Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 35, núm. 2, 2020. Pàg. 111–153. DOI: 10.2436/20.2002.01.95

Lectura metodològica i històrica de l'obra *Ḥibbur ha-mĕšiḥá wĕ-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*), d'Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda)

Josep Pla i Carrera

Resum: En ocasió del centenari del naixement de Josep Millàs Vallicrosa, va sorgir la idea de fer una anàlisi des del punt de vista matemàtic del *Tractat de geometria i mesurament* (1116), d'Abraham Bar Ḥiyya (Savasorda), que l'insigne arabista i hebraista havia traduït al català. Aquesta obra posa de manifest que, a Occident, abans del *Liber abaci* (1202), de Fibonacci, escrit en llatí, s'havia publicat, en hebreu, un opuscle en el qual s'introduïen l'equació de segon grau i els seus algorismes de resolució fonamentats en les relacions del llibre ii dels *Elements* d'Euclides. A més, aquest llibret tenia una segona part dedicada a la *divisió de figures*, usant, tanmateix, mètodes geomètrics. Fibonacci, conscient de la diferència metodològica d'aquestes dues parts, va tractar la qüestió de la *divisió de figures* heretada de la matemàtica grega en un tractat separat, *La practica geometriæ* (1220).

Paraules clau: equació de segon grau a Occident, història de la matemàtica jueva medieval, Savasorda i Fibonacci.

Classificació MSC2010: 01-01, 01A35, 01A99.

En una xerrada sobre matemàtica egípcia i mesopotàmica celebrada a l'Ateneu Barcelonès, l'enginyer Josep Tarrés em va demanar si en voldria fer una a Santa Coloma de Farners sobre el *Tractat de geometria i mesurament*, de l'erudit hebreu Bar Ḥiyya. Em va fer molta il·lusió per un doble motiu. La que comporta que una persona erudita, un col·lectiu o una societat cultural et faci confiança. És un fet que omple d'orgull que et reconeguin la feina de tants anys. Però també per l'indret. La Margarida i jo hem passat molts bons moments allotjats a Termes Orion sota l'aixopluc amable de la família Campeny, pujant al castell de Farners, passejant pel parc de Sant Salvador. Al Lotus Blau vam celebrar els vint-i-cinc anys conjugals amb els fills i la família i va ser una d'aquelles satisfaccions de la vida difícils d'oblidar.

Tenia el *Llibre de geometria* ([38]) des de feia anys, però no l'havia llegit, ni tan sols l'havia fullejat. En arribar a casa vaig mirar si Abraham Bar Ḥiyya, com l'anomena Millàs Vallicrosa,[1] és un personatge reconegut en la història general de la matemàtica. Vaig consultar el directori de Saint Andrews ([45]) i el *Biographical dictionary of mathematicians* ([33]). Totes dues fonts li dediquen un

1 La *gran enciclopèdia catalana* l'anomena Abraham Bar Ḥiyya (Abraham Iudaeus Savasorda). I diu: «Matemàtic, astrònom i filòsof hebreu, conegut també per *Abraham Iudaeus Savasorda*. Barcelona, 1070 - Barcelona, 1136» (`https://www.enciclopedia.cat/EC-GEC-0000284.xml`).

parell de pàgines. També l'esmenten Cajori, Smith i Loria, molt succintament,[2] i Taton, amb força detall.[3] I, recentment, la molt digna obra de Dorce dedicada a la matemàtica desenvolupada al llarg dels segles a la península Ibèrica en fa una síntesi ([24, volum II, p. 51–56]). També vaig consultar el recull bibliogràfic de Dauben, que remet a set textos, entre llibres i articles ([23, ítems 436, 442, 446–448, 482, 502 i 1826, p. 95, 96, 97, 105, 109 i 332]). Totes aquestes obres són a l'abast dels que s'interessen per la història de la matemàtica. Cap d'elles no és un text especialitzat.[4]

Aquestes referències em van animar a endinsar-me en el *Llibre de geometria* i, com acostuma a passar quan es llegeix amb atenció i cura una obra matemàtica, em vaig adonar que és molt més teòrica del que ella mateixa s'atribueix. Tot això, em va motivar a fer-ne una presentació de caire històric i metodològic pensada per a un públic matemàtic però ampli, una motivació que em va portar a escriure aquestes pàgines.

1 Unes gotes de la biografia i de les obres

Abans d'endinsar-nos en els continguts, en els paral·lelismes amb obres precedents, en les fonts en què s'inspira i en les influències que el *Llibre de geometria* va tenir, ens ha semblat que valia la pena fer una ressenya breu de l'home i la seva obra.

1.1 Biografia breu

Abraham Bar Ḥiyya (o Abraham Iudæus Savasorda) (Barcelona, ~1065[5] - Provença, 1136),[6] conegut com a Savasorda, del nom àrab Sāhib aix-Xurta ('cap de la guàrdia'),[7] matemàtic, astròleg, astrònom i filòsof hebreu català. Es va formar a la cort dels Banu Hud de Saragossa.[8] A més, va ocupar càrrecs d'importància a les corts islàmiques d'Aragó, un dels quals li va valer el sobrenom pel qual se'l coneix: Savasorda. La seva obra matemàtica, astronòmica i filosòfica va contribuir a la difusió de la ciència àrab en el món occidental. Destaca la del 1116 ([5]), escrita en hebreu.

A més de les seves obres, cal distingir les traduccions en què va participar, col·laborant amb Plató de Tívoli (Plato Tiburtinus) ([55, p. 99]), al qual va servir com a traductor intermediari oral de l'àrab al romanç. D'aquesta col·laboració, que es va mantenir durant la seva estada a Barcelona (1134–1145), va sorgir una

2 [17, edició de 1985, p. 121], [60, volum I de l'edició de 1958, p. 206 i 123] i [34, p. 140, nota 2]).
3 [62, edició castellana de 1988, volum III, p. 612, 614, 616, 636–637, 640–641 i 678]. Curiosament, les històries de la matemàtica de factura més actual l'ometen. N'és una excepció [30, p. 123–124].
4 Els textos especialitzats els podem trobar a l'edició catalana de [5] i també a les bibliografies de [45] i [33].
5 Hi ha biografies que afirmen que és natural de Saragossa. D'altres, en canvi, l'anomenen directament Abraham bar Ḥiyya ha-Bargeloni. També hi ha qui afirma que era natural d'Egipte.
6 Per a les notes biogràfiques podeu consultar, a més dels ja esmentats [33] i [45], els textos [57, §31, p. 43] (breu), [24] (més llarg) i [42, volum I, capítol 9, p. 219–262] (força extens).
7 Tomeo fa referència a l'existència d'un document de l'arxiu de la catedral d'Osca, datat l'any 1137, en què s'esmenta «una heredad que fue de Xabaxorda judeo» ([63, p. 27]).
8 A §10 apleguem els personatges esmentats a l'article.

dotzena de traduccions llatines en el camp de les matemàtiques, l'astronomia i l'astrologia ([18, p. 147–149]).

1.2 Obres i traduccions

Ens sembla important fer un recull de les seves obres i de les traduccions que va fer amb Plató de Tívoli perquè posen de manifest dos fets importants: tenia un coneixement ampli de l'obra científica dels àrabs i dels grecs a través dels àrabs, i la va rellegir amb aportacions personals.

1.2.1 Les obres En aquest paràgraf ens basem en la informació que proporciona la introducció de Millàs a l'obra de Bar Ḥiyya del 1117.[9]

I *Yĕsodé ha-ĕbuná wĕ-migdal ha-ĕmuná*[10] (*Fonaments de la intel·ligència i torre de la creença*) [7]. És una mena d'enciclopèdia científica; en el prefaci, Bar Ḥiyya diu que és una traducció de l'àrab a l'hebreu, però no s'ha trobat cap original àrab amb el mateix contingut.[11]

II *Ḥibbur ha-mĕšiḥá wĕ-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*) [5]. És l'obra que ens ocupa i en parlarem més avall.[12]

III *Ṣurat ha-areṣ wĕ-tabnit ha-šmavin* (*Forma de la Terra i les figures del cel*) [9].[13] És un tractat d'astronomia i cosmografia, dedicat a Abraham ben Selomo, un personatge desconegut i que deriva bàsicament del *Kitab fi harakat as-sama-wiyya wa-yawa mi ilm an-nuyyum* d'al-Farghaní.[14]

FIGURA 1: L'eclipsi de Lluna a l'astronomia de Bar Ḥiyya.

IV *Ḥĕsbón mahlekot ha-kokabim* (*Càlcul dels moviments dels astres*) [8]. És la presentació matemàtica de determinades qüestions d'astronomia. Fou acabada a Barcelona el 10 d'abril de l'any 1136. Està inspirada en l'obra d'al-Battaní. Alguns manuscrits contenen notes d'Abraham ibn Ezra. S'hi descriu l'eclipsi de Lluna (figura 1).[15]

9 [39, p. V–VII]. També [55]. A [57, p. 43] s'esmenta un parell d'obres més. Hi ha manuscrits de Savasorda a les biblioteques de Berlín, Dublín, Munic, Oxford, París, Parma i el Vaticà. Vegeu la bibliografia.

10 La tipografia del títol hebraic de les obres és el de [42, volum I, p. 222].

11 [55, p. 97] afirma que, potser, es tracta d'una sèrie de traduccions de diferents originals reunides en forma d'enciclopèdia; és la primera coneguda en hebreu. I curiosament tracta de les quatre ciències del quadrivi: aritmètica, geometria, astronomia i música. En català, [39].

12 En totes les citacions d'aquesta obra, la paginació correspon a l'edició catalana [38].

13 L'any 1546 Sebastian Munster el va traduir al llatí, [44].

14 [55, p. 101]. Hi ha comentaristes que la consideren una de les obres més notables de Savasorda. Uns altres ho fan amb la de geometria; d'altres, amb la de filosofia, i encara n'hi ha que ho fan amb el llibre revelador.

15 La figura, de domini públic, l'hem manllevada de `https://es.wikipedia.org/wiki/Abraham_Bar_Hiyya`.

V *Luḥot* (*Taules astronòmiques*) [12]. Constitueix un complement de l'obra anterior. Les taules es coneixen com a *taules de Savasorda*. Se'n conserven diferents versions: unes de calculades per al meridià d'Al-Raqqa, i unes altres per al de Tolosa de Llenguadoc, que són les que va seguir segles després Bonet Bonjorn.[16]

VI *Sĕfer ha-'ibbur* (*Llibre de la intercalació del calendari*) [13]. Serveix per determinar les dates del calendari jueu, un problema important per a la litúrgia.

VII *Sefet Hegyón ha-néfeš* (*Meditació de l'ànima*) [10]. És un tractat de filosofia.

VIII *Mĕguil-lat ha-mĕgal-lé* (*Llibre revelador*) [6]. És una exegesi messiànica.[17]

IX *Iggřet ha-astrologiya* (Epístola sobre l'astrologia) [11].

1.2.2 Les traduccions Tenim coneixement d'unes quantes traduccions llatines que va fer amb Plató de Tívoli, com ja hem indicat abans ([55, p. 104]). D'algunes se'n coneix la data, però d'altres, no.

I *De horarum electionibus* (1133), d'Ali ben Àhmad al-Imrani.

II *De iudiciis natiuitatum* (1136), d'Abu Alí al-Jayyat.

III *Iudicia seu propositiones* (1136), d'un al-Mansur desconegut.

IV *Quadripartitum* (1138), de Ptolemeu.

V *Centiloquium* (1138), d'Àhmad ibn Yússuf al-Misrí.

VI *Liber embadorum* (1145), de Bar Ḥiyya.

VII *De motu stellarum*, d'al-Battaní.[18]

VIII *Esfèriques*, de Teodosi de Bitínia.

IX *De revolutionibus natiuitatum*, d'Abu Bakr ibn al-Jasib, conegut com a Albubather.

X *De operibus astrolabiæ*, d'Ibn as-Saffar.

XI *Aeneas de pulsibus et urinis*, probablement d'Hunayn ibn Ishaq.

XII *Alfakini arabici filii questiones geomanticæ*, d'autor desconegut.

Com ja hem indicat, aquesta síntesi posa de manifest que Bar Ḥiyya i Plató de Tívoli coneixien tant obres gregues com àrabs. És possible que les obres gregues les coneguessin a través dels estudis i traduccions fets pels erudits àrabs que els havien precedit, però això és una simple especulació.

2 El *Tractat de geometria i mesurament*

Nosaltres, com ja hem indicat, centrarem l'atenció en l'obra geomètrica *Ḥibbur ha-mĕšiḥá wĕ-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*), traduïda al llatí per Plató de Tívoli com a *Liber embadorum* (1145). I ho farem seguint els set ítems següents:

16 [55, p. 102] [Bibliothèque Nationale, París, MS. No10.901, Adolf Neubauer, «cat. Bodl. Hebr. MSS.» No 2.072,2].
17 Per a l'edició catalana de Millàs, [37]. Una anàlisi es troba a [64].
18 Aquesta obra la va comentar i s'hi va inspirar posteriorment Regiomontanus.

Abans, però, volem insistir, d'una banda, en el caràcter teòric de l'obra. De fet, com queda ben palès en una lectura aplicada del text, molts dels problemes «pràctics» que planteja Bar Ḥiyya són absolutament «teòrics», és a dir, són plantejaments que no es fan necessàriament per la seva utilitat real sinó com un aprofundiment de les possibilitats dels mètodes novells i del potencial amb què permeten resoldre de forma acurada qüestions que, fins aleshores, s'havien plantejat en el si de la geometria.

I, de l'altra, en la dualitat de l'obra. En el capítol segon, Bar Ḥiyya, com ja havien fet els matemàtics mesopotàmics, resol certs problemes geomètrics —aquells que depenen d'allò que estableix el llibre II dels *Elements* d'Euclides—, però ho fa amb una eina nova —l'*àlgebra*. Els problemes que planteja són concrets, és a dir, s'enuncien amb dades numèriques, a l'estil de la matemàtica oriental, però es resolen aplicant les relacions geomètriques prèviament establertes, que són genèriques.

I, en canvi, el capítol tercer, dedicat a les *divisions de les figures geomètriques*, és totalment geomètric. No hi ha cap intent de reduir la resolució a l'àlgebra. En molts casos es recorre a la descomposició tangram de les figures. I, malgrat que, en algunes de les primeres divisions, hi ha dades numèriques, la resolució no es basa, com abans, en les relacions geometricoalgebraiques establertes prèviament.[19] Tampoc no podem dir que sigui un capítol de caire aplicat, malgrat que alguns dels resultats puguin ser útils a la pràctica.

Reblarem aquesta afirmació —el caràcter teòric del llibre— amb dos exemples concrets, un de cada capítol, a §2.4 i, d'una manera irrefutable, a §2.7.

2.1 Una breu reflexió sobre la introducció

2.1.1 Ressons de la introducció A la introducció de l'obra llegim:

> [...] D'aquests passatges hom desprèn que Déu creà el món amb nombre, mesura i pes; així és que l'home ha de procurar amb totes les seves forces assemblar-se al seu Creador, i en això consisteix la glòria del savi.
>
> [...] Que Déu poderós i temible, *sabedor de tot secret*, amb el qual roman la llum, m'ajudi a fi que pugui explicar, segons la Llei i rectitud, el nostre assumpte, car Ell ensenya la ciència a l'home.[20]

19 Estem molt lluny encara d'una geometria cartesiana en la qual els problemes geomètrics es redueixen a l'àlgebra i eviten els recursos geomètrics. Caldrà esperar alguns segles encara, però aquesta geometria es consolidarà gràcies a Viète i, sobretot, a Descartes i Fermat.
20 [5, p. 5 i 8]. L'èmfasi és nostre. Vegeu la nota 12, que ja no tornarem a esmentar.

