

Contribucions de Maryam Mirzakhani en geometria i dinàmica

JOANA CIRICI

Resum: Ens endinsarem en el món de les superfícies de Riemann, les mètriques hiperbòliques i les corbes geodèsiques per explorar alguns dels treballs de Maryam Mirzakhani que combinen, de forma sorprenent, conceptes de dinàmica i geometria. Veurem com comptar geodèsiques en superfícies usant espais de moduli i com podem adreçar problemes en dinàmica de billars mitjançant l'estudi de corbes geodèsiques en superfícies. També revisarem alguns dels últims descobriments de Mirzakhani, com és el teorema de la vareta màgica, considerat per alguns el teorema de la dècada.

Paraules clau: Maryam Mirzakhani, superfícies de Riemann, espais de moduli, mètriques hiperbòliques, corbes geodèsiques, dinàmica de billars.

Classificació MSC2010: 01A70, 32G15.

1 Introducció

Maryam Mirzakhani va rebre la Medalla Fields l'any 2014 «per les seves contribucions excepcionals a la dinàmica i la geometria de les superfícies de Riemann i els seus espais de moduli». Mirzakhani va ser la primera dona a rebre aquesta distinció en els seus vuitanta anys d'història.

En aquest text ens endinsarem en el món de les superfícies de Riemann per desvelar algunes d'aquestes contribucions excepcionals. Explicarem resultats de la tesi doctoral de Mirzakhani sobre el comptatge de corbes geodèsiques en superfícies, i com les seves eines permeten jugar a la *loteria topològica*. També revisarem alguns dels seus últims descobriments revolucionaris en dinàmica i geometria, com és el *teorema de la vareta màgica*, considerat per alguns el teorema de la dècada. Veurem que per jugar a billar el millor és estudiar geodèsiques en superfícies, i que les mateixes tècniques ens serviran per il·luminar casa nostra amb una sola bombeta.

Nascuda a Teheran el 1977, des de molt jove Mirzakhani ja va brillar científicament. Va ser la primera noia iraniana a participar en l'Olimpíada Internacional

de Matemàtiques, i va aconseguir dues medalles d'or en les edicions del 1994 (Hong Kong) i 1995 (Toronto). En aquest període va publicar els primers articles sobre combinatòria. El 2004 va obtenir el títol de doctora en matemàtiques per la Universitat de Harvard. La seva tesi, *Simple geodesics on hyperbolic surfaces and the volume of the moduli space of curves*, va donar lloc a tres articles estel·lars [9, 8, 11]. Aquests treballs destaquen pel fet de posar en joc un gran nombre de tècniques noves i extremament generals en geometria algebraica, diferencial i simplèctica, topologia i dinàmica, entre d'altres. En particular, contenen avenços importants en la teoria de les superfícies de Riemann, que solucionen el problema de comptar corbes geodèsiques en aquestes superfícies i que donen lloc, de forma inesperada, a una nova prova de la conjectura de Witten.

Els treballs de Mirzakhani posteriors a la seva tesi se centren principalment en dinàmica d'espais geomètrics. En particular, Mirzakhani demostra una important conjectura de Bill Thurston sobre terratrèmols matemàtics [10]. El 2014, juntament amb Alex Eskin i amb la col·laboració posterior d'Amir Mohammadi, Mirzakhani va culminar la prova d'una conjectura molt buscada sobre la dinàmica dels espais de moduli [5, 4]. Els seus resultats revelen que la dinàmica dels espais homogenis és extrapolable a un món totalment no homogeni, i obre així una nova mina d'or que molts tardaran dècades a explotar.

Maryam Mirzakhani va morir de càncer de mama el juliol del 2017, a l'edat prematura de quaranta anys. Les seves matemàtiques segueixen vives.

2 Comptant geodèsiques en superfícies

Començarem establint un primer contacte amb els personatges principals d'aquestes notes, per motivar així l'estudi de les corbes geodèsiques en superfícies amb problemes tangibles de probabilitats topològiques i dinàmica de billars.

2.1 Superfícies de Riemann hiperbòliques

Les superfícies topològiques compactes i orientables són espais que localment tenen l'aspecte del pla euclidià i es classifiquen pel seu gènere. Per a gènere 0 tenim l'esfera S^2 , per a gènere 1 el tor $T^2 = S^1 \times S^1$, i per a gènere $g \geq 2$ una suma connexa de g tors, com mostra la figura 1.

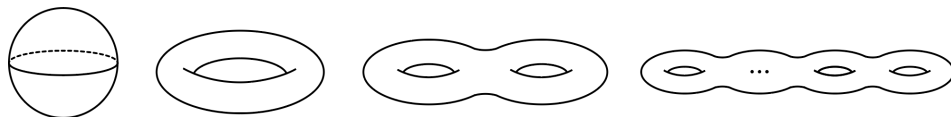


FIGURA 1: Superfícies compactes i orientables.

Un cop establerta aquesta classificació, ens podem preguntar per les diferents estructures geomètriques que admet cada superfície. Un resultat clàssic

per restringir la geometria de les superfícies és el teorema de Gauss-Bonnet, que relaciona la característica d'Euler d'una superfície amb la curvatura associada a una estructura riemanniana en aquesta superfície. En particular, ens diu que per tenir una *mètrica hiperbòlica* (mètrica riemanniana de curvatura constant negativa) cal que el gènere de la superfície sigui $g \geq 2$. En un dels exemples més simples, el teorema de Gauss-Bonnet ens diu que la suma dels angles d'un triangle en el pla (superfície de curvatura 0) és de 180 graus. En canvi, si considerem un triangle geodèsic en una superfície de curvatura positiva, la suma dels angles serà major, mentre que en el cas de curvatura negativa no arribarà a 180 graus (figura 2). Resulta pràctic imaginar que, si visquéssim en una superfície hiperbòlica, experimentaríem cada lloc com si fos un punt de sella.

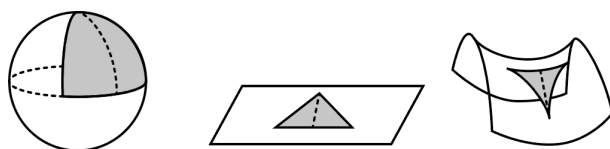


FIGURA 2: Curvatures esfèrica, plana i hiperbòlica.

Les superfícies hiperbòliques són les actrius principals de les obres de Mirzakhani, que n'estudia les geodèsiques.

2.2 Corbes geodèsiques

La noció de *geodèsica* té sentit en qualsevol varietat diferencial dotada d'una mètrica. Generalitzant les línies rectes en l'espai pla, una *geodèsica* és una corba que localment minimitza la seva longitud. Per exemple, la trajectòria d'una massa que cau, un satèl·lit en òrbita o la figura que dibuixa una òrbita planetària són tot geodèsiques en l'espai-temps corbat. En l'esfera, les geodèsiques són els cercles màxims i sempre són tancades (figura 3).

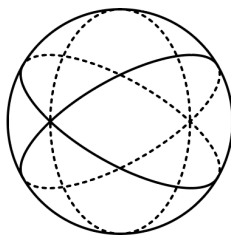


FIGURA 3: Geodèsiques en l'esfera.

Per visualitzar les geodèsiques del tor pla, el més convenient és considerar la seva representació quocient, com en la figura 4. Tota recta en el pla dona lloc a una geodèsica en el tor. Si l'angle entre la recta i l'eix horitzontal és un

nombre racional, aleshores definirà una geodèsica tancada (figura 5). En cas contrari, la nostra geodèsica acabarà pintant tot el tor i direm que la geodèsica és *densa*.

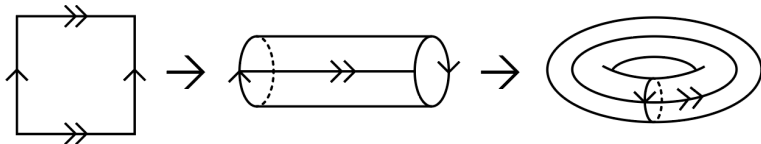


FIGURA 4: Representació plana del tor: per a construir-lo, identifiquem arestes paral·leles d'un rectangle.

