Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 34, núm. 1, 2019. Pàg. 5–32. DOI: 10.2436/20.2002.01.84

L'inici de la geometria no euclidiana a Itàlia

Miriam Alcalá Vicente

Resum: La geometria no euclidiana és, probablement, la teoria matemàtica més revolucionària del segle XIX. Després de passar desapercebuda durant més de trenta anys, el 1860 s'inicia un procés de renaixença, que va ser impulsat per la labor de dos matemàtics, G. Jules Hoüel i Giuseppe Battaglini.

En aquest article tractarem el procés de difusió, desenvolupament i acceptació de la nova geometria, centrant-nos en el context italià. En particular, mostrarem que l'aportació de Battaglini en aquest camp va més enllà de la divulgació. Al final del seu article «Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky» ens trobem amb una inesperada coincidència entre la descripció que fa del pla no euclidià i el model del disc donat més tard per Eugenio Beltrami. Ens proposem justificar la semblança entre les dues interpretacions.

Paraules clau: història de la geometria, geometria no euclidiana, Hoüel, Battaglini, Beltrami.

Classificació MSC2010: 01A55, 51-03, 53-03.

1 Introducció

Ens situem en el moment de la renaixença de la geometria no euclidiana, que es va iniciar a Europa l'any 1860. Aquest procés culmina amb la presentació del model del disc de Beltrami, el 1868, i del model projectiu de Klein, el 1871, que van aportar les raons necessàries per admetre la validesa de la nova teoria, ja que constitueixen una prova de la seva consistència relativa a la geometria euclidiana o projectiva, respectivament. L'acceptació de la geometria no euclidiana va suposar un trencament amb el pensament matemàtic anterior i va provocar una crisi en els fonaments de les matemàtiques, que no va ser resolta fins a finals de segle amb la reformulació de la geometria donada per Hilbert. Podríem dir, doncs, que es tracta de la descoberta més transcendent del segle XIX, no només en l'àmbit matemàtic, sinó també filosòfic.

L'objectiu d'aquest article serà veure com arriba, de la mà de G. J. Hoüel[1] i G. Battaglini,[2] la nova geometria a Itàlia i el seu posterior desenvolupament en els treballs d'E. Beltrami.[3] A la vegada, explicarem les diferents posicions en el debat sobre la seva acceptació.

La data, 1860, que ha passat a considerar-se el començament d'aquesta renaixença ve donada per ser l'any en què es comença a publicar la correspondència de C. F. Gauss.[4] Les cartes del cèlebre matemàtic van desvelar que s'havia ocupat durant molts anys del postulat de les paral·leles, tot i no haver publicat mai res,[5] i que les seves recerques coincidien amb les publicades per J. Bolyai i N. I. Lobatxevski.[6] No només això, també declara la seva aprovació i admiració pels treballs dels dos geòmetres[7] i s'inclina a acceptar la nova geometria.[8]

---

1 Guillaume Jules Hoüel (Thaon, 1823 - Périers, 1886) va estudiar primer a Caen i després a Rollin, abans d'ingressar a l'École normale supérieure l'any 1843. En acabar el seus estudis va ensenyar matemàtiques a diferents liceus fins que, el 1855, finalitza el seu doctorat en mecànica celeste a la Facultat de Ciències de la Sorbona de París. El 1859 obté la càtedra de matemàtiques pures de la Facultat de Ciències de Bordeus, succeint Le Besgue, i donant classe de càlcul infinitesimal. A més de les seves aportacions en geometria, és destacable la seva feina en la creació i revisió de taules de càlcul.

2 Giuseppe Battaglini (Nàpols, 1826 - 1894) va assistir a l'escola privada de matemàtiques de Tucci i d'Angelis, deixebles de Fergola, on es va preparar per a l'admissió a la Regia Scuola di Ponti e Strade, en la qual es va llicenciar l'any 1848. Dos anys més tard comença com a alumne en l'Observatori de Capodimonte, feina que aviat es veurà obligat a deixar per negar-se a signar la petició del rei Borbó per abolir la constitució. L'any 1854 es presenta al concurs per a una càtedra a la Universitat de Nàpols, sense aconseguir la plaça. Donarà, llavors, classes a l'estudi de Tucci fins a l'expulsió dels Borbons l'any 1860, quan va passar a ocupar la nova càtedra de geometria superior a la Universitat de Nàpols. El 1871 es trasllada a la Universitat de Roma, fins al 1885, quan torna a la de Nàpols.

3 Eugenio Beltrami (Cremona, 1835 - Roma, 1900) prové d'una família de reconeguts ideals del Risorgimento, per la qual cosa vivien una situació difícil sota el govern austríac. Va començar a estudiar matemàtiques a la Universitat de Pavia, però va haver d'abandonar els estudis abans de llicenciar-se per qüestions econòmiques. Obligat a treballar en feines administratives per a l'enginyer Diday, descobreix la seva vocació matemàtica i refà del tot la seva educació científica. El 1862, Brioschi el fa nomenar per decret professor extraordinari a la Universitat de Bolonya. Un any més tard, E. Betti li ofereix la càtedra de geodèsia a la Universitat de Pisa. Degut a la insistència de Cremona, que va ser el seu amic i mentor durant molts anys, torna a la Universitat de Bolonya, el 1866, i es trasllada després a Roma, el 1873. Descontent a la capital i per la salut de la seva dona, intentarà un trasllat a la Universitat de Pàdua, que fracassà per l'oposició de Cremona. L'any 1876 aconsegueix la càtedra de física matemàtica a la Universitat de Pavia, on trobarà el seu amic Felice Casorati, però la mort prematura d'aquest el farà decidir a tornar a Roma el 1891.

4 La primera de publicar-se va ser la que mantenia amb Schumacher, editada per C. A. F. Peters en sis volums que aparegueren entre els anys 1860–1865 [41].

5 Vegeu la carta de Gauss a Schumacher amb data 17.5.1831 editada per Peters, a [41, 1861, vol. 2, p. 261] o a *Werke* [24, 1900, vol. 8, p. 212].

6 Hoüel, en la seva traducció de l'article de Battaglini [5, p. 217], afirma a peu de pàgina que, de fet, seria més just anomenar a la teoria de les paral·leles de Lobatxevski la teoria de Gauss, ja que la correspondència mostra que va ser el primer a inventar-la.

7 Vegeu, per exemple, sobre el treball de Janos Bolyai, la carta de Gauss a Gerling del 14.2.1832 (a Schaefer [45, p. 387] o a *Werke* [24, 1900, vol. 8, p. 220]), o l'escrita al pare de Janos, Farkas, el 6.3.1832 (a *Werke* [24, vol. 8, p. 220–221], o a la transcripció digitalitzada a `https://gauss.adw-goe.de`). Sobre el treball de Lobatxevski, vegeu per exemple la carta a Schumacher del 28.11.1846 (a Peters [41, 1863, vol. 5, p. 246–247] o a *Werke* [24, 1900, vol. 8, p. 239]).

8 Gauss reconeix per primer cop que no troba res d'absurd en la hipòtesi no euclidiana a la

Gauss, deliberadament, no va fer públiques aquestes opinions; només les havia compartit amb alguns amics i col·legues interessats en la qüestió, conscient que la comunitat matemàtica, fortament influenciada per la filosofia kantiana, no acceptaria les noves idees.[9] Sense el suport de Gauss, les massa innovadores recerques de J. Bolyai i N. I. Lobatxevski no van tenir la repercussió que calia esperar davant la solució d'un problema que havia mantingut ocupats els matemàtics des de la mateixa aparició dels *Elements* d'Euclides.

Recordem que, en aquesta recopilació, el matemàtic grec construeix tot el coneixement geomètric de l'època de manera rigorosa, fent servir la deducció lògica i partint de cinc postulats o axiomes que havien de ser tan evidents que ningú no en pogués discutir la veracitat. Però la complexa redacció del cinquè postulat, el de les paral·leles, que contrasta amb la senzillesa dels quatre anteriors, va portar a la creença que es devia poder demostrar a partir dels altres, i va passar a ser considerat com un teorema.[10] Durant els segles posteriors molts matemàtics van intentar demostrar el teorema sense èxit, arribant sempre a una *petitio principii*, és a dir, en algun moment de la prova suposaven com a cert un fet, aparentment evident, que en el fons era un enunciat equivalent al postulat. En els seus treballs, independents, Bolyai i Lobatxevski parteixen de la negació del postulat de les paral·leles, i aconsegueixen construir un sistema geomètric sense cap contradicció lògica. D'aquesta manera, consideren que han provat la impossibilitat de demostrar el postulat a partir dels anteriors, a la vegada que han trobat una nova geometria possible diferent de l'euclidiana.[11]

Aquest resultat desvelador va passar pràcticament desapercebut, en part, perquè els autors no es movien en els principals cercles acadèmics, però sobretot, com bé sabia Gauss, perquè contradeia l'epistemologia de Kant. En la seva *Crítica a la raó pura*, Kant explica que no tot el coneixement prové de l'experiència, hi ha conceptes que són innats a la raó humana. L'ésser humà, en observar la realitat, organitza les seves percepcions en l'espai i el temps. Aquestes són, doncs, dues condicions *a priori* de l'experiència sensible. La geometria euclidiana, en descriure les propietats de l'espai, és un coneixement *a priori*, és la nostra manera de percebre la realitat, per tant, és l'única geometria possible. L'aparició d'una geometria basada en la negació d'un axioma i lògicament coherent desmunta completament la visió kantiana del món. La

---

seva carta a Gerling de l'11.4.1816 (a Schaefer [45, p. 122], o a *Werke* [24, vol. 8, p. 168–169]), i es mostra cada vegada més convençut en la correspondència posterior. Vegeu per exemple la carta a Schumacher del 12.7.1831 (a Peters [41, 1861, vol. 2, p. 269] o a *Werke* [24, 1900, vol. 8, p. 215–218]).

9 Abardia, Reventós i Rodríguez, a «What did Gauss read in the Appendix?» [1], mostren que Gauss intentava buscar una superfície que fes el paper d'esfera imaginària en el seu estudi de superfícies corbes. Segurament, en no trobar-la, no es va decidir a publicar res sobre la qüestió, ja que no tenia una solució convincent.

10 De fet, ja en temps d'Aristòtil, hi havia discussions sobre el postulat de les paral·leles. Aquesta és probablement la raó per la qual Euclides va elaborar un enunciat tan complex i va decidir, encertadament, incloure'l entre els axiomes. Vegeu l'article d'Imre Toth «Non-Euclidean Geometry before Euclid» [47].

11 El 3 de novembre del 1823, Bolyai escriu al seu pare: «del no-res he creat un univers nou». Podem llegir la versió anglesa de la carta a Bonola [15, p. 98] i la traducció al català a *Una lectura del* Disquisitiones, de Reventós i Rodríguez [42, p. 110].

realitat podria no ser euclidiana, després de tot. I encara que ho fos, només es podria corroborar mitjançant l'experiència, veient quina de les dues geometries s'adapta millor a la realitat sensible. Com diu Lobatxevski, «res no autoritza, a part de les observacions directes, a suposar que en un triangle la suma dels angles és igual a dos angles rectes».[12]

La qüestió de les paral·leles va caure en l'oblit i, durant els anys següents, el postulat va passar a considerar-se de la mateixa manera que la quadratura del cercle o el moviment perpetu, problemes que s'han mantingut irresolubles al llarg de la història. La referència a aquests problemes clàssics[13] mostra, però, un canvi de mentalitat; entre els matemàtics es va començar a instaurar la idea que el cinquè postulat no es podia demostrar a partir dels altres quatre, cosa que va donar una certa predisposició a acceptar les noves idees proposades per Bolyai i Lobatxevski.