Aquestes paraules recorden les del frontispici del papir Rhind (∼1800 aC), i alhora hi contrasten:

> Estudi complet i profund de tot el que existeix, penetració de tots els misteris [...] *de tots els secrets*.[21]

Ambdós textos tenen com a objectiu desentrellar «tots els secrets», en el més antic d'una manera deslligada dels déus, en el més recent gràcies a Ell.[22]

No és menor aquest paral·lelisme si tenim present que un dels objectius és la mesura de la Terra. Savasorda diu:

> He vist que la major part dels savis contemporanis de la Terra de França no són instruïts en el mesurament de les terres ni experts en llur partició, per tal com es confonen sovint i divideixen els terrenys entre els hereus consocis amb inexactitud, amb la qual cosa pequen, segons la pertorbació que causen.[23]

Ressonen també aquestes paraules amb l'experiència egípcia. És ben conegut que, segons Heròdot ([48, A.1.2*a*, p. 271]), la paraula *geometria* sorgeix a Egipte dels *mesuradors de cordes*, funcionaris del faraó que tenien la comesa d'amidar les terres després de les inundacions per tal que els impostos que havien de pagar aquells que les conreaven fossin justos (figura 2).[24]

FIGURA 2: Pintura sobre estuc de la tomba tebana de Djeserkare-soneb, del regnat de Tuthmosis IV (1401 aC - 1391 aC).[25]

I, en ambdós textos, s'indica la manera de calcular les àrees del triangle, del quadrilàter —rectangle i trapezi— i del cercle. Són aquests algorismes de

21 [48, p. 12] i [19, p. 122]. L'èmfasi és nostre.
22 Bar Ḥiyya desconeixia el text egipci, però el paral·lelisme palesa la unitat del pensament matemàtic a través dels segles i per això ens ha semblat que valia la pena posar-lo en relleu. Recordem que, a *Lleis*, Plató, referint-se a l'aprenentage dels joves egipcis, diu: «Aquests entreteniments els preparen per saber distribuir bé un camp, conduir i posar un exèrcit en ordre i administrar adequadament els seus propis assumptes casolans.» ([52, p. 540]).
23 [5, p. 5].
24 [48, p. 38 i 92]. En contra de l'afirmació de Gillings segons la qual a l'Egipte antic no hi trobem cap testimoni fefaent de l'existència dels «mesuradors de cordes» ([28, p. 228]), Ralph Abraham afirma que en podem veure una il·lustració a [65, p. 20].
25 Representa els «mesuradors de cordes». Vegeu en línia `http://www.ralph-abraham.org/courses/math181/math181.S96/lectures/lecture.3m/rope.html`.

càlcul els que justifiquen el caràcter aplicat de l'obra, si bé en Bar Ḥiyya l'anàlisi d'aquestes expressions és molt més extensa.

A més, el papir Rhind, a diferència del text de Bar Ḥiyya, planteja i resol, entre altres qüestions que no esmentem, l'equació de primer grau (§2.1.2), una qüestió que no trobem al *Llibre de geometria*. També proporciona, de forma raonada, un valor aproximat de π, però ho fa de manera implícita (§2.1.3). En canvi, el text de l'autor hebreu en dona un altre, diferent de l'egipci, però ho fa de manera explícita (§2.5.2).

2.1.2 L'àlgebra del papir Rhind El papir Rhind, aquest document matemàtic extraordinari,[26] exposa ben clarament què cal fer per resoldre una equació de primer grau, és a dir, una equació del tipus

$$ax = b, \quad ax + b = c, \quad x + ax = b \quad \text{o} \quad x + ax + bx = c.$$ [27]

I, com és habitual en la matemàtica oriental, ho fa amb exemples concrets, si bé els *mètodes* que utilitza *són generals* i de dues maneres diferenciades:

2.1.2.1 El mètode actual ([48, p. 84–85]) Per tal de resoldre $ax = b$ o $ax + b = c$, l'única cosa que cal saber fer és *dividir* b o $c - b$ per a, respectivament.[28] En el primer cas, x és igual a $\frac{b}{a}$ i, en el segon, a $\frac{c-b}{a}$.

2.1.2.2 El mètode de falsa posició ([48, p. 83–84]) Veiem, en concret, el problema 24 del papir Rhind. A la taula 1, fem una lectura del text del papir i l'acompanyem d'una formulació més actual ([48, p. 83]).

Papir Rhind	Formulació actual
Una quantitat i una setena part és 19.	$x + \frac{1}{7}x = 19.$
Suposem que la quantitat és 7.[29]	$7 + \frac{1}{7}7 = 8.$
Multipliquem 7 per 19 dividit per 8.	$7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}.$
19 dividit per 8 dona $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.[30]	$\frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8}$[31] $= 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}.$
Multipliquem 7 per $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.[32]	$7(2+\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 14 + \frac{7}{4} + \frac{7}{8}$ $= 14 + \frac{21}{8} = 16 + \frac{5}{8}$ $= 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}.$
Dona $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.	

Taula 1: El problema 24 del papir Rhind.

26 Es conserva al Museu Britànic i al Museu de Brooklyn.

27 [48, §1.9.1, p. 82–83].

28 Podem afirmar que la *divisió* és el leitmotiv del papir Rhind i es fa usant fraccions de numerador 1. És tècnicament més complexa del que podria semblar. Vegeu [48, §1.8.3, p. 50–54 i §1.8.3, p. 54–58].

29 Fixem-nos que amb aquest valor s'obté una suma entera. És a dir, s'aconsegueix eliminar els denominadors.

30 Com ja hem dit a la nota 28, la matemàtica egípcia solament accepta les fraccions unitàries, és a dir, de numerador 1 i sense repeticions. Però, en aquest cas, tot és fàcil, ja que $19 = 16 + 2 + 1$.

31 Nosaltres acabaríem els càlculs abans de la darrera igualtat.

32 És delicat perquè, com dèiem, en la matemàtica egípcia, no podem usar ni $\frac{7}{4}$ ni $\frac{7}{8}$ ni $\frac{21}{8}$ ni $\frac{5}{8}$. En aquest cas, és fàcil entendre el resultat egipci. Observem que $\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ i $\frac{7}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Si els ajuntem tenim $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

2.1.2.3 Explicació formalitzada del mètode de falsa posició El mètode que segueix l'escriba —i que retroben en altres papirs— es coneix amb el nom de *mètode de falsa posició*. I, per resoldre l'equació $a\,x = b$, funciona així:
Pas 1. Donem a x un valor concret, per exemple, el valor x_0.
Pas 2. Aleshores, $a\,x_0 = b_0$.
2.1. Si $b_0 = b$, el problema queda resolt.
2.2. Si $b_0 \neq b$, x_0 no és la solució correcta i cal corregir x_0 a fi d'obtenir la correcta.
2.2.1. Multipliquem ambdós membres per $\frac{b}{b_0}$.
2.2.2. Obtenim: $b = \frac{b}{b_0} \times b_0 = \frac{b}{b_0} \times (a\,x_0) = a\big(\frac{b}{b_0} \times x_0\big) = a\big(\frac{b \times x_0}{b_0}\big)$.
2.2.3. Per tant, $x = \frac{b}{b_0} \times x_0$ és la solució buscada.[33]

Com ja hem dit abans, la resolució de les equacions de primer grau no es troba a l'obra de Bar Ḥiyya que estem analitzant, però, en canvi, la trobem a l'àlgebra d'al-Hwārizmī i també a la de Fibonacci, en què trobem els dos mètodes que hem descrit suara.

2.1.3 L'àrea del cercle en el papir Rhind Els problemes 41 al 43 del papir Rhind demanen el volum d'un cilindre de diàmetre de la base $d := 9$ unitats i altura $h := 10$ unitats ([48, p. 99–100] o [19, p. 156–159]).

Els càlculs del papir responen a la fórmula

$$\mathcal{V}(= \mathcal{A}_{\text{base}} \times h) = \left(\frac{8}{9}\right)^2 \times d^2 \times h.$$

És a dir, l'àrea de la base —que és un cercle de diàmetre 9 unitats— val $\big(\frac{8}{9}\big)^2 \times d^2 = \big(\frac{16}{9}\big)^2 \times r^2$. Per tant, $\big(\frac{16}{9}\big)^2 = 3.1605$ és una aproximació del nombre que actualment anomenem π, que millora sensiblement el 3, que és el valor que normalment s'usava com a aproximació de π.[34]

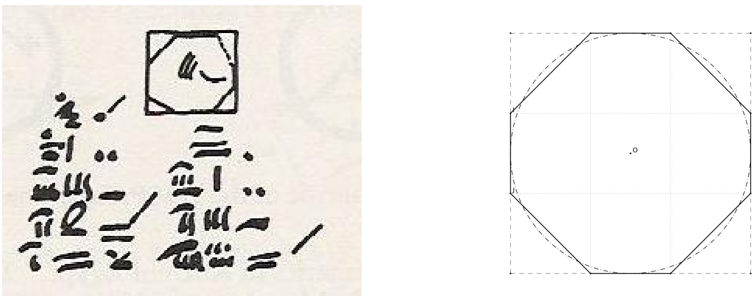


FIGURA 3: El problema 48 del papir Rhind i la interpretació moderna. A la figura de la dreta, l'octàgon ocupa 7/9 de l'àrea total, que és equivalent a 63/81. Com que 63 no és un quadrat perfecte, l'escriba pren l'aproximació 64/81, fet que explica el terme $\big(\frac{8}{9}\big)^2$ que apareix a la fórmula de l'àrea.

33 Com veiem, només cal fer tres càlculs: multiplicar a per x_0, dividir b per b_0 i multiplicar el resultat per x_0. En concret, com hem vist en el problema 24 del papir Rhind, $a = 8/7$, $b = 19$, $x_0 = 7$ i $b_0 = 8$.

34 La determinació del volum d'una pica cilíndrica la trobem als textos jueus 1R 7 23–24 i 2P 4 2: «Després féu la gran pica, de bronze fos. Rodona tot al voltant, mesurava deu colzes de profunditat. Feia trenta colzes de perímetre» ([43, p. 1273 i 1547]). Bar Ḥiyya esmenta diversos textos bíblics en aquesta mateixa línia i els analitza a [7, §192 i 193, p. 132–133].

El problema 48 suggereix el camí seguit per l'escriba per determinar l'aproximació anterior. És, de fet, la primera vegada a la història escrita de la matemàtica —que ha perviscut— que es *quadra el cercle* (figura 3).

2.1.3.1 El càlcul de l'àrea del cercle de diàmetre 9 del papir Rhind Els passos que fa l'escriba són:

1. El cercle de diàmetre 9 colzes l'inscrivim en el quadrat de costat igual al diàmetre.
2. Aquest quadrat el dividim en 9 quadrats de 3 colzes de costat cada un.
3. D'aquest quadrat traiem les quatre puntes formades per triangles rectangles isòsceles de 3 colzes de costat.
4. Queda un octògon de superfície igual a: $S_{\text{octògon}} = 9 \times 9 - 4 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) = 81 - 18 = 63$ colzes^2.
5. Aquesta quantitat no és un quadrat perfecte i l'escriba agafa, com a superfície del cercle de diàmetre 9 colzes, $S_{\text{cercle}} = 64$ colzes^2.
6. El cercle de diàmetre 9 colzes equival al quadrat de 8 colzes.[35]

2.2 Les qüestions teòriques del *Llibre de geometria*

Malgrat que, segons diu Savasorda a la introducció, es tracta d'un text aplicat, aquesta pràctica es basa en qüestions teòriques que cal conèixer bé:

> He vist que la ciència del nombre i la ciència de la mesura segueixen el camí de referència i eren útils en moltes arts i que eren d'ús en la pràctica de la Llei.[36]

> [. . .] No podràs fer aquests càlculs, i mesurar un camp i la quantitat dels seus fruits o el lloguer que correspon als anys restants i veure la proporció que guarden els nombres, si no ets pèrit en la ciència del càlcul.[37]

I, efectivament, el text comença introduint els conceptes que cal tenir ben assolits:

> Tot autor, en un principi, ha d'explicar les paraules que empra a fi que l'estudiós les entengui amb el mateix sentit que el primer.[38]

2.2.1 Les definicions I tot seguit dona un grapat de definicions de termes: angle,[39] segments perpendiculars i paral·lels, diagonal, cercle i circumferència, figures poligonals de tres i quatre costats —que classifica—, i raó de nombres, entre d'altres.[40]

35 Fixem-nos que, efectivament, fem l'àrea del cercle equivalent a la d'un quadrat. Hem *quadrat el cercle*.
36 [5, p. 3–4].
37 [5, p. 4].
38 [5, §1, p. 4].
39 Malgrat que només usa l'angle recte i, com veurem a §2.6, quan vol dividir la circumferència usa les cordes i els arcs en lloc dels angles centrals.
40 Totes aquestes definicions s'inspiren en els *Elements* d'Euclides. La referència [38] hi remet, indicant quin és l'element utilitzat en cada cas.

2.2.2 Les relacions algebraiques Tot seguit, l'autor proporciona relacions algebraiques que estableix en concret però que són vàlides en general i que representa amb figures geomètriques (§27 a §32).[41]

Les *mostracions* de la validesa d'aquestes expressions algebraiques es fan, com en el llibre II dels *Elements* d'Euclides, geomètricament, pel mètode tangram.[42]

Les identitats que obté li permeten resoldre les tres menes d'equacions de segon grau:

$$x^2 = a\,x + b, \quad x^2 + a\,x = b \quad \text{i} \quad x^2 + b = a\,x$$

i molts altres problemes geomètrics que porten a aquesta mena d'equacions.[43]

Paràgrafs del *Llibre de geometria*	Formulació algebraica	Proposició dels *Elements*[44]
§27	$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$	EII 4[45]
§28	$ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$	EII 5
§29	$(a+b)\,b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + b\right)^2$	EII 6
§30	$(a+b)^2 + a^2 = 2a\,(a+b) + b^2$	EII 7
§31	$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$	EII 9
§32	$(a+x)^2 + x^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2} + x\right)^2$	EII 10

Taula 2: Relacions algebraiques del *Llibre de geometria*.

Només en reproduirem una que retrobarem més endavant.

> §28. En tota recta dividida en dues parts iguals i dues de desiguals, la suma del producte de les dues parts desiguals més el quadrat de la meitat de la diferència [de les parts] és igual al quadrat de la part igual.
>
> Així una recta que tingui 12 colzes si la dividim en dues parts iguals de 6 colzes i en altres dues de 8 i 4 colzes, tindrem que el producte de 8 per 4 sumat amb el quadrat de la meitat de la diferència entre 8 i 4, o sigui 4, és 36, que és igual al quadrat de la part igual a 6.[46]

41 Es troben recollides algebraicament al pròleg del *Llibre de geometria* [38, p. VII–VIII] i que recollim a la taula 2 i, com dèiem, són rèpliques dels primers teoremes del llibre II dels *Elements* d'Euclides.

42 És a dir, constatant que dues superfícies rectangulars són equivalents perquè es componen de peces diferents però equivalents. Vegeu [48, p. 212–214] i [50, p. 9].

43 En concret, resol les equacions concretes $x^2 - 4\,x = 21$, $x^2 + 4\,x = 77$ i $x^2 - 4\,x = 3$ ([5, §47, §48 i §49, p. 36–39]).

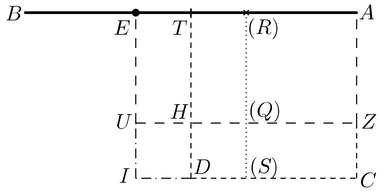
44 [50, taula 1.4, p. 33].

45 Usem el símbol EM n, on M $\in \{$I, II, …, XII, XIII$\}$ i $n \in \mathbb{N}$ per referir-nos a la proposició n del llibre M dels *Elements* d'Euclides.

46 Com es pot veure a la figura geomètrica de Savasorda (figura 4), aquesta igualtat és vàlida. Suposem que una longitud ℓ satisfà: $\ell = a + b = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2}$, amb $b < a$. Aleshores (segons l'ítem segon de la taula 2) $a\,b + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$. La igualtat és immediata si tenim en compte l'ítem primer, $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2\,(a \times b)$.

2.2.2.1 Anàlisi geomètrica Heus ací la demostració (figura 4):[47]

Sigui la recta AB (de 12 colzes). Dividim-la en el punt T en dues parts iguals (de 6 colzes) i després dividim-la en E en dues parts desiguals AE i EB (de manera que el segment AE faci 8 colzes i EB en faci 4). Des del punt E tracem una recta igual a EB, o sigui la recta EU, i quadrarem[48] el segment major pel menor i obtindrem el rectangle $\boxed{}\,AEUZ$; després quadrarem la diferència entre el segment major i la diferència entre el segment major i la meitat, o sigui el segment TE,[49]i obtindrem el quadrat $\square\,HUID$, i aquests dos quadrats sumats són iguals al quadrat $\square\,ATDC$, que és igual al 6 per 6, puix que si restem a la suma anterior el quadrat $\square\,ATHZ$ en resultarà el quadrilàter $\boxed{}\,TEID$, el qual és igual al $\boxed{}\,ZHDC$, segons es desprèn de les figures.[50]



Rectangle $AEUZ$ + Quadrat $HDIU$ = Quadrat $ATDC$.

FIGURA 4: Figura tangram de Savasorda.

