

LA TRIGONOMETRIA EN ELS INICIS DE LA MATEMÀTICA XINESA. ALGUNES IDEES PER TREBALLAR A L'AULA

**FÀTIMA ROMERO¹; CARLES PUIG-PLA²;
MARIA ROSA MASSA³; IOLANDA GUEVARA⁴**

¹ INSPECCIÓ DEL DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ DE LA GENERALITAT DE CATALUNYA.

fromero1@xtec.cat

² CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA (UPC).

carles.puig@upc.edu

³ CENTRE DE RECERCA PER A LA HISTÒRIA DE LA TÈCNICA (UPC).

m.rosa.massa@upc.edu

⁴ IES BADALONA VII.

iguevara@xtec.cat

Paraules clau: *matemàtica xinesa, Els Nou Capítols, procediment de la base i de l'altura (procediment «Gougu»)*

Trigonometry at the beginning of Chinese Mathematics. Some ideas for teaching

Summary: *The Nine Chapters is the most important old Chinese mathematical text. It contains a chapter devoted to solving problems of triangles (chapter 9). The analysis of the method for solving problems —using the «base and height procedure» or «Gougu» procedure— together with the comprehension of later contributions of commentators led us to use old Chinese conceptions for training the XXI century students.*

Key words: *chinese mathematics, The Nine Chapters, the base and height procedure («Gougu» procedure)*

Introducció

Durant molt de temps l'Occident no ha parat prou atenció a la història de la matemàtica oriental i, en particular, de la matemàtica xinesa. Tanmateix, ja abans de la nostra era els xinesos conreaven les matemàtiques com s'ha evidenciat mitjançant els textos que, en el decurs dels darrers trenta anys, han estat analitzats per diferents especialistes (Li Yan & Du Shiran, 1987: 33-56; Jami, 1988; Volkov, 1994: 139-157; Cullen, 1996; Martzloff, 1997; Lloyd, 2001).

Un dels antics textos xinesos de matemàtica que podem consultar des de fa poc temps, en una excel·lent edició crítica bilingüe —xinesa i francesa— és el de *Els Nou Capítols sobre els procediments matemàtics*.

El grup d'Història de les Matemàtiques d'ABEAM (Associació de Barcelona per a l'Estudi i Aprenentatge de les Matemàtiques) treballa en el projecte «El naixement i desenvolupament de la trigonometria dins les diferents civilitzacions», que investiga l'evolució històrica dels conceptes trigonomètrics, tant pel que fa a l'estudi de textos de referència, com al disseny d'activitats d'aula per millorar el seu ensenyament.¹ En aquest context s'han analitzat alguns problemes del capítol 9 d'aquella obra de la matemàtica xinesa, que pel seu contingut connecten directament amb els objectius del projecte.

1. Els antics textos matemàtics xinesos

Els primers textos xinesos dedicats a les matemàtiques que ens han arribat daten de l'època de la dinastia Han (206 aC - 220 dC). La unificació de l'Imperi xinès duta a terme per Qin Shi Huangdi (221 aC) i la posterior consolidació d'una administració centralitzada van afavorir la recopilació de coneixements en diferents àmbits dels sabers i, en particular, dels relacionats amb el camp de les matemàtiques (Chemla, s/d: 76).

Al segle I dC es va compilar el text matemàtic que més influència posterior va tenir en la matemàtica xinesa, una obra que va ser objecte d'una important tradició de comentaris en els segles posteriors. Ens referim al *Jiuzhang suanshu* o *Els Nou Capítols sobre els procediments matemàtics* (a partir d'ara NC).²

Aquest no és el text matemàtic xinès més antic que ens ha arribat, com en algun moment s'havia pensat (Li Yan & Du Shiran, 1987: 33) ja que el *Suanshushu* o *Llibre dels Procediments*

1. La investigació se centra en el període que abasta des de l'Antiguitat fins a l'època de Regiomontanus. Les obres analitzades fins ara són els *Elements* d'Euclides (300 aC), l'*Almagest* de Ptolemeu (90 dC - 168 dC), *Sobre les mides i distàncies del Sol i la Lluna* d'Aristarc de Samos (310-230 aC), *De triangulis Omnimodis* de Regiomontanus (1436-1476) i *Tractat sobre el quadrilàter complet* (1260) de Nasir Al-Din Al-Tusi (1201-1274). Vegeu més informació sobre aquestes anàlisis a: Massa & Romero, 2003; Massa, 2005; Romero *et al.*, 2007, i Guevara *et al.*, 2008.