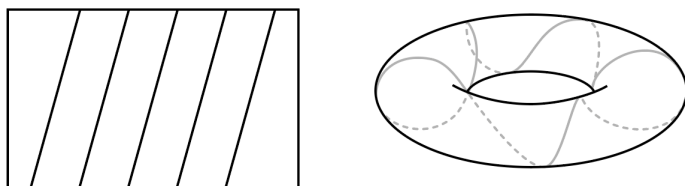


FIGURA 5: Exemple de corba geodèsica tancada en el tor.

Una propietat especial de les superfícies hiperbòliques (de gènere $g \geq 2$) és que tota corba tancada no trivial és homotòpica a una única geodèsica. A més, hi ha un nombre finit de geodèsiques tancades de longitud $\leq \ell$.

Aquests fets permeten estudiar-ne el comportament asimptòtic. El teorema dels nombres primers per a superfícies, establert el 1940 a partir de treballs de Delsarte, Huber i Selberg, afirma que el nombre $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades de longitud $\leq \ell$ en una superfície hiperbòlica X es comporta com a

$$N(X, \ell) \sim e^\ell / \ell \quad \text{quan } \ell \rightarrow \infty.$$

Observem que el teorema de nombres primers clàssic dona el mateix creixement per al nombre d'enters primers p amb $0 \leq \log p \leq \ell$.

Ara bé, gairebé totes les corbes autointersequen. Si només comptem geodèsiques *simples* (sense autointerseccions), Rees i Rivin van provar, de forma independent, que el seu nombre creix de forma polinòmica en ℓ . En el marc de la seva tesi doctoral, Mirzakhani va anar molt més enllà i va donar una fórmula explícita: prova que el nombre $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades i simples de longitud $\leq \ell$ en una superfície hiperbòlica X es comporta com a

$$N(X, \ell) \sim C_X \cdot \ell^{6g-6} \quad \text{quan } \ell \rightarrow \infty.$$

Observem que el comportament asimptòtic en el cas general és independent del gènere de la superfície, mentre que, en el cas de les geodèsiques simples, no només l'exponent de ℓ depèn del gènere, sinó que C_X és una constant

que depèn fortament de la geometria de X . De fet, l'estratègia de Mirzakhani consisteix a estudiar la geometria i topologia d'una superfície donada a partir de la geometria de l'*espai de moduli* que la parametriza. En certa manera, és com deduir el comportament de les abelles a partir de les propietats dels seus ruscs. Presentarem aquests espais de moduli a la secció 3.

2.3 Estadística topològica

Entendre les geodèsiques simples ens pot donar informació de la mateixa superfície a partir de les possibles descomposicions que admet. Per a una mètrica hiperbòlica fixada en una superfície de gènere g , sempre hi ha una descomposició en pantalons, que talla la superfície al llarg d'una col·lecció de $3g - 3$ geodèsiques tancades, simples i disjunes, com en la figura 6.

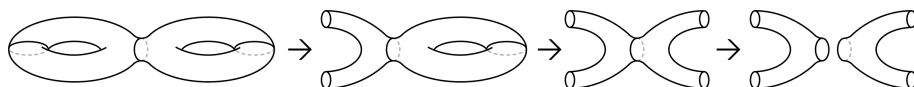


FIGURA 6: Una descomposició del doble tor.

La descripció geomètrica d'aquesta descomposició depèn clarament de les geodèsiques escollides. Una pregunta natural és, doncs:

Quantes descomposicions diferents (no homotòpiques) hi ha?

Les descomposicions són infinites sempre que es tracti de geodèsiques simples de longitud arbitrària, però no si restringim aquesta longitud. Les tècniques de Mirzakhani són suficientment delicades per extreure freqüències de creixement de corbes de determinats *tipus topològics* i provar que aquestes freqüències són sempre nombres racionals i independents de la mètrica hiperbòlica escollida.

Per exemple, considerem una superfície de gènere 2 i ens preguntem pels diferents tipus topològics que generen les geodèsiques simples i tancades, com en la figura 7. Considerem una corba geodèsica i simple arbitrària en aquesta

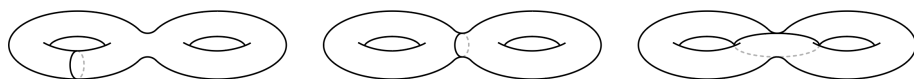


FIGURA 7: Tipus topològics de corbes en el doble tor.

superfície. Mirzakhani calcula que la probabilitat que aquesta corba separi el doble tor en dues superfícies de gènere 1 és $1/49$.¹ Revisarem aquests resultats sorprenents a la secció 4 en un context més general.

Les eines desenvolupades per Mirzakhani per al comptatge de corbes i freqüències asimptòtiques donen lloc, inesperadament, a una nova prova de

¹ De fet, en els càlculs inicials de Mirzakhani [11] el resultat és $1/7$. Recentment, a [2] s'indica que una petita errada faria variar els resultats en un factor 8 en les proporcions (d'1 : 6 a 1 : 48), i es comprova el resultat de forma experimental.

la conjectura de Witten, provada inicialment per Maxim Kontsevich el 1992 usant mètodes completament diferents. En una sola fórmula, la conjectura de Witten relaciona conceptes de geometria algebraica enumerativa, combinatòria, sistemes integrables i física quàntica amb conseqüències de molt relleu en la teoria de la gravetat quàntica.

2.4 Dinàmica i billars poligonals

Un *sistema dinàmic* és un sistema que evoluciona amb el temps. Es pot tractar d'un conjunt de partícules de gas confinades en un recipient, un sistema planetari, corrents oceànics, electrons en un metall o l'expansió d'un virus. En general, els sistemes dinàmics són caòtics i interessa determinar-ne el comportament asimptòtic o l'evolució de les trajectòries per a temps llargs. D'altra banda, sistemes de diferents escales solen comportar-se de forma similar. Així, resulta útil estudiar models simplificats per tal d'entendre el comportament de processos més complexos. Un model per excel·lència són les *taules de billar* com a exemples de sistemes dinàmics caòtics que modelen la mecànica hamiltoniana.

Ens restringirem a *billars poligonals* (figura 8), on la bola és una partícula puntual que es mou en línia recta i velocitat constant fins que topa amb una de les arestes del polígon. Aleshores la partícula experimenta una reflexió especular i surt reflectida amb el mateix angle que el d'incidència. Si la partícula topa amb un vèrtex del polígon, la trajectòria acaba (podem pensar que la bola ha caigut en un forat).

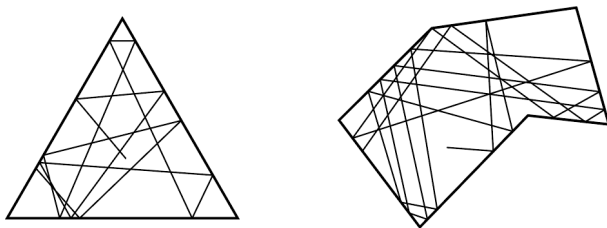


FIGURA 8: Taules de billar poligonals.

Les trajectòries poden tenir comportaments molt diferents. Per exemple, es pot donar el cas que la trajectòria sigui *tancada*, és a dir, que en un moment determinat la nostra partícula recuperi la posició i direcció inicials. També es parla de trajectòries *denses*: són aquelles trajectòries que, amb temps infinit, acaben pintant tota la superfície del polígon. Algunes primeres preguntes que ens podem fer són:

Hi ha trajectòries tancades? Hi ha trajectòries denses? Depèn de la taula?