El rectangle $\boxed{}\,AEUZ$ equival al gnòmon $\urcorner\,ATH(Q)(S)CA$, atès que el rectangle $\boxed{}\,TEUH$ és igual al $\boxed{}\,Z(Q)(S)C$. Aleshores, el quadrat de costat AT satisfà la igualtat

$$\begin{aligned}\square\,ATDC &= \urcorner\,ATH(Q)(S)CA + \square\,(Q)HD(S)\\ &= \boxed{}\,AEUZ + \square\,HUID.\end{aligned} \tag{1}$$

Fixem-nos que, per conèixer AE i EB, en tenim prou de conèixer UH ja que

$$AE = AT + UH \quad \text{i} \quad EB = BT - UH.$$

2.2.2.2 Síntesi algebraica *Si coneixem, doncs, el segment AB i l'àrea del rectangle $\boxed{}\,AEUZ$ que les parts desiguals determinen, el problema està resolt atès que la igualtat anterior ens permet conèixer $\square\,HUID$ i, de retruc, el seu costat UH.*

Per veure formalment la igualtat (1), fem $AT = TB = \frac{\ell}{2}$, $AE \times EB = b$, $BE = y$ i $AE = x$. Resulta que $UH = \frac{x-y}{2}$ i, per tant,

$$\boxed{}\,ATDC = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = x \times y + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

47 Aquí no cal conèixer els valors dels segments perquè la *demostració* —de fet, és una simple mostració— és geomètrica per tangram.

48 Bar Ḥiyya usa el terme *quadrar* per indicar la determinació d'una àrea rectangular que pot ser quadrada, i el terme *quadrat* per designar quadrats i rectangles. Això fa que el text sigui un pèl confús.

49 El punt T divideix el segment AB per la meitat.

50 [5, §28, p. 18–19]. Hem afegit el segment $(R)(S)$ per fer més entenedora la figura de Bar Ḥiyya. Ho hem fet de manera que $(R)A$ és igual a la part BE. És clar, doncs, que $ET = T(R)$ és igual a la meitat de $E(R)$.

De retruc,

$$\square UHID = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b$$

i

$$UH = \frac{x-y}{2} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b}.$$

Per tant,

$$x = \frac{\ell}{2} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b}, \quad y = \frac{\ell}{2} - \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - b}. \tag{2}$$

Hem obtingut l'expressió algebraica dels valors x i y que resolen el problema algebraicogeomètric $x + y = \ell$ i $x \times y = b$.

2.2.3 Dues aplicacions concretes del cas exposat Vegem ara dues aplicacions concretes que, si bé per l'enunciat podrien semblar diferents, són la mateixa.

§49 *E)* Qüestió tercera. Quin és el quadrat que restant la seva àrea a la longitud dels seus quatre costats dona tres?

Es tracta de resoldre $4y - y^2 = 3$, que podem plantejar, en general, $\ell y - y^2 = b$.

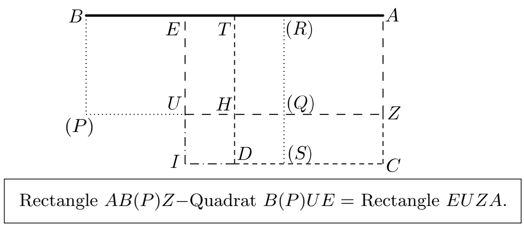


FIGURA 5: La figura de $\ell y - y^2 = b$.

Resolució Fixem-nos que la quantitat $\ell y - y^2$ —que depèn de la dada ℓ, que és la longitud de AB i de la quantitat desconeguda y, que és la de $BE = EU$ (figura 5)— és l'àrea del rectangle $\square AEUZ$,[51] que equival a l'àrea del gnòmon $⅂\ ATH(Q)(S)C = \square ATDC - \square HD(S)(Q)$,[52] que és donada i val b.

Per tant, aplicant la regla pràctica, resulta que el quadrat $\square HUID$ és conegut i, de retruc, també ho és UH, perquè coneixem l'àrea de $ATDC$ i la del gnòmon.[53]

I d'ací tenim el valor de y, com hem vist a (2).

Això és el que fa Bar Ḥiyya en el cas concret, $4y - y^2 = 3$, en què $\ell = 4$ i $b = 3$. La meitat de 4 és 2, al quadrat és 4, menys 3 és 1, que és l'àrea del

51 Òbviament, $ly - y^2 = AB \times B(P) - BE^2$, que és el rectangle $\square AEUZ$.
52 $b := \square AEUZ$ equival al $⅂\ ATH(Q)(S)C$, que, al seu torn, equival a $\square ATDC - \square HD(S)(Q)$. $\square ATDC := (\frac{\ell}{2})$ és conegut. De retruc, $\square HD(S)(Q)$ també.
53 $b = (\frac{\ell}{2})^2 - UH^2$. O sigui, $UH^2 = (\frac{\ell}{2})^2 - b$.

quadrat buscat. Per tant, el costat és 1. I aleshores, $x = 2+1 = 3$ i $y = 2-1 = 1$ ([5, §28, p. 38–39]).

§52 *C)* En un rectangle l'àrea del qual és de 48 colzes i la suma de les seves mides és 14, quant fan aquestes?

Aquest és, precisament, el problema que resol la regla pràctica amb $\ell = 14$ i $b = 48$.[54]

Fem el quadrat de 7 —la meitat de 14—, que és 49. Li sostraiem 48. Dona 1, l'arrel quadrada del qual és 1. Les mides són, doncs, 8 = 7 + 1 i 6 = 7 − 1 ([5, §28, p. 42–43]).

2.2.4 Antecedents d'aquesta mena de problemes Aquesta classe de problemes, que menen a la resolució d'una equació de segon grau, ja l'havien resolt els matemàtics mesopotàmics[55] i ho havien fet d'una manera anàloga a la que empra Bar Ḥiyya. És a dir, usant tangram. Inicialment s'havien plantejat el problema geomètric:

Dividir un segment donat en dues parts de manera que l'àrea del rectangle que determinen és donada.[56]

Com acabem de veure, és el problema de Bar Ḥiyya §52 *C)*.[57]

Aquest problema el trobem implícitament al llibre II dels *Elements* d'Euclides,[58] però en la mentalitat de la geometria grega:

Donat un segment AB i l'àrea d'un quadrat de costat MN, és possible determinar el punt E que divideix el segment AB de manera que el rectangle que les dues parts formen tingui una àrea equivalent a la del quadrat donat.[59]

FIGURA 6: La tauleta BM 13.901.

En el context grec, l'expressió *és possible determinar* implica que la construcció es pot fer *amb regle i compàs* ([50, p. 9–10]).

La solució, força simple, és la que mostra la figura 7.

54 $x + y = 14$ és AB o sigui ℓ i $x \times y = 48$ és el rectangle $AE \times EB$ que és el rectangle $\square AEUZ$.
55 Per exemple, a la tauleta BM 13.901 (figura 6), conservada al Museu Britànic, hi ha 24 problemes que porten a la resolució d'equacions de segon grau. Per a una descripció en termes algebraics, [48, p. 193].
56 [48, §2.7.6, p. 204–206 i §2.7.8, p. 212–214].
57 De fet, el problema que demana trobar les parts x i y que satisfan $x + y = \ell$ i $xy = b$ porta a resoldre l'equació de segon grau $\ell x - x^2 = b$. I, recíprocament, les solucions x i y de l'equació $\ell x - x^2 = b$ satisfan, segons les identitats de Cardano-Viète, $x + y = \ell$ i $xy = b$.
58 Nota 44 (p. 120).
59 [50, EII 5, p. 34 i p. 162–164, i la nota 556, p. 164. I també EVI 27, p. 56–57 i 340–341, i la nota 939, p. 341].

Dimidiem el segment AB. Es pot fer amb regle i compàs [EI 10]. Obtenim el punt T.

Sobre AT fem un quadrat. Es pot fer amb regle i compàs [EI 46]. Obtenim el quadradet $\square\, TDCA$.

Sobre el segment TD, a partir de T portem un segment igual a MN. Es pot fer amb regle i compàs [EI 2]. Obtenim un punt P.

Amb centre P i radi igual a AT tirem una circumferència [P 3] que talla el segment AB pel punt E.

Aquest és el punt buscat.[60]

La construcció mostra ben clar que el segment MN ha de ser més curt que el segment AT, o bé que el quadrat $\square\, TDCA$ ha de ser més gran que el quadrat de costat MN. És a dir, les magnituds han de satisfer un *diorisma*.[61]

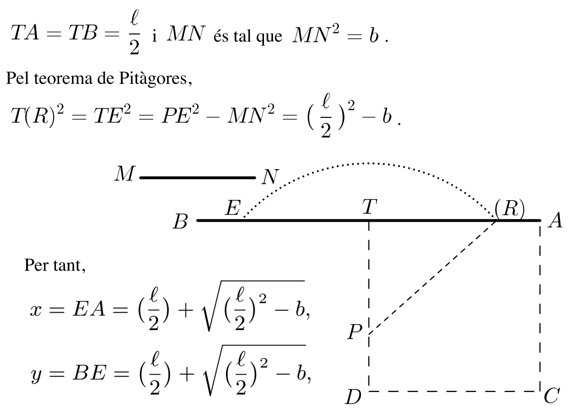


FIGURA 7: Resolució grega del problema.

2.2.5 Parlem del diorisma Bar Ḥiyya és ben conscient de la necessitat que es compleixi aquest diorisma. Diu:

> Sàpigues que si hom et proposa un enunciat, en el qual l'àrea superi el quadrat de la meitat dels costats, és un enunciat fals. És a dir, si hom diu: «Un rectangle l'àrea del qual és 48 i la suma dels costats és 13», sàpigues que és fals, i no has d'esforçar-t'hi, puix que la meitat dels costats és 6 i mig, i el seu quadrat 42 i quart és major que l'àrea.[62]

Malgrat que Bar Ḥiyya diu «no has d'esforçar-t'hi», Cardano, uns quans segles després, a *Ars magna* (1545), planteja dos problemes ben semblants.

Dividir un segment de 10 *colzes en dues parts de manera que l'àrea del rectangle que formen és* 20 *o bé és* 40.

El primer problema dona les parts

$$x = 5 + \sqrt{5} \quad \text{i} \quad y = 5 - \sqrt{5}.$$

És clar que són les solucions correctes, com podem comprovar calculant

$$x + y = (5 + \sqrt{5}) + (5 - \sqrt{5}) = 10.$$
$$x\,y = (5 + \sqrt{5}) \times (5 - \sqrt{5}) = 25 - 5 = 20.$$

60 Per fer-ho, cal usar [50, EI 10, p. 101–192, EI 46, p. 146–148, EI 2, p. 89–90, i P 3, p. 82].
61 En la terminologia heretada dels geòmetres grecs, un *diorisma* és una condició necessària perquè el problema que es planteja tingui solució ([49, p. 271–273] i [50, p. 11–12]).
62 [5, §28, p. 42–43]. Es basa, com hem vist, en §28.

Podem fer el mateix amb l'altre cas i obtindrem:

$$x = 5 + \sqrt{-15} \quad \text{i} \quad y = 5 - \sqrt{-15}.$$

Aleshores diu:

Obviant les tortures mentals, multipliquem $5 + \sqrt{-15}$ i $5 - \sqrt{-15}$. Obtenim $25 - (-15) = 40$.[63]

Toca amb el capciró dels dits els «nombres complexos», però se li escapen. Afirma:

El punt final dels resultats aritmètics és *tan subtil com inútil*.[64]

La raó d'aquesta afirmació és deguda a la situació següent: quin sentit té acceptar una solució numèrica[65] d'un problema que geomètricament no té sentit?

De fet, no es podia anar més lluny sense analitzar la resolució de les equacions cúbiques.[66]

2.2.6 Alguns teoremes i les seves demostracions L'obra de Bar Ḥiyya conté alguns teoremes força rellevants dels *Elements*, molts d'ells, però, sense demostració.

En recollim alguns indicant si van acompanyats de demostració o no.

Els del llibre II, que ja hem esmentat, els enuncia i en fa una *mostració* numèrica com a §28, que hem reproduït a la pàgina 121. No són autèntiques demostracions.

A §33 Bar Ḥiyya enuncia i demostra la propietat de la potència d'un punt intern d'un cercle. En fa una demostració molt curiosa, diferent de la d'Euclides, però correcta.[67]

A §35 proporciona l'enunciat del teorema de Tales en la forma: «Els triangles semblants tenen els costats corresponents proporcionals». No el demostra.[68]

De §36 a §41 aplega els resultats que són la base de l'ús del tangram amb un esbós de demostració.[69]

A §46 dona la demostració del teorema de Pitàgores per tangram seguint EI 47, però l'enuncia en els termes següents:

Com podem determinar la diagonal d'un rectangle de costats coneguts?

A §50 en fa una aplicació concreta, quan els costats tenen 8 i 6 colzes.[70]

---

63 [61, p. 67–69].
64 [61, p. 67–69]. L'èmfasi és nostre.
65 Cardano disposa ja d'una nomenclatura algebraica més àgil que l'estrictament basada en la descripció amb paraules.
66 Això és el que faria Bombelli.
67 [5, §28, p. 23–25]. Correspon a EIII 35 ([50, p. 232–233]).
68 [5, §33, p. 26]. Correspon a EVI, 4 ([50, p. 303]).
69 [5, §36 a §41, p. 27–30]. Corresponen a EI, 35 a 38 ([50, p. 134–141, i la nota 460]).
70 [5, §46 i §50, p. 34–36 i 39–41]. Corresponen a EI 47 ([50, p. 149–151]).

En el cas dels triangles obtusangles dona el teorema de Pitàgores generalitzat sense demostració.[71] De fet, és un «element» de la determinació de l'altura del triangle.[72]

Per acabar, proporciona la fórmula d'Heró per determinar l'àrea S d'un triangle del qual es coneixen els costats a, b, c, en la forma

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \times \frac{-a+b+c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2}}.$$

L'aplica a un cas concret i diu:

> Aquest càlcul es basa en la Geometria, la qual en dona una demostració que no podem ni hem d'exposarací, ja que has vist que el resultat del càlcul és cert.[73]

Aquest resultat no es troba, però, als *Elements* d'Euclides i rep el nom de *fórmula d'Heró*, perquè Heró el demostra a la *Mètrica*. Tanmateix, els matemàtics àrabs l'atribueixen a Arquimedes ([52, p. 167–168]).

2.3 Les taules de dependències i d'influències

Recollim breument en quins autors i obres s'inspira Bar Ḥiyya i en quins va influir.

2.3.1 Euclides i el *Llibre de geometria* Al *Llibre de geometria* Bar Ḥiyya fa referència a Euclides en algunes ocasions, però, molt més importants encara, en els capítols I i II s'inspira en els *Elements*,[74] com palesa la taula següent:

Elements	Definicions	Proposicions
Llibre I	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12	
	15, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 27,	
	28, 29, 30, 31, 32, 33, 34	33, 34,35, 36 37, 38, 41, 47
Llibre II	1	2, 4, 5, 6,7, 9, 10
Llibre III		35
Llibre V	3	
Llibre VI		1, 2, 4, 18
Llibre VII	1, 2 15, 16, 18, 19	
Llibre XI	1, 2	

Taula 3: La influència de l'obra d'Euclides en el *Llibre de geometria*.

71 [5, §69, p. 57–58]. Corresponen a EII 12 ([50, p. 149–151]).
72 En el cas del triangle acutangle també usa aquesta propietat adaptada però de forma implícita ([5, §64*a*, p. 53–54, en particular, p. 54]). Es corresponen amb EII 12 i EII 13 ([50, p. 177–179]).
73 [5, §73, p. 59–60].
74 Algunes definicions i enunciats dels teoremes són idèntics; d'altres estan lleugerament modificats. A l'excel·lent edició catalana [38] s'anoten tots.

I, al llibre III, recull alguns dels problemes de *divisions* d'Euclides,[75] com palesa la taula següent:

Euclides	Bar Ḥiyya[76]	Euclides	Bar Ḥiyya
Divisió 1	§130, p. 96–97	Divisió 16	§138, p. 138 §139, p. 138–139
Divisió 2	§129, p. 96 §131*a*, p. 98–99	Divisió 15	§145, p. 109
Divisió 3	§132, p. 96[77]	Divisió 28	§149, p. 110–111
Divisió 6	§135*a*, p. 102–103	Divisió 29,	§150, p. 111

Taula 4: Divisió de figures.

