

# ORÍGENS DE LA TERMODINÀMICA RELATIVISTA: PLANCK I EINSTEIN, 1907

**MARTA JORDI TALTAVULL; LUIS NAVARRO VEGUILLAS**

DEPARTAMENT DE FÍSICA FONAMENTAL, UNIVERSITAT DE BARCELONA.

Paraules clau: *termodinàmica, relativitat, temperatura, entropia, Planck, Einstein*

---

Origin of Relativistic Thermodynamics: Planck and Einstein, 1907

*Summary: It's a long time, almost 100 years, that Planck and Einstein began to ask themselves about the behaviour of entropy, absolute temperature and other thermodynamic magnitudes under a Lorentz's transformation. In this research we try to analyze and compare the first contributions, by Planck and Einstein in 1907, related to the relativistic behaviour of entropy and temperature.*

Key words: *thermodynamics, relativity, temperature, entropy, Planck, Einstein*

---

## **Introducció**

La publicació, el 1905, per Einstein, de la teoria de la relativitat, juntament amb l'aparició de les primeres idees quàntiques de Planck i Einstein a principis de segle xx, van suposar un gran impacte per a la física, tant des del punt de vista filosòfic, com per la necessitat d'adaptar o canviar les velles teories al nou marc teòric. En aquest sentit, la teoria de la relativitat, considerada per Einstein una «teoria de principi», es va aplicar a la termodinàmica, i va donar lloc a la termodinàmica relativista (TR), que pretenia descriure les relacions de les diferents magnituds termodinàmiques, principalment l'entropia i la temperatura, entre diferents sistemes de referència inercials.

Les primeres contribucions a la TR són de Planck i d'Einstein, al 1907 (Planck, 1907; Einstein, 1907), en què els dos van arribar a la mateixa conclusió: la temperatura d'un cos, mesurada en un sistema de referència en què el cos estava en repòs, era superior a la del cos en moviment. Dit d'una altra manera: «el moviment refredava els cossos».

Després d'aquestes dues publicacions, la TR va passar a ser considerada com una extensió més de la mecànica relativista. Ara bé, al llarg del segle, aquestes no van ser les úniques contribucions a aquesta matèria, ni totes van coincidir amb els primers resultats obtinguts per Planck i Einstein al 1907. Al contrari, el mateix Einstein, al 1952 (Liu, 1994: 987-988), va fer possiblement la primera aportació a la TR en un sentit contrari als primers resultats, afirmant que, potser, «el moviment escalfava els cossos». Una tercera via de debat s'obrí quan alguns altres van justificar la invariància relativista de la temperatura (Landsberg, 1966).

Cap de les tres vies s'ha tancat, o sigui que el debat segueix obert. En aquest context, i davant la pràcticament nul·la investigació historiogràfica sobre el tema, l'objectiu de la present comunicació és examinar i comparar les primeres contribucions sobre la TR en els dos articles de Planck i Einstein del mateix any, 1907, en què es desenvolupà per primer cop aquesta disciplina, i així assentar les bases de posteriors estudis historiogràfics en aquesta direcció.

### **Planck, 1907**

La formulació de Planck de la TR la trobem en una extensa part de l'article de 1907, que persegueix l'objectiu global de (Planck, 1958: 181):

[...] desenvolupar les conclusions, a les quals una combinació del principi de relativitat i de mínima acció per un cos ponderable qualsevol condueixi. Amb tot això, es donaran a conèixer més perspectives, així com també alguna conseqüència, la qual pugui suposar un examen experimental accessible directament.

És així com la TR és només una de les conseqüències que de l'aplicació conjunta d'aquests dos principis es poden derivar, i que Planck es proposa explorar. A tal efecte, Planck farà servir la física de la radiació del cos negre, que fins llavors havia constituït l'objecte principal de la seva implicació científica, en la majoria d'arguments de l'article, per a generalitzar-ne després les conclusions a la resta de cossos. En aquest sentit, Planck s'avança a dir (Planck, 1958: 181-182):

La radiació del cos negre en el buit és, sota tots els sistemes físics, singular, les propietats termodinàmiques, electrodinàmiques i mecàniques del qual, [...], s'afirmen amb absoluta exactitud. El seu tractament s'aplica, amb això, als altres sistemes.