Se sap que per a *polígons racionals* (en què tots els angles són múltiples racionals de π), sempre hi ha almenys una trajectòria tancada. En canvi, no se sap si tota taula triangular té trajectòries tancades o no. També ens podem

preguntar si hi ha *billars òptims* tals que tota trajectòria és o bé tancada, o bé equidistribuïda (que no es quedi pintant de forma densa un racó del nostre polígon mentre la resta queda buida). Se sap que els polígons regulars són òptims, però en general resulta altament complicat decidir si una taula és òptima o no.

Relacionats amb aquestes qüestions hi ha els *problemes d'il·luminació*. Considerem en aquest cas una habitació poligonal emmirallada (figura 9). Disposem d'una única espelma (font puntual de llum), que podem col·locar en qualsevol punt de l'interior de la nostra habitació. Els raigs de llum surten de la font radialment en totes direccions i reboten a les parets emmirallades seguint les lleis de l'òptica geomètrica, en què, com en el cas dels billars, l'angle de reflexió coincideix amb l'angle d'incidència.

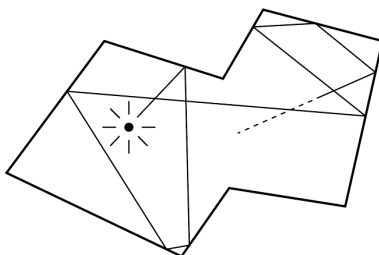


FIGURA 9: Habitació poligonal emmirallada amb una font lumínica puntual.

Un altre cop hi ha diverses preguntes naturals per fer-se:

Podem il·luminar la nostra habitació amb una sola espelma? Hi ha punts foscos? Què en podem dir, del conjunt de punts foscos? Depèn de l'habitació? Depèn del punt on posem l'espelma?

Evidentment, aquestes preguntes només tenen interès en el cas d'habitacions no convexes. Un exercici entretingut és provar que una habitació formada per 5 quadrats com en la figura 10 sempre es pot il·luminar. En canvi, construir habitacions no il·luminables és una tasca difícil.

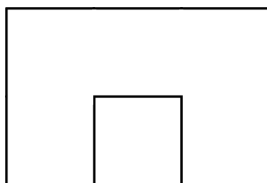


FIGURA 10: Exemple d'habitació il·luminable.

El 1995 George Tokarsky va donar els primers exemples d'habitacions amb punts foscos. El més senzill, un polígon de 26 costats (figura 11). El problema de caracteritzar el conjunt de punts foscos d'una taula arbitrària segueix obert.

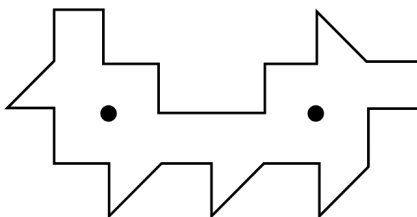


FIGURA 11: Polígon de Tokarsky: no hi ha cap trajectòria entre els dos punts marcats.

Una variant dels problemes d'il·luminació són els *problemes de seguretat*.

Podem bloquejar totes les trajectòries entre dos punts d'una habitació poligonal mitjançant un nombre finit de barreres puntuals?

Se sol representar un dels punts donats pel president i l'altre punt per un terrorista. Aleshores la pregunta és si podem assegurar el president amb un nombre finit de guardaespalles. Si això passa per a tot parell de punts, diem que el polígon és *segur*. Per exemple, un exercici entretingut és provar que el quadrat és un polígon segur.

2.5 Desplegament de polígons

Continuem jugant a billar i a il·luminar, però ara, en comptes de reflectir la bola de billar o la llum de l'espelma, el que farem és reflectir la taula o l'habitació, de manera que la trajectòria de la bola o dels raigs de llum siguin línies rectes. Aquest procés de *desplegament* es pot iterar a cada reflexió i té moltíssimes aplicacions en la teoria dels sistemes dinàmics de billars poligonals. Ens restringirem, però, al cas de *billars poligonals racionals* (en què tots els angles són múltiples racionals de π). En aquest cas, el procés de desplegament dona lloc a superfícies compactes i les trajectòries no són més que geodèsiques tancades en aquestes superfícies!

Comencem amb un exemple molt senzill. Tenim una taula quadrada com en la figura 12 i llancem una bola de billar. Quan la bola toqui la paret, creem una còpia reflectida de la taula, de manera que la bola segueixi en línia recta. Això ho podem fer successivament i amb diferents trajectòries.

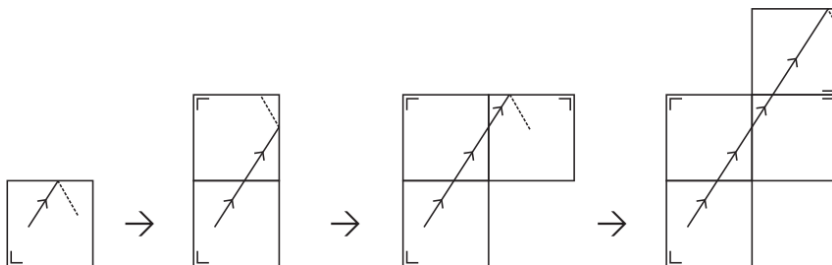


FIGURA 12: Reflexions en una taula quadrada.

Observem, però, que només hi ha quatre reflexions diferents de la nostra taula, ja que és quadrada. Podem, doncs, identificar reflexions idèntiques, de manera que obtenim un tor, com en la figura 13. Així, la nostra trajectòria es tradueix en una geodèsica en aquest tor.

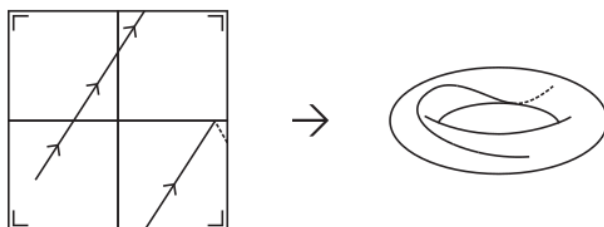


FIGURA 13: Desplegant una taula quadrada obtenim un tor.

Vegem un altre exemple de desplegament. Considerem un triangle isòscele amb un angle de 45°, com en la figura 14. En aquest cas, una trajectòria genèrica es pot moure en 8 direccions possibles. La taula triangular es desplega formant un octàgon regular en el qual hem d'identificar arestes dues a dues, i s'obté un doble tor.

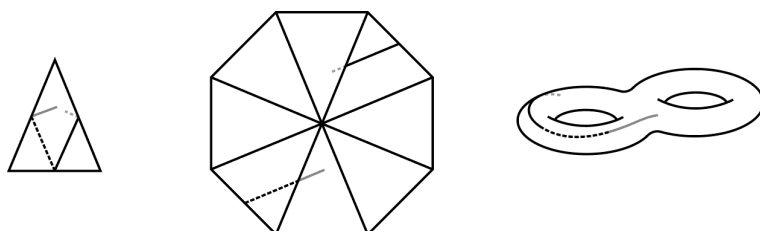


FIGURA 14: Desplegant una taula triangular obtenim un doble tor.

El desplegament de taules permet traduir problemes de billars, d'il·luminació i de seguretat a l'estudi de corbes geodèsiques en superfícies. Una conjectura clàssica per a taules poligonals racionals T és que el nombre $N(T, \ell)$ de trajectòries tancades de longitud $\leq \ell$ es comporta com a

$$N(T, \ell) \sim \frac{C_T \cdot \ell^2}{\pi \cdot \text{Area}(T)},$$

on C_T és una constant que depèn de la taula T . Mirzakhani, juntament amb Alex Eskin, progressa cap a aquest resultat, i prova que el límit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(T, \ell) / \ell^2$$

existeix i és diferent de zero. Una conseqüència d'aquest resultat és que en tota habitació emmirallada poligonal racional només hi ha un nombre finit de punts

foscós, independentment d'on colloquem l'espelma. Aquest resultat no és més que un petit corollari d'un resultat molt més general, conegut com el *teorema de la vareta màgica*, sobre la dinàmica en espais de moduli de les superfícies de Riemann i que comentarem al final d'aquest text.