2.3.2 Al-Hwārizmī i el *Llibre de geometria* L'obra de Savasorda i les seves traduccions posen de manifest que la influència la va rebre del món musulmà. Recordem que l'any en què Plató de Tívoli traduïa el *Hibbūr* de Bar Ḥiyya, Robert de Chester ho feia amb l'*Hissab al'jabr wa-l-muqà-bala*, [1], d'al-Hwārizmī.[78] Hi llegim:

> [...] Allò que és fàcil i més útil en aritmètica, de manera que les persones ho requereixen constantment en casos d'herència, llegats, particions, judicis i comerç, i en tots els seus tractes amb els altres, o quan es tracta de la mesura de les terres, excavació de canals, càlculs geomètrics, i altres objectes de diverses classes i tipus.[79]

Aquest és el tractat d'àlgebra damunt el qual es va bastir l'àlgebra islàmica[80] i l'europea fins a meitat del segle XVIII.

En aquesta exposició usem la paraula *àlgebra* en el sentit de l'obra d'al-Hwārizmī, és a dir, com un càlcul o una algorísmica. Indiquem que, de fet, l'àlgebra s'inicia amb la resolució de les equacions de segon grau, amb l'aparició de radicals en l'àmbit aritmètic i del compàs en el geomètric, com hem indicat a §2.2.4. De fet, les equacions de primer grau, com hem vist a §2.1.2, equivalen a la regla de tres, que, al seu torn, ho són a la proporcionalitat. De manera anàloga, §2.2.2, que hem etiquetat com a «Les relacions algebraiques», conté relacions

75 Adoptem el recull de Woepcke que es troba a [4, p. 30–77], i la paginació corresponent. Val a dir que, com veiem a [38], el recull d'Ofterdinger, [47], és molt més acurat, però no hem pogut consultar-lo.
76 La paginació correspon a [38].
77 Són problemes que demanen dividir el triangle en tres parts iguals, però el d'Euclides ho fa generalitzant la divisió 1, és a dir, amb rectes paral·leles a la base; en canvi, Bar Ḥiyya ho fa determinant el baricentre. No és, doncs, una còpia del d'Euclides.
78 Recordem que els termes *al-jabr* i *wa-l-muqà-bala* signifiquen, respectivament, 'restauració' i 'reducció'. És a dir, la traducció catalana del títol del tractat d'al-Hwārizmī és *Llibre condensat del càlcul per restauració i reducció.*
79 [56, p. 2]. Compareu aquest text amb el de Bar Ḥiyya (p. 116).
80 S'estableixen els algorismes de resolució dels tres tipus d'equacions de segon grau.

numèriques en les quals intervenen quadrats que, en l'àmbit de la geometria, corresponen a àrees.

Però el primer autor que la transmet, en hebreu primer i en llatí després a través de la traducció de Plató de Tívoli, és Bar Ḥiyya.

Al-Hwārizmī també va aportar l'escriptura numèrica posicional que havien adoptat els matemàtics indis ([2]). Però Bar Ḥiyya, pel que sabem, no es va preocupar d'aportar aquesta nova tècnica numèrica. Ben al contrari. Diu:

> Respecte a la ciència dels nombres (Aritmètica), malgrat la seva gran utilitat per les coses del món i de la Llei, com que no és difícil, i la majoria de la gent l'entén poc o molt, no ha calgut que hom n'escrivís un llibre en llengua santa; en canvi, la ciència de la mesura (Geometria) és tan útil com l'Aritmètica, però és difícil i inassequible per a la majoria de la gent, i per això cal explicar-la i posar-la a l'abast. És indispensable per al mesurament de les terres, per a la partició entre els hereus i consocis, de manera que hom no pot portar a cap aquests afers sinó basant-se en aquesta ciència.[81]

Aquesta afirmació solament és certa si els nombres que es manegen són petits. Però, si els volem més grans, l'ús de l'escriptura numèrica alfabètica, com la fenícia, la copta, la grega, la jueva, etc., no és gaire útil i difícilment manejable. Al llibre de Bar Ḥiyya, els nombres són sempre molt petits.

2.3.3 El *Llibre de geometria* i Leonardo da Pisa El segle XIII és el segle en el qual els diversos estats de l'Europa territorial —l'Europa postromana— aconsegueixen estabilitzar-se políticament i inicien un renaixement intel·lectual i cultural fruit d'un doble vessant: el grec i l'àrab. És el segle de prohoms que inicien el canvi de rumb del pensament occidental: Dant, Llull, Tomàs d'Aquino, Bocaccio i Petrarca, entre altres. I també de Leonardo da Pisa, conegut com a Fibonacci, que publicaria obres de matemàtiques d'una gran rellevància que donaven a conèixer el sistema de numeració indoaràbiga que els àrabs havien adaptat de l'indi, i l'àlgebra, totalment de rel aràbiga. Aquesta herència —l'aritmètica i l'algebraica basada en la geometria— la recull el pisà en dues obres, *Liber abaci* i *La practica geometriæ*.[82]

El primer llibre es considera l'inici de la matemàtica occidental llatina. Malgrat que, com a fill del comerciant de Pisa Bonacci, Leonardo l'havia pensat com una eina útil per als comerciants, el text era massa extens per a l'època i no va tenir la difusió que hauria hagut de tenir. A més, estava escrit en llatí, una llengua que coneixien els clergues i els erudits, però no pas els comerciants. Caldria esperar a mitjan segle XV l'aparició de les *aritmètiques comercials* adreçades als comerciants i, per aquesta raó, eren escrites en la llengua vernacla de cada regió. En el cas de Catalunya s'ha conservat *L'arismetica* de Santcliment.[83]

---

81 [5, p. 5]. Vegeu l'observació de la p. XXIII de la introducció.

82 Les recull Boncompagni a [21] i [22].

83 D'aquest text se'n conserva un incunable a la Biblioteca Nacional de Catalunya: sala de reserva ([58, 9-V-20]).

En canvi, *La practica geometriæ* troba la seva inspiració en el text de Bar Ḥiyya, com posa de manifest Curtze tant a la introducció com al llarg de l'obra.[84]

Aquesta afirmació es fonamenta en tres fets:[85] l'estructura del llibre, la dualitat àlgebra/divisions i els problemes concrets que proposa.

2.3.3.1 L'estructura del llibre de Bar Ḥiyya El capítol II de l'obra de Bar Ḥiyya —«Del mesurament de les terres»— s'estructura en cinc parts:[86]

Part primera (del paràgraf §43 al §57), «Del mesurament dels quadrilàters que tenen llurs costats iguals i dels que tenen llurs angles iguals»:

— El quadrat.[87]
— Qüestions relatives al rectangle.[88]
— Qüestions relatives al rombe.[89]

Part segona (del paràgraf §58 al §73), «De la mesura dels triangles»:

A) Triangles equilàters.
B) Triangles isòsceles.
C) Triangles escalens.
D) Triangles rectangles.
E) Triangles obtusangles.[90]

Part tercera (del paràgraf §74 al §94*a*), «Del mesurament dels quadrilàters els costats dels quals no són tots iguals ni els angles no són tots rectes»:

— Classe primera.[91]
— Classe segona.[92]

Part quarta (del paràgraf §95 al §123), «Explicació de la mesura dels terrenys de forma circular completa, o semicircular, o més o menys semicircular».[93]

Part cinquena (del paràgraf §124 al §128), «Del mesurament de les figures que excedeixen els quatre costats».[94]

84 [20]. No cal dir que l'acurada edició catalana [38] ho anota.
85 Hem de tenir present, no obstant això, que els separa un segle: *Ḥibbur ha-měšiḥá wě-ha-tišboret* (1117) i *De practica geometriæ* (1220).
86 Com ja hem indicat, és un llibre algebraic.
87 Hi analitza cinc problemes i el teorema de Pitàgores. Hi trobem les tres equacions de segon grau: $x^2 - 4x = 21$, $x^2 + 4x = 77$ i $4x - x^2 = 3$ [§47, §48 i §49].
88 Hi analitza cinc problemes i novament el teorema de Pitàgores.
89 No hi dona una entrada específica, però hi analitza tres problemes.
90 Hi tracta també l'acutangle i és on proporciona la fórmula d'Heró.
91 Engloba quatre formes diferenciades, *A)*, *B)*, *C)* i *D)*. Les dues darreres formes les especifica amb un títol.
92 Tracta d'un quadrilàter genèric dels quals «no es pot trobar la seva àrea sinó mitjançant els triangles en què el descomponem».
93 Consta de dos apartats, però el podríem classificar en quatre perquè és on introdueix l'estudi de les cordes i de les sagetes i la taula d'arcs i cordes.
94 En aquesta part estudia dos exemples de terrenys inclinats, l'un recte i l'altre circular.

El capítol III (del paràgraf §129 al §151) —«Sobre l'explicació del que es refereix a la divisió de les àrees»[95] consta de les parts següents:

— Procediments per dividir els quadrilàters.[96]
— Divisió dels quadrilàters en dues parts.[97]
— Divisió dels quadrilàters en tres parts.[98]
— Divisió dels quadrilàters en quatre parts.[99]

El capítol IV (del paràgraf §152 al §179)—«Del mesurament dels cossos».[100]

2.3.3.2 L'estructura del llibre de Leonardo da Pisa [101]

Capítol 1 «Mesurament d'àrees de camps rectangulars».

1.1 Àrea de quadrats.
1.2 Àrea de rectangles.

Capítol 3 «Mesurament de tota mena de camps».

3.1 Mesurament de triangles.[102]
3.2 Mesurament de quadrilàters.[103]
3.3 Mesurament del cercle i les seves parts.
3.4 Mesurament de camps sobre una muntanya.

Capítol 4 «Divisió de camps entre diversos propietaris».

4.1 De múltiples costats.
4.2 De cercles.

Capítol 6 «Determinació de les dimensions dels cossos».

6.1 Definicions.
6.2 Piràmides i cons.
6.3 Esferes.

---

95 Com ja hem indicat, és un llibre geomètric.
96 Consta de sis parts.
97 Consta de tres parts.
98 Consta de dues parts.
99 Consta de tres parts i la tercera es refereix a quadrilàters amb costats corbats.
100 Consta de tres classes. D'aquesta part, n'ometrem l'anàlisi comparativa.
101 Aquesta síntesi, molt breu, es basa en la «Taula de continguts» de [31]. Els capítols 2 i 5 fan referència als càlculs d'arrels quadrades i cúbiques, dues qüestions que no apareixen a l'obra de Savasorda.
102 Hi ha el teorema de Pitàgores, els triangles rectangles, acuntangles i obtusangles, i la fórmula d'Heró.
103 Presenta tots els casos: quadrats, rectangles, trapezis, rombes, romboides. En aquest paràgraf proporciona la resolució de les tres equacions de segon grau: (91) $x^2 - 4x = 77$, (93) $4x - x^2 = 3$, (94) $12x = x^2 + 27$.

Llibre de geometria	*La practica geometriæ*	*Llibre de geometria*	*La practica geometriæ*
§43, p. 32–33	1 (1), p. 14	§80, p. 63–64	3 (172), p. 411
§44, p. 35	1 (2), p. 14–15	§81, p. 64	3 (177), p. 144
§45, p. 35	3 (148), p. 131–132	§82, p. 64–65	3 (177), p. 144
§46 *A*), p. 34	3 (86), p. 108	§83, p. 64	3 (177), p. 144
§46 *B*), p. 35–36	3 (88), p. 109	§83, p. 54	3 (177), p. 144
§47 *C*), p. 36–37	3 (91), p. 110–111	§84, p. 65–66	3 (175), p. 143
§48 *D*), p. 37–38	3 (89–90), p. 109–110	§85, p. 66–67	3 (172), p. 141–142
§49 *E*), p. 38–39	3 (93–94), p. 111–112	§86, p. 67	3 (174), p. 142
§50 *A*), p. 38–40	3 (107), p. 116	S 87, p. 67–68	3 (172), p. 141
§51 *B*), p. 41–42	3 (110), p. 118	§88, p. 68	3 (176), p. 143
§52 *C*), p. 42–43	3 (108.1), p. 116–117	§89, p. 68	3 (176), p. 143
§53 *D*), p. 43–44	3 (113), p. 119	§90, p. 68	3 (180), p. 145–146
§54 *E*), p. 44–45	3 (111), p. 118	§91, p. 69	3 (180), p. 145–146
§55 *A*), p. 45–46	3 (148), p. 131–132	§92, p. 69	3 (180), p. 145–146
§56, p. 46	3 (148), p. 131–132	§93, p. 69–70	3 (181), p. 146
§57, p. 46–47	3 (148), p. 131–132	§93*a*, p. 70	3 (181), p. 146
§58, p. 47–48	3 (16), p. 72	§94, p. 70–71	3 (183), p. 147–148
§58*a*), p. 48	3 (16 i 14), p. 71 i 72	§94*a*, p. 71	3 (181), p. 147–148
§59, p. 49	3 (17), p. 72	§95, p. 71–72	3 (188), p. 151
§60, p. 49–50	3 (20), p. 74–75	§95, p. 71–72	3 (191), p. 152–153
§61, p. 40–51	3 (16), p. 72	§96, p. 73–74	3 (192), p. 153–154
§64, p. 52–54	3 (18), p. 73	§97, p. 74–75	3 (192), p. 153–154
§64*a*, p. 54–55	3 (19), p. 74	§99, p. 75	3 (190), p. 152
§67, p. 52–54	3 (7), p. 68	§101, p. 76	3 (190), p. 153–154
§67*a*, p. 54–55	3 (7), p. 69	§103, p. 77	3 (221), p. 163–164
§68, p. 52–54	3 (9), p. 69–70	§108, p. 79	3 (222), p. 164
§68*a*, p. 54–55	3 (27), p. 78	§108, p. 79	3 (222), p. 164
§70, p. 57–58	3 (27), p. 78	§108, p. 79	3 (223), p. 165
§70*a*, p. 57–58	3 (30), p. 80	§111, p. 80	3 (224), p. 165
§73, p. 59–60	3 (31), p. 80–81	§113, p. 81–83	7 (211–219), p. 354–355[104]
§74, p. 60–61	3 (165), p. 137–138	§125, p. 88–89	3 (184), p. 148–149
§76, p. 61–62	3 (169), p. 139	§125*a*, p. 88–89	3 (184), p. 148–149
§78, p. 62–63	3 (170), p. 140	§127, p. 91–93	3 (243), p. 176
§79, p. 63	3 (171), p. 140–141	§128, p. 93–95	3 (245), p. 178

TAULA 5: La influència del *Llibre de geometria* en *La practica geometriæ.*

Amb aquesta exposició queda palesa la dualitat que ja hem comentat abans i que consisteix a tractar en el mateix text problemes que es resolen algebraicament i uns altres geomètricament.

I, finalment, la presentació detallada dels problemes té molt en comú i, fins i tot, alguns es concreten amb les mateixes dades.[105]

104 Tots dos donen una taula d'arcs i cordes, però la metodologia del còmput difereix. Fibonacci recorre a la taula de cordes de Ptolemeu però Bar Ḥiyya, no.

105 Val a dir que, en molts d'ells, es recorre al teorema de Pitàgores i s'usen els de costats 3, 4 i 5, o múltiples i els de costats 5, 12 i 13.

Pel que fa als algebraics, vegeu la taula 5.[106]

Quant a la divisió de figures, recordem la relació d'Archibald de les *divisions* a les obres d'Euclides i de Leonardo ([4, p. 13]). Les divisions de l'obra de Leonardo les donarem d'acord amb la numeració de Favaro ([26]) i la paginació de Boncompagni ([15]) i també d'acord amb la numeració i paginació de Hughes ([31]).

Euclides	Leonardo		Euclides	Leonardo	
Div. 1	5, p. 119	7, p. 19	Div. 2	14, p. 122	12, p. 204
Div. 3	1, p. 110 2, p. 111	2, p. 188 1, p. 186	Div. 4	23, p. 125	24, p. 211
Div. 5	33, p. 134	34, p. 225	Div. 6	16, p. 123	16, p. 206
Div. 7	20, p. 124	21, p. 209	Div. 8	27, p. 128 28, p. 128	27, p. 215 27, p. 215
Div. 9	30, p. 133 31, p. 133	32, p. 223 32, p. 223	Div. 10	18, p. 124	19, p. 208
Div. 11	—	—	Div. 12	28, p. 129	29, p. 217
Div. 13	33, p. 134	—	Div. 14	36, p. 138	37, p. 231
Div. 15	40, p. 140	40, p. 235	Div. 16	37, p. 138	37, p. 232
Div. 17	39, p. 140	41, p. 235	Div. 18	—	—
Div. 19	3, p. 115	3, p. 192	Div. 20	10, p. 121	10, p. 202
Div. 21	—	—	Div. 22	—	—
Div. 23	—	—	Div. 24	—	—
Div. 25	—	—	Div. 26	4, p. 116	4, p. 195
Div. 27	11, p. 121	11, p. 202	Div. 28	57, p. 148	60, p. 252
Div. 29	51, p. 146	54, p. 219	Div. 30	—	—
Div. 31	—	—	Div. 32	29, p. 131	31, p. 221
Div. 33	35, p. 137	32, p. 223	Div. 34	40, p. 140	42, p. 237
Div. 35	—	—	Div. 36	—	—

TAULA 6: Les divisions d'Euclides en l'obra de Leonardo.

