\mathbf{x})) \neq 0$ per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{C}$. Ara bé, si F és una aplicació polinomial, $\det(F(x))$ és un polinomi en n-variables a $\mathbb{C}$, i l'única manera perquè no s'anul·li mai és que sigui una constant. En poques paraules, acabem de veure que $\det(DF(\mathbf{x})) \equiv c$, amb $0 \neq c \in \mathbb{C}$, és una condició necessària perquè una F polinomial sigui globalment invertible. Pel teorema de la funció inversa, aquesta condició implica l'existència d'inversa local a tots els punts. El que ens diu la conjectura és que aquesta condició també és suficient.

La conjectura només es planteja per a polinomis, atès que per a funcions analítiques ja se sap que no és certa. L'exemple que se sol presentar és l'aplicació de $\mathbb{C}^2$ en si mateix,

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = (\sqrt{2}\mathrm{e}^{x/2}\cos(y\mathrm{e}^{-x}), \sqrt{2}\mathrm{e}^{x/2}\sin(y\mathrm{e}^{-x})).$$

En aquest exemple, per a tot $(x,y) \in \mathbb{C}^2$,

$$\det(DF(x,y)) = \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x}\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} = 1,$$

però $F(0, y+2k\pi) = F(0,y)$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

Usant resultats bàsics d'àlgebra lineal, és clar que la conjectura es compleix quan F té grau 1. Si F té grau 2, la conjectura es compleix, tal com va demostrar Stuart Wang l'any 1980. El més curiós d'això és que, també a principis dels vuitanta, Bass, Connell i Wright, per una banda, i Yagzhev, per una altra, van provar que si la conjectura fos certa en qualsevol dimensió, per a totes les F de grau 3, també seria certa en general i per a qualsevol dimensió.

Així mateix, és molt fàcil veure que la conjectura és certa en dimensió 1, però per a $n = 2$, fins i tot en el cas d'aplicacions polinomials reals, encara és un problema obert.

En l'original article [43], l'autor explica que segons una enquesta feta per ell l'any 1977 entre els assistents a un congrés sobre el tema, el 62.4% pensava que la conjectura en general seria falsa.

En cap moment hem parlat de la «finor» d'una conjectura. Direm que una conjectura és *fina* si debilitant una mica les seves hipòtesis ja no és certa. En aquest sentit, és famosa la broma que es fa sobre la conjectura jacobiana. Seria la «metaconjectura» següent: *si una conjectura és més forta que la conjectura jacobiana (és a dir, la implica però no és equivalent), aleshores és falsa.* Fins al moment, aquesta metaconjectura s'ha mostrat certa! Per exemple, durant uns quants anys es va pensar que per a aplicacions polinomials reals de $\mathbb{R}^n$ en si mateix, es podia substituir la hipòtesi $\det(DF(\mathbf{x})) \equiv c \neq 0$ per la hipòtesi més dèbil $\det(DF(\mathbf{x})) \neq 0$, per a tot $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, i el resultat d'invertibilitat global seguia essent cert. L'any 1994, Pinchuk va donar el primer contraexemple per a $n = 2$ i grau 25.

Conjectura de Casas-Alvero. Si un polinomi P de grau n a $\mathbb{C}[x]$ té alguna de les seves arrels en comú amb cada una de les seves derivades $P^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, aleshores $P(z) = a(z-b)^n$ per a certs $0 \neq a, b \in \mathbb{C}$.

En principi, les arrels comunes entre P i cada $P^{(k)}$ poden dependre de k, però, si la conjectura fos certa, precisament ens diria que aquesta arrel sempre ha de ser la mateixa. Casas-Alvero va arribar a aquest problema a principis d'aquest segle treballant en el seu article [20], en el qual intentava obtenir criteris d'irreductibilitat per a sèries de potències complexes en dues variables. A [21] podeu llegir una explicació de la conjectura en les seves pròpies paraules.

Els graus més petits per als quals la conjectura no s'ha provat són $n = 24, 28$, o 30. També se sap que és certa quan n és de la forma p^m, $2p^m$, $3p^m$ o $4p^m$, per a un cert primer p i $m \in \mathbb{N}$; vegeu [22, 34, 36, 47].

Quan $P \in \mathbb{R}[x]$, afegint que totes les seves arrels són reals, també es conjectura el resultat equivalent.

La conjectura no és certa per a polinomis sobre cossos amb característica $p \neq 0$. Per exemple, considerem $P(x) = x^2(x^2+1)$ en característica 5 amb arrels 0, 0, 2 i 3. Aleshores $P'(x) = 2x(2x^2+1)$, $P''(x) = 12x^2+2 = 2(x^2+1)$ i $P'''(x) = 4x$, i tots ells comparteixen arrels amb P.

CONJECTURA SOBRE LA NORMALITAT DE π. Per a tot $0 < k \in \mathbb{N}$, en l'expressió decimal de π qualsevol bloc de k dígits apareix amb probabilitat 10^{-k}.

Un número real x es diu *normal* (en base 10) si, en les seves xifres decimals, qualsevol bloc de k dígits apareix amb una freqüència relativa límit 10^{-k}; vegeu [5, 65, 84]. Més concretament, si $\mathcal{B}$ és un bloc qualsevol de k dígits i denotem amb $m_n(\mathcal{B}, x)$ el nombre de vegades que el bloc $\mathcal{B}$ apareix en les primeres n xifres decimals de x, aleshores, per a tot bloc $\mathcal{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n(\mathcal{B}, x)}{n} = \frac{1}{10^k}.$$

Els números normals són, d'alguna manera, els «més aleatoris». El matemàtic francès Émile Borel va demostrar que gairebé tots els números són normals, però no és gens fàcil donar-ne exemples concrets. Alguns dels números normals més famosos són

$$0.12345678910111213\ldots, 0.149162536496481\ldots, 0.2357111317192329\ldots$$

Aquests corresponen a posar de manera consecutiva el números naturals, els quadrats o els números primers, respectivament. Les proves corresponents són de Champernowne (1933), Bezikóvitx (1935), i Copeland i Erdős (1946).

Si π fos normal, en particular, la proporció de qualsevol dels deu dígits a les seves xifres decimals seria $1/10$. Les comprovacions que s'han fet fins al moment semblen donar suport a la conjectura. Per exemple, segons els càlculs de Kanada del 1995 (vegeu [33, cap. 10]), les primeres 6×10^9 xifres decimals mostren les freqüències següents:

«**0**» :	599 963 005,	«**5**» :	600 017 176,
«**1**» :	600 033 260,	«**6**» :	600 016 588,
«**2**» :	599 999 169,	«**7**» :	600 009 044,
«**3**» :	600 000 243,	«**8**» :	599 987 038,
«**4**» :	599 957 439,	«**9**» :	600 017 038.

Tampoc se sap si $\sqrt{2}$ o e són normals.

CONJECTURA SOBRE LA IRRACIONALITAT DE γ. El número

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$$

és irracional.

La constant γ s'anomena *constant d'Euler* o *d'Euler-Mascheroni* i és, conjuntament amb π, e i el número d'or Φ, una de les més famoses dins de les matemàtiques. El seu nom prové dels estudis del matemàtic italià Lorenzo Mascheroni, qui el 1790 la va calcular amb dinou xifres decimals correctes, i dels de Gauss, qui el 1812 la va obtenir amb quaranta xifres significatives. El seu valor aproximat és $\gamma \approx 0.577218$. És un número que apareix a moltíssims llocs; vegeu [55, 70]. Veiem-ne uns quants exemples:

$$\gamma = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \ln(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6},$$

o

$$\gamma = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} \quad \text{on} \quad \zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k},$$

i ζ és la famosa funció zeta de Riemann. Gronwall ([50]) el 1913 prova

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n \ln(\ln(n))} = \mathrm{e}^{\gamma},$$

on recordem que $\sigma(n)$ denota la suma de tots els divisors de n.