3 Espais de moduli de les superfícies de Riemann

L'estratègia de Mirzakhani per entendre una sola superfície i el comportament de les geodèsiques en aquesta consisteix a mirar totes les superfícies alhora, amb l'ajuda dels espais de moduli. En aquesta secció introduïrem aquests espais i les seves dues personalitats: com a varietat algebraica complexa i com a entitat simplèctica.

3.1 Problemes de classificació i espais de moduli

Un *espai de moduli* és un espai de solucions de problemes de classificació, entenent el terme *modulus* com a sinònim de *paràmetre*.

Una propietat clau dels espais de moduli és que sovint hereten estructures topològiques i geomètriques dels objectes que parametritzen. Per exemple, el conjunt de les rectes del pla \mathbb{R}^2 que passen per l'origen es pot parametritzar amb un sol angle $0 \leq \theta < \pi$. Ara bé, si dotem l'interval $[0, \pi)$ d'una topologia fidel al fet que les rectes d'angle proper a π s'acosten de forma contínua a la recta horitzontal, obtenim la recta real projectiva $\mathbb{R}P^1$, que és, a més d'espai topològic i varietat algebraica projectiva, una varietat diferenciable.

Centrarem la nostra atenció en el que potser és la família més famosa d'espais de moduli. Denotats per $\mathcal{M}_{g,n}$, aquests espais es defineixen com el conjunt de les superfícies de Riemann de gènere g amb n punts marcats, llevat d'isomorfisme:

$$\mathcal{M}_{g,n} := \left\{ \begin{array}{l} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{de gènere } g \\ \text{amb } n \text{ punts marcats} \end{array} \right\} / \cong .$$

Les superfícies de Riemann són superfícies topològiques dotades de certa estructura geomètrica complexa que precisarem més endavant. Històricament, les primeres superfícies de Riemann van sorgir en l'estudi, de la mà de Bernhard Riemann, de les funcions analítiques multivaluades, com són \sqrt{z} o $\log(z)$, mitjançant tècniques de continuació analítica. Els punts marcats aquí els hem d'entendre de forma literal: distingim n punts diferents de la superfície i els ordenem.

El conjunt $\mathcal{M}_{g,n}$ té una rica estructura topològica i geomètrica. En primer lloc, és una varietat algebraica complexa de dimensió real

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_{g,n} = 6g - 6 + 2n. \tag{1}$$

D'altra banda, tot i que presenta singularitats moderades, té una estructura simplèctica (que permet calcular volums). La dimensió d'aquests espais ja era coneguda per Riemann. Les primeres construccions rigoroses d'aquest conjunt com a entitat geomètrica les van donar Ahlfors i Bers, seguint les passes de Teichmüller. Els espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ i altres objectes relacionats apareixen principalment en geometria algebraica i diferencial, però també tenen papers interessants en aritmètica, topologia, dinàmica i fins i tot en teoria de cordes:

- Les corbes modulars, fonamentals en teoria de nombres, admeten una interpretació directa en termes d'espais de moduli de corbes el·líptiques.
- En topologia, els espais de moduli s'identifiquen amb espais classificadors. Recurrents en teoria d'homotopia, els espais de moduli permeten aplicacions interessantíssimes en l'estudi d'àlgebres homotòpiques relacionades amb invariants quàntics inspirats en idees d'origen físic.
- Els espais de moduli han estat un ingredient crucial en teoria de cordes des d'un bon principi, en què la funció de partició de les cordes bosòniques s'integra sobre aquests espais.
- L'estudi de certs grups algebraics que actuen en els espais de moduli, així com els seus fluxos geodèsics, tenen nombroses aplicacions en dinàmica, com descobrirem més endavant.

Abans de descriure la teoria de les superfícies de Riemann i els seus espais de moduli amb certa generalitat, revisarem els dos casos més senzills, corresponents a l'esfera i el tor.

3.2 L'esfera de Riemann

Per fabricar-nos l'esfera de Riemann, considerem el pla complex \mathbb{C} i hi afegim el punt de l'infinit

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Topològicament, estem fent la compactificació per un punt del pla, i, per tant, obtenim una esfera \mathbb{S}^2 . Aquesta construcció ens regala, a més d'una superfície topològica compacta, una rica estructura geomètrica que apareix en diverses branques de les matemàtiques i de la física:

- En anàlisi complexa, l'esfera de Riemann hi té un paper fonamental, en tant que tota funció racional amb valors complexos s'estén a una funció holomorfa en $\hat{\mathbb{C}}$ (enviant els pols de la funció al punt ∞ de $\hat{\mathbb{C}}$). Més generalment, tota funció meromorfa es pot pensar com una funció holomorfa que té l'esfera de Riemann com a codomini.
- En geometria algebraica, l'esfera de Riemann s'identifica amb la recta projectiva complexa $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Aquesta varietat algebraica es pot considerar com la llavor de la geometria algebraica projectiva, fonamental en l'estudi de les corbes racionals.

- En mecànica quàntica, l'esfera de Riemann (figura 15) es coneix amb el nom d'*esfera de Bloch* i s'utilitza, entre d'altres, per representar geomètricament els bits quàntics. En aquest cas, els punts 0 i ∞ de $\widehat{\mathbb{C}}$ s'identifiquen amb els estats *spin-up* i *spin-down* d'un electró. Així, podem pensar que un ordinador quàntic està format per un sistema d'esferes de Riemann que interaccionen entre elles.

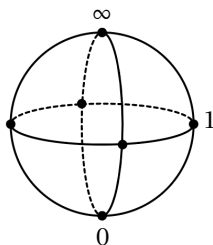


FIGURA 15: Esfera de Riemann.

Els punts de l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,n}$ són esferes de Riemann amb n punts marcats, llevat d'isomorfisme. Per veure quantes classes d'isomorfisme hi ha, tindrem en compte el fet que els automorfismes de l'esfera de Riemann venen donats pel *grup de Möbius*, definit per transformacions

$$f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ de la forma } f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

on a, b, c, d són nombres complexos tals que $ad - bc \neq 0$, i amb el conveni que

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{i} \quad f\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty.$$

Un exercici senzill consisteix a provar que, donats tres punts diferents de $\widehat{\mathbb{C}}$, sempre hi ha una transformació de Möbius que envia aquests tres punts als punts especials $0, 1$ i ∞ . A més, tota transformació que fixa els tres punts $\{0, 1, \infty\}$ és la identitat. Com a conseqüència, l'espai de moduli de superfícies de gènere 0 amb tres punts marcats és força trivial:

$$\mathcal{M}_{0,3} = \{*\}.$$

En el cas de quatre punts marcats $\{x, y, z, t\}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$, raonant com al cas anterior, podem fixar tres dels punts, de manera que $x = 0, y = 1$ i $z = \infty$, i ens quedarà un paràmetre lliure $t \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. L'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,4}$ és l'espai que defineix aquest paràmetre t . Obtenim, doncs:

$$\mathcal{M}_{0,4} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

De manera anàloga, per a tot $n \geq 3$ obtenim:

$$\mathcal{M}_{0,n} = \{(t_1, \dots, t_{n-3}) \in \widehat{\mathbb{C}}^{n-3}; t_i \neq 0, 1, \infty, t_i \neq t_j\}.$$

Veiem, doncs, que la dimensió complexa de $\mathcal{M}_{0,n}$ és $n - 3$ i, per tant, la dimensió real és $2n - 6$, d'acord amb l'equació (1).

Observem que, si consideréssim menys de tres punts marcats, aleshores obtindríem espais de moduli de dimensions negatives. Així, per $n \leq 2$ l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,n}$ té sentit com a conjunt, però no com a entitat geomètrica, i la seva utilitat en aquests casos és dubtosa.