L'autoritat de Gauss va despertar ràpidament l'interès per les poc conegudes obres d'aquests autors.[14] Aviat van aparèixer les traduccions franceses i italianes, fetes respectivament per G. J. Hoüel i G. Battaglini.[15] Aquests dos matemàtics van impulsar el procés de renaixença de la nova geometria, no només amb les seves traduccions, sinó també amb la divulgació i el suport que van donar a les noves idees. El seu paper va ser fonamental en el posterior desenvolupament de la geometria no euclidiana.

2 Context polític i social a Itàlia

Ens trobem en els últims anys del Risorgimento (1815–1870), que va finalitzar amb la unificació dels diferents estats italians en un sol país, sota el govern del rei Víctor Manuel. Molts matemàtics italians van participar en aquest moviment, formant part de les revoltes contra el règim polític establert,[16] i compartien l'ideal de la construcció del nou estat. Amb la unificació, van passar a ocupar càrrecs a les noves institucions, des d'on es van poder implicar en les reformes de l'educació pública i la universitat que va iniciar el nou govern. Els matemàtics

12 «... j'ai atâché de prouver que rien n'autorise, si ce ne sont les observations directes, de supposer dans un triangle rectiligne la somme des angles égale à deux angles droits...» A «Géométrie imaginaire» [36, p. 295].

13 Vegeu R. Baltzer, *Die Elemente der Mathematik* [3, p. III], i G. J. Hoüel, «Quelques réflexions au sujet de la ligne de longueur minimum sur la sphère» [28, p. 78].

14 Voelke, a [48, p. 50], assenyala les cartes de Gauss a Schumacher amb dates 28.11.1846 i 12.7.1831 (a Peters [41, 1863, vol. 5, p. 246–247 i 1861, vol. 2, p. 269] o a *Werke* [24, 1900, vol. 8, p. 238–239 i p. 215–218]) com els principals desencadenants de la renaixença de la geometria no euclidiana; Battaglini es refereix, a més, a la del 17.5.1831 (a Peters [41, vol. 2, p. 258–261]) en la seva carta a Genocchi del 14.5.1867, a [19, p. 167–168]. El pes de l'opinió de Gauss ve confirmat pels comentaris de Baltzer en el prefaci de *Die Elemente der Mathematik* [3, p. III], i de Hoüel en *Sur l'axiôme* XI *d'Euclide* [27, nota VI de l'apèndix, p. 72].

15 El 1866 es publica la traducció del *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* de Lobatxevski al francès [37], i l'any següent la de la «Pangeometria» a l'italià [38]. Les traduccions de l'*Appendix* de Bolyai, francesa [14] i italiana [13], són de 1868.

16 Per exemple, Cremona va participar en la defensa de la República de Venècia fins a la seva rendició l'agost del 1849; Brioschi va lluitar a les Cinc Jornades de Milà, en les quals els habitants insurgents van vèncer les tropes ocupants del govern austríac; Betti va pertànyer al batalló dels universitaris pisans a la batalla de Curtatone i Montara el 1848; i Beltrami va ser acomiadat de l'administració ferroviària lombardovèneta el 1859, per les seves idees polítiques.

més influents en l'àmbit polític van ser Luigi Cremona (1830–1903),[17] Francesco Brioschi (1824–1897) i Enrico Betti (1823–1892).[18]

El Govern va crear també nous centres de recerca i noves càtedres, com les de geometria superior, assignades per reial decret a Cremona a Bolonya i a Battaglini a Nàpols. Van aparèixer escoles tècniques destinades a formar enginyers, com el Politecnico di Milano, fundat per Brioschi el 1863, i la Scuola di Applicazioni per gli Ingegneri a Roma, dirigida per Cremona, on també van donar classe Battaglini i Beltrami. La darrera formava part del projecte de convertir la recent proclamada capital en el principal centre científic i de formació del país. Amb aquesta idea es va crear també una escola normal per formar professors,[19] i es va cridar els personatges més il·lustres i reputats a treballar a la universitat. Roma, però, no es va acabar imposant com a centre de recerca matemàtica a Itàlia.[20]

El projecte per promoure el desenvolupament de la matemàtica va seguir diverses línies d'actuació,[21] entre les quals la internacionalització de la recerca italiana. Amb aquest propòsit, allotjats a casa de Placido Tardy, a Gènova, en les vacances de Pasqua del 1858, es troben Genocchi, Betti i Brioschi; els darrers es van conèixer en aquell moment. La reunió era per parlar de la nova revista *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, que es començaria a editar aquell any. Amb l'entrada dels tres matemàtics en la direcció, la publicació havia de substituir els *Annali di scienze matematiche e fisiche*, que es publicaven des del 1850 sota la direcció de Barnaba Tortolini i que ja difonien gran part de la recerca feta a Itàlia. L'objectiu era mantenir els matemàtics informats també sobre la recerca que es duia a terme fora del seu país, iniciant una feina de traducció i divulgació de les principals obres europees. La iniciativa era compartida pel *Giornale di Matematiche*, dirigit per Battaglini a Nàpols, que es va convertir en la principal via de difusió de la geometria no euclidiana.

En la trobada, Betti, Brioschi i Genocchi projecten fer un viatge a les principals universitats estrangeres. Pretenen, principalment, conèixer les últimes novetats en recerca per tal de publicar-les a la nova revista i posar-les a l'abast dels matemàtics italians, així com presentar les investigacions dels darrers. Al viatge, hi va acabar anant Felice Casorati (1835–1890), llavors assistent de Brioschi, en lloc de Genocchi, i van visitar, entre els mesos de setembre i novembre, les principals universitats de França i Alemanya, països de considerable tradició en la formació de grans matemàtics. A Alemanya, van anar a Göttingen, on van conèixer Dedekind i Riemann, però no els va ser possible trobar-se amb Dirichlet. També van viatjar a Berlín, on van conèixer Weierstrass, Kummer i Kronecker, a Leipzig i a Dresden. A París, van conèixer Bertrand i Hermite, però malauradament no van poder trobar-se amb Liouville.

17 Va ser senador, ministre d'Instrucció Pública i vicepresident del Senat.

18 Tots dos van ser diputats, senadors i secretaris generals del Ministeri d'Instrucció Pública. La seva col·laboració és considerada el principal potenciador del desenvolupament de les matemàtiques postunitàries, vegeu «New perspectives on Beltrami's life and work» [46, p. 469].

19 Vegeu la carta de Beltrami a Hoüel, Bolonya 8.10.1873, a [12, p. 176].

20 En les cartes de Battaglini a Hoüel s'evidencien els problemes que sorgiren; vegeu, per exemple, la del 25.1.1872, a [19, p. 126–127].

21 R. Tazzioli enumera les línies d'actuació que es van dur a terme a «New perspectives on Beltrami's life and work» [46, p. 469].

Betti quedà força impressionat de la trobada amb Riemann. De seguida va traduir la seva *Inauguraldissertation*, del 1851 [43], i es va encarregar de promocionar les seves idees. Entre els dos matemàtics va sorgir una gran amistat i Riemann va passar llargues temporades a la Universitat de Pisa convidat per Betti. Durant aquests anys, Beltrami era professor de geodèsia a la mateixa universitat però, com confesa a Hoüel,[22] en les seves freqüents xerrades, Riemann mai no va parlar de les innovadores idees exposades a la seva memòria pòstuma.[23]

Els matemàtics italians van mantenir el contacte amb les universitats estrangeres i es van esforçar a enviar-hi els joves a especialitzar-se. Va ser, per exemple, el cas de Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925) i Luigi Bianchi (1856–1928), que van assistir a les classes de Klein a la Universitat de Munic, o Ulisse Dini (1845–1918), alumne de Betti, que va estudiar un any a París amb Hermite.

Els esforços per potenciar la investigació van comportar l'obertura de nous camps de recerca i van propiciar un entorn científic que aconseguí formar una nova generació de matemàtics italians reconeguda internacionalment. Pertanyen a aquesta generació, a cavall entre els segles XIX i XX, Ricci-Curbastro i el seu deixeble Tullio Levi-Civita (1873–1941), formats a la Scuola Normale Superiore de Pisa, dirigida per Betti. També va ser molt destacable l'escola italiana de geometria algebraica, iniciada per Corrado Segre (1863–1924) i Eugenio Bertini (1846–1933) seguint la línia dels treballs de Cremona, que té com a màxims representants Guido Castelnuovo (1865–1952), Federigo Enriques (1871–1946), Francesco Severi (1879–1961) i Giuseppe Veronese (1854–1917).

La reforma en l'educació va portar a una revisió de l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles. Seguint les indicacions de Cremona, el 1867, el ministre d'educació proposa tornar a utilitzar els *Elements* d'Euclides per ensenyar la geometria.[24] Aquell mateix any, Betti i Brioschi publiquen una revisió dels *Elements* [11], amb alguns comentaris i una sèrie d'exercicis al final de cada llibre,[25] pensat perquè es fes servir com a llibre de text. El manual seguia un estil purament euclidià, conservant el llenguatge característic i sense fer ús de l'àlgebra o de l'aritmètica. La seva intenció era contraposar-se als tractats comuns que seguien la línia dels *Elements de Legendre*.[26] L'ús de mètodes exclusivament geomètrics havia estat reivindicat per Hoüel a l'*Essai critique*,[27] que insistia en la necessitat d'abandonar la metodologia de Legendre en considerar que els procediments moderns que s'introdueixen són del tot innecessaris en l'exposició.

22 Vegeu la carta de Beltrami a Hoüel, Bolonya 4.12.1868, a [12, p. 69].

23 Es tracta de l'*Habilitationsvortrag*, la dissertació feta per Riemann, el 1854, per obtenir la qualificació postdoctoral necessària per donar classe a les universitats alemanyes, titulada «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen» [44]. La memòria es va publicar per primer cop el 1868, dos anys després de la mort de Riemann.

24 Estratto dal Decreto Coppino (10.10.1867), *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia*, Florència 24 d'octubre de 1867.

25 Segons explica Forti a Hoüel a la seva carta del 3.12.1867, que es troba al *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des Sciences de París.

26 Tal com els mateixos autors especifiquen al prefaci [11, p. VI–VII].

27 Hoüel exposa les seves opinions sobre com hauria d'estructurar-se l'ensenyament de les matemàtiques a la nota *Réflexions sur l'enseignement de la géométrie élémentaire* de l'apèndix de l'*Essai critique*, a [27, p. 81–85] o a [32, p. 88–91]. Al seu manual, Betti i Brioschi es refereixen al treball de Hoüel en diverses ocasions.