Se sap que π, e i Φ són irracionals. Intentar provar que γ també és irracional és un dels grans reptes per a la comunitat matemàtica. S'ha demostrat que si fos racional, el seu denominador hauria de ser més gran que $10^{244\,663}$. A [107] es desenvolupen criteris per intentar provar-ho.

Una altra constant famosa és la constant de Catalan,

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots = 0.915965594\ldots$$

S'anomena així en honor al matemàtic francobelga Eugène C. Catalan, qui en un article del 1883 ja la va denotar per G. Apareix sovint en treballs sobre combinatòria. Es pensa que G és irracional, però aquest fet no s'ha pogut demostrar. Més en general, es pot considerar l'anomenada *funció β de Dirichlet*:

$$\beta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s},$$

de manera que $G = \beta(2)$. Per una banda, per exemple, $\beta(1) = \pi/4$, $\beta(3) = \pi^3/32$ són irracionals. Per una altra, tot i que, com ja hem dit, no s'ha pogut demostrar que $\beta(2)$ ho sigui, hi ha un resultat molt curiós en aquesta direcció ([117]): com a mínim, un dels sis números $\beta(2k)$, $k = 1, 2, \ldots, 6$, és irracional.

De fet, fins fa poc s'intentava demostrar la que es coneixia com a *conjectura de Catalan*, proposada per ell el 1884. Segons aquesta, els dos únics números naturals positius consecutius que són potències naturals d'un número natural són el $8 = 2^3$ i el $9 = 3^2$. El 2002, aquesta conjectura es va convertir en un teorema degut al treball [80] del matemàtic romanès Preda Mihăilescu.

Conjectura sobre la seqüència de Kolakoski. Si considerem la seqüència autogenerada de Kolakoski

$$\mathcal{K} = 1,2,2,1,1,2,1,2,2,1,2,2,1,1,2,1,1,2,2,1,2,1,1,2,1,2,2,1,1,\ldots,$$

aleshores

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{nombre d'uns entre els } n \text{ primers termes de } \mathcal{K}}{n} = \frac{1}{2}.$$

Comencem explicant què vol dir que la seqüència $\mathcal{K}$ sigui autogenerada. A partir d'una seqüència qualsevol S formada només per successius 1 i 2, en construïm una altra S' formada pels números naturals que corresponen al nombre de vegades consecutives que surt cadascun dels dígits, en el mateix ordre en el què apareixen a la seqüència. Per exemple,

$$S = 1,2,2,2,1,1,1,1,2,1,2,1,1,1,2,1,\ldots \Longrightarrow S' = 1,3,4,1,1,1,3,1,\ldots$$

La seqüència s'anomena *autogenerada* si $S = S'$ i, per tant, $(S')' = S$. Clarament, en una seqüència autogenerada no hi ha ni més de dos 1 ni més de dos 2 consecutius. Pensant una mica no és difícil veure que n'hi ha només una que comenci amb 1, que es denota per $\mathcal{K}$, que es va «autogenerant» i que els seus primers termes són els de l'enunciat de la conjectura. Així, $\mathcal{K}' = \mathcal{K}$. La que comença amb 2 no és més que la mateixa $\mathcal{K}$ sense el primer 1. És un problema obert trobar una expressió explícita per al seu terme enèsim. A molts llocs es coneix també com a *seqüència d'Oldenburger-Kolakoski*. El seu nom es deu a l'artista i aficionat a la matemàtica recreativa nord-americà William Kolakoski, qui la va descriure el 1965, tot i que ja l'havia considerat el 1939 el matemàtic i enginyer, també nord-americà, Rufus Oldenburger.

A [86] es prova que existeix un N tal que

$$\sup_{n\geq N} \left| \frac{\text{nombre d'uns entre els } n \text{ primers termes de } \mathcal{K}}{n} - \frac{1}{2} \right| \leq 0.00008,$$

resultat que és coherent amb la conjectura, tot i que ni tan sols prova que el límit que es vol calcular existeix.

Hi ha seqüències de Kolakoski que usen altres números. Per exemple, usant només 1 i 3 tenim la successió

$$1,3,3,3,1,1,1,3,3,3,1,3,1,3,3,3,1,1,1,3,3,3,1,3,3,3,1,3,3,3,\ldots,$$

que és autogenerada, i també es poden obtenir seqüències autogenerades usant alfabets amb més números.

Conjectura de Frankl. Sigui $\mathcal{F}$ una família finita no trivial de conjunts finits de manera que, si $A, B \in \mathcal{F}$, es compleix que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Aleshores hi ha un element que pertany com a mínim a la meitat dels conjunts de $\mathcal{F}$.

Les famílies de conjunts $\mathcal{F}$ que compleixen aquesta propietat s'anomenen *famílies tancades per la unió.* Que la família sigui no trivial, senzillament vol dir que té algun element més que el conjunt buit. Aquesta conjectura va ser proposada el 1979 pel matemàtic hongarès Péter Frankl.

Hi ha casos especials en els quals la prova és senzilla. Per exemple, suposem que $\mathcal{F}$ té un conjunt $C = \{x\}$ que té un sol element. Siguin $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tots els elements de $\mathcal{F}$ que no contenen x. Aleshores $A_j \cup \{x\}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, també han de ser elements de $\mathcal{F}$ i, òbviament, contenen x. Per tant, com a mínim la meitat dels elements de $\mathcal{F}$ contenen x.

Se sap també que la conjectura és certa, per exemple, per a famílies formades com a màxim per quaranta-sis conjunts ([95]) o per a famílies en les què la unió de tots els seus conjunts té com a màxim onze elements ([13]).

Conjectura de Toeplitz. Qualsevol corba plana, contínua, tancada i simple conté quatre punts que són els vèrtexs d'un quadrat.

Recordem que una corba plana, contínua, tancada i simple ve donada per una aplicació contínua i injectiva $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ i s'anomena *corba de Jordan*, en honor al matemàtic francès Camille Jordan. Aquesta conjectura va ser proposada pel matemàtic alemany Otto Toeplitz l'any 1911 i de vegades també és coneguda com la *conjectura del quadrat inscrit*; vegeu la figura 12. Podeu consultar-ne molta informació a l'excel·lent treball de revisió [78]. En particular, se sap que és certa si la corba envolta un conjunt convex (és a dir, tal que, donats dos punts qualssevol del conjunt, el segment que els uneix està totalment contingut al conjunt), si ve donada per una funció dos cops derivable amb continuïtat, o si està formada per un nombre finit de trossos analítics, de manera que cada tros té un nombre finit de punts d'inflexió o altres singularitats, i als punts de no analiticitat les derivades per la dreta i l'esquerra existeixen; per a més detalls, vegeu [40]. Així, en particular, és certa per a tots els polígons. Es pot veure que els triangles obtusangles admeten un sol quadrat inscrit; els rectangles, dos, i els acutangles, exactament tres.

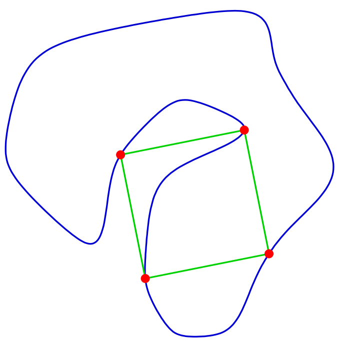

Figura 12: Un quadrat inscrit.