3.3 Tors complexos

Com en el cas de l'esfera de Riemann, ens fabricarem tors complexos a partir del pla complex \mathbb{C} . En aquest cas, el que farem és considerar un reticle enter $\Lambda \cong \mathbb{Z}^2$ i farem el quocient de \mathbb{C} per aquest reticle. De fet, resulta suficient considerar reticles de la forma $\Lambda_\tau := \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, on τ és un generador complex amb part imaginària positiva (figura 16), és a dir: τ viu al semiplà de Poincaré

$$\mathbb{H} := \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}.$$

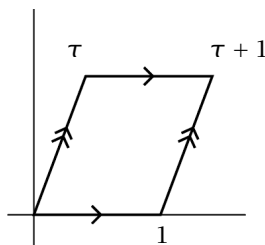


FIGURA 16: Reticle generat per $(1, \tau)$, amb $\tau \in \mathbb{H}$.

Així, llevat d'isomorfisme, tot tor complex és de la forma

$$\mathbb{T}_\tau^2 := \mathbb{C}/\Lambda_\tau = \{z + \Lambda_\tau; z \in \mathbb{C}\}$$

i tot punt de \mathbb{T}_τ^2 és una classe d'equivalència d'elements de \mathbb{C} per la relació

$$z \sim z' \iff \text{hi ha } n, m \in \mathbb{Z}; z = z' + n + m\tau.$$

Topològicament obtenim un tor. Però, com en el cas de l'esfera de Riemann, aquesta construcció ens regala una estructura geomètrica. Algebraicament, un tor complex és un grup abelià amb la suma que hereta de \mathbb{C} . De fet, la teoria dels tors complexos està fortament lligada a les *corbes el·líptiques* (corbes amb una estructura de grup) en el sentit que tota corba el·líptica és analíticament isomorfa a un tor complex. Les corbes el·líptiques apareixen en àrees tan diverses com la teoria de nombres, l'anàlisi complexa, la criptografia o la física matemàtica.

Observem que el tor \mathbb{T}_τ^2 té per defecte un punt marcat: la imatge de $0 \in \mathbb{C}$. D'altra banda, si dos reticles satisfan $\Lambda = \lambda \cdot \Lambda'$, on $\lambda \in \mathbb{C}^*$, obtenim tors isomorfs. Per tant, com a conjunt obtenim

$$\mathcal{M}_{1,1} = \{\text{reticles}\} / \mathbb{C}^*.$$

Si escollim reticles generats per $(1, \tau)$, on $\tau \in \mathbb{H}$, aleshores dos paràmetres τ i τ' descriuen reticles isomorfs si i només si

$$\tau' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d},$$

on la matriu pertany al grup $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ de matrius 2×2 amb determinant 1. Així, una descripció geomètrica de $\mathcal{M}_{1,1}$ ve donada pel quocient

$$\mathcal{M}_{1,1} = \mathbb{H} / \text{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

Com en els casos $\mathcal{M}_{0,0}$, $\mathcal{M}_{0,1}$ i $\mathcal{M}_{0,2}$, l'espai de moduli $\mathcal{M}_{1,0}$ sense punts marcats no té sentit com a objecte geomètric.

3.4 Superfícies més generals

Les superfícies de Riemann són el marc natural per estudiar el comportament global de les *funcions holomorfes*: funcions amb valors complexos en una o més variables que són, en tot punt del seu domini, diferenciables com a funcions complexes en tot entorn d'aquest punt. Un criteri per decidir si una funció $f: U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ és holomorfa ve donat per les *equacions de Cauchy-Riemann*: sigui $z = x + iy$ la descomposició d'un nombre complex en les seves parts real i imaginària, i escrivim

$$f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

on P i Q són funcions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aleshores f és holomorfa si i només si P i Q són diferenciables i satisfan:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Hi ha un criteri anàleg per a les funcions holomorfes $f: U \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ en diverses variables. Una conseqüència immediata de les equacions de Cauchy-Riemann és que tota funció holomorfa amb valors reals ha de ser constant. Aquest primer resultat ja indica que la teoria de les funcions holomorfes és molt més rígida que la de les funcions diferenciables en variable real. Aquesta rigidesa es tradueix en resultats dramàtics en geometria.

Podem pensar en les superfícies de Riemann com a versions deformades del pla complex. Amb més precisió, ens cal una superfície topològica X (Hausdorff i amb una base d'entorns numerable) dotada d'un atlas holomorf (figura 17):

un recobriment per oberts $X = \bigcup U_i$ juntament amb cartes $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}$ (que siguin homeomorfismes amb la seva imatge) i tal que els canvis de carta

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

siguin funcions holomorfes per tot parell d'oberts tals que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

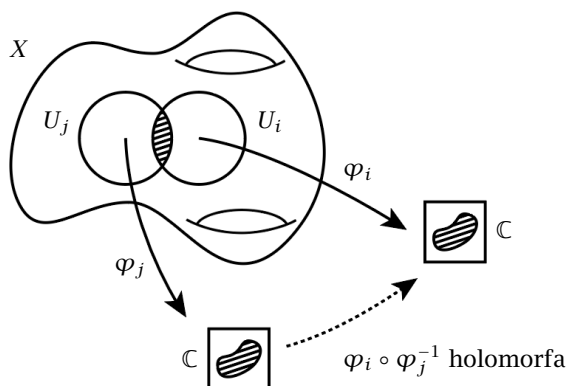


FIGURA 17: Condió d'atles holomorfe.

- Per definir un atlas holomorfe en l'esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, podem considerar els oberts $U = \mathbb{C}$ i $V = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ i les cartes $\varphi: U \rightarrow \mathbb{C}$ i $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}$ definides per $\varphi(z) = z$ i $\psi(z) = \frac{1}{z}$, respectivament. Per veure que aquestes cartes defineixen un atlas holomorfe només cal observar que el canvi de carta $\psi \circ \varphi^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ és una funció holomorfa en $\varphi(U \cap V) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- Per construir el quocient, el tor complex \mathbb{T}_τ^2 hereta de \mathbb{C} un atlas holomorfe, de manera que la projecció $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}_\tau^2$ és una aplicació holomorfa.

Dues superfícies de Riemann són *equivalents* si hi ha una equivalència topològica (homeomorfisme) que preserva la geometria (en particular, preserva funcions holomorfes). Més concretament, demanem que hi hagi una aplicació holomorfa i bijectiva entre les superfícies, de manera que la inversa també sigui holomorfa. També es parla de *biholomorfisme*. L'espai de moduli col·lecciona totes les possibles estructures geomètriques complexes per una superfície topològica fixada, llevat d'aquesta equivalència. Si tenim punts marcats, els biholomorfismes han de preservar aquests punts.

Una propietat important de cara a la construcció de l'espai de moduli és que en el cas $2 - 2g - n < 0$ el grup d'automorfismes d'una superfície de Riemann de gènere g amb n punts marcats és finit. En canvi, en els casos $(0, \leq 2)$ o $(1, 0)$ el grup d'automorfismes que preserva els punts marcats és infinit. Aquest fet fa impossible definir-ne els espais de moduli corresponents $\mathcal{M}_{0, \leq 2}$ i $\mathcal{M}_{1, 0}$ com a entitats geomètriques, com ja hem vist amb un càlcul de dimensions.

3.5 Estructures hiperbòliques

Si tenim una superfície topològica de gènere g i li retallem n discs disjunts, obtenim una superfície del mateix gènere, però amb n components de vora, com en la figura 18. La noció d'*atles holomorf* s'adapta a aquest nou context amb petits canvis a les vores. Així, podem considerar superfícies de Riemann amb vora.

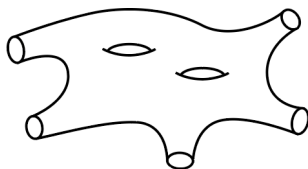


FIGURA 18: Superfície de gènere 2 amb cinc components de vora.