2. Val a dir que el títol, literalment, és «Els procediments matemàtics en nou capítols». Tanmateix, per tal d'evitar confusions (per exemple amb el *Llibre dels procediments matemàtics* o *Suanshushu*), s'ha adoptat el conveni de referir-se a aquest text de la manera que s'ha esmentat o simplement com a *Els Nou Capítols*. Potser la nomenclatura lligada a textos matemàtics clàssics occidentals ha fet que alguns historiadors s'hagin referit a aquesta obra com «Els Nou Capítols de l'art matemàtica» (Li Yan & Du Shiran, 1987: 33).

Matemàtics, descobert el 1984 en una tomba que es va segellar l'any 186 aC, està considerat com el primer llibre xinès conegut dedicat estrictament a les matemàtiques. Es tracta d'una obra lligada a la gestió administrativa i la seva redacció va precedir alguns decennis la dels NC (Chemla & Shuchun, 2005: 3-4). D'altra banda, també durant la dinastia Han es va compondre el *Zhoubi suanjing* o *Clàssic matemàtic del Gnòmon dels Zhou* (s. I aC), un text relacionat amb la topografia, l'astronomia i el calendari (Cullen, 1996).

Amb tot, el fet que els NC fos considerat un clàssic (*jing*) i que nombrosos matemàtics posteriors hi fessin referència ha fet que s'hagi comparat el paper que va desenvolupar aquesta obra a la Xina amb el que van exercir els *Elements* d'Euclides a l'Occident (Chemla, s/d: 76).

2. Els Nou Capítols sobre els procediments matemàtics (Jiuzhang Suanshu)

El text dels NC està estructurat, com el seu nom indica, en nou capítols. El capítol 1, «Camp rectangular», està dedicat al càlcul de les àrees de terres cultivades i al procediment per operar amb fraccions; el capítol 2, «Cereals», presenta problemes sobre proporcions (regla de tres) i, en particular, proporcions relacionades amb el procés d'intercanvi de cereals; el capítol 3, «Distribució per proporcions», s'ocupa de problemes sobre taxacions de mercaderies i d'altres tipus amb progressions aritmètiques i geomètriques resoltes totes amb proporcions; el capítol 4, «Amplada petita», a partir de l'àrea o el volum d'una figura o un cos geomètric es troben els costats o les cares (àrees). Es descriu la divisió entre fraccions i per extensió l'extracció d'arrels quadrades i cúbiques; el capítol 5, «Discutir les obres», descriu les mesures i els càlculs de volums de figures sòlides a partir de problemes sobre construccions de murs, dics i canals, característics de l'enginyeria del període Qin i Han; el capítol 6, «Taxes justes», fa referència a la distribució dels impostos de manera igualitària, segons la població i la distància a la capital on es recollien els impostos i per tant als dies que calia esmerçar en fer el desplaçament; el capítol 7, «Excedent i dèficit», té relació amb l'ús de les regles de falsa doble posició per resoldre problemes que reflecteixen els tipus de transaccions econòmiques de l'època; el capítol 8, «Files rectangulars» (*Fangcheng*), presenta el procediment de resolució de sistemes d'equacions lineals (que avui utilitzem amb el nom de regla del pivot) fent referència a la producció de cereals; en el procés de resolució d'alguns problemes apareixen coeficients negatius o nuls i es donen les regles per operar amb ells; i, finalment, el capítol 9, «Base i altura» (*Gougu*), que és el que ens interessa aquí, tracta sobre les múltiples aplicacions del «procediment de la base i de l'altura» (avui conegut com a teorema de Pitàgores) que s'enuncia en forma d'algorisme. També apareix en aquest capítol alguna equació de segon grau.