D'aquesta manera, el primer que es proposa Planck és determinar les funcions termodinàmiques característiques de la radiació del cos negre (entropia, energia interna, pressió i

quantitat de moviment en funció de la velocitat, volum i temperatura), a partir del primer i segon principi de termodinàmica i de les expressions que, prèviament, un estudiant seu, Kurt von Mosengeil, havia deduït. Cada estat del sistema termodinàmic en moviment vindrà caracteritzat per les tres components de la velocitat, el volum i una altra variable independent.

Llavors, d'una combinació del primer i segon principi de termodinàmica, Planck escriu:

$$dS = \frac{Q}{T} = \frac{dE - A}{T},$$

en què  $Q$  és la calor transferida al sistema termodinàmic,  $dE$  és la variació d'energia de la radiació i  $A$  és el treball mecànic exercit, des de fora, sobre la radiació, en què intervenen dos tipus treball, el de compressió i també el de translació, en adaptació del primer principi de la termodinàmica als sistemes en moviment:

$$A = qdG - pdV$$

( $q$  és la velocitat del sistema termodinàmic —la radiació, en aquest cas—,  $p$  la pressió,  $dG$  l'increment en la quantitat de moviment, i  $dV$ , del volum).

A partir d'aquí, només substituïnt tots els elements de la relació anterior de l'entropia per les expressions termodinàmiques adequades que derivà Mosengeil, Planck obté:

$$S = \frac{4ac^4}{3} = \frac{T^3V}{(c^2 - q^2)^2}.$$

En aquesta última expressió per l'entropia, que Planck farà servir posteriorment,  $a$  és la constant de la llei de Stefan-Boltzmann ( $E = aT^4$ ) i  $c$ , la velocitat de la llum.

Amb això arribem al punt en què Planck es proposa aplicar el principi de mínima acció i el de relativitat. Ara bé, la implicació que prenen ambdós principis en els arguments de Planck és desigual. El primer pren un protagonisme passiu i el segon, actiu. És a dir, en el primer cas, Planck simplement confirma que les expressions per a la radiació del cos negre descrites prèviament s'ajusten a les relacions diferencials per a l'energia, quantitat de moviment, pressió i entropia derivades de l'aplicació del principi de mínima acció a un cos en general. En canvi, el principi de relativitat servirà a Planck per a deduir formalment la relació de les diferents variables termodinàmiques, entre elles la temperatura, per a diferents sistemes de referència inercials.

Però abans de fer-ho, Planck introdueix una tercera i necessària hipòtesi addicional: la invariància de l'entropia en diferents sistemes de referència inercials, la transformació relativista de la qual no pot derivar-se directament de les transformacions de Lorentz. I malgrat que el camí més fàcil per a demostrar-la hauria pogut basar-se en l'estreta connexió de l'entropia amb la probabilitat, Planck rebutja aquest camí i n'utilitza un altre, «més directe, completament independent a la introducció del concepte de probabilitat» (Planck, 1958: 188). Vegem-ho:

Suposem un cos en un estat 1, expressat en un sistema de referència inercial  $R$ , en el qual el cos està en repòs. Llavors, el fem evolucionar cap a un estat 2, mitjançant un «camí» adiabàtic i reversible, tal que es trobi en repòs en un altre sistema de referència inercial  $R'$  que es mogui amb velocitat uniforme  $v$  respecte del primer. L'entropia del cos en ambdós estats és la mateixa (degut a la reversibilitat), tant per a un sistema de referència com per a l'altre. És a dir, que  $S_1 = S_2$ , i que  $S'_1 = S'_2$ .

Ara suposem que  $S'_1 > S_1$ , de manera que l'entropia del cos en el sistema de referència pel qual el cos està en moviment és major que la que presenta el cos en el sistema pel qual està en repòs. Si utilitzem el mateix raonament pels estats finals en ambdós sistemes, també és clar que  $S'_2 < S_2$ . Ara bé, aquestes desigualtats es contradueixen amb les igualtats anteriorment exposades, de manera que l'única solució possible és que:  $S' = S$ , en qualsevol sistema. Així, Planck arriba a la conclusió que l'entropia d'un cos no depèn de l'elecció del sistema de referència inercial.