Recordem, d'altra banda, que una *superfície hiperbòlica* és una superfície equipada amb una mètrica riemanniana i completa de curvatura constant negativa. Pel teorema de Gauss-Bonnet, si tenim una superfície de gènere g amb n components de vora i volem que sigui hiperbòlica, caldrà que la característica d'Euler

$$\chi = 2 - 2g - n$$

sigui negativa. Aquesta condició exclou únicament els parells (g, n) donats per $(0, \leq 2)$ i $(1, 0)$, coincidint amb els casos excepcionals pels quals l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ no té significat geomètric. No és casualitat: l'estructura complexa d'una superfície de Riemann defineix una classe conforme de mètriques que, pel teorema d'uniformització, conté una mètrica hiperbòlica sempre que $\chi < 0$. A més, si demanem que la mètrica resultant sigui completa, aleshores aquesta mètrica hiperbòlica és única i dona lloc a una *cúspide* en cada punt marcat. Així, tenim la correspondència següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Superfícies de Riemann} \\ \text{de gènere } g \text{ i } n \text{ punts marcats} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Mètriques hiperbòliques} \\ \text{en superfícies de gènere } g \\ \text{i } n \text{ cúspides} \end{array} \right\}.$$

Per tant, podem definir l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ com l'espai de mètriques hiperbòliques, on els punts marcats esdevenen cúspides (figura 19). Aquestes cúspides cal pensar-les com a components de vora geodèsiques de longitud zero. En certa manera, el que hem fet és «punxar» la nostra superfície de Riemann en cadascun dels punts marcats per tal de «deixar escapar curvatura», creant singularitats de la mètrica i portant aquestes singularitats a distància infinita.

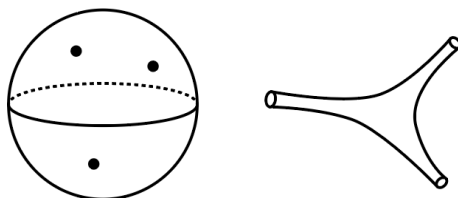


FIGURA 19: Correspondència entre l'esfera de Riemann amb tres punts marcats i els pantalons hiperbòlics.

Una definició alternativa de les superfícies hiperbòliques usa els recobriments per oberts i les cartes que ja hem vist anteriorment per a les superfícies de Riemann. En aquest cas, però, en comptes de \mathbb{C} , es demana que les cartes prenguin valors al pla hiperbòlic i que les funcions de transició siguin isometries en comptes de funcions holomorfes. Anem a revisar breument aquest punt de vista més constructiu.

El pla hiperbòlic és el primer exemple de geometria no-euclidiana, en què el postulat de les paral·leles és substituït per:

Donades una recta R i un punt p , tal que $p \notin R$, sempre hi ha almenys dues rectes que passen per p i no tallen R .

Hi ha diversos models equivalents del pla hiperbòlic. Un d'aquests models parteix del semiplà de Poincaré

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$$

que ja hem vist anteriorment, juntament amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Un altre model equivalent ve donat pel disc de Poincaré

$$\mathbb{D} := \{x + iy \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 < 1\}$$

amb la mètrica

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 - (x^2 + y^2))^2}.$$

En els dos casos $K = \mathbb{H}$ o \mathbb{D} la longitud d'una corba $\gamma: [a, b] \rightarrow K$ ve donada per

$$\ell_K(\gamma) := \int_{\gamma} ds.$$

Prenent l'ínfim entre les longituds de totes les corbes que uneixen dos punts donats, obtenim una distància en el pla hiperbòlic:

$$d_K(z, w) := \inf_{\gamma} \{\ell_K(\gamma); \gamma: z \rightarrow w\}.$$

Hi ha una isometria entre \mathbb{D} i \mathbb{H} i els dos models són equivalents.

Les corbes geodèsiques en el disc de Poincaré són els diàmetres del disc juntament amb tots els cercles ortogonals a la vora del disc (figura 20).

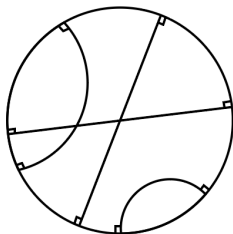


FIGURA 20: Geodèsiques al disc de Poincaré.

Si tenim una superfície topològica recoberta per cartes amb valors al pla hiperbòlic, aleshores aquesta hereta una mètrica hiperbòlica de forma natural. Si el que volem és una superfície hiperbòlica amb *components de vora geodèsiques*, caldrà que les cartes que impliquen la vora prenguin valors a *semiplans tancats* (dominis del pla hiperbòlic retallats al llarg de geodèsiques).

3.6 Polígons en el pla hiperbòlic

Una manera de construir-se un atlas hiperbòlic en una superfície és considerant polígons en el disc de Poincaré. Ja hem vist anteriorment com fabricar el tor identificant les arestes oposades d'un rectangle. Aquest mètode és vàlid en general: qualsevol superfície compacta de gènere g es pot obtenir identificant dues a dues les arestes d'un polígon (figura 21).

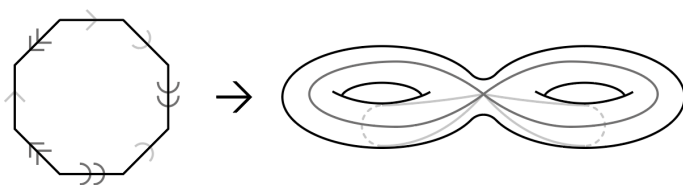


FIGURA 21: Identificant arestes d'un octaedre obtenim un doble tor.

Anàlogament, si el que volem és obtenir superfícies hiperbòliques, només cal considerar polígons en el pla hiperbòlic, com en la figura 22. Tot polígon regular de $4g$ arestes (que es pot construir amb angles interns de $\pi/2g$) dona lloc a una superfície hiperbòlica de gènere g (en aquest cas sense vora).

Aquesta construcció amaga un resultat més general que afirma que tota superfície hiperbòlica és isomorfa al quocient d'un domini del pla hiperbòlic amb vores geodèsiques per un subgrup discret, cosa que dona lloc a una tercera via per definir i construir les superfícies hiperbòliques.

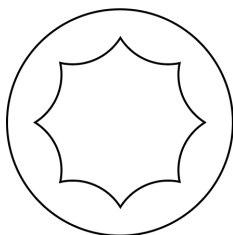


FIGURA 22: Identificant arestes en un polígon en el pla hiperbòlic obtenim superfícies hiperbòliques. En aquest cas, l'octàgon dona lloc a un doble tor.

4 Alguns dels resultats principals de Mirzakhani

En aquesta darrera secció revisarem alguns dels resultats més destacats de Mirzakhani sobre el càlcul de volums en espais de moduli, la conjectura de Witten, càlculs asimptòtics de geodèsiques i el teorema de la vareta màgica.

4.1 Càlcul de volums

Les mètriques hiperbòliques de les superfícies de Riemann indueixen, en l'espai de moduli, una *estructura simplèctica*. Aquesta estructura és, en certa manera, independent de l'estructura complexa de $\mathcal{M}_{g,n}$ i, a grans trets, el que ens dona és una forma de volum que permet integrar sobre l'espai de moduli. Mirzakhani obté fórmules polinòmiques molt precises per a certs volums associades als espais de moduli, com explicarem a continuació.

Donada una superfície de gènere g amb n punts marcats, escollim $3g - 3 + n$ corbes simples tancades que descomponguin la nostra superfície en parells de pantalons. Cadascuna d'aquestes corbes γ_i té associats uns paràmetres de *longitud-twist* $\{\ell_i, \tau_i\}$ que ens diuen com cal enganxar aquests pantalons al llarg de geodèsiques per tal de recuperar la superfície. Aquests paràmetres donen lloc a una *forma simplèctica*

$$\omega := \sum_{i=1}^{3g-3} d\ell_i \wedge d\tau_i.$$

Prenent una potència adequada d'aquesta 2-forma obtenim una *forma de volum*, que permet el càlcul del volum total de l'espai de moduli, entre d'altres.