El text no va tenir, però, una bona acceptació entre el professorat, degut a la seva complexitat i a la manca d'aportacions didàctiques, i va passar a engrandir la discussió, encetada pel decret ministerial, entre partidaris i detractors de fer servir els *Elements* com a llibre de text. Els primers defensaven el rigor d'Euclides, que consideraven perdut, i creien que era una bona manera d'ensenyar el raonament lògic. Els segons el consideraven antiquat, perquè no incloïa els descobriments recents que s'havien fet en aquesta disciplina, i pel llenguatge complicat que s'hi utilitza.

La polèmica es va revifar amb la traducció de la memòria de J. M. Wilson, «Euclid as a text-book of elementary geometry»,[28] publicada al *Giornale di Matematiche* sota la signatura R. R., darrere la qual s'amagava el professor Raffaele Rubini, de la Universitat de Nàpols.[29] L'escrit fa una crítica contundent del text d'Euclides i conclou que és «antiquat, artificial, il·lògic i inapropiat» com a llibre per a l'ensenyament.[30] La reacció dels partidaris del text d'Euclides no es va fer esperar. Battaglini publicarà al *Giornale* la rèplica de Brioschi i Cremona, defensant la mesura governamental [16] i un fragment de la carta que va rebre de Hoüel [29]. Tot i així, sembla que l'editor compartia més les opinions de Rubini.[31] En les seves cartes a Hoüel, Battaglini accepta la necessitat del rigor lògic i que cal desenvolupar els conceptes sense recórrer a l'àlgebra,[32] però també diu que el text d'Euclides s'hauria de fer servir només en «primer lloc», sempre suposant que se li donés un format modern i que fos rectificat en alguns punts.[33] Creiem que el que en realitat està dient, amb molta diplomàcia, és que considera el text antiquat i que el troba insuficient per a conèixer en profunditat la geometria, segurament pensant en els nous descobriments. La nostra interpretació es confirma en la carta que el napolità escriu a Genocchi, on es mostra contundent en el seu desacord amb l'ús del text d'Euclides:

> . . . non ho ritegno a dire che, con tutto rispetto pel merito dell'Euclide, ritengo i suoi Elementi come libro inadatto all'insegnamento, tanto se si ha in miral l'ammaestramento nella *Geometria* (per la povertà di quel libro) quanto se si riguarda il solo lato educativo, poiché credo che quel libro sia più adatto ad addormentare la mente dei ragazzi, che a svolgere le loro facoltà.[34]
>
> [. . . no tinc reserves a dir que, amb tot el respecte pel mèrit d'Euclides, considero els seus *Elements* com a llibre inadequat per a l'ensenyament, tant pel que fa al coneixement de la *Geometria* (per la pobresa d'aquest llibre) com si es mira només el cantó pedagògic, ja que crec que aquest llibre és més adequat per adormir la ment dels nois que no pas per desenvolupar les seves facultats.]
>
> [Battaglini a Genocchi, 7.2.1869]

28 *The Educational Times*, 1868, p. 125–128.
29 Tal com revela Forti a Hoüel a la seva carta, Pisa 25.2.1869, que es troba al *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des Sciences de París.
30 Vegeu la traducció de Rubini, a [49, p. 368].
31 Segons diu Beltrami en la seva carta a Hoüel amb data Bolonya 23.1.1870, a [12, p. 126–127].
32 Carta de Battaglini a Hoüel, Nàpols 19.7.1871, a [19, p. 116].
33 Carta de Battaglini a Hoüel, Nàpols 2.2.1869, a [19, p. 78].
34 A [19, p. 169–170].

Aquesta declaració pot semblar molt radical en aquest context, però si pensem que el llibre anava destinat a estudiants d'institut d'entre 10 i 15 anys, la posició de Battaglini se'ns revela força equilibrada.

Més endavant, Beltrami, qui comparteix la posició de Cremona,[35] en formar part d'algunes inspeccions als instituts, tindrà l'oportunitat de conèixer els resultats que estava tenint la mesura del govern, i valorar que els professors reticents a canviar de mètode eren del tipus que només demanen estereotipar l'ensenyament. A la vegada, es queixa de la manca de manuals de qualitat des del punt de vista científic i didàctic i de la poca preparació del professorat de les escoles secundàries.[36] Conscients d'aquests problemes, els matemàtics italians es van ocupar en la traducció de manuals europeus i en la creació de nous. També s'instauraran, l'any 1875, les escoles de magisteri per tal de donar coneixements actualitzats al professorat i un entrenament apropiat en qüestions pedagògiques.

3 El paper de G. J. Hoüel

En la recerca històrica, la correspondència entre els protagonistes té un interès especial. En les seves pàgines s'expressen intuïcions encara no concretes, es plantegen i es resolen dubtes, se segueixen discussions... en definitiva, ens permeten conèixer els pensaments dels matemàtics de la seva pròpia mà. La figura de G. Joules Hoüel es revela, per aquesta raó, molt rellevant en la història de la geometria no euclidiana. El francès es cartejava amb una llarga llista de matemàtics, molts d'ells italians, i es conserva una gran quantitat de cartes rebudes per Battaglini i Beltrami.[37]

La seva contribució és reconeguda per les traduccions de les obres de Bolyai i Lobatxevski, amb les quals va introduir la nova geometria a França. També va mantenir els matemàtics francesos informats sobre el desenvolupament de la qüestió traduint els treballs de Battaglini, Beltrami i Klein. Però la seva aportació no és només la de divulgador; els seus escrits sobre els fonaments de les matemàtiques proporcionen un suport filosòfic per acceptar la nova geometria. De fet, Hoüel va ser el principal difusor i defensor de la geometria no euclidiana a França, on, en general, es van rebre amb bastanta apatia i reticència. La reacció dels matemàtics francesos es devia a la gran influència d'A.-M. Legendre (1752–1833), qui havia presentat una prova nova del postulat a cadascuna de les successives edicions dels seus *Eléments de géométrie*, la primera del 1794.

Els anys com a professor d'institut van portar Hoüel a interessar-se per la geometria elemental i pel seu ensenyament. Veient una debilitat axiomàtica en els tractats de geometria, en l'«Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire» [26], del 1863, es proposa revisar els fonaments per establir una base sòlida sobre la qual construir aquesta disciplina. Els *Essai critique* del 1867 i del 1883, [27] i [32], seran versions més

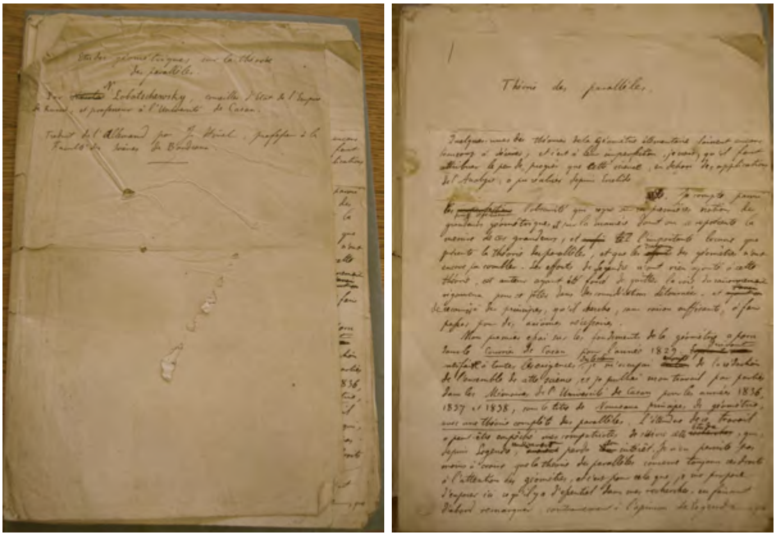
35 Vegeu la carta de Beltrami a Hoüel amb data Bolonya 23.1.1870, a [12, p. 126–127].

36 Vegeu la carta de Beltrami a Hoüel amb data Bolonya 12.6.1870, a [12, p. 141–142].

37 Les cartes rebudes per Hoüel es troben al *Dossier Hoüel* dels Archives de l'Académie des sciences de Paris, tret d'algunes d'inèdites que vam poder consultar a la Biblioteca Municipal de Caen i que actualment es troben a la Biblioteca Alexis de Tocqueville del mateix municipi.

completes d'aquest primer treball, en què ja parlarà de les aportacions de Lobatxevski i Bolyai sobre la teoria de les paral·leles.

Les primeres reflexions de Hoüel sobre la geometria de Lobatxevski les trobem en unes anotacions fetes en el sobre d'una carta timbrada l'any 1866, que es troba intercalat a les pàgines d'una versió de l'*Essai*.[38] Hoüel va conèixer l'existència dels treballs del geòmetra rus i de Bolyai per R. Baltzer,[39] qui havia introduït per primer cop les nocions no euclidianes a un tractat de geometria elemental.[40] El juliol d'aquell any, l'alemany li escriu per proposar-li divulgar a França aquestes idees desconegudes.[41] Hoüel publicarà de seguida els *Études géométriques sur la théorie des parallèles* de N. I. Lobatxevski [37]. La traducció de l'*Appendix* de Bolyai [14] trigarà, en canvi, un parell d'anys, degut a les dificultats que hi havia per fer-se amb un exemplar. Va ser gràcies a l'arquitecte hongarès Franz Schmidt[42] que va aconseguir-ne dues còpies, i en va enviar una a Battaglini.[43] Schmidt havia trobat, per casualitat, una còpia de l'*Essai* del 1863 i, volent continuar amb els seus estudis de matemàtiques, li va escriure per demanar-li consell. En la seva resposta, Hoüel li demana ajut per aconseguir la rara publicació dels Bolyai i material per a les seves biografies, que va acabar escrivint el mateix Schmidt.



Manuscrit dels *Études géométriques*. *Archive Hoüel*,
Biblioteca Alexis de Tocqueville, Caen.

38 Brunel situa el manuscrit a la biblioteca universitària de Bordeus, i transcriu les anotacions del sobre a [18, p. 25–31].
39 Com explica en aquest manuscrit i a l'*Essai critique* [27, p. VII].
40 En la segona edició de *Die Elemente der Mathematik* [3].
41 Carta de Baltzer a Hoüel 19.7.1866, citada per Voelke a [48, p. 60, n. 3].
42 Vegeu la nota del traductor a *La science absolue de l'espace* [14] i la biografia de Hoüel escrita per Halsted [25, p. 100–101].
43 Vegeu les cartes de Battaglini a Hoüel, Nàpols 13.6.1867 i 17.6.1867, on li agraeix que les hagi enviat, a [19, p. 66–67].

Al contrari que la comunitat científica del seu país, Hoüel accepta immediatament la geometria no euclidiana. La seva predisposició a favor de les noves idees prové de la seva recerca sobre els fonaments, que ja l'havia portat a creure que el postulat de les paral·leles no es podia demostrar. A l'*Essai* del 1863 valora que, si les recerques de tants «esperits eminents» no havien arribat a cap resultat satisfactori, era, probablement, perquè estaven escometent un «problema irresoluble».[44] En l'opuscle de Lobatxevski veurà confirmada definitivament aquesta impressió.[45]

En els seus treballs, Hoüel assenyala que s'està partint d'un «fals punt de vista metafísic» en considerar que la geometria és una ciència de raonament pur,[46] i que l'experiència sí que intervé en la tria dels axiomes. Les propietats geomètriques se'ns revelen per mitjà dels sentits, però com que algunes ens resulten tan clares, hem acabat creient-les innates a l'intel·lecte humà i declarant que són axiomes *a priori*. Les ciències exactes es basen en primer lloc en l'observació, que ens permet establir, per inducció, les lleis i principis «indefinibles i indemostrables» a partir dels quals es deduiran, mitjançant la lògica, fets nous.[47] Partir del reconeixement que la geometria no és una ciència *a priori* suposa una diferència epistemològica fonamental per poder acceptar la teoria de Lobatxevski, ja que significa que l'euclidiana no ha de ser l'única geometria possible.