Un cop establerta aquesta nova hipòtesi, Planck l'utilitza, juntament amb les transformacions de Lorentz, per a concloure que (Planck, 1958: 189):

Si un cos reposa en un estat inicial per un sistema de referència  $R$ , portat per qualsevol camí reversible i adiabàtic a una velocitat  $v$ , així que el volum final  $V_2$  es relacioni amb el volum inicial  $V_1$  segons:

$$(2) \quad V_2 = V_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

llavors l'estat final 2 per al sistema  $R'$  és idèntic en tots els components a l'estat inicial 1 per al sistema  $R$ .

Això implica les igualtats següents: la primera,  $S'_2 = S_1$ , en virtut de la tercera hipòtesi i de la reversibilitat del procés; la segona,  $v'_2 = v_1$ , ja que el mateix cos en l'estat 1 està en repòs respecte de  $R$ , i en l'estat 2 respecte de  $R'$ , i la tercera,  $V'_2 = V_1$ , obtinguda a partir de la transformació relativista del volum. Així esdevé clar que un canvi d'estat del cos, d'1 a 2, per a un sistema de referència donat, és equivalent a considerar, per a un mateix estat de moviment del cos, un canvi de sistema de referència, entre  $R$  i  $R'$ .

Llavors, simplement aplicant aquesta equivalència al canvi d'estat de la radiació del cos negre, i considerant les respectives expressions per a l'entropia, derivades de (1), prenent  $q = 0$  per a  $S_1$  i  $q = v$  per a  $S_2$ , s'obté:

$$S_1 = S_2 = \frac{4aT_1^3 V_1}{3} = \frac{4ac^4 T_2^3 V_2}{3(c^2 - v^2)^2}.$$

D'aquí, amb la transformació relativista del volum (2), Planck dedueix directament que:

$$T_2 = T_1 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

I també que  $p_1 = p_2$ , en virtut de l'expressió per a la pressió de radiació d'un cos negre, deduida també amb anterioritat. A continuació, Planck estén l'abast d'aquests resultats, no únicament a la radiació, sinó a qualsevol cos, com havia avançat a la introducció: «les dues darreres relacions valen, per tant, generalment per a qualsevol cos que és sotmès al procés indicat» (Planck, 1958: 190).

Ara bé, falta trobar la relació d'aquestes mateixes magnituds entre qualsevol parella de sistemes de referència inercials, sense que necessàriament un hagi de ser el sistema privilegiat a  $v = 0$ . Així, donat un sistema  $R$  que es mou a  $v = v$ , i un altre a velocitat  $v = v'$ , Planck generalitza les relacions anteriors i obté:

$$\frac{V'}{V} = \frac{T'}{T} = \sqrt{\frac{c^2 - v'^2}{c^2 - v^2}}; p' = p; S' = S.$$

### Einstein, 1907

La primera aportació que fa Einstein en termes de TR apareix en un article publicat amb pocs mesos de posterioritat al de Planck, descrit en l'apartat anterior, que pretenia ser un compendi de tot el que es podia inferir, fins al moment, conjuntament del principi de relativitat i de la teoria de Lorentz. No és fins a la quarta part d'aquest treball en què Einstein estudia el comportament relativista de l'energia i el moment dels sistemes físics en moviment, i amb això s'endinsa en la TR (Beck, 1989: 254):

I also discuss the dependence of entropy and temperature on the state of motion; as far as entropy is concerned, I kept completely to the Planck study cited [Planck, 1907], and the temperature of moving bodies I defined as did Mr. Mosengeil in his study on moving black-body radiation.

El que fa Einstein és aplicar directament el principi de relativitat a les equacions del primer i segon principi de termodinàmica, de forma generalitzada, sense resoldre prèviament el problema per a cap cos en concret, com fa Planck amb la radiació del cos negre. La forma del primer principi que pren com a punt inicial del raonament té la forma particular següent:

$$dQ = dE + pdV - qdG,$$

en què  $dQ$  és la calor transferida;  $dE$ , el diferencial d'energia interna;  $pdV$ , el treball compressional, i  $qdG$ , el treball translacional. Einstein afegeix aquest darrer terme a la fórmula habitual, com també fa Planck, per a justificar el fet que, en un cos en moviment, no tot el subministrament de calor més el treball extern es tradueixen en un augment d'energia interna, sinó que s'ha de descomptar el treball invertit en augmentar l'energia cinètica del cos.

Per altra banda, també fa servir la forma diferencial del segon principi de termodinàmica aplicat als processos reversibles.