De forma més general, Mirzakhani considera espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n)$, on ℓ_i fixen les longituds de les components de vora geodèsiques de cada superfície. Usant mètodes de reducció simplèctica i fórmules complexes per descomposicions de superfícies al llarg de geodèsiques hiperbòliques, Mirzakhani obté un càlcul recursiu del volum d'aquests espais, definit per

$$V_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n) = \int_{\mathcal{M}_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n)} \omega^{3g-3+n}.$$

Les fórmules que obté per a aquests volums són polinomis amb coeficients en $\mathbb{Q}(\pi)$ relacionats amb freqüències de classes característiques, en què el terme constant recupera el volum de l'espai de moduli tradicional $\mathcal{M}_{g,n}$. Per exemple, es té

$$V_{1,1}(\ell) = \frac{1}{24}(\ell^2 + 4\pi^2),$$

$$V_{1,2}(\ell_1, \ell_2) = \frac{1}{384}(4\pi^2 + \ell_1^2 + \ell_2^2)(12\pi^2 + \ell_1^2 + \ell_2^2).$$

Els resultats de Mirzakhani sobre els polinomis $V_{g,n}$ formen part del primer article ([8]) derivat de la seva tesi doctoral. Prèviament, només es coneixia el valor de $V_{g,n}(0, \dots, 0)$. La subsecció següent revela un exemple de la rellevància que poden arribar a prendre aquests resultats.

4.2 Conjectura de Witten

Hi ha almenys dos candidats per als models més simples de la gravetat quàntica en l'espai-temps de dues dimensions. Un primer candidat clàssic són els *models de matrius*, governats per *àlgebres de Virasoro*. Un altre candidat ve donat per la *gravetat topològica*, estretament lligada a la teoria d'intersecció dels espais de moduli. La motivació de Witten per formular la seva conjectura té origen en la idea que aquests dos models haurien de tenir la mateixa funció de correlació. Aquesta idea dona lloc a fórmules que expressen els nombres d'intersecció de certes classes cohomològiques dels espais de moduli en termes de la funció de partició dels models de matrius. Aquestes fórmules van ser demostrades per Kontsevich (va obtenir la medalla Fields el 1998 en part per aquest resultat).

Considerem una superfície $X \in \mathcal{M}_{g,n}$. A cada punt marcat p_i podem considerar l'espai cotangent \mathcal{L}_i . Quan X i els punts marcats varien, \mathcal{L}_i defineix un fibrat de línia complex en l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$. De fet, aquests fibrats s'estenen de forma natural a la compactificació $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Sense entrar en detalls tècnics, resulta que $\mathcal{M}_{g,n}$ no és compacte i hi ha una compactificació estàndard, de Deligne-Mumford, amb propietats especialment bones. Aquesta compactificació s'obté adjuntant superfícies amb geodèsiques tancades simples de longitud zero o, des de la perspectiva algebraica, superfícies amb singularitats nodals. En aquest espai s'hi defineixen unes classes cohomològiques $\psi_i := c_1(\mathcal{L}_i)$ donades per la primera classe de Chern de \mathcal{L}_i . Les funcions de correlació venen donades pels *nombres d'intersecció* d'aquestes classes

$$\langle \tau_{d_1}, \dots, \tau_{d_n} \rangle_g = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n},$$

on $\sum d_i = 3g - 3 + n$. En els coeficients dels polinomis $V_{g,n}$, Mirzakhani hi reconeix els *nombres d'intersecció* que apareixen en la fórmula de Witten. Aquesta identificació li permet traduir les relacions de recurrència d'aquests nombres a relacions entre els volums d'espais de moduli, i així dona una prova alternativa de la conjectura de Witten. Aquests resultats apareixen en el segon article ([9]) de la tesi doctoral de Mirzakhani.

4.3 Càlculs asimptòtics de geodèsiques

En el cas $\ell_i = 0$ els espais de moduli $\mathcal{M}_{g,n}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ recuperen els espais clàssics $\mathcal{M}_{g,n}$ corresponents a les superfícies hiperbòliques amb cúspides. Mirzakhani integra la funció $X \mapsto N(X, \ell)$ en l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ i demostra que el nombre $N(X, \ell)$ de geodèsiques tancades i simples de longitud $\leq \ell$ en una superfície $X \in \mathcal{M}_{g,n}$ satisfà

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{N(X, \ell)}{\ell^{6g-6+2n}} = C_X,$$

on $X \mapsto C_X$ defineix una funció contínua a $\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Observem que l'exponent de ℓ que apareix no és més que la dimensió real de l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ (equació (1)) i que C_X depèn fortament de la geometria.

Mirzakhani redueix la prova d'aquest resultat a entendre les densitats d'òrbites de geodèsiques en els *espais de laminacions mesurades* desenvolupats per Bill Thurston. Una *laminació geodèsica* és un subconjunt d'una superfície hiperbòlica format per la unió disjunta de geodèsiques simples i tancades. L'adjectiu *mesurada* indica certa mesura transversal. Com Mirzakhani explica a la seva tesi, aquest problema és similar al d'entendre les densitats de parells relativament primers en \mathbb{Z}^2 . El seu mètode consisteix a usar l'espai de moduli $\mathcal{M}_{g,n}$ per obtenir la mitjana d'aquestes densitats.

A partir de l'estudi de laminacions mesurades, Mirzakhani n'extreu els resultats d'estadística topològica que hem comentat breument en la secció 2. Per revisar-los amb més precisió, ens centrarem primer en l'exemple concret de les esferes hiperbòliques amb sis cúspides. Qualsevol geodèsica simple i

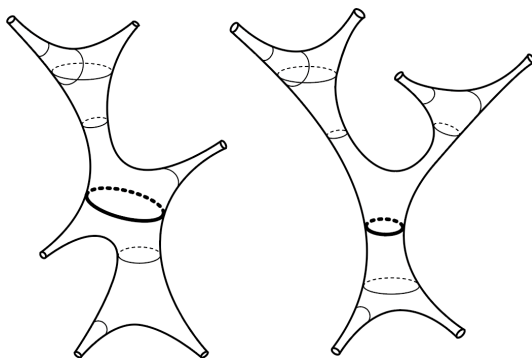


FIGURA 23: Tipus topològics de l'esfera hiperbòlica amb sis cúspides.

tancada separa aquesta superfície en dues components connexes. Obtenim o bé tres cúspides en cadascuna de les components, o bé dues cúspides en una component i quatre en l'altra. La geometria hiperbòlica prohibeix altres particions. Per tant, tenim una descomposició

$$N(X, \ell) = N_{3+3}(X, \ell) + N_{2+4}(X, \ell)$$

del nombre de corbes geodèsiques simples com la suma de corbes corresponents a cada tipus topològic. Mirzakhani demostra que la freqüència asimptòtica de cada tipus topològic està ben definida per a tota superfície hiperbòlica. En aquest exemple concret obté:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} (N_{3+3}(X, \ell) : N_{2+4}(X, \ell)) = 4 : 3.$$

Observem que aquesta freqüència únicament depèn del gènere de la superfície, i no de la seva geometria, tot i que per calcular-les utilitza l'espai de moduli $\mathcal{M}_{0,6}$.

Els resultats que Mirzakhani presenta en el tercer article ([11]) de la seva tesi són molt més generals: hi ha un nombre finit de classes d'equivalència de corbes geodèsiques simples en una superfície topològica de gènere g amb n cúspides. Mirzakhani demostra que la freqüència asimptòtica de geodèsiques simples tancades està ben definida i és la mateixa per a tota superfície $X \in \mathcal{M}_{g,n}$. Aquests nombres s'expressen, un altre cop, en termes de nombres d'intersecció dels espais de moduli. D'aquesta manera, Mirzakhani descriu propietats geomètriques de superfícies hiperbòliques individuals, en termes de la geometria i topologia de l'espai de moduli que les parametritza.