Hi ha resultats provats quan, en comptes d'un quadrat, es busca una altra figura inscrita. Per exemple, Nielsen ([85]) prova el 1995 que hi ha molts rombes i paral·lelograms inscrits. Per altra banda, Meyerson ([79]) inclou al seu treball una prova basada en una conferència de Vaughan del 1977 de l'existència d'un rectangle inscrit per a tota corba de Jordan. La prova és molt maca i està basada en eines purament topològiques.

Conjectura d'Erdős-Szekeres. Per a tot $2 < n \in \mathbb{N}$, el mínim nombre de punts al pla, de manera que mai tres d'ells estan alineats, però que sempre n'hi ha n que són vèrtexs d'un polígon convex de n costats, és $f(n) = 2^{n-2} + 1$.

Aquest problema, sense donar l'expressió general de $f(n)$, sembla que va ser proposat i resolt per a $n = 5$ per la matemàtica australianohongaresa Esther Klein el 1933 en un seminari; vegeu una il·lustració per a $n = 6$ a la figura 13. L'existència d'una funció $f(n)$ i la conjectura per a la seva expressió explícita es deuen al treball del 1935 ([42]) de Paul Erdős i del també matemàtic australianohongarès George Szekeres, qui va acabar casant-se amb Klein (després, Esther Szekeres).

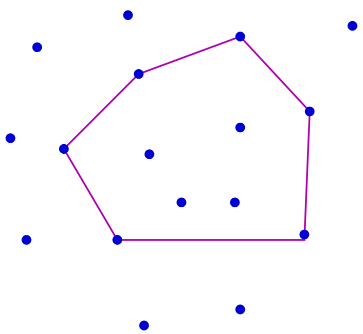

Figura 13: Una situació de la conjectura d'Erdős-Szekeres per a $n = 6$ amb disset punts.

La solució per a $n = 5$ ja apareix el 1935 al treball [42], atribuïda a Endre Makai. Curiosament, el 2006, de nou Szekeres i Peters ([108]) proven la conjectura per a $n = 6$. És, probablement, el cas d'interval de temps més llarg entre dues publicacions matemàtiques del mateix autor i sobre el mateix tema: setanta anys. De fet, el treball és pòstum, ja que George Szekeres va morir el 2005. També és conegut que, per a tot n, la funció $f(n)$ és més gran o igual que $2^{n-2} + 1$.

Conjectura dels billars triangulars. En un billar triangular sempre hi ha una trajectòria periòdica.

Comencem prenent un billar convex tal que la seva vora ve donada per una corba diferenciable i amb derivada contínua. Considerem les trajectòries d'una bola puntual que es mou sense fregament i que rebota a les vores de la manera natural, és a dir, de manera que l'angle d'incidència és igual a l'angle de reflexió. És conegut que sempre hi ha trajectòries periòdiques ([64]). El nombre de vegades que una trajectòria periòdica toca la vora s'anomena el seu *període*.

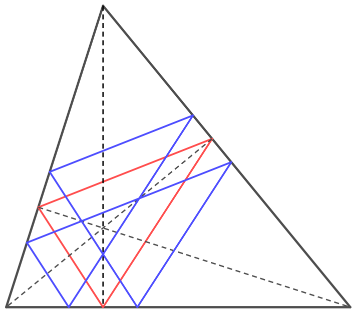

FIGURA 14: Trajectòries de període 3 i 6 en un billar triangular acutangle.

Si prenem un billar convex, però de manera que la seva vora és un polígon, té sentit plantejar-se si també serà cert que sempre hi ha una trajectòria periòdica. En aquests billars, si en algun moment la bola toca un dels vèrtexs de la vora, es considera la trajectòria com a acabada i, per descomptat, no periòdica. Curiosament, fins i tot per a billars triangulars aquesta qüestió és un problema obert.

Comentem alguns casos particulars de billars triangulars en els quals se sap que la conjectura és certa. Per exemple, quan la vora és un triangle acutangle sempre hi ha una trajectòria periòdica de període 3. Aquesta trajectòria està formada pel triangle que té com a vèrtexs els punts base a les vores de les tres altures; vegeu la figura 14. Molta de la informació que donem està extreta del treball [66], que està dedicat als microlàsers triangulars orgànics, i de [4, 53]. A la trajectòria anterior de vegades se l'anomena *trajectòria de Fagnano*, en honor al matemàtic italià Giulio Fagnano, qui ja la va trobar el 1775 per resoldre un altre problema: *buscar el triangle inscrit en un triangle acutangle amb longitud mínima*. La conjectura també és certa per a triangles rectangles ([27, 114, 115, 61]), per a triangles isòsceles ([27]), per a triangles obtusangles en els quals cap angle té més de 100 graus ([101]), per a altres triangles obtusangles ([53]) i per a triangles racionals ([12]). Recordem que un triangle s'anomena *racional* si tots els seus angles són múltiples racionals de π.

CONJECTURA DEL SOFÀ MÉS GRAN. L'àrea màxima d'un «sofà» pla que pot lliscar per un passadís pla d'amplada 1 amb forma de L és $S_0 = 2.219531\ldots$

Aquest problema va ser proposat pel matemàtic austrocanadenc Leo Moser el 1966. Matemàticament, un sofà serà qualsevol figura plana connexa amb àrea ben definida. En el treball [97] es poden trobar més referències i detalls sobre el tema i és el que hem consultat per a la breu explicació que segueix. Observem que la conjectura que presentem només dona les primeres xifres significatives de S_0.

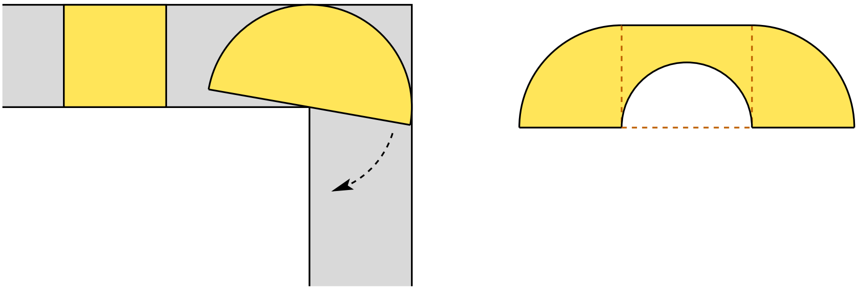

FIGURA 15: Sofàs simples i sofà de Hammersley.

És fàcil trobar sofàs d'àrea 1 (quadrat) i d'àrea $\pi/2$ (semicircular) que poden travessar el passadís. El primer sofà amb una mica de mèrit és conegut com a *sofà de Hammersley* i té àrea $\pi/2 + 2/\pi \approx 2.2074$. Aquest s'assembla al perfil de l'auricular d'un telèfon fix antic i està format per un rectangle de mides $1 \times 4/\pi$, al qual s'ha tret un semicercle de radi $2/\pi$, i s'hi han afegit dos quarts de cercle de radi 1 als costats; vegeu la figura 15. Observeu que la seva vora està formada per sis trossos de corbes algebraiques.

El conegut com a *sofà de Gerver* és una petita variació del de Hammersley, és a dir, té una forma semblant, però en aquest cas la seva vora està formada per divuit trossos de corbes analítiques de les quals tres són rectes i quinze venen donades com a solucions d'un sistema no lineal de quatre equacions. Aquestes corbes també es poden veure com a solucions de certes equacions diferencials. Les primeres xifres decimals de l'àrea del sofà de Gerver són les que proposa la conjectura.