Hoüel continua admetent que, en partir de l'observació experimental, que no és d'una exactitud rigorosa, es podria donar el cas que es triés un axioma equivocat. L'error el reconeixeríem quan, en seguir les deduccions lògiques, arribéssim a resultats que estan en «desacord amb la realitat objectiva».[48] Aquesta és, precisament, la situació en la qual ens trobem quan es pren com a axioma la negació del postulat de les paral·leles, cosa que porta a concloure que la geometria no euclidiana és físicament falsa. Però, puntualitza Hoüel, això no vol pas dir que no sigui «absolutament certa». El que realment importa en una ciència racional i abstracta és que els axiomes inicials, que poden ser triats arbitràriament, siguin compatibles, és a dir, no contradictoris entre ells, i independents els uns dels altres, garantint a més, que el nombre seleccionat sigui el mínim possible. Qualsevol ciència construïda amb aquesta base i que obté els seus resultats seguint la deducció lògica és certa des del punt de vista abstracte, tot i que no concordi amb els fets reals que pretenia representar.[49] Ara bé, si el que es vol és aplicar aquesta teoria científica a una determinada realitat i que condueixi a resultats pràctics, llavors els principis s'han de triar en conformitat a aquesta realitat observada. La geometria no euclidiana és, per tant, certa, però com que no sembla que es pugui aplicar a l'espai que ens

44 En la introducció [26, p. 171].
45 Vegeu la carta de Hoüel a De Tilly del 21.2.1875, citada per Voelke a [48, p. 61].
46 Introducció de l'«Essai» del 1863 [26, p. 171–178].
47 *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes*, la nota es recull a l'apèndix de la segona edició de l'*Essai critique*, 1883 [32, p. 63–70].
48 *Du rôle de l'expérience* [32, nota I de l'apèndix, p. 63].
49 *Du rôle de l'expérience* [32, nota I de l'apèndix, p. 66]. Vegeu també els fragments de les cartes de Hoüel a De Tilly, amb dates 9.12.1873 i 4.1.1873, citades per Voelke, a [48, p. 71].

envolta, l'hem de considerar com una teoria abstracta que només existeix al nostre pensament,[50] el seu interès és purament filosòfic.[51] És a dir, Hoüel fa una distinció clara entre la consistència lògica d'una teoria abstracta i la seva validesa experimental.[52]

4 La geometria imaginària de G. Battaglini

La labor de Giuseppe Battaglini com a difusor de la geometria no euclidiana a Itàlia ha estat sovint reconeguda pels historiadors. Va traduir les obres de Lobatxevski i Bolyai, que li va proporcionar Hoüel,[53] i sota la seva direcció, el *Giornale di Matematiche* era la revista que més articles publicava sobre la qüestió. Però, com veurem, la seva contribució al desenvolupament de la geometria no euclidiana va molt més enllà.

Battaglini mostra un ràpid interès per les idees de Lobatxevski i accepta immediatament la nova geometria, entrant en conflicte amb els seus col·legues a la facultat de Nàpols, on la rebuda no va ser gens favorable. En la seva carta a Genocchi per informar-lo sobre la nova geometria, escriu:

> ... sono *in guerra* con tutta la facoltà di matematica di Napoli, per essermi fatto propugnatore di queste nuove idee...[54]
>
> [... estic *en guerra* amb tota la facultat de matemàtiques de Nàpols, per haver-me fet defensor d'aquestes noves idees...]

Aquestes posicions oposades es fonamentaven en les dues tendències filosòfiques que llavors coexistien a la universitat, el positivisme de Comte i l'idealisme absolut de Hegel.[55]

El suport inqüestionable a la nova geometria per part de Battaglini, que trobem en la correspondència, malauradament no ve acompanyat d'arguments que el justifiquin. Les seves raons se'ns desvelaran, però, en entendre les idees implícites en el seu article «Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky»,[56] publicat poc després de traduir Lobatxevski, i en algunes línies de les seves cartes.

---

50 Lobatxevski va arribar a aquesta mateixa conclusió després de realitzar una sèrie d'experiments per comprovar si en la realitat es complia el postulat de les paral·leles o la seva negació, i per això va posar a la nova geometria el nom de *geometria imaginària*.

51 *Sur l'axiome* XI *(dit postulatum) d'Euclide, Essai critique*, 1867 [27, p. 77–78] o 1883 [32, p. 85].

52 D'aquesta diferència en parla a la carta a De Tilly amb data 21.8.1876, citada per Voelke a [48, p. 70–71].

53 Vegeu les cartes de Battaglini a Hoüel escrites entre abril i juliol del 1867, a [19, p. 66–67], i les del 21.07.1867, 23.11.1867, 2.4.1868, 1.8.1868, a [2, p. 211–212, 214–216].

54 Battaglini a Genochi, Nàpols 14.5.1867, a [19, p. 167-168].

55 El positivisme d'August Comte creu en el mètode científic com a via de coneixement, basat en la percepció objectiva i la inducció. D'altra banda, la filosofia de Hegel té un concepte de l'*a priori* pròxim al de Kant.

56 Es publicaran a *Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Napoli*, vol. VI (1867), 157–173 i al *Giornale di Matematiche* [4].

El 1854, en la seva carta de presentació a Betti, Battaglini havia expressat que creia que la geometria projectiva és la teoria més general, i que amb ella es tenen tots els mitjans per estudiar les propietats de l'espai.[57] De fet, el napolità va ser, junt amb Cremona, dels primers italians a interessar-se per la projectiva. En el debat entre partidaris del mètode sintètic o de l'analític, Battaglini s'inclina pel procediment analític, seguint la línia dels seus mestres a l'Escola de Ponts i Camins, Tucci i De Angelis, que es contraposava a la forta tendència sintètica que s'imposava a la Universitat de Nàpols degut a la influència de l'escola de Fergola. Comparteix, doncs, la mateixa posició que Riemann i Beltrami, o en el cas concret de la projectiva, que Möbius i Plücker. Així, en el seu article «Sulla geometria immaginaria», es proposa estudiar la geometria imaginària de Lobatxevski fent servir les eines de la geometria projectiva i seguint una metodologia analítica. Aquest plantejament mostra per primer cop la possibilitat de considerar la nova geometria com a inclosa en la projectiva.

La principal dificultat que un es troba en la lectura de l'article és la complexitat de la seva exposició, que ha fet que se li atribuís falta de rigor. Per exemple, el seu alumne D'Ovidio valora el procediment com a «més feliç que rigorós»[58] i el mateix Battaglini reconeix a Hoüel que caldria que el desenvolupés amb més claredat.[59] En una opinió més recent, Voelke qualifica el raonament de «matemàticament insatisfactori» i considera que està «seriosament hipotecat des del principi».[60] El seu argument és que la deducció, que exposarem a continuació, de la fórmula (1), a partir de la qual Battaglini dedueix gran part dels seus resultats, és incorrecta.

$$\frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} = \lambda \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N}. \tag{1}$$

Mencionem primer que l'article s'inicia partint de la rotació d'una recta Ω entorn a un punt p. La funció $F(z)$ que expressa aquesta rotació ha de ser periòdica i compleix, a més, la propietat $F(x+y) = F(x)F(y)$, és a dir, és una funció exponencial. Per tal que la funció exponencial sigui periòdica cal prendre l'exponencial complexa $F(z) = e^{ikz}$, introduint així la variable complexa com Lobatxevski. Les funcions circulars les definirà fent servir el desenvolupament de Taylor de la funció exponencial.

Battaglini considera, llavors, el sistema de punts ω de la recta L i les corresponents rectes Ω que els uneixen amb un punt p, exterior a la recta.

57 Vegeu la carta de Battaglini a Betti, Nàpols 8.11.1874, a [19, p. 179–180].

58 «In verità più felice che rigoroso può dirsi il procedimento del Battaglini». A [21, p. 588].

59 «Je sais que ma Note sur la Géométrie de Lobatschewsky aurait besoin d'être plus clairement développée.» Battaglini a Hoüel, Nàpols 6.8.67, Biblioteca Alexis de Tocqueville, Caen; transcripció a [2, p. 212].

60 Voelke és qui ha aprofundit més en l'anàlisi de l'article «La méthode de Battaglini est mathématiquement insatisfaisante», a [48, p. 75]. «La méthode de Battaglini est sérieusement hypothéquée dès le début», a [48, p. 77].

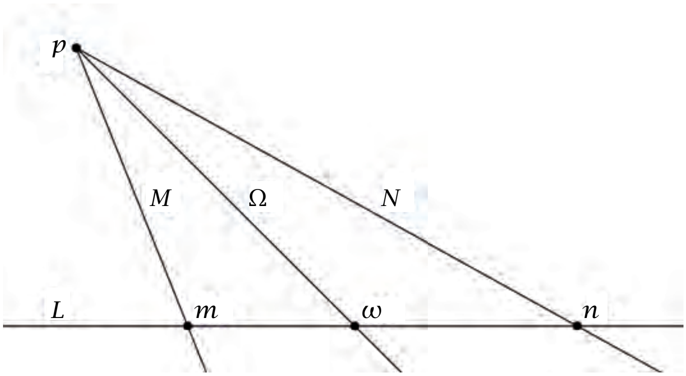


FIGURA 1: Representació de la situació descrita per Battaglini.

Prenent dues posicions fixades dels punts n i m i les respectives rectes M i N, com es mostra a la figura 1, s'obtenen les bijeccions següents:[61]

$$\begin{aligned}
&\omega \longleftrightarrow \frac{\sinh m\omega}{\sinh \omega n} =: r(\omega),\\
&\Omega \longleftrightarrow \frac{\sin M\Omega}{\sin \Omega N} =: R(\Omega),\\
&\omega \longleftrightarrow \Omega.
\end{aligned}$$

La composició d'aquestes funcions ens dona una bijecció entre les dues raons, que ens porta, segons Battaglini, «evidentment», a la relació:

$$r(\omega) = \lambda R(\Omega),$$

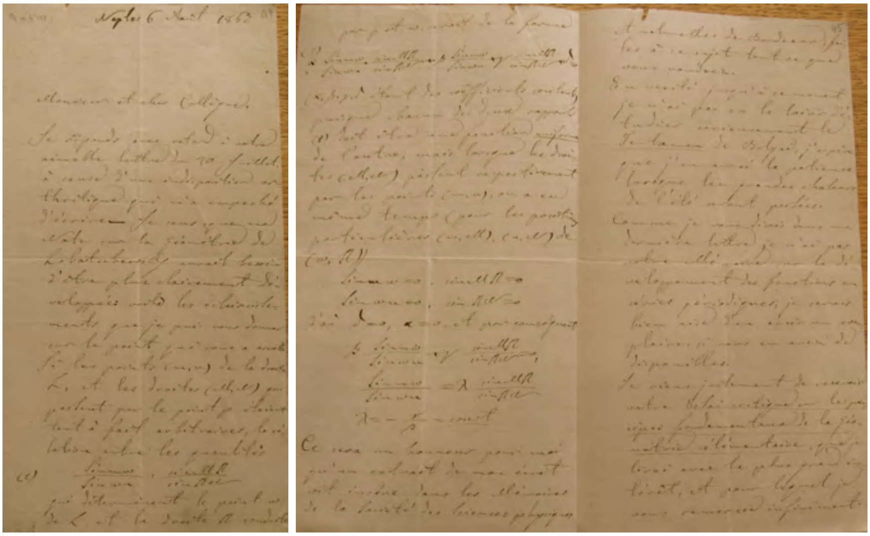
és a dir, a la fórmula (1).