4.4 Teorema de la vareta màgica

Les superfícies que obtenim amb el desplaçament de taules de billar poligonals són exemples particulars de les anomenades *superfícies de translació*, que en els casos més elementals venen donades per una unió finita de polígons en el pla amb identificacions d'arestes per translació. Aquestes superfícies apareixen també de forma natural en física d'estat sòlid, així com en problemes de teoria de grups, entre d'altres.

Hi ha un espai de moduli \mathcal{H} que parametritza les superfícies de translació. Aquest espai, altament relacionat amb l'espai de moduli de les superfícies de Riemann, està dotat d'una acció del grup $SL(2, \mathbb{R})$ que generalitza l'acció en l'espai $GL(2, \mathbb{R})/SL(2, \mathbb{Z})$ dels tors plans. La descripció d'aquesta acció en el cas d'una superfície X obtinguda a partir d'un polígon P és senzilla: tota transformació lineal $\varphi \in GL(2, \mathbb{R})$ del pla envia P a un nou polígon $\varphi \cdot P$. Identificant les arestes corresponents obtenim una nova superfície de translació que denotem per $\varphi(X)$. El subgrup $SL(2, \mathbb{R})$ preserva les àrees dels polígons i, per tant, preserva certs estrats de l'espai de moduli, i dona lloc a una *acció ergòdica* en aquests estrats.

La teoria revolucionària de Mirzakhani, en col·laboració amb Eskin i Mohammadi, fa possible analitzar la dinàmica d'aquesta acció amb gran detall. Entendre l'òrbita d'una superfície de translació particular X en l'espai de moduli ajuda a respondre moltíssimes qüestions sobre la superfície (o taula de billar) original: el problema consisteix a considerar el conjunt de totes les superfícies de la forma $\varphi(X)$ per $\varphi \in SL(2, \mathbb{R})$ i estudiar-ne la clausura en \mathcal{H} . En principi, aquestes clausures podrien ser objectes extremament complicats, incloent comportaments fractals. En el cas de gènere 2, McMullen va provar que no és el cas: tota clausura d'òrbita esdevé una varietat diferencial (possiblement

amb singularitats moderades). Aquest resultat inèdit va ser considerat un enorme avenç en dinàmica no homogènia. No obstant, les tècniques de McMullen es basen en propietats molt especials dels dobles tors que no suporten els gèneres superiors. El teorema de la vareta màgica respon a una conjectura molt buscada: descriu les clausures d'òrbita en termes de varietats diferencials amb singularitats moderades (anomenades *orbifolds*), per al cas de superfícies de qualsevol gènere $g \geq 2$ [4, 5]. Les tècniques de Mirzakhani i els seus col·laboradors s'inspiren en resultats profunds de la dinàmica de fluxos unipotents en espais homogenis de Marina Ratner. Resulta increïblement sorprenent que aquests resultats es materialitzin en el món altament no homogeni dels espais de moduli.

Quan la vareta màgica toca una superfície de translació, ens retorna una varietat que ens diu tot i més del que voldríem saber sobre la superfície inicial. Utilitzada en dinàmica de billars, la vareta respon a nombrosos problemes de seguretat, d'il·luminació i de trajectòries amb obstacles [6]. El poder de la vareta actua molt més enllà dels problemes de billars. És molt possible que, en el temps que dediqueu a llegir aquest text, hagi inspirat més d'una aplicació en geometria i en dinàmica.

Nota bibliogràfica

Hi ha nombrosos articles, tant de divulgació com de recerca, que descriuen treballs de Mirzakhani amb més o menys profunditat. L'article [1] recull testimonis de la seva vida per part d'amics, col·laboradors i estudiants seus, a més de diversos articles en què s'exposen algunes de les seves contribucions a les matemàtiques. La conferència de laudació en el Congrés Internacional de Matemàtiques de 2014, impartida pel director de tesi de Mirzakhani, Curtis McMullen, revisa tres grans línies d'investigació [7]. L'article de Zorich [15] se centra en el teorema de la vareta màgica.

En l'àmbit de la recerca, les notes de Wright ([14]) ofereixen un recorregut pels resultats continguts en els més de vint articles de Mirzakhani; les notes de Wolpert ([13]) revisen la tríada d'articles derivats de la seva tesi, i el recent article de Dijkgraaf i Witten [3] se centra en la prova de la conjectura de Witten.

La millor font de totes són, sens dubte, els articles de la mateixa Maryam Mirzakhani, així com les seves conferències, que es poden trobar a la xarxa en format audiovisual, començant per [12].

Agraïments

Aquest article deriva de la conferència que l'autora va fer en el marc de l'exposició i activitats «Remember Maryam Mirzakhani», a la Universitat Politècnica de Catalunya. Agraïxo al comitè organitzador i en especial a Maria Alberich i Anna de Mier el fet d'haver-me proposat aquest repte, amb el qual he après tant.

Referències

- [1] AUTORS DIVERSOS. «Maryam Mirzakhani: 1977-2017». Coordinat per H. BARCELO i S. KENNEDY. *Notices Amer. Math. Soc.*, 65 (10) (2018), 1221-1247.

- [2] DELECROIX, V.; GOUJARD, E.; ZOGRAF, P.; ZORICH, A. «Masur-Veech volumes, frequencies of simple closed geodesics and intersection numbers of moduli spaces of curves». Preprint (2019). arXiv:1908.08611.
- [3] DIJKGRAAF, R.; WITTEN, E. «Developments in topological gravity». A: *Topology and Physics*. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2019, 17–80.
- [4] ESKIN, A.; MIRZAKHANI, M. «Invariant and stationary measures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on moduli space». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 127 (2018), 95–324.
- [5] ESKIN, A.; MIRZAKHANI, M.; MOHAMMADI, A. «Isolation, equidistribution, and orbit closures for the $SL(2, \mathbb{R})$ action on moduli space». *Ann. of Math. (2)*, 182 (2) (2015), 673–721.
- [6] LELIÈVRE, S.; MONTEIL, T.; WEISS, B. «Everything is illuminated». *Geom. Topol.*, 20 (3) (2016), 1737–1762.
- [7] MCMULLEN, C. T. «The work of Maryam Mirzakhani». A: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014*. Vol. 1. Seül: Kyung Moon Sa, 2014, 73–79.
- [8] MIRZAKHANI, M. «Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces». *Invent. Math.*, 167 (1) (2007), 179–222.
- [9] MIRZAKHANI, M. «Weil-Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves». *J. Amer. Math. Soc.*, 20 (1) (2007), 1–23.
- [10] MIRZAKHANI, M. «Ergodic theory of the earthquake flow». *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008 (3) (2008), Art. ID rnm116, 39 p.
- [11] MIRZAKHANI, M. «Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces». *Ann. of Math. (2)*, 168 (1) (2008), 97–125.
- [12] MIRZAKHANI, M. «Dynamics on moduli spaces of curves». Conferència: Current Developments in Mathematics, Harvard Math, Youtube. <https://youtu.be/tpr1QMC1SYQ>.
- [13] WOLPERT, S. A. «Mirzakhani’s volume recursion and approach for the Witten-Kontsevich theorem on moduli tautological intersection numbers». A: *Moduli Spaces of Riemann Surfaces*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2013, 221–266. (IAS/Park City Math. Ser.; 20)
- [14] WRIGHT, A. «A tour through Mirzakhani’s work on moduli spaces of Riemann surfaces». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 57 (3) (2020), 359–408.
- [15] ZORICH, A. «Le théorème de la baguette magique de A. Eskin et M. Mirzakhani». *Gaz. Math.*, 142 (2014), 39–54.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA
 UNIVERSITAT DE BARCELONA
 08007 BARCELONA
 jcirici@ub.edu