I llavors apunta (Beck, 1989: 299):

Now we have to derive the equations relating the quantities  $dQ$ ,  $\eta$ ,  $T$  and the corresponding quantities  $dQ_0$ ,  $\eta_0$ ,  $T_0$ , which refers to a co-moving reference system.

( $\eta$  representa l'entropia). Pel que fa a aquesta, com ja ha anunciat a la introducció de l'article, Einstein reproduceix textualment el raonament que fa servir Planck per a deduir la seva invariança per a diferents sistemes de referència inercials. I llavors substitueix l'expressió matemàtica de les transformacions relativistes de l'energia, pressió ( $p = p_0$ ) i volum d'un cos deduïdes prèviament en el mateix article, directament en l'equació del primer principi de termodinàmica, per a obtenir la relació següent:

$$dQ = dQ_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

que relaciona la calor transferida a un cos entre dos sistemes de referència inercials.

Notem que, al contrari que Planck, Einstein dedueix prèviament la invariança de la pressió i l'utilitza com a argument en la derivació de les expressions de TR.

Finalment, a partir de la invariància de les lleis físiques per qualsevol sistema de referència inercial, en concret el segon principi de termodinàmica, i fent servir la invariància de l'entropia i la relació anterior per a la calor, Einstein arriba a la mateixa conclusió que Planck per a la transformació relativista de la temperatura:

$$\frac{T}{T} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

És a dir, que la temperatura d'un cos és inferior en el sistema en què el cos està en moviment.

### Conclusions i perspectives

En definitiva, Planck i Einstein arriben al mateix resultat, que es pot resumir en: «el moviment refreda els cossos», però amb uns arguments anàlegs i altres de diferents:

Així, si bé Einstein parteix directament del primer i segon principis de la termodinàmica generalitzats i de la seva invariància sota canvis de sistema de referència inercials, Planck els utilitza només per a obtenir l'expressió de les principals funcions termodinàmiques de la radiació del cos negre, resoldre posteriorment el problema a partir d'aquest cas concret i generalitzar-lo després a la resta de cossos.

A més, Einstein arriba a la relació de temperatures a través de la relació de la transferència de calor entre diferents sistemes de referència inercials combinada amb l'expressió del segon principi de la termodinàmica, mentre que Planck hi arriba sense utilitzar explícitament cap expressió de la calor en cap moment.

Finalment, Einstein arriba a la invariància de la pressió prèviament al desenvolupament de la TR, simplement aplicant el principi de relativitat i les transformacions de Lorentz a la dinàmica, mentre que per a Planck aquesta n'és una conclusió.

Ara bé, tots dos utilitzen la invariància de l'entropia per a diferents sistemes de referència inercials, si bé Planck la formula prèviament i Einstein la pren de forma exacta després.

I tots dos utilitzen un versió del primer principi de la termodinàmica en la qual inclouen un terme de treball translacional, que serveix per a adaptar explícitament aquest principi al fet que el cos estigui en moviment respecte d'algun sistema de referència.

Un cop fetes les comparacions, és clar que aquest és només un estudi inicial de l'origen de la termodinàmica relativista que, lluny d'acabar aquí, pretén donar pas a l'estudi historiogràfic de l'impacte immediat que van suposar aquests resultats, així com de l'inici i continuïtat del debat, que encara avui roman sense tancar.

## Bibliografia

BECK, A. (trad.) (1989), *The collected papers of Albert Einstein*, vol. 2: *The Swiss years: writings, 1900-1909*, Princeton, Princeton University Press.

EINSTEIN, A. (1907), «Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen», *Jahrbuch der Radioaktivität*, **4**, 411-462. [Versió anglesa a: BECK, A. (1989), 252-311]

LANDSBERG, P. T. (1966), «Does a moving body appear cool?», *Nature*, **212**, 571-572.

LIU, C. (1994), «Is there a relativistic thermodynamics? A case study of the meaning of special relativity», *Studies in History and Philosophy of Science*, **25**, 983-1004.

PLANCK, M. (1907), «Zur Dynamik bewegter Systeme», *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, **13**, 542-570. [Reimpres a: PLANCK, M. (1958), 176-209]

— (1908), «Zur Dynamik bewegter Systeme», *Annalen der Physik*, **26**, 1-34.

— (1958), *Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, Braunschweig, Vieweg, 3 v.