El 1968, Hammersley ja va demostrar que $S_0 \leq 2\sqrt{2} \approx 2.8284$ i, el 2017, Kallus i Romik van millorar el seu resultat, provant que $S_0 \leq 2.37$.

Una qüestió que recorda molt la conjectura del sofà és l'anomenat *problema de Kakeya*, proposat el 1917 pel matemàtic japonès Soichi Kakeya. La nostra principal font és el capítol «The finite Kakeya problem» de l'interessant llibre [1]. Kakeya es preguntava quin era el subconjunt més petit del pla en el qual una agulla de longitud 1 pot girar sense sortir-ne fent una volta completa. La matematització de la paraula *girar* és que els moviments de l'agulla siguin continus. Pensant una mica, és clar que ho pot fer en un disc de diàmetre 1 (àrea $\pi/4 \approx 0.785$) o en un triangle equilàter d'altura 1 (àrea $\sqrt{3}/3 \approx 0.577$). De fet, Juluis Pal el 1920 va demostrar que aquest triangle és la figura convexa d'àrea mínima que ho permet. Però sembla que el mateix Kakeya ja va trobar una figura no convexa d'àrea més petita. Concretament, una figura amb vora una corba anomenada *deltoide*, amb àrea $\pi/8 \approx 0.393$, que ve donada pels punts del pla que compleixen

$$(x^2+y^2)^2 - 2x(x^2-3y^2) + \frac{9}{8}(x^2+y^2) - \frac{27}{256} = 0;$$

vegeu la figura 16. La gran sorpresa va ser quan el matemàtic rus Abram S. Bezikóvitx el 1928 va trobar conjunts complicats, amb molts forats i diàmetres grans, que permetien fer-ho i tenien àrea tan petita com es volgués. Més endavant Cunningham ([31]) va aconseguir provar el mateix, però amb conjunts sense cap forat i que cabien dins d'un cercle de diàmetre 2.

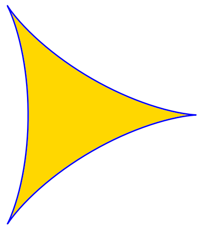

FIGURA 16: Corba deltoide.

En els seus treballs, Bezikóvitx va començar a tractar un problema relacionat, definint un *conjunt de Kakeya* (avui en dia també conegut com a *conjunt de Bezikóvitx*) com un subconjunt de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que conté el segment unitat (l'agulla) en totes les orientacions possibles. Observeu que s'ha eliminat la hipòtesi que l'agulla s'ha de moure contínuament i es considera el problema en dimensió arbitrària. Aleshores Bezikóvitx va demostrar el sorprenent resultat de que per a tot $n \geq 2$, hi ha conjunts de Kakeya amb mesura 0.

Per a distingir millor entre tots els conjunts que tenen la mateixa mesura, el 1918 el matemàtic alemany Felix Hausdorff va introduir el que avui en dia s'anomena *dimensió de Hausdorff* o, també, *dimensió de Hausdorff-Bezikóvitx*. No entrarem en detalls sobre la seva definició; simplement comentarem que, donat un conjunt $C \subset \mathbb{R}^n$, el fet que aquesta dimensió, que com a màxim és n, no sigui un enter és una de les condicions perquè C sigui el que s'anomena un *conjunt fractal*. Per exemple, els conjunts numerables tenen mesura 0 i dimensió de Hausdorff 0, i el famós conjunt de Cantor, contingut a $\mathbb{R}$, té mesura 0 i dimensió de Hausdorff $\ln(2)/\ln(3) \approx 0.63$. Per a més detalls, consulteu [45].

L'anomenada *conjectura de Kakeya* afirma que, per a tot $2 \leq n \in \mathbb{N}$, la dimensió de Hausdorff de tot conjunt de Kakeya a $\mathbb{R}^n$ és n. Aquesta conjectura només ha estat provada per a $n = 2$; vegeu-ne dues il·lustracions a la figura 17. Si fos certa, ens diria que tot i que els conjunts de Kakeya poden tenir mesura 0, la seva dimensió de Hausdorff és la més gran possible o, en altres paraules, que estan «molt plens de punts».

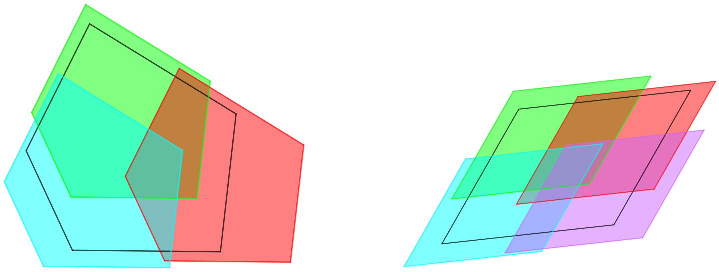

FIGURA 17: Cobriments amb tres i quatre còpies homotètiques a $\mathbb{R}^2$ tal com afirma la conjectura de Levi-Hadwiger, ja provada al pla.

CONJECTURA DE LEVI-HADWIGER. Qualsevol cos convex inclòs a $\mathbb{R}^n$ es pot cobrir per $2n$ o menys còpies homotètiques (més petites) d'ell mateix. A més, només se'n necessiten $2n$ si el cos és un paral·lelepípede.

Recordem que un cos es diu que és convex si, donats dos punts qualssevol d'aquest cos, el segment que els uneix hi està totalment contingut. Aquesta conjectura va ser proposada independentment, el 1955, pel matemàtic alemany Friedrich W. Levi i, el 1957, pel matemàtic suís Hugo Hadwiger. De fet, el mateix Levi ([76]) va demostrar que la conjectura és certa per a $n = 2$.

Aquesta conjectura i moltes altres sobre el que s'anomena *geometria discreta* es poden consultar a la monografia [14].

4 Utilitat didàctica i pràctica de les conjectures

El matemàtic britanicolibanès Michael F. Atiyah, en el seu llibre [3], comenta: «Alguns problemes obren portes, alguns les tanquen i uns altres queden com a curiositats, però tots ells aguditzen el nostre enginy, actuen com a reptes a la nostra inventiva i posen a prova els nostres coneixements». Aquesta afirmació es pot aplicar, sens dubte, a les conjectures matemàtiques.

No puc deixar de parlar en aquest punt d'un exemple recent de conjectura lúdica i que té petites semblances amb les conjectures sobre la màxima persistència multiplicativa i la de no palindromia. Basant-se en una conversa entre els protagonistes de la famosa sèrie televisiva *The Big Bang Theory*, de la CBS, el 2015 a [17] els autors van introduir el que van anomenar *conjectura de Sheldon*, en honor al personatge Sheldon Cooper. Per a enunciar-la, definirem el que és un primer de Sheldon. Recordem que, com en tot el treball, p_n denota el primer enèsim.

- Direm que p_n compleix la *propietat del producte* si $\Pi(p_n) = n$, on $\Pi(k)$ és el producte de les xifres de k. Per exemple, $p_{21} = 73$ i $\Pi(73) = 21$.
- Direm que p_n compleix la *propietat del mirall* si $\text{rever}(p_n) = p_{\text{rever}(n)}$, on recordem que $\text{rever}(k)$ denota l'aplicació que inverteix l'ordre de les xifres de k. Per exemple, $\text{rever}(p_{21}) = \text{rever}(73) = 37$ i $p_{\text{rever}(21)} = p_{12} = 37$.