Com podem veure, comparant aquesta taula amb la taula 4, el matemàtic de Pisa s'ajusta molt més a *divisions* d'Euclides que no pas l'erudit de Barcelona.

2.4 La dualitat de l'obra geomètrica

Per tal de veure fins a quin punt el text no és només un llibre de geometria aplicada, és a dir, d'utilitat pràctica, sembla adequat i necessari analitzar-ne dos problemes, un d'algebraic i un de geomètric.

106 Usem els capítols de l'edició anglesa de l'obra de Fibonacci [31], més abastable, i així 1[1] significa [1] del capítol 1 i 3[148], [148] del 3. Aquesta obra, tanmateix, recull, molt acuradament, les referències en altres edicions.

2.4.1 Un problema geomètric resolt algebraicament Analitzem el problema concret:

§63. Si es diu: El costat igual d'un triangle isòsceles fa 15 i l'àrea 108, quina serà la longitud de la base i de l'altura?

[1.] Dobla l'àrea. Tindràs 216.

[2.] Resta-ho del quadrat del costat, o sigui 225, i tindràs de resta 9.

[3.] L'arrel quadrada és 3, que és la diferència entre l'altura i la meitat de la base.

[4.] Pren la meitat de 3.

[5.] Eleva-ho al quadrat i serà 2 i $\frac{1}{4}$.

[6.] Suma-ho a l'àrea i tindràs 110 i $\frac{1}{4}$.

[7.] L'arrel quadrada del qual és 10 i $\frac{1}{2}$.

[8.] Si hi sumes la meitat de la diferència 3, tindràs 12, que n'és l'altura.

[9.] I, si ho restes, tindràs la meitat de base ([5, §63, p. 51]).

Com podem veure, Bar Ḥiyya «procedeix» però no explica per què s'ha de procedir així i no d'una altra manera. Tanmateix, conclou el text amb les paraules:

> Aquests principis deriven dels del rectangle que ja coneixem.[107]

Usem termes algebraics per veure que efectivament és un procediment correcte.

— Tenim un triangle isòsceles $\triangle ABC$.

— En coneixem l'àrea S i el costat a.

— Volem saber quant valen la base i l'altura, que anomenem b i h.

Sabem que

$$S = \tfrac{1}{2}\, b \times h,$$ [108]

$$a^2 = \left(\tfrac{b}{2}\right)^2 + h^2.$$ [109]

Ara operem seguint fil per randa els passos de Bar Ḥiyya i obtenim:

107 [5, p. 52].

108 [5, §64, p. 52]. Aplica la fórmula que determina l'àrea d'un triangle del qual coneixem la base i l'altura ([5, §58, p. 47]).

109 Teorema de Pitàgores a [5, §61, p. 50]. De fet, Bar Ḥiyya diu: $h^2 = a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

	Símbols actuals	Càlculs de Bar Ḥiyya
1	$2S = b \times h$	$2 \times 108 = 216$
2	$a^2 - 2S = \left\{\begin{array}{l} (\frac{b}{2})^2 + h^2 - b \times h \\ = (h - \frac{b}{2})^2 \end{array}\right\}$[110]	$225 - 216 = 9$
3	$\sqrt{a^2 - 2S} = h - \frac{b}{2}$	$\sqrt{9} = 3$
4	$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2S} = \frac{h}{2} - \frac{b}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{9} = 1 + \frac{1}{2}$
5	$(\frac{h}{2} - \frac{b}{4})^2$	$(1 + \frac{1}{2})^2 = 2 + \frac{1}{4}$
6	$S + (\frac{h}{2} - \frac{b}{4})^2 = (\frac{h}{2} + \frac{b}{4})^2$[111]	$108 + 2 + \frac{1}{4} = 110 + \frac{1}{4}$
7	$\sqrt{S + (\frac{h}{2} - \frac{b}{4})^2} = \frac{h}{2} + \frac{b}{4}$	$\sqrt{110 + \frac{1}{4}} = 10 + \frac{1}{2}$
8	$(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}) + (\frac{h}{2} - \frac{b}{4})[= h]$	$(10 + \frac{1}{2}) + (1 + \frac{1}{2}) = 12$
9	$(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}) - (\frac{h}{2} - \frac{b}{4})[= \frac{b}{2}]$	$(10 + \frac{1}{2}) - (1 + \frac{1}{2}) = 9$

Taula 7: Els càlculs de Bar Ḥiyya formalitzats.

Creiem que amb aquest exemple queda aclarida la manera com Bar Ḥiyya usa les igualtats que ha establert al capítol primer i que hem resumit a la taula 2.

2.4.2 Un problema geomètric —una divisió— resolt per tangram Veiem ara la penúltima divisió que ofereix Bar Ḥiyya (figura 8):

§149 Considerem $\lhd ABC$, que s'anomena «figura trencada».
La volem dividir en dues parts iguals.

[1.] Tracem la recta AC i la dividim per la meitat E.[112]

[2.] Per aquest punt tracem la perpendicular fins a trobar l'arc AC en Z.[113]

[3.] Unim E amb B i tenim les dues parts buscades, dividides per la recta BEZ, o bé per les rectes EZ i EB.[114]

Suposem que volem dividir el cas escalè amb un segment rectilini i no pas amb un segment trencat:

§150 Es pot dividir el sector circular d'una altra manera.

110 [5, §27, p. 17–18]. Correspon fil per randa a EII 4 ([50, p. 160–162]).
111 [5, p. 52]. Usa [5, §28, p. 18], que correspon a EII 5 ([50, p. 33, i 162–163]).
112 Es pot fer amb regle i compàs: P 1 i EI 10 ([50, p. 82 i 101–102]).
113 Es pot fer amb regle i compàs: EI 11 i P 2 ([50, p. 102–103 i 82]).
114 Bar Ḥiyya distingeix el cas isòsceles, en el qual *AB* i *BC* són iguals, i el cas escalè, en el qual *AB* i *BC* són diferents ([5, p. 110–111]). La certesa d'aquesta afirmació es basa en EI 38 —que correspon a l'ítem §37 ([5, p. 17–18])—, i en EIII 30, que Bar Ḥiyya no esmenta ([50, p. 137–138 i 223–224]).

[1.] Unim B i Z [P 1] (primer postulat).

[2.] La dita recta trenca a AC per T [P 5].

[3.] Cercarem la relació entre TE i AE.

[4.] I prendrem a BC segons l'anterior proporció o sigui fins a H [Evi 10] ([50, p. 316–317]).

[5.] Unirem Z i H [P 1].

[6.] I tindrem les dues parts iguals cercades, o sigui, $\triangleleft ZHC$ i ⌓$BHZA$.

La prova d'això és la següent:

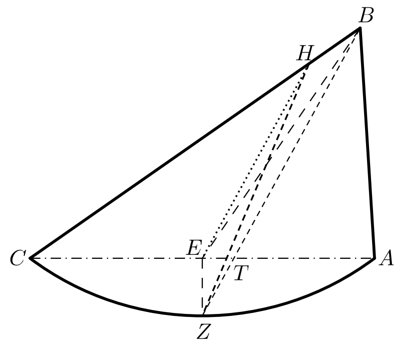


FIGURA 8

Els triangles $\triangle BHZ$ i $\triangle ZHE$ estan entre segments paral·lels,[115] i tenen la mateixa base.

Per tant, són iguals ([5, §150, p. 111]).

En definitiva, el trapezi corbat ⌓$BHZA$ equival al trapezi corbat ⌓$BEZA$ menys el triangle $\triangle BEZ$ més el $\triangle BHZ$ i tot plegat equival a una meitat del sector $\triangleleft BCZA$.[116]

Fixem-nos en l'enorme diferència que hi ha entre aquest problema i l'anterior. Aquí les dimensions concretes de les figures no intervenen per a res. Es fan servir peces geomètriques equivalents a fi d'obtenir àrees equivalents de les quals desconeixem el valor.

És precisament això el que volem remarcar perquè posa de manifest dos fets que ja hem indicat abans. El text de Bar Ḥiyya no és només un text de geometria aplicada —numèrica—, sinó que conté algunes qüestions de geometria teòrica. No hi ha, doncs, una unitat de criteri en aquesta obra tan primerenca. Conté una primera part que, basant-se en resultats geomètrics molt concrets, resol problemes geomètrics numèricament usant les equacions de segon grau. Els algorismes emprats són absolutament generals. I una altra part que, usant tangram, permet mostrar de quina manera podem dividir certes figures geomètriques en parts prefixades.

2.5 Els lligams entre l'àrea del cercle i la longitud de la circumferència

2.5.1 Antecedents Com hem vist abans, al papir Rhind es planteja la «quadratura del cercle» i és el text més antic de què disposem que tracta aquesta qüestió. També va preocupar els matemàtics grecs ([48, §1.10.2, p. 99–100]).

115 Bar Ḥiyya no estableix la proposició que diu que, atès que AH és a CE com HB a TA, els segments HB i BZ són paral·lels [Evi 2, ([50, p. 304–305])].

116 De fet, usa les Nc 2 i Nc 3 dels *Elements* d'Euclides que no esmenta ([50, p. 85]). A $\triangleleft BZ$ hi sumem, d'una banda, el triangle $\triangle BEZ$ i, d'una altra, el $\triangle BHZ$, que, com hem indicat abans, són equivalents.

Finalment, al segle III, Euclides demostra un resultat que ja era conegut per Hipòcrates de Quios.[117]

Els cercles són com els quadrats dels radis respectius (EXII 2, [51, p. 488–494]).

Quedaven pendents les respostes a aquestes dues preguntes:

1. Són proporcionals la longitud de la circumferència del cercle i el radi?
2. Aquesta relació té alguna mena de lligam amb la que els cercles tenen amb els quadrats dels radis?

El primer matemàtic que respondria aquestes dues preguntes és Arquimedes. Va establir que:

> El cercle és equivalent al triangle rectangle de catets el radi del cercle i la longitud de la circumferència.[118]

I encara, en la mateixa monografia, estableix que

$$3\,\frac{10}{71} < \frac{\mathcal{L}}{d} < 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7},$$

en què $\mathcal{L}$ és la longitud de la circumferència i d el seu diàmetre.

2.5.2 El cercle i la circumferència al llibre de Bar Ḥiyya Al *Llibre de geometria* de Bar Ḥiyya hi trobem aquests dos resultats en la mateixa línia que en Arquimedes.

En concret, a la quarta part del capítol II, que té el títol «Explicació de la mesura dels terrenys de forma circular completa, o semicircular, o més o menys semicircular», Bar Ḥiyya es preocupa d'aquestes qüestions. Vegem algunes de les seves aportacions.

D'antuvi explica com aconseguir la longitud de la circumferència i l'àrea d'un cercle.

> §95. Es pot saber l'àrea del cercle si es coneix la seva diagonal o diàmetre, en àrab anomenat *cotr*;[119] multiplica el diàmetre per 3 i $\frac{1}{7}$ i tindràs la longitud de la circumferència; multiplica després la semicircumferència per la meitat del diàmetre i tindràs l'àrea del cercle.[120]

117 Hipòcrates de Quios (Quios [Grècia], segle IV aC), geòmetra. Va establir la «quadratura de tres lúnules» i la reducció de la «duplicació del cub» a la «determinació de dues mitjanes proporcionals» ([48, §3.4.7, p. 238–249]).
118 Estableix que $S = r \times \mathcal{L}/2$ ([52, §A.8.1 [MC 1], p. 449–450]).
119 De la radical ctr.
120 [5, p. 71–72].

En símbols actuals, si d i r designen el diàmetre i el radi del cercle, i $\mathcal{L}_{\text{circumferència}}$ i S_{cercle} que abreugem $\mathcal{L}$ i S la longitud de la circumferència i l'àrea del cercle, tenim que

$$\mathcal{L} = \left(3 + \frac{1}{7}\right) d, \quad S = \frac{1}{2}\mathcal{L} \times \frac{1}{2} d = \left(3 + \frac{1}{7}\right) r^2.$$[121]

Tot seguit en dona la demostració següent:

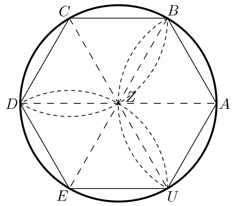


FIGURA 9

> La demostració que la longitud de la circumferència és tres vegades i $\frac{1}{7}$ el diàmetre ens la donarà la figura adjunta, en la qual hi ha la circumferència $ABCDEU$;[122] el diàmetre és AZD; ara bé, la recta AB és igual a AU i AZ, puix que tots tres són radis del cercle BZU, el centre del qual és A; de la mateixa manera, en el cercle BZD, seran iguals CD i CB, i el mateix trobaríem respecte de DE i EU; així és que les sis rectes que toquen la circumferència en sis punts són iguals al radi, i que, per tant, totes juntes equivalen a tres diàmetres. L'arc AB és major que la corda respectiva en una part alíquota, la que computaren els calculadors, i sumant les dels tres arcs trobaren que és igual a $\frac{1}{7}$ del diàmetre.[123]

2.5.3 Una demostració molt interessant Molt més remarcable és el lligam que estableix entre l'àrea del cercle i el triangle isòsceles que té de base la longitud de la circumferència i d'altura el radi. Malgrat que s'assembla molt a la d'Arquimedes —ambdues redueixen l'àrea a la d'un triangle de base la longitud de la circumferència i d'altura el radi—, de fet, són molt diferents.

El siracusà ho fa per doble reducció a l'absurd i es basa en el que actualment s'anomena el *postulat d'Arquimedes* —que s'oposa a l'atomisme— i en el mètode d'exhaustió eudoxià ([52, §A.8.3 [MC 3] p. 451–455]).

En canvi, la demostració de Savasorda es basa en la «proporcionalitat de les longituds de les circumferències i els radis respectius». És atomista (figura 10).[124]

La demostració de l'àrea del cercle és: si s'obre la superfície del cercle per un costat[125] i s'aplanen totes les circumferències concèntriques de l'interior fins al centre, es convertiran en rectes que aniran disminuint successivament fins a un punt que serà el centre, de manera que en resultarà un triangle, l'àrea del qual serà la meitat de la base —o sigui la circumferència—, per l'altura, o sigui el radi.[126]

121 [52, §A.8.3 [MC 3], p. 451].
122 No és realment una demostració.
123 [5, p. 72].
124 És una demostració atomista en la línia de la «paradoxa» de Demòcrit ([48, §3.4.10, p. 253–255]). Vegeu la demostració de Kepler, [32, edició francesa, p. 14–17].
125 De fet, per un radi.
126 [5, p. 72–73]. Tot seguit ho aplica a un cercle de diàmetre 14. El multiplica per $3\frac{1}{7}$. Obté la circumferència. Multiplica la meitat del diàmetre, 7, per la meitat de la circumferència, 22. Obté 154, que és l'àrea del cercle. Nota: hi ha un error a [38, p. 73].

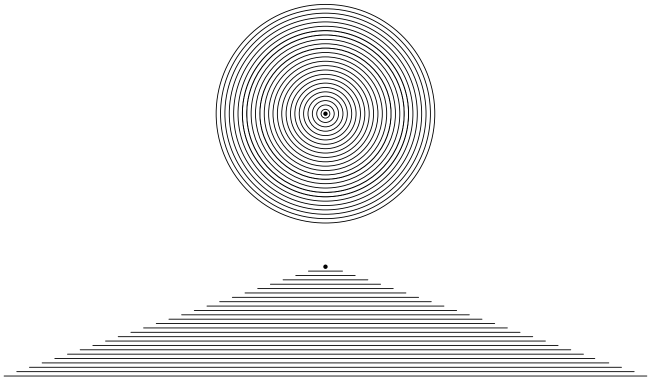


FIGURA 10

2.5.4 Relacions entre l'àrea del cercle, la longitud de la circumferència i el diàmetre Aquesta qüestió preocupa Bar Ḥiyya perquè, a §96, diu:

> Hi ha un altre procediment per trobar l'àrea del cercle en el qual no cal conèixer la circumferència, i és elevar al quadrat el diàmetre i restar-ne la setena part i la catorzena part i la resta serà l'àrea.[127]

I en dona una demostració que val la pena que refem ([5, p. 73–74]).