Certament, l'equació planteja més dificultats de les que accepta Battaglini. El mateix Hoüel es va encallar en aquest punt i va demanar més explicacions a Battaglini, qui en la seva carta del 6 d'agost del 1867[62] li enviarà una sèrie de càlculs per justificar-ne el resultat.

---

61 L'última bijecció resulta òbvia per la mateixa construcció. Les dues primeres afirmen que cada una de les dues raons tindrà un valor únic i determinat segons la posició del punt ω o la recta Ω, i viceversa. Es poden demostrar fent servir les definicions de sinus circular i hiperbòlic mitjançant l'exponencial.

62 La carta inèdita es troba a l'*Archive Hoüel*, Biblioteca Alexis de Tocqueville, Caen. Vegeu-ne la transcripció a [2, p. 212–213].



Carta de Battaglini a Hoüel, Nàpols 6.8.1867. *Archive Hoüel*, Biblioteca Alexis de Tocqueville, Caen.

Els aclariments, amb el vistiplau de l'autor,[63] apareixeran a la traducció francesa [5] en què, a més, se'ns remet a un teorema[64] que considerem que resol la qüestió de la veracitat de la fórmula. Per tal d'aplicar-lo cal que la funció de partida sigui bijectiva i holomorfa. En l'exposició queda clara la bijectivitat, però no es fa menció a l'holomorfia. No sabem si Battaglini es devia parar a demostrar-la, però és clar que es compleix, ja que es tracta de fraccions entre funcions hiperbòliques i circulars, on les úniques singularitats es trobarien quan s'anul·len els denominadors, que són justament els casos límit contemplats en els aclariments fets a Hoüel.[65]

Battaglini arriba al concepte fonamental de la teoria de Lobatxevski considerant les rectes que passen per un punt p exterior a una recta donada L, i trobant les fórmules següents per a la distància del punt de tall amb L al peu de la perpendicular per p:

$$\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta}, \tag{2}$$

$$\theta = \frac{1}{2k} \log \frac{\tan\Delta + \tan\Theta}{\tan\Theta - \tan\Delta} + \frac{i\pi}{2k}, \tag{3}$$

on Θ és l'angle que forma la recta que passa per p amb la perpendicular i $k \in \mathbb{R}$.

63 Vegeu la carta de Battaglini a Hoüel 5.8.1868, a [19, p. 74].

64 *Tota funció monòdroma i monògena, que admet un nombre limitat d'infinits, és una fracció racional*, teorema enunciat al manual de Briot i Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques* [17, capítol 4 del llibre I, p. 40].

65 Per a més detalls, vegeu «El desenvolupament de la geometria no euclidiana a Itàlia» [2, p. 121–126].

Quan el valor de la distància és infinit obté les dues paral·leles de Lobatxevski, que separen les rectes que tallen en punts situats a distància real finita, donada per la fórmula (2), de les que ho fan en punts situats a distància ideal, donada per la fórmula (3), tal com es mostra a la figura 2. Els darrers els considera com a punts de la recta que estan «més enllà de l'infinit».

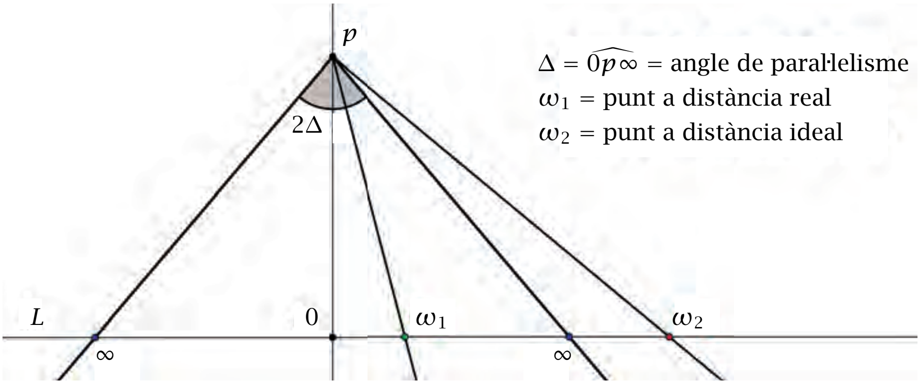


FIGURA 2: Els diferents tipus de recta segons la descripció de Battaglini.

Observant, llavors, que la geometria euclidiana està inclosa en la imaginària, assenyala que la principal diferència entre les dues geometries és que, en l'euclidiana, les rectes són com cercles, ja que els dos punts a l'infinit són coincidents, mentre que en la imaginària són diferents i entre ells es troben infinits punts ideals.[66] Battaglini no només introdueix el concepte projectiu de punt a l'infinit, sinó que a més ha afegit els anomenats *punts ideals a la recta*. A l'article, també apareix el concepte projectiu de pol d'una recta, definit com el punt en què es tallen totes les seves perpendiculars.

A l'inici de la última secció se'ns presenta una idea d'allò més interessant. Battaglini passa les seves observacions sobre la recta al pla, fent girar el feix de rectes que passen per un punt exterior a la recta donada, tal com il·lustra la figura 3, i fa la sorprenent observació següent:

> Nel sistema della Geometria *non-euclidiana* il piano è una superficie indefinita essendo i suoi punti all'infinito tutti *distinti* tra loro ed appartenenti ad una *circonferenza di circolo*, che ha per centro un punto *qualunque* del piano ed il raggio infinito; similmente per lo spazio, i punti all'infinito sono tutti *distinti* tra loro ed appartengono ad una *superficie sferica*, che ha per centro un punto *qualunque* ed il raggio infinito.[67]
>
> [En el sistema de la geometria *no euclidiana* el pla és una superfície indefinida, tots els seus punts de l'infinit són *diferents* entre si i pertanyen a una *circumferència de cercle*, que té per centre un punt *qualsevol* del pla i radi infinit; anàlogament per a l'espai, els punts de l'infinit són tots *diferents* entre si i pertanyen a una *superfície esfèrica* que té per centre un punt *qualsevol* i radi infinit.]

66 «Sulla geometria immaginaria» [4, p. 223].
67 A «Sulla geometria immaginaria» [4, p. 229].

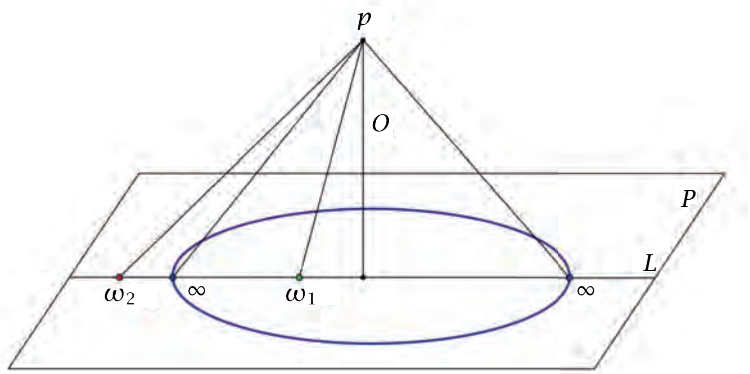


FIGURA 3: Representació gràfica de la descripció de Battaglini del pla hiperbòlic.

La descripció del pla no euclidià com la regió limitada per un cercle sense frontera dins del pla euclidià coincideix, clarament, amb els models donats per Beltrami uns mesos després i Klein uns anys més tard.

Aquesta reflexió de Battaglini no ha estat analitzada en profunditat, tot i que, en la nostra opinió, porta a preguntar-se quina relació hi ha entre els estudis dels tres autors. L'enigma el resoldrem en el següent apartat. Veurem que el plantejament de Battaglini no va suposar una influència en el treball de Beltrami, tot i que J. M. Montesinos així ho creu.[68] Beltrami parteix d'un altre enfocament. Klein, en canvi, sí que segueix la línia projectiva, i serà en la seva recerca on trobarem la justificació de la similitud entre les tres descripcions del pla hiperbòlic.

5 La interpretació de la geometria no euclidiana d'E. Beltrami i F. Klein

La contribució d'Eugenio Beltrami a la geometria no euclidiana és de les més destacables en la història d'aquesta matèria. La seva interpretació de la geometria no euclidiana, com la que farà Klein uns anys més tard, es pot reformular segons el que actualment anomenem *teoria de models*, solucionant el problema de la seva consistència. En la matemàtica moderna, es considera que una teoria abstracta és vàlida si es construeix seguint deduccions lògiques a partir d'un conjunt d'axiomes independents i consistents. La consistència queda demostrada si es pot proporcionar un model on són vàlids els axiomes de la teoria, ja que, si hi hagués una contradicció a la nova teoria, també es donaria en el model, i aquest s'ha fet a partir d'una teoria que ja es considera acceptada.

68 Vegeu el seu article «La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica» [40, p. 221].

El punt clau per entendre els treballs de Beltrami és llegir-los en el context de la geometria diferencial, introduïda per Gauss al «Disquisitiones generales circa superficies curvas» [23]. La gran aportació de Gauss és que proposa estudiar les superfícies sense pensar-les com a incloses en l'espai real, sinó de manera intrínseca, és a dir, com ho farien habitants bidimensionals que visquessin dins de la superfície. Aquesta idea serà desenvolupada posteriorment per Riemann i és el principi en què es fonamenta l'obra de Beltrami.

La geometria intrínseca de les superfícies tracta les propietats que no varien en doblegar una superfície sense estirar-la ni trencar-la. Aquestes propietats venen determinades per la fórmula de l'element de longitud, que és la que defineix com mesuren els habitants de la superfície. Posem, per exemple, un pla i un cilindre; podem doblegar el pla per fer un cilindre o obrir el cilindre sobre el pla, són localment desenvolupables l'un sobre l'altre. Per tant, tindran el mateix element de longitud i la mateixa geometria intrínseca; diem que són superfícies isomètriques.

Una de les propietats invariants per flexions és la curvatura de Gauss. Si una superfície es desenvolupa sobre una altra, la curvatura de Gauss en punts corresponents és la mateixa. El recíproc només és cert quan la curvatura és constant: si dues superfícies tenen la mateixa curvatura de Gauss constant, llavors es pot desenvolupar localment l'una sobre l'altra. El pla i el cilindre tenen, doncs, la mateixa curvatura, zero, i qualsevol altra superfície que tingui curvatura zero es podrà desenvolupar localment sobre un pla i tindrà com a geometria intrínseca l'euclidiana. De la mateixa manera, totes les superfícies de curvatura constant positiva es desenvolupen localment sobre una esfera i tenen com a geometria intrínseca l'esfèrica. La genialitat de Beltrami serà descobrir que la geometria de Lobatxevski és la de les superfícies de curvatura constant negativa, que ell anomena «pseudoesfèriques».