Un primer és un *primer de Sheldon* si compleix les dues propietats anteriors. Per exemple, 73 ho és. La conjectura afirmava que 73 era l'únic primer de Sheldon i va ser provada el 2019 a [90]. De fet, en el seu treball els autors proposen una nova conjectura: *els únics primers que compleixen la propietat del producte són*

$$p_7 = 17, \quad p_{21} = 73 \quad \text{i} \quad p_{181\,440} = 2\,475\,989.$$

Observem que $2 \times 4 \times 7 \times 5 \times 9 \times 8 \times 9 = 181\,440$. Al mateix treball se suggereix que segurament hi ha infinits números primers que compleixen la propietat del mirall. Com veiem, el món de les conjectures no s'acaba mai.

A més, a la sèrie de televisió, Sheldon afirma que 73 és el millor número natural del món, ja que 73 també és capicua en base 2, $73 = 1\,001\,001_2$.

Totes les conjectures de les dues primeres seccions, i també alguna de les que apareixen a la darrera secció, tenen una cosa en comú: ràpidament ens venen ganes de comprovar-les per a números petits o casos particulars. Un segon pas, molt natural, és que pensem a fer un programa que vagi més enllà del que hem pogut fer amb paper i llapis. Jo mateix, un dels primers programes que vaig fer, ja fa més de quaranta anys, va ser per buscar números perfectes. De fet, aquesta segona opció és molt bona per intentar demostrar que certes conjectures són falses, però mai ens donarà cap demostració.

Les conjectures presentades en aquest treball han estat comprovades per moltíssima gent, i amb els ordinadors més potents, i de moment resisteixen com a conjectures. De fet, de ben segur que cada cop que apareixen ordinadors més potents hi ha gent que intenta buscar contraexemples de moltes d'elles.

Exposarem a continuació uns quants exemples en els quals s'ha d'arribar cada cop més lluny per veure que una determinada propietat no és certa. N'apareixen molts més a [7, 51]. Aquests exemples serveixen per a consolidar la idea que, per molt lluny que puguem arribar fent càlculs, mai podrem estar segurs que un resultat és cert si no en trobem una demostració.

Comencem per un de molt senzill: el polinomi $P(n) = n^2 + n + 41$, donat per Euler el 1772, proporciona valors primers per a $n = 0, 1, 2, \dots, 38, 39$. Així, $P(0) = 41$ i $P(39) = 1601$ són primers. Ara bé, $P(40) = 40 \times 41 + 41 = 41^2$. Un altre polinomi que dona valors primers per a $n = 0, 1, \dots, 79$, és $Q(n) = n^2 - 79n + 1601$, tot i que només dona quaranta números primers diferents. Això es deu al fet que

$$Q(n) = (n - 40)^2 + (n - 40) + 41$$

i que, com va observar Legendre el 1798, el polinomi $n^2 - n + 41$ també dona valors primers per a $n = 0, 1, 2, \dots, 38, 39$ i, a més, proporciona els mateixos primers que el polinomi d'Euler. Per a aquest nou polinomi $Q(80) = 41^2$ ja no és primer.

Continuem amb un exemple sorprenent sobre el valor de certes integrals impròpies i convergents; vegeu [10, 100]. Es pot demostrar que

$$J_n = \int_0^\infty 2\cos(x) \prod_{k=1}^{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{2k-1}\right) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{si} \quad n = 1, 2, \dots, 56,$$

però $J_{57} < \pi/2$, tot i que J_{57} és molt proper a $\pi/2$. La funció $\operatorname{sinc}(x) = \sin(x)/x$ té nom propi, degut a la seva aparició freqüent en el processament digital de senyals i en la teoria de la informació, i es coneix com a *sinus cardinal*. Integrals similars a J_n se solen anomenar *integrals de Borwein* perquè els germans Borwein, matemàtics escocesos contemporanis, van mostrar per primer cop aquest tipus de fenomen ([10]). Actualment hi ha exemples d'integrals de Borwein dependents d'un paràmetre n que es mantenen constants fins a un valor de n, amb més de quaranta dígits, i després canvien de valor.

En l'exemple presentat, a [100] es demostra un fet gens evident: la raó del canvi per a $n = 57$ és que

$$2.994 \approx \sum_{k=1}^{56} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{111} < 3 < \sum_{k=1}^{57} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{113} \approx 3.003.$$

Un tercer exemple ens el proporciona una de les anomenades *curses de primers*; vegeu [48]. Dividim en dos equips els números primers: equip E_1, format pels de la forma $3n+1$, i equip E_2, format pels de la forma $3n+2$. Així, $E_1 = (7, 13, 19, \dots)$ i $E_2 = (2, 5, 11, 17, \dots)$. Si, per a $j = 1, 2$, definim

$$\pi_j(x) = \text{nombre de primers a } E_j \text{ menors o iguals que } x,$$

la qüestió consisteix a saber, a mesura que x augmenta, si una de les dues funcions és sempre més gran que l'altra. És clar que $\pi(x) = \pi_1(x) + \pi_2(x) + 1$, ja que 3 no és a cap dels dos equips. Aquesta cursa és molt disputada, ja que se sap que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi_1(x)}{\pi_2(x)} = 1.$$

Aquest resultat és també cert en general quan es comparen primers de les formes $An + B$ i $An + C$, amb A, B coprimers i A, C coprimers. Clarament és, a més, més fort que el resultat de Dirichlet, el qual hem esmentat quan parlàvem sobre les conjectures que busquen números primers amb expressions concretes.

En el cas que ens ocupa, per exemple, l'equip E_2 comença guanyant i continua guanyant durant força temps: $\pi_2(100) = 13 > 11 = \pi_1(100)$ o $\pi_2(10^5) = 4807 > 4784 = \pi_1(10^5)$. De fet, la desigualtat es manté fins a $x = 608\,981\,813\,029$, valor en el què l'equip E_1 es posa per davant per primer cop. Se sap que cap dels dos equips guanya la cursa ja que van alternant indefinidament la seva posició.

Una situació semblant es presenta quan es compara la funció $\pi(x)$, que recordem que compta el nombre de primers menors o iguals que x, amb la funció *logaritme integral*

$$\operatorname{li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \right\}.$$

El mateix Gauss, amb quinze anys, el 1796 va demostrar que $\pi(x) < \mathrm{li}(x)$ per a $x < 3 \times 10^6$. Durant més de cent anys es va pensar que la desigualtat es mantenia per a tot $x > 0$, fins que, el 1914, Littlewood ([77]) va demostrar que $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ canvia de signe infinits cops quan x tendeix a infinit. Les fites superiors per al primer valor de x pel qual la funció $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$ s'anulla s'anomenen *números de Skewes* en honor al matemàtic sud-africà Stanley Skewes, qui, el 1955, va donar la primera fita explícita, que era un número immens ([105]). Avui en dia, la millor fita explícita té més de 300 dígits i al seu voltant la funció diferència té més de 10^{150} zeros ([8]). Aquestes fites es poden obtenir a partir d'un resultat clau del 1966 de Lehman ([72]), el qual usa que tots els zeros no trivials de la funció zeta de Riemann, amb part imaginària menor que un cert valor, tenen part real $1/2$. Intuïtivament, com més gran és aquest valor, més petit és el número de Skewes obtingut.