A cada capítol se succeeixen els problemes amb una estructura semblant. L'enunciat amb dades numèriques concretes i la demanda de noves mesures o quantitats relacionades amb la situació plantejada. A continuació les respostes i després una breu descripció de l'algorisme de càlcul per trobar les solucions. El procediment descrit pretén ser una generalització, dóna

una breu idea al lector dels càlculs que hauria de fer per resoldre situacions semblants amb unes altres dades però no justifica el procediment de càlcul. La justificació la introduiran els comentaristes del text clàssic en les successives edicions.

El primer testimoni que designa els *NC* com un clàssic és el text del comentarista Liu Hui (263). Més tard, serà el comentarista Li Chunfeng (656) qui continuarà aquesta tradició. L'objectiu dels comentaristes dels *NC* era mostrar el procediment que conduïa a trobar el valor de les respostes en el text clàssic (Chemla & Shuchun, 2005: 27). Es tractava de demostrar la correcció dels algorismes emprats en la resolució de problemes fent explícit cada pas, explicant el significat de les operacions realitzades per elaborar el resultat final i establint que aquest resultat correspon a la qüestió formulada. Tot i que treballaven amb problemes concrets i aplicaven els algorismes a unes dades concretes, sovint feien referència al procediment emprat més que a l'obtenció del resultat.

En alguns casos, el comentarista Liu Hui canvia l'enunciat d'un problema del text clàssic sense canviar els valors numèrics per tal de facilitar la interpretació de cadascun dels passos que fa per mostrar la correcció de l'algorisme. En altres, es modifiquen els valors numèrics sense canviar la situació. Un dels exemples que il·lustren aquest darrer cas és un problema que proposa trobar el volum d'una piràmide truncada. El que pretén el comentador amb els nous valors és facilitar la descomposició de la figura en tres figures iguals. Apareix aquí un nou element de la pràctica matemàtica dels comentadors, que són els auxiliars visuals. S'ha de remarcar que als *NC* no es fa cap referència a figures ni a cap altra forma de visualització.

La idea de «demostració» subjacent en els comentaris dels *NC* difereix, doncs, considerablement del mètode axiomàtic deductiu dels *Elements* d'Euclides, que és per al món occidental el model per excel·lència de procediment demostratiu.

2.1. El capítol 9: base (gou) i altura (gu)

El títol d'aquest capítol, íntegrament consagrat al triangle rectangle, pren el seu nom del primer dels procediments que es presenten, el que avui en dia coneixem com a teorema de Pitàgores i que en el text s'anomena Procediment de la base i de l'altura.³

3. Si bé la majoria de temes tractats en els *NC* apareixien en el *Llibre dels procediments matemàtics (Suanshushu)*, els temes tractats en aquest capítol només els trobem anteriorment en el *Clàssic matemàtic del Gnòmon dels Zhou*, dedicat a l'astronomia, els calendaris i la cosmografia, elaborat també durant la dinastia Han. En el prefaci que Liu Hui fa a l'edició comentada dels *NC* (263), explica que en aquesta obra hi va trobar l'expressió «dobles diferències», en va buscar el significat i va escriure un comentari sobre aquest mètode que va ser afegit com a apèndix en el *Gougu* dels *NC*. Cap al segle VII aquest apèndix es va separar dels *NC* i es va convertir en un treball independent, el *Clàssic matemàtic de l'illa marítima*. Els problemes que conté recorden els enunciats de la segona part del capítol 9 perquè es recolzen en vistes realitzades amb l'ajuda de gnòmons o d'altres dispositius per determinar distàncies o mesures inaccessibles. Aquests problemes inspirats en l'astronomia i la topografia van esdevenir un clàssic en els tractats posteriors xinesos.