1. Considerem el cercle $ABCD$.
2. Quadrem el diàmetre, $\square AHZC$.
3. Els semicercles HDZ i ADC són iguals.
4. El cercle és menor que el quadrat en dos triangles corbs ADH i CDZ.
5. Fem els càlculs següents.
   - 5.1. L'àrea del quadrat $AHZC := AC^2$ és $14^2 = 196$.
   - 5.2. L'àrea del triangle $\triangle ZDC$ és $\frac{1}{4}196 = 49$.
   - 5.3. L'àrea del sector circular $\lhd DTC$ és igual a $\frac{1}{2}DC \times DT$ és $\frac{1}{8}(3+\frac{1}{7}) \times 14 \times 7 = \frac{77}{2} = 38 + \frac{1}{2}$.[128]
   - 5.4. DC és igual a $\sqrt{7^2 + 7^2} = 9 + \frac{9}{10}$.[129]

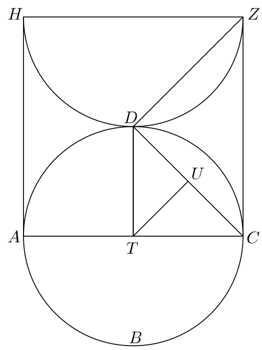


FIGURA 11

127 [5, p. 73]. «Així, en el cas anterior, el quadrat del diàmetre és 196; restar-ne el $\frac{1}{7}$ i un $\frac{1}{2}$ del $\frac{1}{7}$, o sigui 42, restarà 154, que és l'àrea ja coneguda». Aquesta expressió la trobem també a [46, p. 3 *a*.].

128 Aquest càlcul és curiós, atès que indirectament diu que $S_{\text{cercle}} = (3+\frac{1}{7})49 = 147 + 7 = 154$. Però $156 = 196 - 42 = 196 - (\frac{1}{7} + \frac{1}{14})196$. I hem acabat la demostració. Però no ho fa així.

129 Aquí, d'alguna manera, proporciona el valor de $\sqrt{2}$, atès que $\sqrt{7^2+7^2} = 7\sqrt{2} = 9 + \frac{9}{10}$. Per tant, $\sqrt{2} = \frac{1}{7}(9 + \frac{9}{10}) = \frac{99}{70} = 1.414\,2857$.

5.5. $DU = CU = \frac{1}{2}\sqrt{98} = 4 + \frac{9}{10} + \frac{1}{20}$.

5.6. $TU^2 = TC^2 - CU^2 = 7^2 - 24,51 = 25,49 \simeq 25$.[130] D'on TU val 5.

5.7. L'àrea del triangle $\triangle\, TDC = \frac{1}{2} TU \times DC = 5\,(4 + \frac{1}{2} + \frac{9}{20}) = 24 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sim 24 + \frac{1}{2}$.

5.8. Aleshores, $\frown DC = \triangle\, TDC - \triangle\, TDC = 38 + \frac{1}{2} - (24 + \frac{1}{2}) = 14$.

5.9. Per tant, $\frown DC + \frown DZ = 14 + 14 = 28$.

5.10. En definitiva, $\triangle DCZ - (\frown DC + \frown DZ) = 49 - 28 = 21$. I el doble fan 24.

5.11. $24 = (\frac{1}{7} + \frac{1}{14})196 = 28 + 14$.[131]

I encara proporciona quatre resultats més que val la pena fer notar:

§97. Però els qui aprofundeixen en això, i són els astrònoms, diuen que la raó de la circumferència al diàmetre és de 3 i $\frac{8\frac{1}{2}}{60}$ del diàmetre,[132] així és que, segons ells, l'àrea del cercle es trobarà, restant del quadrat del diàmetre la seva quarta part menys 8 parts i mitja de 60 compreses en la dita quarta part anterior.[133]

§98. Si es coneix l'àrea del cercle i es vol saber la longitud del diàmetre, se sumaran a l'àrea les seves $\frac{3}{11}$ parts, i obtindràs el quadrat del diàmetre.[134]

§99. Si sabem la circumferència i volem conèixer el diàmetre, prendrem cinc parts de la meitat,[135] o bé es dividirà la circumferència per $3 + \frac{1}{7}$ i es trobarà el diàmetre.[136]

§100. Si es coneix l'àrea del cercle i es vol conèixer la circumferència, es sumarà a l'àrea $\frac{3}{11}$ parts i multiplicant l'arrel de la suma per 3 i $\frac{1}{7}$, tindrem la circumferència.[137]

En terminologia actual, fa això:

§97. $\frac{\mathcal{L}}{d} = 3 + \frac{8+\frac{1}{2}}{60} = 3 + \frac{17}{120}$ i és clar que $\frac{17}{120} \simeq \frac{17}{119} = \frac{1}{7}$, que és el valor que havia donat a §95.

En aquest cas afegeix que S es troba fent el càlcul següent:

$$d^2 - \left(\frac{d^2}{4} - \frac{8 + \frac{1}{2}}{60}\,\frac{d^2}{4}\right).$$ [138]

130 El quadrat de $4 + \frac{9}{10} + \frac{1}{20}$ és $16 + \frac{81}{100} + \frac{1}{400} + \frac{72}{10} + \frac{8}{20} + \frac{18}{200} = 16 + \frac{324}{400} + \frac{1}{400} + \frac{2880}{400} + \frac{160}{400} + \frac{36}{400} = 16 + \frac{3401}{400} = 16 + 8.52 = 24.52 \sim 25$.

131 Ha establert, doncs, que $S_{\text{cercle}} = 4\,r^2 - (\frac{4r^2}{7} + \frac{ar^2}{14}) = \frac{44}{14} r^2 = (3 + \frac{1}{7})r^2$, com volia.

132 Fixem-nos que 3 i $\frac{8\frac{1}{2}}{60}$ és 3 i $\frac{17}{120}$ i $\frac{17}{120} \sim \frac{1}{119} = \frac{1}{7}$.

133 [5, p. 74].

134 [5, p. 75].

135 És erroni. Ha de dir «cinc vuitenes parts».

136 [5, p. 75].

137 [5, p. 75].

138 I això és cert, atès que, de $\frac{\mathcal{L}}{d} = 3 + \frac{8+\frac{1}{2}}{60} = 3 + \frac{17}{120}$, en resulta que $\mathcal{L} = (3 + \frac{17}{120})\,d$ i, per tant, $S = (3 + \frac{17}{120})r^2 = \frac{1}{4}(3 + \frac{17}{120})\,d^2 = (\frac{3}{4} + \frac{\frac{17}{4}}{120})\,d^2 = (\frac{3}{4} + \frac{177}{480})\,d^2 = d^2 - (\frac{1}{4}\,d^2 - \frac{8+\frac{1}{2}}{60}\,\frac{1}{4}\,d^2)$.

§98. Es coneix $S = \frac{3+\frac{1}{7}}{4}\, d^2 = \frac{22}{28}\, d^2 = \frac{11}{14}\, d^2$. O sigui, $d^2 = \frac{14}{11}\, S = (1 + \frac{3}{11})S$. Finalment, $d = \sqrt{S + \frac{3}{11}\, S}$.

§99. Coneixem la circumferència $\mathcal{L} = (3 + \frac{1}{7})\, d$. Per tant, $d = \frac{\mathcal{L}}{3+\frac{1}{7}} = \frac{7}{22}\mathcal{L} = 0,318\,\mathcal{L}$.[139]

§100. Coneixem l'àrea S del cercle i busquem la longitud $\mathcal{L}$ de la circumferència.[140]

Aquest resultat l'estén a l'el·lipse i dona el resultat que trobem a la proposició 5 de *Dels conoides i els esferoides* d'Arquimedes ([52, p. 416–418] o [36, p. 48–49]). Compara l'àrea de l'el·lipse d'eixos a el gran i b el petit amb la del cercle de radi a.[141] Diu que l'àrea és igual a la del rectangle de costats a i b menys la seva $\frac{1}{7} + \frac{1}{14}$ part.[142]

Veiem, doncs, que aquesta és una qüestió que preocupava Bar Ḥiyya i a la qual dedica molta atenció. I, com dèiem, encara va més lluny.

2.5.5 L'àrea d'una el·lipse A l'inici de §112, Bar Ḥiyya diu ([5, p. 80]):

> Si el camp no és de forma circular sinó ovalada talment com seccions del cilindre, no tallades paral·lelament a la base, tindrem en la dita figura dos diàmetres, un d'ells major que l'altre, i prendrem llurs meitats i les multiplicarem una per l'altra i restarem del producte la $\frac{1}{7}$ i la $\frac{1}{14}$ tal com férem amb el cercle, i la resta serà l'àrea.

2.6 La taula de cordes i arcs

2.6.1 Antecedents Com ja hem dit abans, Bar Ḥiyya no introdueix cap angle que no sigui un angle recte. Una raó podria ser que, a diferència dels astrònoms, els agrimensors no disposaven d'estris adequats per mesurar angles i la seva obra anava dirigida a aquests darrers. En canvi, introdueix les cordes, que corresponen als angles centrals —és a dir, els costats dels polígons regulars.

Als matemàtics egipcis ja els havia preocupat la determinació del pendent d'un angle, l'*sqt*; de fet, és un concepte que s'apropa molt a la cotangent trigonomètrica ([48, §1.10.5, p. 109, i A.7, p. 298]). I els geòmetres astrònoms grecs havien confegit «taules de cordes». Ja les troben en l'obra perduda d'Hiparc i les consolida definitivament Claudi Ptolemeu a la *Sintaxi matemàtica*.[143]

Els matemàtics àrabs, en canvi, van introduir el concepte *sinus* entès com a línia, i, indirectament, el nom.[144]

---

139 Observem que $\frac{5}{8}\frac{\mathcal{L}}{2} = \frac{5}{16}\mathcal{L} = 0.3125\,\mathcal{L}$. O bé, $\frac{5}{8}\frac{\mathcal{L}}{2} = \frac{5}{16}(3 + \frac{1}{7})\, d = \frac{5\times 22}{7\times 16}\, d = \frac{110}{112}\, d = 0.982\, d \sim d$.

140 Per §98, sabem que $d = \sqrt{S + \frac{3}{11}S}$ i, per §95, que $\mathcal{L} = (3 + \frac{1}{7})\, d$, i això és el que cal fer.

141 Arquimedes diu que $S_{\text{el·lipse d'eixos } a \text{ i } b,\text{ amb } b<a} = \frac{b}{a} S_{\text{cercle de radi } a} [= \pi\, a\, b]$.

142 $S_{\text{el·lipse}} = \pi\, a\, b$, on a i b són els semieixos, amb $b < a$ (§112, [5, p. 80–81]).

143 [54, p. 36–40]. Vegeu també [4, nota 111, p. 56].

144 Sembla que el terme *sinus* prové d'una mala traducció d'un text àrab ([16, edició castellana,

2.6.2 La taula de cordes de Bar Ḥiyya I Bar Ḥiyya recull aquest guant quan diu:

> Els astrònoms s'aplicaren a aquest punt per raó de llur ciència i jo he traslladat aquí aquest càlcul, el que he cregut convenient. Exposo una taula dividida en 28 parts, puix que així he dividit el diàmetre, i en correspondència a això, la circumferència l'he dividida en 88 parts; en la dita taula hi ha quatre columnes; en la 1a columna van escrites les 28 parts i en les altres tres van els arcs corresponents a les cordes des d'1 a 28; en la 2a columna van les parts, en la 3a els minuts i en la 4a els segons,[145] com es veu a la taula 8.

Òbviament, com ja hem indicat abans (§95), si un cercle té un diàmetre més gran o més petit que el que hem dividit en 28 parts, les cordes que corresponen a les parts d'aquest nou diàmetre són proporcionals a l'inicial i, de retruc, les parts d'arcs es conserven.

Això fa que la taula de cordes sigui la mateixa amb independència del cercle sempre que es faci en referència a la mida de les parts del diàmetre corresponent.

Aleshores utilitza la potència d'un punt interior d'un cercle (§33) i el lligam de les parts iguals i desiguals d'un segment (§28)[146] per lligar la sageta amb la corda i el diàmetre. En concret, si d designa el diàmetre del cercle, c_α la corda i s_α la sageta de l'arc α, tenim:

$$s_\alpha = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c_\alpha}{2}\right)^2}.$$ [147]

I, de retruc,

$$c_\alpha = 2\sqrt{(d - s_\alpha)\, s_\alpha}. \qquad (3)$$

2.6.3 Explicació de la taula de cordes de Bar Ḥiyya D'entrada recordem que el lligam que hi ha entre una corda d'un angle i el seu sinus és:

$$\frac{c}{2} := \text{corda}\ \alpha = r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Aleshores, atès que Bar Ḥiyya divideix el diàmetre d en 28 parts de mida $a = \frac{d}{28}$ i la circumferència en 88,[148] mitja circumferència en té 44.

---

p. 325–326]).

145 És curiós observar que les parts fraccionàries de la corda les dona en el llenguatge sexagesimal mesopotàmic, de fraccions de seixanta i de seixanta de seixanta.

146 Recordem el que diu: «Si dues cordes d'un cercle es tallen en un punt, dividint-les en dues parts, els rectangles que formen les part de l'un i l'altre són equivalents».

147 Podia haver utilitzat el teorema de Pitàgores [§50, p. 125], que sembla més simple.

148 Són les parts que pertoquen si atenem que la circumferència val $3 + \frac{1}{7}$ del diàmetre; és a dir, $28 \times 3 + 4 = 84 + 4 = 88$.

Ara considera cordes commensurables amb a, és a dir, les cordes c_1, c_2, $c_3, \ldots, c_{14}, \ldots, \ldots, c_{24}, \ldots, \ldots, c_{28}$ de longituds $a, 2a, 3a, \ldots, 14a, \ldots, 24a, \ldots$, $28a = d$. A la figura 12 hi hem representat les cordes c_6 i c_{24}.

Divisions de la corda	Divisions de l'arc		
	Parts	Minuts	Segons
1	1		3
2	2		8
3	3		25
4	4		55
5	5	1	25
6	6	2	57
7	7	4	42
8	8	7	1
9	9	9	59
10	10	13	42
11	11	18	33
12	12	24	23
13	13	31	29
14	14	40	
15	15	50	10
16	17	2	16
17	18	16	16
18	19	33	29
19	20	53	29
20	22	17	10
21	22	45	19
22	25	19	4
23	27		1
24	28	50	36
25	30	54	52
26	33	20	55
27	36	29	29
28	44[149]		

TAULA 8: Taula de cordes i d'arcs de Bar Ḥiyya.

Aleshores, usant els triangles rectangles $\triangle OMA$ o $\triangle OM'A$, resulta que

$$\frac{1}{2}c_i = r \sin \frac{\alpha_i}{2}, \quad \text{per a } i = 6, 24.$$

149 [5, p. 81–83].

O sigui,

$$c_i = d \sin \frac{\alpha_i}{2} = 28 \quad a \quad \sin \frac{\alpha_i}{2},$$

que s'obté directament dels triangles rectangles $\triangle ACB$ o $\triangle AC'B$.[150]

Ara bé, Bar Ḥiyya no dona el valor de $\sin \frac{\alpha_i}{2} = \frac{c_i}{28a}$, sinó que dona el valor de l'arc que li correspon i l'expressa amb decimals sexagesimals, seguint l'escriptura mesopotàmica ([48, p. 138]) i següents. És precisament el que hi ha a la taula 8 (pàgina 142).

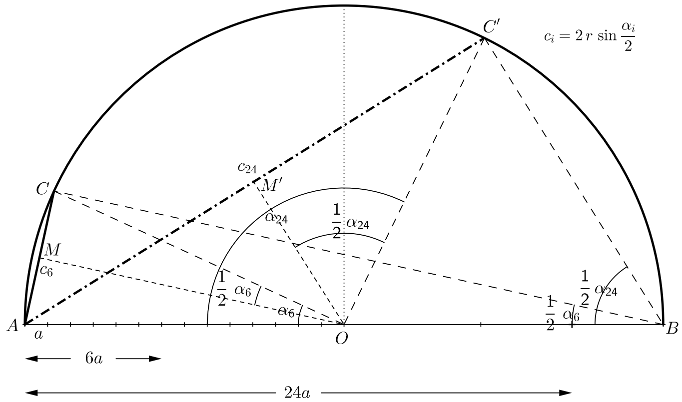


FIGURA 12: Representació gràfica de c_6 (AC) i de C_{24} (AC').