Durant els anys que va ser professor de geodèsia a la Universitat de Pisa (1864–1866), Beltrami es va dedicar a l'estudi de les cartes geogràfiques. Un comentari fet per Lagrange[69] el va portar a plantejar-se la possibilitat de representar una superfície sobre un pla de manera que les geodèsiques de la superfície es corresponguin amb rectes del pla. Beltrami troba l'element de longitud de les superfícies que compleixen aquesta propietat, i en calcular a partir d'ell la curvatura, veu que ha de ser constant.[70] Segons explica a la seva correspondència, és aquest estudi el que el conduirà a topar-se amb la geometria no euclidiana gairebé per casualitat.[71]

En el «Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea» [7], publicat el 1868,[72] parteix de l'element de longitud que havia trobat per a l'esfera i

69 A l'article «Sur la construction des cartes géographiques», del 1779 [35].

70 A l'article «Risoluzione del problema: "Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette"» [6].

71 En la seva carta a D'Ovidio del 25.12.1872, Beltrami explica detalladament la seva via de descobriment. Vegeu el fragment citat per G. Loria a [39, p. 421–423]; la carta va ser publicada per primer cop per D'Ovidio a la seva commemoració de Beltrami [22]. Vegeu també la carta de Beltrami a Hoüel, Bolonya 18.11.1868, a [12, p. 65].

72 Tot i que el va escriure un any abans, Beltrami no es decidia a publicar-lo degut a una objecció

canvia la constant R del radi per iR, i obté una curvatura constant negativa igual a $-1/R^2$.

Beltrami veu llavors que la geometria intrínseca definida per aquesta mètrica és precisament la desenvolupada per Lobatxevski. Després mostra com aquestes superfícies pseudoesfèriques es poden representar en el pla mitjançant un disc, de manera que les geodèsiques de la superfície s'apliquen a les cordes del disc. Obté, així, un model de la planimetria no euclidiana.

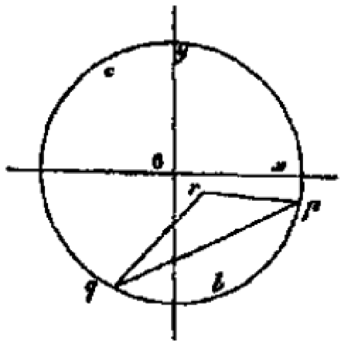
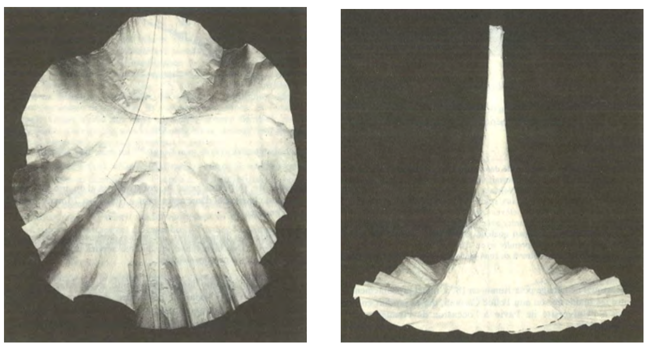


FIGURA 4: Model del disc presentat per Beltrami al «Saggio».

Continua veient que es pot aplicar una part de la superfície pseudoesfèrica en la superfície de revolució generada per la corba tractiu, coneguda amb el nom de *pseudoesfera*. Beltrami es va preocupar de construir materialment aquesta superfície per poder estudiar-ne millor les propietats.



Construcció material de la pseudoesfera feta per Beltrami.
Model conservat al Departament de Matemàtiques de la Universitat de Pavia.

---

feta per Cremona, referida a si es podia utilitzar l'anàlisi ordinària, fonamentada en la geometria euclidiana, per tractar nocions de geometria no euclidiana. Les seves reticències desapareixeran quan llegeixi la memòria pòstuma de Riemann. Beltrami ho explica a les seves cartes a Genocchi del 9.6.1868 i del 23.7.1868, a [39, p. 415–416], i a Hoüel del 18.11.1868, a [12, p. 66].

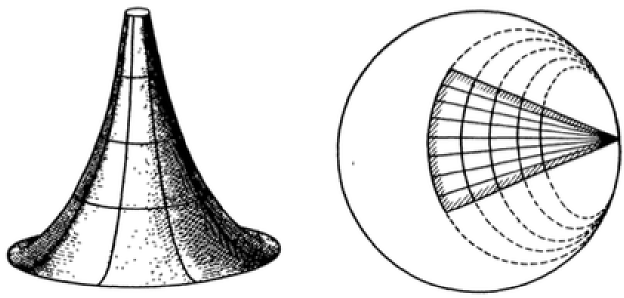


FIGURA 5: Dibuix de Klein per mostrar l'aplicació entre la pseudoesfera i el disc, presentat en el *Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie*, del 1928.

La pseudoesfera, però, només és localment isomètrica a la superfície pseudoesfèrica de què parla Beltrami. És a dir, podem tallar-la i obrir-la i posar-la sobre un tros del disc de Beltrami, de la mateixa manera que podem tallar i obrir un cilindre i dir que és igual que un tros de pla, però un cilindre no és un pla! No s'ha de confondre, doncs, la superfície abstracta de Beltrami, que avui anomenaríem *varietat de Riemann de dimensió* 2 *de curvatura constant negativa*, amb la pseudoesfera, que és una superfície de l'espai real. Aquesta confusió era molt comuna entre els seus contemporanis, que no havien comprès completament les teories de Gauss i Riemann, com podem veure en les moltes cartes a Hoüel on dona explicacions sobre el tema.[73]

Beltrami finalitza l'article reflexionant que no és possible donar una interpretació real per a l'estereometria no euclidiana de la mateixa manera que ho acaba de fer amb la planimetria, és a dir, no es pot trobar un model. No obstant, veu possible donar una interpretació analítica, sense suport geomètric, simplement introduint una variable més en la mètrica inicial. Així, a «Teoria fondamentale» [8], el 1869, estén els resultats per a superfícies de curvatura constant negativa de dimensió arbitrària, i conclou dient que «la teoria de Lobatxevski coincideix, tret del nom, amb la de l'espai de tres dimensions de curvatura constant negativa».[74]

Pocs anys després de les publicacions de Beltrami apareixen les dues memòries de Klein «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie» [33] i [34], el 1871 i el 1873, respectivament, on l'alemany aporta també un nou model per a la geometria no euclidiana, aquesta vegada seguint el punt de vista projectiu suggerit per Battaglini.[75]

73 Vegeu, per exemple, les editades a [12], amb dates 13.3.1869, p. 79; 1.4.1869, p. 87–88; 22.4.1869, p. 92; 12.10.1869, p. 100; 25.10.1869, p. 102–103; 19.12.1869, p. 108.

74 «[...] la teoria di Lobatschewsky coincide, salvo nei nomi, colla geometria dello spazio a tre dimesioni di curvatura costante negativa» [8, p. 425].

75 Sabem que Klein havia llegit el «Sulla geometria immaginaria», ja que el cita atribuint a Battaglini la introducció del concepte de punt ideal i l'observació que les perpendiculars a una recta són concurrents en el pol d'aquesta respecte a la cònica fonamental. Vegeu [33, p. 290].

Els seus estudis parteixen de la teoria de l'Absolut d'Arthur Cayley (1821–1895). Recordem que la geometria projectiva estudia les posicions relatives entre els elements geomètrics, en lloc d'estudiar les propietats mètriques, com fa la geometria euclidiana, ja que les darreres no es conserven en fer projeccions i seccions. A la seva memòria del 1859, «A sixth memoir upon quantics» [20], el britànic aportava una mètrica a la geometria projectiva, definint la distància de manera que queda invariant per a transformacions que deixen fixa una cònica que anomena *Absolut*. Veia, llavors, que la geometria euclidiana és el cas particular en què l'Absolut és una cònica degenerada formada per un parell de punts.

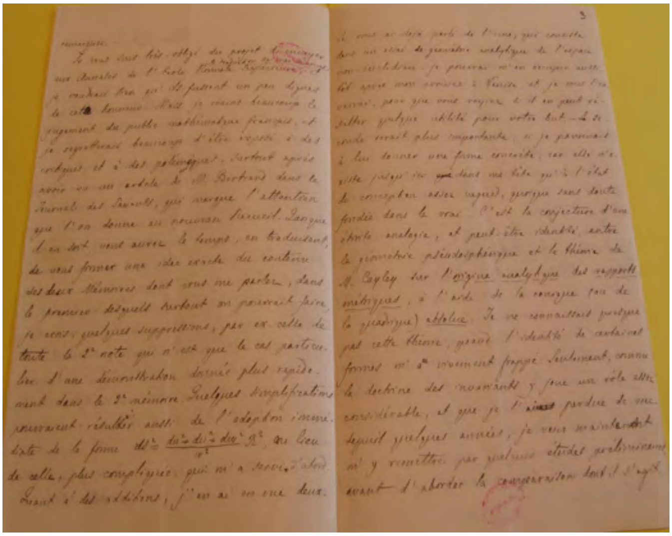
Klein donarà una nova definició de distància a partir de la raó doble, un invariant projectiu, i distingirà també els casos en què l'Absolut és real i imaginari, que es corresponen amb la geometria de Lobatxevski i la geometria esfèrica, respectivament. D'aquesta manera, demostra que les tres geometries de curvatura constant, que ell anomena *parabòlica*, *hiperbòlica* i *el·líptica*, es poden estudiar com a casos particulars d'una teoria més general, la geometria projectiva. En prendre els punts interiors de la cònica real de l'Absolut, Klein obté el model de Beltrami, li proporciona, a més, una fórmula per a la distància i assenyala que el disc també podria ser una el·lipse.

El 1873, Beltrami escriu l'«Osservazione» [9], en què relaciona també els seus estudis anteriors amb la teoria de l'Absolut de Cayley. La realitat, però, és que feia temps que era conscient d'aquest vincle entre les superfícies de curvatura constant i la geometria projectiva. El 1869 escriu a Hoüel, sobre un afegit que voldria fer a les seves memòries, si aconseguís concretar la idea:

> C'est la conjecture d'une étroite analogie, et peut-être identité, entre la géométrie pseudosphérique et la théorie de M. Cayley sur l'*origine analytique des rapports métriques*, à l'aide de la conique (ou de la quadrique) *absolue*. Je ne connaissais presque pas cette théorie, quand l'identité de certaines formes m'a vivement frappé.[76]
>
> [Es tracta de la conjectura d'una estreta analogia, i potser identitat, entre la geometria pseudoesfèrica i la teoria del Sr. Cayley sobre l'*origen analític de les relacions mètriques*, amb l'ajut de la cònica (o quàdrica) *absoluta*. Amb prou feines coneixia aquesta teoria, quan la identitat de certes formes m'ha impressionat profundament.]
>
> [Beltrami a Hoüel, 29.7.1869]

Recordem ara el cercle límit descrit per Battaglini en el paràgraf que hem destacat abans del «Sulla geometria immaginaria», i observem que no és altra cosa que la cònica real de l'Absolut. És probable que, precisament per no tenir gaires coneixements en projectiva, Beltrami no veiés aquesta al·lusió implícita a l'Absolut feta per Battaglini.