«BASE (GOU) I ALTURA (GU) ES MULTIPLIQUEN CADA UNA PER SI MATEIXES, SE SUMEN (ELS RESULTATS) I ES DIVIDEIXEN PER EXTRACCIÓ DE L'ARREL QUADRADA, EL QUE DÓNA ÉS LA HIPOTENUSA.»⁴

Els 24 problemes del capítol 9 estan constituïts per dos blocs, el primer de l'1 al 12 i el segon del 13 al 24, tot i que el 24, pel seu enunciat i pel procediment de resolució, seria més propi del primer (Chemla & Shuchun, 2005: 665).⁵ En els dos blocs, els primers problemes plantegen situacions geomètriques generals, sense context, però sempre amb valors numèrics concrets. En els problemes següents, l'enunciat situa un context «real» que, un cop interpretat, duu a la situació inicial dels primers problemes sense context. En el primer bloc, els problemes de context tracten de canyes recolzades a la paret, submergides en estanys o de bastons que cal fer passar per una porta. En tots els casos cal trobar les dimensions, amplitudes, llargades, altures, etc., de manera que el procés sempre remet a la resolució d'un triangle rectangle pel procediment de la base i de l'altura. En el segon bloc, els primers problemes parlen de moviments de persones en direccions sud i est, i de la visualització d'objectes des d'aquestes posicions. Els darrers plantegen situacions que es resolen fent observacions visuals amb l'ajuda de gnòmons o d'altres dispositius per determinar distàncies o mesures inaccessibles. El procés duu a la resolució d'un triangle rectangle pel procediment de la *lü*. Pels antics matemàtics xinesos, dos conjunts de quantitats «estaven en *lü*» quan la relació entre les quantitats del primer conjunt era la mateixa que la relació entre les quantitats del segon. En el cas que ens ocupa, aquest procediment consisteix a comparar el triangle donat amb un altre de semblant.

Els tres primers problemes del capítol 9 plantegen els tres casos possibles de resolució d'un triangle rectangle, exemplificat amb la terna (3,4,5). S'enuncien, es dóna la resposta i, a continuació, el text inclou el procediment de la base i l'altura.⁶ En l'edició de Chemla i Shuchun s'alterna el clàssic amb els comentaris de Lui Hui i de Li Chunfeng. En aquest sentit Lui Hui escriu:⁷

La base multiplicada per ella mateixa fa un quadrat vermell, l'altura per ella mateixa un quadrat blau-verd, i es fa de tal manera que es recomponen els uns amb els altres; partint del fet que es guarden els fragments que queden sense bellugar, es genera per

4. Chemla & Shuchun, 2005: 705. Les citacions del text clàssic les indiquem en majúscules.

5. En l'experiència a l'aula de 3r d'ESO (Ensenyament Secundari Obligatori) realitzada durant el curs acadèmic 2007-2008 a l'IES (Institut d'Ensenyament Secundari) Badalona VII, es va constatar que el problema 24, atès el seu procediment de resolució, correspondria al primer bloc.

6. Enunciat a l'inici d'aquest apartat.

7. Com en l'edició comentada, s'indica amb majúscules el text clàssic i en minúscules els comentaris de Lui Hui. Si els comentaris són de Li Chunfeng s'indica explícitament.

reunió l'àrea del quadrat de costat la hipotenusa. Dividint aquesta per extracció de l'arrel quadrada donarà la hipotenusa.

ALTRAMENT, L'ALTURA (GU) MULTIPLICADA PER ELLA MATEIXA, ES RESTA DE LA HIPOTENUSA MULTIPLICADA PER ELLA MATEIXA. ES DIVIDEIX EL QUE QUEDA PER L'EXTRACCIÓ DE L'ARREL QUADRADA, EL QUE DÓNA ÉS LA BASE (GOU).