Els dos últims exemples són també força espectaculars. En el primer d'ells ens preguntem si és cert o no que $n^{17} + 9$ i $(n + 1)^{17} + 9$ són primers entre si. Resulta que ho són per a tot $n < N$. En canvi, per a $n = N$, on

$$N = 8\,424\,432\,925\,592\,889\,329\,288\,197\,322\,308\,900\,672\,459\,420\,460\,792\,433$$

té cinquanta-una xifres, no ho són. De fet, tenen un màxim comú divisor m també de cinquanta-una xifres, on $m = \mathrm{Res}_n(n^{17}+9, (n+1)^{17}+9)$ i Res_n denota la resultant dels dos polinomis respecte a n. Per a més detalls, vegeu [46].

En l'últim exemple estudiem si, per a tot $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, la quantitat $1381n^2 + 1$ pot ser un quadrat perfecte. La resposta és que no ho és per a tot $n < M$, però en canvi ho és per primer cop per a $n = M$, on

$$M = 2\,472\,690\,352\,775\,053\,537\,868\,141\,555\,978\,544\,119\,564\,691\,977\,342\,423\,075\,952\,738\,420$$

té més de seixanta xifres. De fet, les equacions diofàntiques de la forma $dn^2 + 1 = m^2$, $d \in \mathbb{N}$, es coneixen com a *equacions de Pell* i se sap que sempre que d no sigui un quadrat perfecte tenen infinites solucions $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ i hi ha algoritmes per trobar-les totes i saber quina és la més petita; vegeu, per exemple, [74] i les seves referències. De manera similar, tenim que $9949n^2 + 1$ és un quadrat per primer cop per a un valor n amb més de 200 xifres i $24\,229n^2 + 1$ ho és, també per primer cop, per a un n amb més de 300 xifres. Aquests valors de d s'han tret de la interessant pàgina web «The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences», de la secció amb número de referència A033316.

Un altre interès didàctic de les conjectures numèriques proposades és que proporcionen idees interessants i engrescadores per introduir els nostres alumnes en el món de la investigació i en el de la programació; vegeu de nou la pàgina web comentada a la introducció.

Finalment, per si algú es pregunta si, a banda de l'interès científic i intellectual (els quals no són gens menyspreables), el fet de pensar les conjectures numèriques que hem presentat en aquest treball té algun interès pràctic, recordem a continuació, com a exemple, el paper que va tenir l'estudi dels primers bessons en la detecció d'un dels errors més famosos i greus que presentava un processador comercial.

Durant el càlcul de la constant de Brun, B_2 (suma dels inversos dels primers bessons), el 1994, Thomas Nicely ([83]) va trobar el famós error (*bug*) en les divisions que feia el processador Intel Pentium, i, més precisament, quan considerava el parell de primers bessons 824 633 702 441 i 824 633 702 443; vegeu [30]. El seu famós missatge de correu electrònic començava així:

> Sembla que hi ha un error a la unitat de coma flotant (coprocessador numèric) de molts, i potser tots, els processadors Pentium. En resum, el Pentium FPU torna valors erronis per a determinades divisions. Per exemple, 1/824 633 702 441.0 es calcula incorrectament (tots els dígits més enllà del vuitè dígit significatiu són erronis)...

En poques paraules, els processadors es testen amb càlculs matemàtics, el màxim de complexos possible. Aquests càlculs involucren tant el coneixement de números primers enormes, com la implementació d'algoritmes per a calcular xifres i més xifres decimals de certs números paradigmàtics, com, per exemple, π; vegeu [11]. A més, avui en dia és ben conegut que l'ús de números primers tan grans com sigui possible, té un paper essencial en el xifratge i la codificació d'informació. Un exemple famós és l'algorisme de xifratge de clau pública RSA; vegeu [94].

Sobre els materials audiovisuals

Tot i que fins ara només hem citat treballs en paper i pàgines web, voldria esmentar que avui en dia l'existència de materials audiovisuals pot millorar substancialment la comprensió de les matemàtiques. A tall d'exemples, aconsellem veure a YouTube els vídeos amb títols «Who cares about topology? (Inscribed rectangle problem)» sobre l'existència d'un rectangle inscrit per a tota corba de Jordan, o «The moving sofa problem» sobre la conjectura del seu títol. També és molt interessant escoltar la xerrada de Joseph Oesterlé el 2013 amb títol «Some simple open problems in mathematics», dins del IMSC 50 Years Golden Jubilee Celebrations i disponible a la Xarxa.

Agraïments

L'autor vol agrair a Francesc Mañosas i Wolfgang Pitsch els seus suggeriments sobre una primera versió d'aquest treball. També, a Gregori Guasp, la seva ajuda en la preparació de moltes de les il·lustracions que conté. L'autor ha rebut el suport del Ministeri de Ciència i Innovació, a través del projecte PID2019-104658GB-I00, i de l'Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca - Generalitat de Catalunya, referència 2017-SGR-1617.

Referències

[1] Aigner, M.; Ziegler, G. M. *Proofs from THE BOOK*. Berlín: Springer, 1988.

[2] Andrica, D. «Note on a conjecture in prime number theory». *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math.*, 31 (4) (1986), 44–48.

[3] Arnold, V.; Atiyah, M.; Lax, P.; Mazur, B. (ed.). *Mathematics: Frontiers and Perspectives*. International Mathematical Union. American Mathematical Society, 2000.

[4] Artigue, A. «Órbitas periódicas en billares triangulares». *Miscelánea Mat.*, 59 (2015), 19–40.

[5] Bailey, D. H.; Crandall, R. E. «On the random character of fundamental constant expansions». *Experiment. Math.*, 10 (2) (2001), 175–190.

[6] Bajnok, B. *An Invitation to Abstract Mathematics*. Nova York: Springer-Verlag, 2013. (Undergraduate Texts in Mathematics)

[7] Barahmand, A. «On mathematical conjectures and counterexamples». *J. Humanist. Math.*, 9 (1) (2019), 295–303.

[8] Bays, C.; Hudson, R. H. «A new bound for the smallest x with $\pi(x) > \mathrm{li}(x)$». *Math. Comp.*, 69 (231) (2000), 1285–1296.

[9] Berndt, B. C.; Galway, W. F. «On the Brocard-Ramanujan diophantine equation $n! + 1 = m^2$». *Ramanujan J.*, 4 (1) (2000), 41–42.

[10] Borwein, D.; Borwein, J. M. «Some remarkable properties of sinc and related integrals». *Ramanujan J.*, 5 (1) (2001), 73–89.

[11] Borwein, J. M.; Macklem, M. S. «The (digital) life of Pi». *Austral. Math. Soc. Gaz.*, 33 (4) (2006), 243–248.

[12] Boshernitzan, M.; Galperin, G.; Krüger, T.; Troubetzkoy, S. «Periodic billiard orbits are dense in rational polygons». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350 (9) (1998), 3523–3535.

[13] Bošnjak, I.; Marković, P. «The 11-element case of Frankl's conjecture». *Electron. J. Combin.*, 15 (2008), R88.

[14] Brass, P.; Moser, W.; Pach, J. *Research Problems in Discrete Geometry*. Nova York: Springer, 2005.

[15] Brousseau, A. «Palindromes by addition in base two». *Math. Mag.*, 42 (1969), 254–256.

[16] Brun, V. «La série $1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + 1/19 + 1/29 + 1/31 + 1/41 + 1/43 + 1/59 + 1/61 + \cdots$ où les dénominateurs sont "nombres premiers jumeaux" est convergente où finie». *Bull. Sci. Math. (2)*, 43 (1919), 100–104 i 124–128.

[17] Byrnes, J.; Spicer, C.; Turnquist, A. «The Sheldon conjecture». *Math Horiz.*, 23 (2) (2015), 12–15.

[18] Carmichael, R. D. «On Euler's ϕ-function». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 13 (5) (1907), 241–243.