76 A [12, p. 96–97]. Vegeu també la carta a D'Ovidio del 25.12.1872, esmentada anteriorment.

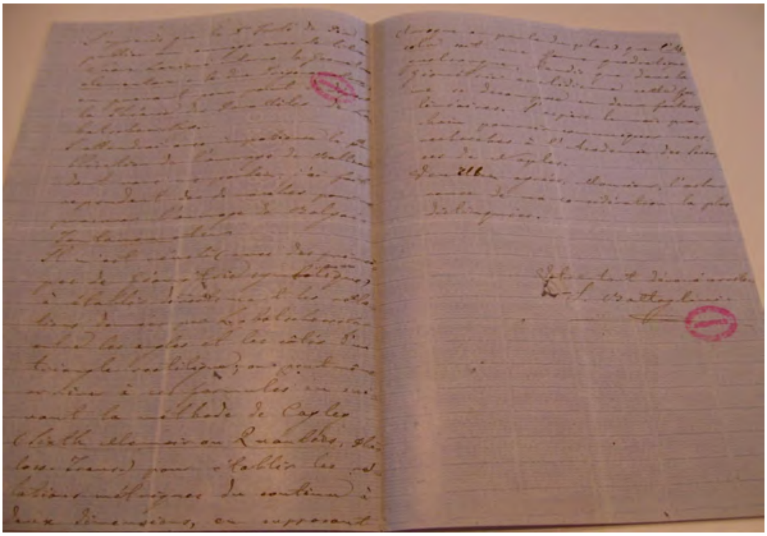


Carta de Beltrami a Hoüel, Bolonya 29.7.1869. *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences, París.

La qüestió que hom es planteja immediatament és si Battaglini ja tenia al cap, llavors, el model projectiu de Klein, com suggereix Montesinos.[77] La resposta la trobem en les següents línies escrites a Hoüel quan treballava en l'article:

> Il m'est réussi (avec des principes de Géométrie iperbolique [sic]) à établir des relations données par Lobatschewsky entre les angles et les côtés d'un triangle rectiligne; on peut même arriver à ces formules en suivant la méthode de Cayley (A sixth memoir upon quantics, Philos. Trans) pour établir les relations métriques du continu à deux dimensions, en supposant (lorsque on parle du plan) que l'*Absolu* soit une forme quadratique *quelconque*, tandis que dans la Géométrie euclidiènne cette forme se décompose en deux facteurs linéaires. J'espère le mois prochain pouvoir communiquer mes recherches à l'Académie des Sciences de Naples.[78]
>
> [He aconseguit (amb els principis de geometria hiperbòlica) establir les relacions entre els angles i els costats d'un triangle rectilini donades per Lobatxevski; també es pot arribar a aquestes fórmules seguint el mètode de Cayley («A sixth memoir upon quantics», *Philos. Trans*) per establir les relacions mètriques del continu en dues dimensions, suposant (quan parlem del pla) que l'*Absolut* sigui una forma quadràtica *qualsevol*, mentre que en la geometria euclidiana aquesta forma es descompon en dos factors lineals. Espero poder comunicar les meves recerques el mes que ve a l'Acadèmia de les Ciències de Nàpols.]
>
> [Battaglini a Hoüel, Nàpols 21.5.1867]

77 Vegeu «La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica» a [40, p. 218].
78 A [19, p. 63–64].



Carta de Battaglini a Hoüel, Nàpols 21.5.1867. *Dossier Hoüel*,
Archives de l'Académie des Sciences, París.

Observem que també fa servir el terme *geometria hiperbòlica*, que després utilitzarà Klein. Segurament, l'alemany, amb els seus coneixements de geometria projectiva, sí que va entendre el nou enfocament de Battaglini, i sembla bastant probable que veiés que la circumferència de punts a l'infinit és la cònica real de l'Absolut.

6 L'acceptació de la geometria no euclidiana

En aquest apartat presentarem breument la reacció de la comunitat matemàtica davant la reaparició de la geometria no euclidiana i de les noves aportacions de Beltrami. La difusió feta per Hoüel i Battaglini de la nova geometria va desencadenar un interessant debat sobre si havia de ser reconeguda o no com una teoria vàlida. La discussió es va prolongar fins i tot després de la publicació dels treballs de Beltrami, que van rebre moltes crítiques.

Des d'un inici els principals defensors van ser Hoüel i Battaglini. Com veurem, Beltrami només la va acceptar completament després de llegir Riemann. Per què Battaglini va acceptar de manera tan immediata la nova geometria, és una qüestió que, en un principi, sembla no estar clara, ja que, a diferència de Hoüel, mai no explica concretament les seves raons. Un pot pensar, simplement, que era un home d'acord amb el moment històric, obert a idees noves i revolucionàries… Ara bé, l'anàlisi que exposem en els apartats anteriors del seu article i de la seva correspondència mostra que la resposta a aquesta pregunta està sòlidament basada en arguments matemàtics. En la nostra lectura del «Sulla geometria immaginaria» hem vist que Battaglini decideix estudiar la nova geometria des del punt de vista projectiu. Descobrim a més, en la seva carta a Hoüel, que era plenament conscient que correspon al cas particular en què la cònica de l'Absolut és real. Per tant, en entendre que la geometria no euclidiana està inclosa en la projectiva, que és una teoria totalment acceptada, de seguida va veure fora de dubte la seva validesa i no és estrany que l'aprovés sense recances. De fet, les seves inquietuds estan més aviat relacionades amb les repercussions que pot tenir la nova teoria. Conscient que suposa una ruptura amb el pensament matemàtic tradicional, Battaglini assenyala que cal un replantejament de la doctrina de l'espai. En aquesta nova concepció es mostra partidari de seguir el camí proposat per Riemann.[79] També creu que és fonamental disposar d'uns *Elements* de la geometria no euclidiana per tal d'introduir-la a l'ensenyament. La seva personalitat idealista li fa sentir la responsabilitat d'ensenyar la revolució científica, de donar als joves instruments per trencar amb les metodologies establertes i mantenir la ment oberta davant noves vies de recerca.

En el debat, superada la influència kantiana, es contraposaven dues posicions: la de Hoüel, partidari d'acceptar-la com a certa a un nivell abstracte, i la dels realistes, que consideraven que la veritat s'havia de fonamentar en la realitat i no pas en la consistència lògica.

A França, el principal defensor d'aquesta darrera opinió era Joseph Bertrand. El desembre del 1869 va presentar a l'Académie des Sciences una demostració del postulat feta per Jules Carton,[80] que, naturalment, es basa en una petició de principi en suposar que les línies rectes no es desvien en cap moment, i que va suscitar força polèmica. Davant les crítiques, Bertrand argumenta que, en el cas del postulat, cal recórrer a l'«evidència». La demostració és, en el fons, innecessària, ja que és l'observació la que ens el mostra com a cert. El que es pretén, en donar una prova rigorosa, és convèncer aquells que no el veuen tan evident com la resta d'axiomes. Per tant, Carton aconsegueix el propòsit en partir només d'una evidència totalment irrecusable.[81] La demostració, però, va produir justament l'efecte contrari en el reconegut geòmetra Gaston Darboux que, en analitzar-la i veure'n el defecte, es va acabar de convèncer de la impossibilitat de demostrar el postulat.[82]

També a Itàlia, reconeguts matemàtics, com Giusto Bellavitis i Angelo Genocchi, compartien l'opinió de Bertrand.[83] En les nombroses cartes a Hoüel, Bellavitis exposa la seva posició, dient que no pot admetre un món creat només a partir del raonament; la ciència serveix per explicar la realitat, i la realitat és la que és. La idea de «mons possibles» li resulta incomprensible; les coses o són certes o són impossibles.[84]

79 Vegeu la carta de Battaglini a Hoüel amb data Nàpols 5.8.1868, a [19, p. 74].
80 «Nouveau moyen de lever la difficulté de la théorie des parallèles», *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 69 (1869), p. 44.
81 Vegeu «Sur la somme des angles d'un triangle» [10, p. 1265–1266].
82 Vegeu la carta de Darboux a Hoüel citada per Voelke a [48, p. 9].
83 Vegeu la carta de Bellavitis a Hoüel del 20.3.1870, al *Dossier Hoüel*, Archive de l'Académie des Sciences, París. Beltrami també ho diu a la carta a Hoüel del 8.7.1870, a [2, p. 220–221]. D'altra banda, Hoüel diu a De Tilly el 9.10.1873, a [48, p. 184–185], que Genocchi comparteix l'opinió de Bellavitis.
84 Vegeu la carta de Bellavitis a Hoüel amb data 2.7.1872, p. 4, al *Dossier Hoüel*, Archives de l'Académie des Sciences, París.

L'aparició del «Saggio» de Beltrami respon a aquesta crida a trobar una interpretació real de la nova teoria, que alguns reclamaven per acceptar-la. El mateix Beltrami l'havia considerat necessària, i veient que no podia donar una interpretació geomètrica de l'estereometria no euclidiana com la que havia aconseguit per a la planimetria, inicialment no l'havia acceptat.[85] Va ser en llegir la memòria de Riemann que es va adonar que no necessitava trobar una interpretació d'aquest tipus. Les noves aportacions del matemàtic alemany li proporcionaven un fonament analític per explicar la geometria no euclidiana en qualsevol dimensió; aquesta no és més que la geometria intrínseca d'una varietat n-dimensional de curvatura constant negativa.

Seguint el nou concepte de varietat de Riemann, n'hi ha prou de donar una expressió quadràtica de les coordenades, que sigui l'element de longitud a una superfície abstracta, per poder fer geometria. No cal preocupar-se de com seria aquesta superfície en la realitat, o de si es pot o no realitzar com una superfície de $\mathbb{R}^3$. Per a aquells que no comprenien el punt de vista de Riemann, en canvi, l'acceptació de la geometria no euclidiana depenia de trobar una superfície real de l'espai on es complissin les propietats de la geometria no euclidiana. Segons Abardia, Reventós i Rodríguez, Gauss havia intentat trobar aquesta superfície sense èxit.[86] Bellavitis i Genocchi, simplement, no creien que pogués existir i, com demostrarà Hilbert un any després de la mort de Beltrami, no anaven equivocats. El més proper que podem aconseguir a una realització de superfície de curvatura constant negativa és la pseudoesfera, però només és localment isomètrica al pla no euclidià, per tant, com assenyalava Genocchi, presenta tota una sèrie de problemes.

Per Beltrami, però, l'existència o no de la realització en l'espai real no afecta en absolut la validesa de la geometria no euclidiana. Les superfícies pseudoesfèriques existeixen en el sentit donat per Riemann. La geometria diferencial, de la qual no es discuteix la certesa, engloba les tres geometries: euclidiana, esfèrica i pseudoesfèrica. La darrera, doncs, és exactament igual de vàlida que la geometria intrínseca de qualsevol altra superfície.