Li Chunfeng i els seus associats comenten respectuosament: En aquest procediment, amb l'ajuda de les àrees (mi) de la base (gou) i de l'altura (gu), es genera per reunió l'àrea (mi) de la hipotenusa. El quadrat de costat de la base (gou) és a l'interior [del quadrat de costat l'altura (gu)], de fet la base (gou) és més curta que l'altura (gu). Si fem de manera que l'altura (gu) multiplicada per ella mateixa la restem de la hipotenusa multiplicada per ella mateixa, el que dóna és el quadrat de la base (gou). És per això que dividint pel mètode de l'arrel quadrada obtenim la base (gou). (Chemla & Shuchun, 2005: 705-706)

Els comentaris de Lui Hui i Li Chunfeng descriuen figures geomètriques que no apareixen en el text; les utilitzen per justificar els algorismes del text clàssic, a través del procediment de recomposició de figures i conservació de les àrees.⁸ Diferents autors (Cullen, 1996: 206-216) (Chemla & Shuchun, 2005: 665) opten per reconstruccions semblants, on, fent servir la terminologia més emprada actualment, anomenen a la base, b l'altura i c la hipotenusa:

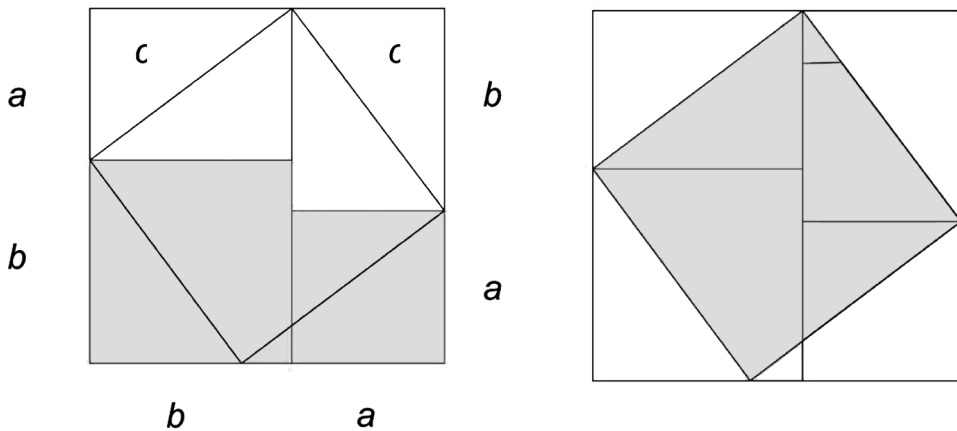


Figura 1. Figures geomètriques corresponents a la «primera figura fonamental».

8. Les figures geomètriques són els auxiliars visuals descrits al començament de l'apartat 2.

Al llarg de tot el capítol els comentaristes fan al·lusió a dues figures fonamentals,⁹ la primera de les quals s'utilitza per justificar el procediment del triangle rectangle (problemes 1, 2, 3) i més endavant per justificar el problema 11.

3. Algunes idees per treballar a l'aula

Els problemes del capítol 9 es van treballar durant tres setmanes en un grup de 3r d'ESO de l'IES Badalona VII durant el curs 2007-2008. L'objectiu d'aquesta experiència era presentar a l'alumnat una col·lecció de problemes contextualitzats sobre triangles rectangles on calia utilitzar diferents conceptes i procediments:

- el teorema de Pitàgores;
- la semblança entre figures i la seva utilització per trobar costats desconeguts mitjançant les proporcions corresponents;
- la resolució d'equacions de 1r grau;
- el procediment de la substitució quan es treballa amb més d'una incògnita.

Alguns d'aquests continguts havien estat treballats en cursos anteriors i els altres es treballaven per primera vegada.

Altres qüestions conjunturals que van aparèixer en la resolució dels problemes del capítol 9 a l'aula van ser:

- les unitats de mesura utilitzades, que tot i ser desconegudes, seguien també el sistema decimal;
- l'orientació referida als punts cardinals: l'est on nosaltres hi posàriem l'oest i el sud on hi posàriem el nord.