Recordem que, en trigonometria, el radi es pren igual a 1 i aleshores la longitud de la semicircumferència és $\pi\, r$ i li correspon un angle de 80°. En canvi, com ja hem dit, Bar Ḥiyya agafa el radi de 14 parts i, a mitja circumferència, n'hi corresponen 44. És clar que, per passar dels angles α, que corresponen als sinus, als arcs de Bar Ḥiyya cal fer la simple operació arc $= \frac{44}{180}\alpha$.[151]

Un quart de cercle abraça 90° i, en canvi, en l'obra de Bar Ḥiyya, un quart de circumferència consta de 22 parts. Això fa que l'angle central de cada part sigui $\frac{90}{22} = \frac{45}{11} = 4^\circ \frac{1}{11} = 4^\circ\, 5'\, 27$.

Tanmateix, Bar Ḥiyya no dona cap explicació de com ha determinat l'arc que correspon a cada corda. Nosaltres, doncs, solament podríem fer conjectures i no és aquest el nostre objectiu, en absolut.

2.7 Un problema paradigmàtic

Abans d'enunciar el problema de l'ítem §127, diu:

150 Sabem que els segments OM i OM', que són perpendiculars pel centre a la corda, la dimidien [EIII 3], que els angles en C i C' són rectes [EIII 31*a*] i que l'angle $\widehat{CBA}$ val la meitat que l'angle $\widehat{COA}$ [EIII 20] ([50, p. 190, 224 i 213]).

151 Indiquem, per acabar aquesta anàlisi, que, a l'apèndix II de [38], hi ha els valors dels sinus corresponents i dels arcs associats amb els errors comesos per Bar Ḥiyya, que són realment petits.

§127. Tot el que fins ara hem explicat és referent a terrenys plans, la superfície dels quals és llisa; però de vegades es trobaran terrenys pendents del cim d'una muntanya, deprimits, còncaus o esfèrics, i els agrimensors s'equivocaran si els mesuren tal com si fossin plans.[152]

Aleshores introdueix la tècnica de la canya i l'aplica a dos problemes: l'un quan el camp es troba en el vessant inclinat d'una muntanya ([5, p. 92]) i l'altre quan el camp es troba en un vessant corbat.

Acabem amb el darrer problema del capítol segon, que correspon a l'ítem §128 ([5, p. 93–94]), el qual, al nostre entendre, posa de manifest fins a quin punt el text s'allunya de la geometria aplicada i se'n va una mica més lluny. I, a més, ens permet copsar com funciona la tècnica de la canya.

§128. Si el terreny fos en la pendent d'un puig rodó i bombat, i volem saber l'àrea cabal, plantarem també la canya vertical i pel seu cap farem passar l'altra canya en angle recte, la qual prolonguem fins que toqui la muntanya i tindrem una figura semblant a l'anterior, sinó que DB és un arc, i el mateix serà tota AB, essent ambdós, arcs d'un mateix cercle i essent ambdós coneguts, car AB és la longitud del terreny, o bé l'amplada, i DB és l'arc que les dues canyes determinen.[153]

Ara seguirem els passos de Bar Ḥiyya, detallant-los amb ítems que en facin la lectura més entenedora (figura 13):

1. Apliquem el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle DCB$. Tenim que $DB^2 = DC^2 + BC^2$.
2. Calculem la sageta.
   - 2.1. La sageta divideix la corda i l'arc en dues parts iguals pels punts H i T.[154]
   - 2.2. El triangle $\triangle HZB$ que s'obté prolongant la sageta és semblant al $\triangle DCB$.[155]
   - 2.3. Els costats corresponents són proporcionals. O sigui, $\frac{DC}{CB} = \frac{ZH}{HB}$.[156]

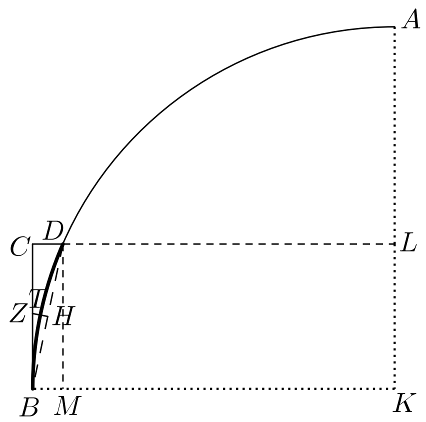


FIGURA 13

152 [5, p. 91–92].
153 [5, p. 93].
154 És la definició de sageta: «el segment perpendicular a la corda pel punt mitjà» i, per EIII 30 ([50, p. 223]), divideix l'arc en dues meitats.
155 Ambdós són triangles rectangles i tenen un angle comú. Per tant, els tres angles són respectivament iguals [EI 32 i EVI 4] ([50, p. 130 i 307]).
156 EVI 4 [50, p. 304].

2.4. Per tant, $ZH = \frac{DC \times BH}{CB}$.[157]

2.5. Per les mateixes raons, també tenim que $\frac{DC}{DB} = \frac{ZH}{ZB}$.

2.6. I, de retruc, $ZB = \frac{ZH \times DB}{DC}$.

2.7. Partint del punt Z amidem la longitud ZT.[158]

3. Coneix la sageta i la corda i pot aplicar (3) per determinar el diàmetre.
4. Un cop conegut el diàmetre, pot determinar la corda de l'arc doble de AD que deduïm de la taula dels arcs i cordes.
5. La meitat d'aquesta corda és DL.
6. Si hi sumem el segment conegut DC, tindrem el segment CDL, que és igual al BMK, que és la mida del terreny.
7. Si l'altra dimensió no és corba, no caldrà refer el càlcul, però si ho és en les dues dimensions —es tracta d'un camp esfèric— caldrà repetir-lo ([5, p. 93–94]).

En aquest exemple, a diferència de l'anterior, no hi ha dades concretes. És una resolució totalment general i teòrica.

3 Conclusions

Hem vist amb força detall les influències que l'obra de Bar Ḥiyya va rebre dels matemàtics grecs i àrabs i com va influir en Fibonacci. Hem analitzat, en un cas concret, com usa expressions que ha establert per tangram per resoldre les equacions de segon grau. Hem vist també la importància que dona al cercle i a la circumferència i als lligams que hi ha entre ambdues figures geomètriques. Finalment, hem posat de manifest fins a quin punt l'obra pensada com un text de pràctica de càlcul concret conté parts importants de caire teòric.

Pensem que aquesta anàlisi, força minsa i alhora força completa, palesa la importància que el *Llibre de geometria* de Bar Ḥiyya té en el panorama matemàtic dels segles XI–XII i de quina manera un barceloní va aportar un granet de sorra al desenvolupament de l'àlgebra de segon grau una mica abans que ho fes Leonardo da Pisa.

Des de la nostra humilitat, voldríem acabar amb un reconeixement explícit, que ja sabem que no li cal en absolut, a Josep Millàs Vallicrosa per la seva contribució a la divulgació de la ciència àrab i jueva de la Catalunya dels segles X al XIII i, d'una manera particular, per haver-nos deixat l'edició en català d'aquesta petita joia que és el *Llibre de geometria* de Bar Ḥiyya, Savasorda.

157 Aquí Bar Ḥiyya dona una expressió de caire algebraic, però podíem haver dit que ZH és el quart proporcional dels segments CB, DC i HB. O bé que s'obté per aplicació d'àrees sobre CB del rectangle $DC \times BH$. Vegeu EVI 12, [50, p. 317 i p. 154–156].

158 Coneixem la muntanya, l'altura BC de la canya i la llargada de la canya CD. Hem determinat BD i, de retruc, BH. I, per tant, ZH. I, en conseqüència, l'altura BZ, que determina el punt Z. L'unim amb el punt H, que és a l'interior de la muntanya, i obtenim el punt de tall T. La distància de ZT és la sageta. De fet, és fàcil determinar la direcció de la perpendicular ZH a BD.

4 Personatges esmentats

al-Battaní, Abu-Abd-Al·lah Muhàmmad ibn Jàbir ibn Sinan al-Harraní as-Sabí (Harran, [ara Turquia], ~858 - ?, 929), conegut simplement com a al-Battaní. Va començar a fer observacions astronòmiques a Raqqà l'any 877 i s'hi va dedicar tota la vida. Basant-se en l'*Almagest*, va fer observacions astronòmiques més precises que les de Ptolemeu, en un observatori privat que estava dotat dels més sofisticats instruments de l'època. També sabem que va fer observacions astronòmiques a Antioquia l'any 901.

al-Farghaní, Abul-l-Abbàs Àhmad ibn Muhàmmad ibn Kathir (Fergana, Sogdiana, [ara Uzbekistan], 805 - ?, 880), conegut com a al-Farghaní i de manera llatinitzada com a Alfergani, va ser un dels astrònoms perses més cèlebres del segle IX.

al-Ghafiqí al-Andalusí, Abu-l-Qàssim Àhmad ibn Abd-Al·lah ibn Úmar (Còrdova, ? - Dènia, ~1035), més conegut pel sobrenom d'Ibn as-Saffar —literalment «el fill del calderer»—, científic andalusí del segle XI. Va construir el rellotge de sol més antic islàmic, que es conserva al Museu Arqueològic i Etnològic de Còrdova.

al-Hwārizmī, Muḥammad ibn Mūsā (Bagdad [ara Iraq], ~780 - ?, ~850), matemàtic i astrònom. Va portar a Occident el sistema indoaràbic de numeració i l'àlgebra, i aquestes dues paraules són herència seva.

al-Misrí, Abu-Jàfar Àhmad ibn Yússuf ibn Ibrahim ibn Tammam as-Siddiq al-Baghdadí (Bagdad [ara Iraq], 835 - el Caire [Egipte], 912), matemàtic àrab molt reputat que influí en matemàtics europeus posteriors.

Arquimedes (Siracusa [Sicília], 288 - 212 aC), el més genial dels geòmetres grecs i un dels més notables de la història de la matemàtica.

Banu Hud, o Hudides, fou una dinastia local d'emirs que va governar els emirats de Làrida, de Saraqusta i en altres indrets de la frontera nord durant un segle, entre el 1039 i el 1139.

Bocaccio, Giovanni (Florència, 1313 - Certaldo o Florència, 21 de desembre del 1375), escriptor i humanista del *Trecento*. Va escriure en llatí i en italià. És considerat, juntament amb Dant i Petrarca, un dels pares de la literatura italiana. La seva obra més coneguda és el *Decameró*.

Bombelli, Rafael (Bolonya, 1526 - Roma, 1572), matemàtic. Va introduir els nombres complexos per poder resoldre les equacions cúbiques irreductibles aplicant el mètode de Tartaglia quan les arrels són reals a l'*Àlgebra* (1572).

Bonjorn, Bonet (Cotlliure, ~1300 - Barcelona, probablement abans de ~1360), astrònom i astròleg jueu català. Va ser l'autor d'unes taules astronòmiques preparades a Perpinyà el 1361, que encara avui es conserven manuscrites.

Cardano, Gerolamo (Pavia, 24 de setembre del 1501 - Roma, 21 de setembre del 1576), metge, astròleg, matemàtic, jugador i filòsof. L'any 1545 va publicar un tractat d'àlgebra, *Ars Magna*, on donava la resolució de l'equació de tercer grau que li havia comunicat Tartaglia i la resolució de la quàrtica que havia resolt el seu deixeble Ludovico Ferrari.

CHESTER, Robert (segle XII), traductor de l'àrab al llatí. Va traduir el text d'àlgebra d'al-Hwārizmī, *Hissab al'jabr wa-l-muqà-bala*.

DANTE ALIGHIERI, en català anomenat *Dant* (Florència, maig/juny del 1265 - Ravenna, 14 de setembre del 1321), poeta del *Trecento*. És un dels autors més reconeguts de la literatura universal, per *La divina comèdia*, una de les obres fonamentals de la transició del pensament medieval al renaixentista i obra cabdal de la literatura universal.

DEMÒCRIT D'ABDERA (Abdera [Tràcia], 460 aC - ?, 370 aC), filòsof i geòmetra i pare de l'*atomisme*. Va ser el primer a donar el volum de la piràmide i, alhora, a posar en relleu la paradoxa que suposava l'atomisme quan s'aplicava a aquest sòlid.

DESARGUES, Girard (Lió, 21 de febrer del 1591 - 8 d'octubre del 1661), és el pare de la geometria projectiva.

DESCARTES, René (Descartes [França], 31 de març del 1596 - Estocolm, 11 de febrer del 1650), important filòsof racionalista francès conegut també per les seves obres de matemàtiques i de diferents branques de la ciència. És considerat el pare de la filosofia moderna, ja que va ser el primer a proposar el problema de la validesa del coneixement com a primera qüestió filosòfica, i una de les figures clau de la revolució científica.

EUCLIDES (Tir? [Fenícia], ~325 aC - Alexandria, ~265), matemàtic del segle III aC, autor dels *Elements*, una de les obres més importants de la literatura matemàtica. Fou també el geòmetra que fonamentà i desenvolupà l'estudi de la matemàtica al museu d'Alexandria.

ÈUDOX DE CNIDOS (Cnidos [Grècia], 408 - 355 aC), geòmetra i astrònom, alumne de l'Acadèmia de Plató. Va introduir la teoria de la proporció de les magnituds incommensurables.

FERMAT, Pierre de (Beaumont-de-Lomagne [França], 12 de gener del 1665 - Castres [França], 17 d'agost del 1601), jurista i matemàtic occità, sobresortí pels seus treballs matemàtics. Descobrí les propietats de diversos nombres i és considerat el creador de la teoria de nombres moderna. Amb René Descartes aplicà l'àlgebra a la geometria i, amb Blaise Pascal, fundà la teoria de la probabilitat. Usà el concepte de les variables infinitesimals en els problemes de quadratura, de càlcul de màxims i mínims i en la construcció de tangents. És conegut per l'últim teorema de Fermat, així com pel petit teorema de Fermat.

FERRARI, Ludovico (Bolonya, 2 de febrer del 1522 - 5 d'octubre del 1565), matemàtic, deixeble de Cardano. Va trobar la resolució de la quàrtica reduint-la a la resolució d'una cúbica i una de segon grau.

FONTANA, Niccolò, anomenat Tartaglia, 'el tartamut' (Brescia, 1499 - Venècia, 13 de desembre del 1557), matemàtic autodidacte. Trobant-se a Venècia va descobrir la manera de resoldre la cúbica del tipus $x^3 + p\,x = q$.

HERÓ D'ALEXANDRIA (?, ~10 - Alexandria, 70), inventor i matemàtic. Probablement l'enginyer més notable de la Grècia clàssica.

HERÒDOT D'HALICARNÀS (Halicarnàs [Anatòlia], 484 - Turis [Magna Grècia], 425 aC), historiador i geògraf, considerat el primer historiador perquè pretenia basar els fets en la cronologia.

HIPARC D'ALEXANDRIA (Nicea [Grècia], al voltant del ~190 - Alexandria, ~ 120 aC), astrònom, geògraf i matemàtic. És un dels astrònoms més importants de l'antiguitat, inventor de l'astrolabi i el primer que elaborà un catàleg d'estels.

IBN EZRA, Abraham (Tudela [ara Navarra], 1089 - Calahorra [ara La Rioja], 23 de gener del 1167), erudit jueu, va cultivar la poesia, l'exegesi bíblica, la filosofia, la gramàtica hebrea i les ciències dels astres (astronomia, astrologia, matemàtiques i calendari). Fou una de les veus jueves més importants i una figura fonamental en la tasca de difusió de les cultures hebrea i àrab d'Al-Àndalus dins l'Espanya cristiana i Europa.

IBN ISHAQ AL-IBADÍ, Abu-Zayd Hunayn (al-Hira [ara Iraq], 808 - Bagdad, 873), més conegut com a Hunayn ibn Ishaq, famós i influent savi assiri o àrab, metge i científic, conegut per les traduccions d'obres mèdiques i científiques del grec antic a l'àrab.

KEPLER, Johannes (Weil der Stadt [ara Alemanya], 27 de desembre del 1571 - Ratisbona [ara Alemanya], 15 de novembre del 1630), astrònom i matemàtic alemany, és una figura clau de la revolució científica. És conegut, fonamentalment, pel descobriment de les lleis sobre el moviment dels planetes que va plasmar en les seves obres *Astronomia nova* (1609) i *Harmonices mundi* (1619).