Amb la intenció de resoldre definitivament la qüestió, Hoüel publica, a finals de l'any 1870, «Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide»,[87] en què aclareix per què no és possible demostrar el postulat d'Euclides. Es remet també als treballs de Beltrami, assegurant que dissipen qualsevol dubte que es pugui tenir sobre l'acceptació de la nova geometria. De fet, després de les publicacions de Beltrami, només alguns matemàtics, generalment pertanyents a la generació anterior, continuaren veient la necessitat de trobar una superfície real on es donés la geometria no euclidiana. La resta n'havia tingut prou que es fonamentés en una teoria acceptada.

85 Vegeu les dues cartes a Genocchi amb dates Bolonya 9.6.1868 i 23.7.1868 citades per G. Loria a [39, p. 415–416], i la carta a Hoüel del 18.11.1868, a [12, p. 65–66].

86 Com dèiem a la nota 9 de la pàgina 7. Vegeu l'article «What did Gauss read in the Appendix?» [1].

87 Amb el mateix títol Hoüel va publicar en vuit revistes diferents, però hi ha només dues versions de l'article; nosaltres les hem consultat en les *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* [30], i en els *Nouvelles annales de mathématiques* [31].

Agraïments

El present article es basa en la tesi doctoral de l'autora, «El desenvolupament de la geometria no euclidiana a Itàlia», presentada el juny del 2017 i realitzada sota la direcció del professor Agustí Reventós i Tarrida, a qui agraeixo el seu suport i les seves inestimables aportacions.

Referències

[1] Abardia, J.; Reventós, A.; Rodríguez, C. J. «What did Gauss read in the Appendix?». *Historia Math.*, 39 (3) (2012), 292–323.

[2] Alcalá, M. «El desenvolupament de la geometria no euclidiana a Itàlia». Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona, 2017.

[3] Baltzer, R. *Die Elemente der Mathematik*. Vol. 2. 2a ed. Dresden: B. G. Teubner, 1867.

[4] Battaglini, G. «Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky». *Giornale di Matematiche*, 5 (1867), 217–231.

[5] Battaglini, G. «Sur la géométrie imaginaire de Lobatcheffsky». *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e série, 7 (1868), 209–221, 265–277. [Traducció de [4] per J. Hoüel]

[6] Beltrami, E. «Risoluzione del problema: "Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette"». *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, serie I, 7 (1865), 185–204.

[7] Beltrami, E. «Saggio d'interpretazione della geometria non euclidea». *Giornale di Matematiche*, 6 (1868), 284–312. També disponible en línia a: `http://www.caressa.it/pdf/beltrami01.pdf`.

[8] Beltrami, E. «Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante». *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, serie II, 2 (1868–69), 232–255.

[9] Beltrami, E. «Osservazione sulla precedente Memoria del sig.r prof. Schläfli». *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, serieII, 5 (1871–73), 194–198.

[10] Bertrand, J. «Sur la somme des angles d'un triangle». *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 69 (1869), 1265–1269.

[11] Betti, E.; Brioschi, F. *Gli Elementi d'Euclide, con note, aggiunte ed esercizi ad uso de'ginnasi e de'licei*. Florència: Le Monnier, 1867.

[12] Boi, L.; Giacardi, L.; Tazzioli, R. *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère : Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Hoüel (1868–1881)*. París: Albert Blanchard, 1998.

[13] Bolyai, G. «Sulla scienza dello spazio assolutamente vera, ed indipendente dalla verità o dalla falsità dell'assioma XI di Euclide (giammai da potersi decidere a priori)». *Giornale di Matematiche*, 6 (1868), 97–115. [Traducció de G. Battaglini]

[14] Bolyai, J. *La science absolue de l'espace indépendante de la vérité ou de la fausseté de l'Axiôme* XI *d'Euclide (que l'on ne pourra jamais établir a priori); suive de la quadrature géométrique du cercle, dans le cas de la fuasseté de l'Axiôme* XI. París: Gauthier-Villars, 1868. [Traducció de J. Höuel]

[15] Bonola, R. *Non-Euclidean Geometry. A Critical and Historical Study of its Developments*. Nova York: Dover, Inc., 1955. [Traducció amb apèndixs addicionals per H. S. Carslaw. Suplement que conté «The theory of parallels», de N. Lobachevski «The science of absolute space», de J. Bolyai]

[16] Brioschi, F.; Cremona, L. «Al signor Direttore del Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Universita' italiane — Napoli». *Giornale di Matematiche*, 7 (1869), 51–54.

[17] Briot, M.; Bouquet, M. *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*. París: Mallet-Bachelier, 1859.

[18] Brunel, G. «Notice sur l'influence scientifique de Guillaume-Jules Hoüel». *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 3e série, 1er cahier, 4 (1888), 1–78.

[19] Castellana, M.; Palladino, F. *Giuseppe Battaglini. Raccolta di lettere (1854–1891) di un matematico al tempo del Risorgimento d'Italia*. Bari: Levante, 1996.

[20] Cayley, A. «A sixth memoir upon quantics». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 149 (1859), 61–90; *The Collected Mathematical Papers*. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1889.

[21] D'Ovidio, E. «Commemorazione del Socio Giuseppe Battaglini». *Mem. Reale Accad. Lincei Cl. Sci. Fis. (5)*, 1 (1895), 558–610.

[22] D'Ovidio, E. «Eugenio Beltrami». *Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino*, 35 (1900), 541–546.

[23] Gauss, C. F. «Disquisitiones generales circa superficies curvas». *Commentationes Societatis Regiae Scientarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae*, VI (1828), 99–146. [Presentat el 8 d'octubre del 1827. Vegeu també [24, vol. 4, p. 217–258]]

[24] Gauss, C. F. *Carl Friedrich Gauss Werke*. Vol. 1–12. B. G. Teubner, Leipzig: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1870–1927. [Les cartes de Gauss es poden consultar també a: `https://gauss.adw-goe.de`]

[25] Halsted, G. B. «Biography: Guillaume Jules Hoüel». *Amer. Math. Monthly*, 4 (4) (1897), 99–101.

[26] Hoüel, G. J. «Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire». *Archiv der Mathematik und Physik*, 40 (1863), 171–211.

[27] Hoüel, J. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les* XXXII *premières propositions des Éléments d'Euclide*. París: Gauthier-Villars, 1867.

[28] HOÜEL, J. «Quelques réflexions au sujet de la ligne de longueur minimum sur la sphère». *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e série, 7 (1868), 73–78.

[29] HOÜEL, J. «Estratto di una lettera del Prof. *Hoüel* al redattore». *Giornale di Matematiche*, 7 (1869), 50.

[30] HOÜEL, J. «Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide». *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 8 (1867), 11–18.

[31] HOÜEL, J. «Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe des parallèles, dit Postulatum d'Euclide». *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e série, 9 (1870), 93–96.

[32] HOÜEL, J. *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les* XXXII *premières propositions des Éléments d'Euclide*. París: Gauthier-Villars, 1883.

[33] KLEIN, F. «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie». *Mathematische Annalen*, 4 (4) (1871), 573–625. [Traducció francesa de M. L. Laugel, «Sur la géométrie dite non euclidienne». *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 1re série, 11 (4) (1897), G1–G62; traducció anglesa de J. Stillwell, *Sources of Hyperbolic Geometry*. Providence, RI: American Mathematical Society; Londres: London Mathematical Society, 1996. (History of Mathematics; 10)]

[34] KLEIN, F. «Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. (Zweiter Aufsatz.)». *Mathematische Annalen*, 6 (2) (1873), 112–145.

[35] DE LAGRANGE, J. L. «Sur la construction des cartes géographiques». (Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1779). *Œuvres complètes*. Vol. 4. París: Gauthier-Villars, 1867–1892, 637–692.

[36] LOBATSCHEWSKY, N. «Géométrie imaginaire». *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]*, 17 (1837), 295–320.

[37] LOBATSCHEWSKY, N. I. *Études géométriques sur la théorie des parallèles*. París: Gauthier-Villars, 1866. [Traducció de l'alemany per J. Hoüel]

[38] LOBATSCHEWSKY, N. «Pangeometria, o sunto di geometria fondata sopra una teoria generale e rigorosa delle parallele». *Giornale di Matematiche*, 5 (1867), 273–336. [Traducció de G. Battaglini]

[39] LORIA, G. «*Eugenio Beltrami* e le sue opere mathematiche. (Mit Bildnis.)». *Bibliotheca Mathematica*, 3e série, 2 (1901), 392–440.

[40] MONTESINOS AMILIBIA, J. M. «La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica». A: *Historia de la matemática en el siglo* XIX. Parte 2. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1994, 213–232.

[41] PETERS, C. A. F. (ED.). *Briefwechel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher*. 6 vol. Altona: G. Esch, 1860–1865; Hildesheim; Nova York: G. Olms, 1975. [Versió digital de les cartes a: `https://gauss.adw-goe.de`]

[42] REVENTÓS, A.; RODRÍGUEZ, C. J. *Una lectura del* Disquisitiones generales circa superficies curvas *de C. F. Gauss*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana de Matemàtiques, 2006. 201 p. (Publicacions de la SCM; 4)

[43] RIEMANN, B. «Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile complessa». *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 2 (1) (1859), 288–304. [Títol original: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Inauguraldissertation, Göttingen, 1851]

[44] RIEMANN, B. «Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen». Habilitationsvortrag (1854); *Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1868), 309–326.

[45] SCHAEFER, C. *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Christian Ludwig Gerling*. Berlín: O. Elsner, 1927. [Reimpressió: Hildesheim; Nova York: G. Olms, 1975. Versió digital de les cartes a: `https://gauss.adw-goe.de`]

[46] TAZZIOLI, R. «New perspectives on Beltrami's life and work – considerations based on his correspondence». A: COEN, S. (ed.). *Mathematicians in Bologna 1861–1960*. Basilea: Birkhäuser, 2012, 465–517.

[47] TOTH, I. «Non-Euclidean Geometry before Euclid». *Scientific American*, 221 (5) (1969), 87–101.

[48] VOELKE, J.-D. *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900*. Berna: Peter Lang, 2005.

[49] WILSON, J. M. «Euclide come testo di geometria elementare». *Giornale di Matematiche*, 6 (1868), 361–368.

malcalavi@gmail.com

Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 34, núm. 1, 2019. Pàg. 91–92

English summaries

Miriam Alcalá Vicente

The beginning of non-Euclidean geometry in Italy

Non-Euclidean geometry is probably one of the most revolutionary theories of the 19th century. After remaining unnoticed for over 30 years, from 1860 it underwent a Renaissance process, which was driven by the work of two mathematicians: Jules Hoüel and Giuseppe Battaglini.

This article is about the process of dissemination, development and acceptance of the new geometry, focusing on the Italian context. In particular, we will show that the contribution of G. Battaglini to this area goes far beyond the disclosure. At the end of his article «Sulla geometria immaginaria di Lobatschewsky», we find an unexpected coincidence between his description of the non-Euclidian plane and the subsequent Beltrami's disk model. Our purpose is to justify the similarities between these two interpretations.

Keywords: history of geometry, non-Euclidean geometry, Hoüel, Battaglini, Beltrami.

MSC2010 Subject Classification: 01A55, 51-03, 53-03.

Cristina Dalfó and Miquel Àngel Fiol

The method of lines for numerical solutions of partial differential equations

In this paper, we describe a semi-discrete method for a numerical resolution of a type of partial differential equations called the method of lines (MOL). This method is based on the discretization of all but one of the variables of the problem. We illustrate this method by solving the Laplace equation in Cartesian