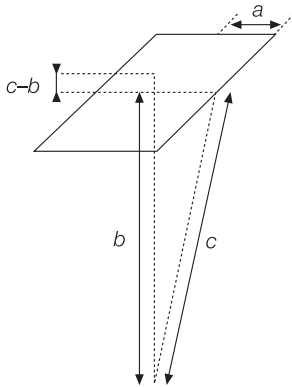
Introduir un context del passat i d'una altra cultura, on es resolen problemes que encara són actuals, mostra a l'alumnat la universalitat d'aquesta disciplina, alguns trets de la seva història i diferents enfocaments per tractar una mateixa situació.

En aquesta primera experiència de portar a l'aula els problemes del capítol 9, la resolució es va realitzar pels procediments numèrics i algebraics que encaixaven amb els coneixements previs que els alumnes havien adquirit a 2n d'ESO. Queda ara per estudiar la viabilitat i la conveniència de plantejar la resolució d'aquests problemes a l'aula utilitzant els

9. L'expressió «primera figura fonamental» és un quadrat de costat $a + b$ (suma de catets) que conté inscrit el quadrat de costat c (hipotenusa) (Chemla & Shuchun, 2005: 673). Val a dir que, tot i que no la tractem aquí, hi ha una «segona figura fonamental», introduïda per Liu Hui en el problema 9.6, que consisteix en el quadrat de costat c (hipotenusa) on s'hi capiculen els quadrats de costats a i b (catets). Aquest auxiliar visual permet trobar els catets del triangle quan es coneix c (hipotenusa) i la diferència entre els catets ($b - a$).

procediments xinesos antics, és a dir, seguint les indicacions de l'algorisme clàssic o bé mitjançant el procediment de recomposició de figures i conservació de les àrees introduït pels comentaristes posteriors.

Es presenten a continuació el problema 6, com a mostra dels tipus de problemes del primer bloc (procediment del triangle rectangle), i el problema 16, com a mostra dels del segon bloc (semblança de triangles).

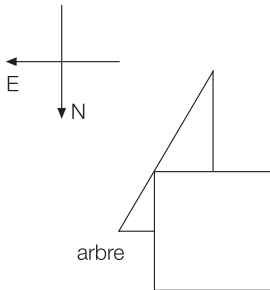


Problema 6

Suposem que tenim un estany quadrat de 1 *zhang* de costat, en el centre del qual hi ha una canya que sobresurt 1 *chi* del nivell de l'aigua. Quan estirem la canya cap a la riba, queda just a la superfície. Es demana quant valen, respectivament, la fondària de l'estany i la longitud de la canya.¹⁰

Resposta: (5, 12, 13)

Figura 2. Il·lustració corresponent al problema 6.



Problema 16

Suposem que tenim una vil·la quadrada de 200 *bu* de costat i que al centre de cada costat hi ha una porta. A 15 *bu* de la porta est de la vil·la hi ha un arbre. Es demana a quants *bu* a l'exterior de la porta sud cal anar per veure l'arbre.

Resposta: 666 *bu* i $\frac{2}{3}$ de *bu*

Figura 3. Il·lustració corresponent al problema 16.

4. Conclusions

La utilització explícita de textos històrics a l'aula és un recurs per millorar l'aprenentatge de l'alumnat. En aquest cas, la recent traducció crítica al francès de *Els Nou Capítols* és una eina per abordar l'estudi d'un text de referència en la matemàtica xinesa i, alhora, facilita la introducció d'altres procediments en la resolució de problemes, diferents als que els alumnes estan habituats a utilitzar.

10. Els dibuixos il·lustratius són actuals i es troben a la presentació de Chemla del capítol 9 (Chemla & Shuchun, 2005: 667-669).

L'experiència realitzada durant tres setmanes en una classe de 3r d'ESO ha evidenciat que, a través de la resolució dels problemes del capítol 9, els alumnes han combinat processos i continguts matemàtics que habitualment utilitzen per separat.