[19] Carmichael, R. D. «Note on Euler's ϕ-function». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 28 (3) (1922), 109–110.

[20] Casas-Alvero, E. «Higher order polar germs». *J. Algebra*, 240 (1) (2001), 326–337.

[21] Casas-Alvero, E. «La conjetura de Casas-Alvero, contada por Eduardo Casas-Alvero». Entrevista. `https://www.gaussianos.com/la-conjetura-de-casas-alvero-contada-por-eduardo-casas-alvero/`.

[22] Castryck, W.; Laterveer, R.; Ounaïes, M. «Constraints on counterexamples to the Casas-Alvero conjecture and a verification in degree 12». *Math. Comp.*, 83 (290) (2014), 3017–3037.

[23] Chamberland, M. «A continuous extension of the $3x + 1$ problem to the real line». *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems*, 2 (4) (1996), 495–509.

[24] Chamberland, M. «Una actualizació del problema $3x + 1$». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 18 (1) (2003), 19–45.

[25] Chen, J. R. «On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes». *Sci. Sinica*, 16 (1973), 157–176.

[26] Chen, J. R. «On the distribution of almost primes in an interval». *Sci. Sinica*, 18 (5) (1975), 611–627.

[27] Cipra, B.; Hanson, R. M.; Kolan, A. «Periodic trajectories in right-triangle billiards». *Phys. Rev. E (3)*, 52 (2) (1995), 2066–2071.

[28] Cohen, G. *Suites & séries. Les nombres, avec ou sans limite.* París: Editions POLE, 2011. (Bibliothèque Tangente; 41)

[29] Conway, J. H. «On unsettleable arithmetical problems». *Amer. Math. Monthly*, 120 (3) (2013), 192–198.

[30] Cunningham, A. «On hyper-even numbers and on Fermat's numbers». *Proc. London Math. Soc. (2)*, 5 (1907), 237–274.

[31] Cunningham, F., Jr. «The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets». *Amer. Math. Monthly*, 78 (1971), 114–129.

[32] de Faria, E.; Tresser, C. «On Sloane's persistence problem». *Exp. Math.*, 23 (4) (2014), 363–382.

[33] Delahaye, J.-P. *Le fascinant nombre π*. Bibliothèque Scientifique. París: Belin-Pour la Science, 1997. (Essais)

[34] Díaz-Toca, G. M.; González-Vega, L. «On analyzing a conjecture about univariate polynomials and their roots by using Maple». A: *Proceedings of the 2006 Maple Conference*. Waterloo: Maplesoft, 2006, 81–98.

[35] Dickson, L. E. «A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers». *Messenger Math.*, 33 (1904), 155–161.

[36] Draisma, J.; de Jong, J. P. «On the Casas-Alvero conjecture». *Eur. Math. Soc. Newsl.*, 80 (2011), 29–33.

[37] du Sautoy, M. *The Music of the Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics*. Nova York: HarperCollins Publishers, 2003.

[38] DWILEWICZ, R. J.; MINÁČ, J. «Values of the Riemann zeta function at integers». *MATerials MATemàtics*, 6 (2009), 26 p.

[39] ELSHOLTZ, C. «Sums of k unit fractions». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 (8) (2001), 3209–3227.

[40] EMCH, A. «On some properties of the medians of closed continuous curves formed by analytic arcs». *Amer. J. Math.*, 38 (1) (1916), 6–18.

[41] ERDŐS, P. «Über die Reihe $\sum 1/p$». *Mathematica, Zutphen. B.*, 7 (1938), 1–2.

[42] ERDŐS, P.; SZEKERES, G. «A combinatorial problem in geometry». *Compositio Math.*, 2 (1935), 463–470.

[43] VAN DEN ESSEN, A. «To believe or not to believe: the Jacobian conjecture». *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 55 (4) (1997), 283–290.

[44] VAN DEN ESSEN, A. *Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture*. Basilea: Birkhäuser Verlag, 2000. (Progress in Mathematics; 190)

[45] FALCONER, K. *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. 2a ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[46] FRENKEL, P. E.; PELIKÁN, J. «On the greatest common divisor of the value of two polynomials». *Amer. Math. Monthly*, 124 (5) (2017), 446–450.

[47] GRAF VON BOTHMER, H.-C.; LABS, O.; SCHICHO, J.; VAN DE WOESTIJNE, C. «The Casas-Alvero conjecture for infinitely many degrees». *J. Algebra*, 316 (1) (2007), 224–230.

[48] GRANVILLE, A.; MARTIN, G. «Prime number races». *Amer. Math. Monthly*, 113 (1) (2006), 1–33.

[49] GRIMM, C. A. «A conjecture on consecutive composite numbers». *Amer. Math. Monthly*, 76 (1969), 1126–1128.

[50] GRONWALL, T. H. «Some asymptotic expressions in the theory of numbers». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 14 (1) (1913), 113–122.

[51] GUY, R. K. «The strong law of small numbers». *Amer. Math. Monthly*, 95 (8) (1988), 697–712.

[52] GUY, R. K. *Unsolved Problems in Number Theory*. 2a ed. Nova York: Springer-Verlag, 1994. (Unsolved Problems in Intuitive Mathematics; 1)

[53] HALBEISEN, L.; HUNGERBÜHLER, N. «On periodic billiard trajectories in obtuse triangles». *SIAM Rev.*, 42 (4) (2000), 657–670.

[54] HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E. «Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes». *Acta Math.*, 44 (1) (1923), 1–70.

[55] HAVIL, J. *Gamma. Exploring Euler's Constant*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003.

[56] HELFGOTT, H. «La conjetura débil de Goldbach». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 16 (4) (2013), 709–726.

[57] Hiriart-Urruty, J.-B. «Le rôle des conjectures dans l'avancement des mathématiques: tours et détours à l'aide d'exemples». *Quadrature*, 83 (2012), 27–33. [Traduït al castellà a: «El papel de las conjeturas en el avance de las matemáticas». *SUMA*$^+$, 69 (2012), 83–92]

[58] Hiriart-Urruty, J.-B. «Les nombres entiers : des amis qui nous posent des problèmes». *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*, 176 (2014), 199–210.

[59] Hiriart-Urruty, J.-B. «Conjecturez, conjecturez... il en restera toujours quelque chose». *Tangente*, 168 (2016), 10–11.

[60] Hiriart-Urruty, J.-B. «Conjecturer en mathématiques... comme Fermat?». Xerrada a la jornada «Nouveaux regards sur Pierre (de) Fermat» (18 de juny del 2018). Per aparèixer a *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse*.

[61] Holt, F. «Periodic reflecting paths in right triangles». *Geom. Dedicata*, 46 (1) (1993), 73–90.

[62] Jaroma, J. H. «On expanding $4/n$ into three Egyptian fractions». *Crux Mathematicorum*, 30 (2004), 36–37.

[63] Jaroma, J. H. «Note on the Lucas-Lehmer test». *Irish Math. Soc. Bull.*, 54 (2004), 63–72.

[64] Katok, A.; Hasselblatt, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; 54)

[65] Khoshnevisan, D. «Normal numbers are normal». *Clay Mathematics Institute Annual Report* (2006), p. 15 i 27–31.

[66] Lafargue, C. [*et al.*]. «Localized lasing modes of triangular organic microlasers». *Phys. Rev. E*, 90 (2014), 052922.

[67] Lagarias, J. C. «The $3x + 1$ problem and its generalizations». *Amer. Math. Monthly*, 92 (1) (1985), 3–23.

[68] Lagarias, J. C. «An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis». *Amer. Math. Monthly*, 109 (6) (2002), 534–543.