LEONARDO DA PISA (Pisa, 1175 - ~1250), un dels matemàtics amb més talent de l'edat mitjana, conegut com a Fibonacci. Va introduir el sistema de numeració indoaràbic i l'aplicació de l'àlgebra als problemes geomètrics a Europa a través de *Liber abaci* i *De practica geometriæ*. El seu nom ha quedat unit a la «successió de Fibonacci».

LLULL, Ramon (Palma, 1232 - Tunis, 1316), escriptor, filòsof, místic, teòleg, professor i missioner mallorquí. És conegut per la seva extensa obra escrita, redactada en català, occità, llatí i àrab. És considerat el primer autor a fer servir una llengua vulgar per escriure obres científiques.[159]

MÜLLER VON KÖNIGSBERG, Johannes Müller (Königsberg in Bayern [ara Alemanya], 6 de juny del 1436 - Roma, 6 de juliol del 1476), prolífic astrònom i matemàtic alemany conegut amb el sobrenom de Regiomontanus, que prové de la traducció llatina del nom de la ciutat natal: Königsberg (Montanus Real o Montanus Regia). La seva obra es pot englobar en tractats de matemàtica, centrats en el que avui s'anomena *trigonometria*, de la qual es considera un dels pares fundadors, i tractats sobre astronomia.

159 Millàs Vallicrosa va fer una edició crítica de *El libro de la «Nova geometria»* ([40]).

PASCAL, Blaise (Clarmont d'Alvèrnia, 19 de juny del 1623 - París, 19 d'agost del 1662), filòsof, matemàtic, físic, inventor, escriptor, moralista, místic i teòleg occità. És, amb Fermat, el pare del càlcul de probabilitats, i, amb Desargues, de la geometria projectiva. És considerat una de les ments més brillants de la saviesa occidental.

PETRARCA, Francesco (Arezzo [ara Itàlia], 20 de juliol del 1304 - Arquà Petrarca [ara Itàlia], 19 de juliol del 1374), important escriptor, poeta i humanista del *Trecento*. La seva obra més coneguda és el *Cançoner*.

PLATÓ (?, ~21 de maig del 427 aC - Atenes, 347 aC), filòsof d'una gran influència a l'antiga Grècia. Va fundar l'Acadèmia i va escriure els famosos *Diàlegs socràtics*.

PLATÓ DE TÍVOLI (llatí, *Plato Tiburtinus*) (Tívoli [ara Itàlia], 1110 - ?, 1145), traductor d'obres matemàtiques i astronòmiques del segle XII. L'única cosa que se sap de la seva vida és que va arribar a Barcelona l'any 1134 i s'hi va estar, com a mínim, fins al 1145. Tota la seva producció traductora data d'aquesta època, durant la qual va col·laborar amb el matemàtic i astrònom hebreu i del qual, l'any 1145, va traduir al llatí l'obra de geometria que ens ocupa, amb el títol *Liber embadorum*.

PTOLEMEU, Claudi (Kla'udiws Ptolema'ikos) (Egipte, ~85 - Alexandria [Egipte], ~165), astrònom, geògraf i matemàtic grecoegipci, anomenat comunament Ptolemeu. Va escriure la *Sintaxi matemàtica* (>H Megal'h S'untaxis), coneguda amb el nom *Al-Magest*, l'obra gran' en àrab.

RHIND, Alexander Henry (Wick [Escòcia], 26 de juliol del 1833 - Cadenabbia [Itàlia], 3 de juliol de 1863), advocat, historiador, geòleg i arqueòleg, especialitzat en egiptologia. Fou qui trobà el papir d'Ahmés. Fou pioner a desenvolupar un mètode científic per realitzar les seves investigacions i feia un dibuix de l'indret on havia trobat cada objecte i dels mateixos objectes.

SANTCLIMENT, Francesc (?, segle XV), mestre d'aritmètica a Barcelona. El 1482 publicà *Summa de la art d'arismètica*, la primera obra catalana impresa d'aquest tipus que utilitzà xifres aràbigues.

TEODOSI DE BITÍNIA (Jeòdosios) (Bitínia [ara Turquia], 180 - ?, ~100 aC), matemàtic i astrònom grec cèlebre per ser l'autor de *Les esfèriques* (Sfairik'a), un recull de tots els coneixements coneguts en aquell temps sobre la geometria de les esferes i, en definitiva, sobre la «geometria el·líptica», que no és euclidiana.

TOMÀS D'AQUINO (Rocasecca [ara Itàlia], 1225 - Fossanova [ara Itàlia], 7 de març del 1274), teòleg i filòsof. Fou un dels teòlegs més importants de l'edat mitjana. Proporcionà les bases de la teologia cristiana en incorporar gran part del llenguatge i de les idees aristotèliques. La seva obra més notable és *Summa teològica* (~1274).

VIÈTE, François (Fontenay-le-Comte [França], 1540 - París, 13 de desembre del 1603), matemàtic francès, potser el més rellevant del segle XV i conegut, de vegades, com el pare de l'àlgebra moderna.

Referències

[1] al-Hwārizmī, Abu Ja'far Muḥammad ibn Mūsā. *Hissab al'jabr wa-l-muqà-bala* (*Llibre de la transposició i de la restauració*). Segle ix. [Traducció llatina a [56]. *Algorismus dixit* (*Deia algorismus*). Traducció francesa a [3]]

[2] Allard, A. «La diffusion en occident des prèmiers œuvres latines issues de l'arithmétique perdue d'al-Khwarizmi». *J. Hist. Arabic Sci.*, 9 (1–2) (1991), 101–105.

[3] Allard, A. *Le calcul indien (algorismus)*. París: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1992.

[4] Archibald, R. C. *Euclid's' Book on Divisions of Figures*. Cambridge: Cambridge University Prees, 1915. [En línia a `http://www.math.muni.cz/~sisma/deleni/archibalddeleni.pdf`]

[5] bar Ḥiyya, A. *Ḥibbur ha-mĕšiḥá wĕ-ha-tišboret* (*Tractat de geometria i mesurament*). 1116. [Traducció llatina de Plató de Tívoli, *Liber embadorum*, i catalana a [38]]

[6] bar Ḥiyya, A. *Mĕguil-lat ha-mĕgal-lé* (*Llibre revelador*). 1117. [Traducció alemanya a [53] i catalana a [37]]

[7] bar Ḥiyya, A. *Yĕsodé ha-ĕbuná wĕ-migdal ha-ĕmuná* (*Fonaments de la intel·ligència i torre de la creença*). 1117. [Traducció catalana a [39]]

[8] bar Ḥiyya, A. *Ḥĕsbón mahlekot ha-kokabim* (*Càlcul dels moviments dels astres*). 1136.

[9] bar Ḥiyya, A. *Ṣurat ha-areṣ wĕ-tabnit ha-šmavin* (*Forma de la Terra i les figures del cel*). 1136. [Sebastian Münster escrigué un extracte d'aquesta obra que publicà el 1546 amb una traducció llatina. Una traducció llatina completa es troba al Ms. 2079 de la Biblioteca Vaticana. L'obra completa a [46]. La traducció castellana a [41]]

[10] bar Ḥiyya, A. *Sefet Hegyón ha-néfeš* (*Meditació de l'ànima*). Leipzig: Eisik Freimann, 1860. [Amb una introducció de l'editor i una altra de S. J. Rapoport]

[11] bar Ḥiyya, A. «Epístola apologética a Mehuda b. Barsilai al-Barceloni sobre la base y límites de la Astrología». Ms. de Oxford. [Exemplars en Bodleiana Oppenheim Add. Oct. 5; Brit. Mus. Add. 27; 100; Florència, Medic. Plot. 88 cod. 3 = 28; Leiden, Warner 37; París, 1092; Vat. 379; Munic 36)]

[12] bar Ḥiyya, A. *Luḥot* (*Taules astronòmiques*). [Ms. Berlín 649 (Steinschneider. Catàleg número 102). Bodleina (Ori 443, 447; Neubauer 2070, 2071), així com Steinschneider Cal. de Munich, 1895, 161]

[13] bar Ḥiyya, A. *Sĕfer ha-'ibbur* (*Llibre de la intercalació del calendari*). 1123. Edició de Filipowski. Londres: [s. n.], 1851.

[14] Boncompagni, B. *Scritti Leonardo Pisano*. Vol. i. Roma: Tipographia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1857.

[15] Boncompagni, B. *Scritti Leonardo Pisano*. Vol. ii. Roma: Tipographia delle Scienze Matematiche e Fisiche, 1862.

[16] BOYER, C. B. *A History of Mathematics*. Nova York: Wiley, 1972. [Traducció castellana de M. Martínez Pérez, *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza, 1992]

[17] CAJORI, F. *A History of Mathematics*. MacMillan, 1894. [Reeditat per Chelsea, Nova York, 1985]

[18] CHABÀS, J. «Interactions between Jewish and Christian Astronomers in The Iberian Peninsula». A: [27, p. 147–154].

[19] CLAGETT, M. *Ancient Egyptian Science: A Source Book. Vol. 3: Ancient Egyptian Mathematics*. Filadèlfia: American Philosophical Society, 1999.

[20] CURTZE, M. *Der «Liber embadorum» des Savasorda in der Übersetzung des Plato von Tivoli*. A: *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. Vol. 1, 1902. [En línia a `https://wilbourhall.org/pdfs/collection/Curtze_M_1902_Urkunden_S.pdf`]

[21] DA PISA, L. *Liber abaci*, 1202. A: [14, vol. I, p. 1–283]; en anglès, [59].

[22] DA PISA, L. *La practica geometriæ*, 1220. A: [14, vol. II, p. 1–224]; en anglès, [31].

[23] DAUBEN, J. W. *The History of Mathematics from Antiquity to the Present: A Selective Bibliography*. Nova York: Garland, 1985.

[24] DORCE, C. *Historia de las matemáticas en España*. Sant Cugat: Arpegio, 2017. 2 v.

[25] ESCOBEDO, J. *Un incunable científic català: suma de la art de arismètica de Francesc Santcliment*. Barcelona: Biblioteca de Catalunya, 2007. 2 v.

[26] FAVARO, A. «Notizie storica —critiche sulle divisione delle aree». *Memorie del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed arte*, 22 (1833), 125–154.

[27] FREUDENTHAL, G. *Science in Medieval Jewish Cultures*. Nova York: Cambridge University Press, 2011.

[28] GILLINGS, R. J. *Mathematics in the Time of the Pharaons*. Cambridge, MA: MIT Press, 1972. [Reeditat per Dover Publications, Nova York, 1982]

[29] GILLISPIE, C. C. (ED.). *Biographical Dictionary of Mathematicians: Reference Biographies from the Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Charles Scribner's, 1991. 4 v.

[30] GRATTAN-GUINNESS, I. *The Fontana History of the Mathematical Sciences*. Londres: Fontana Press, 1997.

[31] HUGHES, B. (ED.). *Fibonacci's De Practica Geometrie*. Nova York: Springer, 2008.

[32] KEPLER, J. *Stereometria Doliorum Vinariorum*. [Traducció francesa de J. Peyroux, *Nouvelle stéréometrie des tonneaux*. París: A. Blanchard, 1615]

[33] LEVEY, M. «Abraham Bar H'iyya Ha-Nasi». A: [29, vol. I, p. 6–7].

[34] LORIA, G. *Storia delle matematiche*. Milà: Ulrico Hoepli, 1991.

[35] MALET, A. *L'aritmètica de Santcliment*. Vic: Eumo, 1998. [Introducció, transcripció i notes]

[36] Masià, R. *Sobre les conoides i les esferoides*. Barcelona: Bernat Metge, 2016.

[37] Millàs Vallicrosa, J. M. *Llibre revelador* (*Meguil·lat Hamegal·lé*). Barcelona: Editorial Alpha, 1929. [Traducció al català de Josep Maria Millàs i Vallicrosa. Pròleg i notes de Juli Guttmann]

[38] Millàs Vallicrosa, J. M. *Llibre de geometria*. Barcelona: Editorial Alpha, 1931. [Prologat per Juli Guttmann]

[39] Millàs Vallicrosa, J. M. *Obra enciclopèdica Yêsodé ha-têbuná u-migdal ha-êmuná de R. Abraham Bar Ḥiyya he-Bargeloní*. Madrid-Barcelona: Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Instituto Arias Montano, 1952. [Edició crítica, amb traducció, pròleg i notes de J. Millàs Vallicrosa]

[40] Millàs Vallicrosa, J. M. *El libro de la "Nova geometria"*. Barcelona: Asociación para la Historia de la Ciencia Española, 1953.

[41] Millàs Vallicrosa, J. M. *La Forma de la Tierra*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas; Instituto Arias Montano, 1956.

[42] Millàs Vallicrosa, J. M. *Estudios sobre historia de la ciencia española*. Madrid: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, 1987. 2 v.

[43] Monjos de Montserrat. *La Bíblia*. Andorra: Editorial Casal i Vall, 1969.

[44] Munster, S. *Spæra Mundi describens figuram terrae, dispositionem orbium cœlstium, auctore Rabí Abraham hispano filio R. Haijac*. Basilea, 1546. [En línia a `https://books.google.cat`]

[45] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. «Abraham Bar Ḥiyya Ha-Nasi». 1999. [En línia a: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abraham/`].

[46] Offenbach, F. *Form of the Earth* (*Forma de la Terra*). 1720. [Traducció castellana a [41]]

[47] Ofterdinger, L. *Beiträge zur Wiederherstellung der Schrift des Euclides über die Teilung der Fifuren*. Ulm, 1853.

[48] Pla Carrera, J. *Història de la matemàtica. Egipte i Mesopotàmia: resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2016.

[49] Pla Carrera, J. *Història de la matemàtica. Grècia I (de Tales i Pitàgores a Plató i Aristòtil): resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2016.

[50] Pla Carrera, J. *Història de la matemàtica. Grècia IIa (Els* Elements *d'Euclides, llibres* I, II, III, IV, V *i* VI*): resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2018.

[51] Pla Carrera, J. *Història de la matemàtica. Grècia IIb (Els* Elements *d'Euclides, llibres* VII, VIII, IX, X, XI, XII *i* XIII*): resultats, textos i contextos*. Barcelona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2019.

[52] Pla Carrera, J. *Història de la matemàtica. Grècia IIIb: Dositeu, Conó, Arquímedes, Nicomedes i Esratòstenes.: resultats, textos i contextos*. Bar-

celona: Publicacions de l'Institut d'Estudis Catalans, 2020. [Pendent de publicació]

[53] Poznanski, A.; Guttman, J. *Sefer Maguilat Ha-megaleh*. Berlín: Druck von H. Itzowski, 1924.

[54] Ptolemeu, C. *Composition mathématique*. París: Chez H. Grand, 1813. [Traducció francesa de Halma i notes de M. Delambre. En línia a `http://remacle.org/bloodwolf/erudits/ptolemee/table.htm`]

[55] Romano, D. *La ciencia hispanojudía*. Madrid: Mapfre, 1992.

[56] Rosen, F. *The Algebra of Mohammed ben Musa*. Hildesheim: G. Olms, 1831. [Traducció i edició. Reimprès el 1986]

[57] Sánchez Pérez, J. A. *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*. Madrid: Estanislao Maestre, 1921.

[58] Santcliment, F. *La Suma de la art de Arismetica*. Barcelona: Pere Posa, 1482. [En línia a `https://books.google.cat`. Reeditat per [35] i [25, vol. ii]]

[59] Sigler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci*. Nova York: Springer-Verlag, 2012.

[60] Smith, D. E. *History of Mathematics*. Toronto: General Publishing Company, 1923. 2 v. [Reeditat per Dover, Nova York, 1958]

[61] Struik, D. J. *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Cambridge: Harvard University Press, 1969. [En línia a `https://archive.org/details/B-001-001-112/page/n88`]

[62] Taton, R. (coord.). *Histoire générale des sciences*. París: Presses Universitaire de France, 1969. 4 v. [Traducció castellana de M. Sacristán. *Historia general de las ciencias*. Barcelona: Orbis, 1988]

[63] Tomeo Lacrué, M. *Biografía Científica de la Universidad de Zaragoza*. Saragossa: Facultad de Ciencias de Zaragoza, 1962.

[64] Töyrylä, H. *Abraham Bar Ḥiyya on Time, History, Exile an Redemption: An Analysis of Megillat ha-Megaller*. Leyden: Brill, 2014.

[65] Waerden, B. L. van der *Science Awakening*. Groningen: P. Noordhoff, 1954. [Reeditat per Oxford University Press, Oxford, 1961, i per Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Països Baixos, 1975 i 1988]

Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona
08007 Barcelona
jpla@ub.edu