Pel que fa als processos:

- S'han hagut d'interpretar enunciats referits a situacions concretes mitjançant representacions adequades que permetin la comprensió del que es plantejava.
- S'ha treballat en grups de quatre i, per tant, s'ha afavorit la comunicació del pensament matemàtic per tal d'arribar a un consens sobre l'estratègia més adequada.
- S'han efectuat connexions entre diferents continguts matemàtics: la geometria i l'àlgebra.

En relació amb els continguts matemàtics pròpiament dits:

- S'ha compaginat l'aplicació del teorema del triangle rectangle amb la semblança de triangles.
- S'han resolt equacions per mètodes algebraics i per mètodes geomètrics a través del càlcul de superfícies.
- S'ha emprat el procediment de la substitució per resoldre problemes amb més d'una incògnita.
- S'ha consolidat el concepte de sistema d'unitats i s'ha practicat el canvi d'unitats.
- S'ha posat de manifest la relativitat de la referència per situar els punts cardinals: N, S, E i O.

La introducció a l'aula de conceptes i procediments a partir de contextos històrics és una experiència força enriquidora tant per a l'alumnat com per al professorat que la proposa. L'alumnat ha de desenvolupar unes capacitats que no es requereixen en activitats més estàndards, i ha de saber aplicar coneixements que ha après, sovint descontextualitzats, a situacions complexes. La majoria d'activitats que es plantegen requereixen la discussió en grup. La consegüent verbalització, a més d'afavorir la comprensió, permet al professorat valorar habilitats dels alumnes que romandrien ocultes en altres tipus d'activitats.

Bibliografia

- CHEMLA, K. (s/d), «Aperçu sur l'histoire des mathématiques en Chine Ancienne dans le contexte d'une histoire internationale», 71-90. Article on line: [http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seinaires/Resources/Chem"la22.pdf](http://www.reunion.iufm.fr/dep/mathematiques/Seinaires/Resources/Chem)
- CHEMLA, K.; SHUCHUN, G. (eds.) (2005), *Les Neuf Chapitres, le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires* [edició crítica bilingüe], París, Dunod.
- CULLEN, C. (1996), *Astronomy and Mathematics in Ancient China: The Zhou bi suan jing*, Cambridge-New York, Cambridge University Press.
- GUEVARA, I.; MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2008), «Enseñar matemáticas a través de su historia: algunos conceptos trigonométricos», *Epsilon*, 97-107.
- JAMI, C. (1988), «Une histoire chinoise du "nombre π "», *Archive for History of Exact Sciences*, **38**, 1, 39-50.
- LI YAN & DU SHIRAN (1987), *Chinese Mathematics. A Concise History*, Oxford, Clarendon Press.
- LLOYD, G. E. R. (2001), *Explorant la ciència antiga*, Barcelona, Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica.
- MARTZLOFF, J.-C. (1997), *A history of Chinese mathematics*, Berlin/Heidelberg/New York, Springer-Verlag.
- MASSA, M. R. (2005), «L'ensenyament de la trigonometria. Aristarc de Samos (310-230 aC)». A: GRAPI, P.; MASSA, M. R. (eds.), *Actes de la I Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*, Barcelona, SCHCT, 95-101.
- MASSA, M. R.; ROMERO, F. (2003), «De la Geometria a la Trigonometria: El teorema de Ptolemeu». A: BATLLÓ, J. et al. (eds), *Actes de la VII Trobada d'Història de la Ciència i de la Tècnica*, Barcelona, SCHCT, 153-159.
- ROMERO, F.; GUEVARA, I.; MASSA, M. R. (2007), «Els Elements d'Euclides. Idees trigonomètriques a l'aula». A: GRAPI, P.; MASSA, M. R. (eds.), *Actes de la II Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament*, Barcelona, SCHCT, 113-120.
- VOLKOV, A. (1994), «Transformations of Geometrical objects in Chinese Mathematics and their evolution». A: ALLETON, VIVIANE & VOLKOV, ALEXEI (eds.), *Notions et perceptions du changement en Chine*, París, Collège de France / Institut des Hautes Études Chinoises, vol. XXXVI, 133-148.