[69] Lagarias, J. C. «The $3x + 1$ problem: an annotated bibliography (1963–1999)». A: *The Ultimate Challenge: the $3x + 1$ Problem*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010, 267–341.

[70] Lagarias, J. C. «Euler's constant: Euler's work and modern developments». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 50 (4) (2013), 527–628.

[71] Lander, L. J.; Parkin, T. R. «Counterexample to Euler's conjecture on sums of like powers». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 1079.

[72] Lehman, R. S. «On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$». *Acta Arith.*, 11 (1966), 397–410.

[73] Lehmer, D. «Sujets d'étude». *Sphinx*, 8 (1938), 12–13.

[74] Lenstra, H. W., Jr. «Solving the Pell equation». *Notices Amer. Math. Soc.*, 49 (2) (2002), 182–192.

[75] LETHERMAN, S.; SCHLEICHER, D.; WOOD, R. «The $3n + 1$-problem and holomorphic dynamics». *Experiment. Math.*, 8 (3) (1999), 241-251.

[76] LEVI, F. W. «Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns». *Arch. Math. (Basel)*, 6 (1955), 369–370.

[77] LITTLEWOOD, J. E. «Sur la distribution des nombres premiers». *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 158 (1914), 1869–1872.

[78] MATSCHKE, B. «A survey on the square peg problem». *Notices Amer. Math. Soc.*, 61 (4) (2014), 346–352.

[79] MEYERSON, M. D. «Balancing acts». *Topology Proc.*, 6 (1) (1981), 59–75 (1982).

[80] MIHĂILESCU, P. «Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture». *J. Reine Angew. Math.*, 572 (2004), 167–195.

[81] NARKIEWICZ, W. *The Development of Prime Number Theory. From Euclid to Hardy and Littlewood*. Berlín: Springer-Verlag, 2000. (Springer Monographs in Mathematics)

[82] NASH, J. F., JR.; RASSIAS, M. TH. (ED.). *Open Problems in Mathematics*. Nova York: Springer, 2016.

[83] NICELY, T. R. «Enumeration to $1.6e15$ of the twin primes and Brun's constant». Some Results of Computational Research in Prime Numbers (Computational Number Theory), 1999. `https://faculty.lynchburg.edu/~nicely/twins/twins.html`.

[84] NICOLAU, A. «Números Normals». *MATerials MATemàtics*, 1 (2016), 13 p.

[85] NIELSEN, M. J. «Rhombi inscribed in simple closed curves». *Geom. Dedicata*, 54 (3) (1995), 245–254.

[86] NILSSON, J. «Letter frequencies in the Kolakoski sequence». *Acta Phys. Polon. A*, 126 (2014), 549–552.

[87] NISHIYAMA, Y. «Numerical palindromes and the 196 problem». *Int. J. Pure Appl. Math.*, 80 (3) (2012), 375–384.

[88] OCHEM, P.; RAO, M. «Odd perfect numbers are greater than 10^{1500}». *Math. Comp.*, 81 (279) (2012), 1869–1877.

[89] OVERHOLT, M. «The diophantine equation $n! + 1 = m^2$». *Bull. London Math. Soc.*, 25 (2) (1993), 104.

[90] POMERANCE, C.; SPICER, C. «Proof of the Sheldon conjecture». *Amer. Math. Monthly*, 126 (8) (2019), 688–698.

[91] QUER, J. «La funció ζ de Riemann». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 22 (2) (2007), 197–228.

[92] RIBENBOIM, P. *The New Book of Prime Number Records*. Nova York: Springer-Verlag, 1996.

[93] RICHARDS, I. «On the incompatibility of two conjectures concerning primes; a discussion of the use of computers in attacking a theoretical problem». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 80 (1974), 419–438.

[94] Rivest, R. L.; Shamir, A.; Adleman, L. «A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems». *Comm. ACM*, 21 (2) (1978), 120–126.

[95] Roberts, I.; Simpson, J. «A note on the union-closed sets conjecture». *Australas. J. Combin.*, 47 (2010), 265–267.

[96] Rodríguez, G. «Sobre les fraccions $2/p$ del papir de Rhind». *MATerials MATemàtics*, 3 (2010), 12 p.

[97] Romik, D. «Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem». *Exp. Math.*, 27 (3) (2018), 316–330.

[98] Rosen, M. I. «A proof of the Lucas-Lehmer test». *Amer. Math. Monthly*, 95 (9) (1988), 855–856.

[99] Sadornil, D.; Varona, J. L. «Existen infinitos primos (desde Euclides hasta el siglo XXI)». *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, 24 (2) (2021), 301–324.

[100] Schmid, H. «Two curious integrals and a graphic proof». *Elem. Math.*, 69 (1) (2014), 11–17.

[101] Schwartz, R. E. «Obtuse triangular billiards. II. One hundred degrees worth of periodic trajectories». *Experiment. Math.*, 18 (2) (2009), 137–171.

[102] Shanks, D. «A sieve method for factoring numbers of the form $n^2 + 1$». *Math. Tables Aids Comput.*, 13 (1959), 78–86.

[103] Shanks, D. «On the conjecture of Hardy & Littlewood concerning the number of primes of the form $n^2 + a$». *Math. Comp.*, 14 (1960), 320–332.

[104] Singmaster, D. «Repeated binomial coefficients and Fibonacci numbers». *Fibonacci Quart.*, 13 (4) (1975), 295–298.

[105] Skewes, S. «On the difference $\pi(x) - \mathrm{li}(x)$. II». *Proc. London Math. Soc. (3)*, 5 (1955), 48–70.

[106] Solane, N. J. A. «The persistence of a number». *J. Recreational Math.*, 6 (1973), 97–98.

[107] Sondow, J. «Criteria for irrationality of Euler's constant». *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131 (11) (2003), 3335–3344.

[108] Szekeres, G.; Peters, L. «Computer solution to the 17-point Erdős-Szekeres problem». *ANZIAM J.*, 48 (2) (2006), 151–164.

[109] Tao, T. «Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes». *Math. Comp.*, 83 (286) (2014), 997–1038.

[110] Trigg, C. W. «Palindromes by Addition». *Math. Mag.*, 40 (1) (1967), 26–28.

[111] Varona, J. L. *Recorridos por la Teoría de Números.* 2a ed. Múrcia: Ediciones Electolibris, S.L. i Real Sociedad Matemática Española, 2019. (Textos Universitarios)

[112] Visser, M. «Strong version of Andrica's conjecture». *Int. Math. Forum*, 14 (4) (2019), 181–188.

[113] Voight, J. «Perfect numbers: An elementary introduction». Department of Mathematics, University of California, Berkeley (1998), 10 p. `https://math.dartmouth.edu/~jvoight/notes/perfelem.pdf`.

[114] Vorobets, Ya. B.; Gal'perin, G. A.; Stepin, A. M. «Periodic billiard trajectories in polygons». *Russian Math. Surveys*, 46 (5) (1991), 204–205.

[115] Vorobets, Ya. B.; Gal'perin, G. A.; Stepin, A. M. «Periodic billiard trajectories in polygons: generation mechanisms». *Russian Math. Surveys*, 47 (3) (1992), 5–80.

[116] Zhang, Y. «Bounded gaps between primes». *Ann. of Math. (2)*, 179 (3) (2014), 1121–1174.

[117] Zudilin, W. «Arithmetic of Catalan's constant and its relatives». *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 89 (1) (2019), 45–53.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona

Centre de Recerca Matemàtica

gasull@mat.uab.cat