SECCIÓ LLIURE

III JORNADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I ENSENYAMENT
NOVA ÈPOCA / VOLUM 1 (2) / 2008, p. 297-302

HUYGENS I EL LLOC II-5 D'APOL·LONI A L'*HOROLOGIUM OSCILLATORIUM*[1]

EDUARD RECASENS GALLART
DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA III, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA.

Paraules clau: Horologium, *lloc geomètric, pèndol, centre de gravetat, isocronia*

Huygens and the Apollonius' Locus II-5 in the *Horologium Oscillatorium*

Summary: *The way Huygens used a geometrical locus of Apollonius in order to establish isochronism in a pendulum.*

Key words: Horologium, *geometrical locus, pendulum, center of gravity, isochronism*

El llibre de Christiaan Huygens (1629-1695), *Horologium oscillatorium* (Huygens, 1673) és una de les obres més notables de física matemàtica que s'han escrit abans de l'aparició dels *Principia* de Newton el 1687. El títol complet del llibre de Huygens és *El rellotge de pèndol o demostracions geomètriques del moviment del pèndol aplicat als rellotges*. Destaco l'expressió «Demostracions geomètriques» ja que Huygens, tal com pensava Arquimedes, considera que els descobriments en el terreny de la física, per tal que quedin sòlidament fonamentats, cal demostrar-los geomètricament.

1. Aquest treball ha estat parcialment finançat amb un ajut del Ministeri d'Educació i Ciència (BHA2003-08394-c02-01).

DOI: 10.2436/20.2006.01.82

L'interès de Huygens pels rellotges venia de lluny. Ja de jove, cap als 17 anys, Mersenne li havia proposat que, per a diverses configuracions simples com ara un triangle o un sector circular, intentés construir un pèndol simple que oscil·lés amb el mateix període que els objectes geomètrics descrits. La tasca de trobar per a un pèndol físic un de simple que fos isòcron amb aquest era lluny de ser trivial i alguns notables matemàtics de l'època, com ara Descartes o Roberval, només ho havien aconseguit en casos particulars. Huygens, al llarg de la seva vida científica, estigué molt interessat en la construcció d'un rellotge que servís als navegants per poder calcular «la longitud» amb precisió, problema tecnològic que estava en la primera línia de recerca al segle XVII. El 1657, quan Huygens tenia 28 anys, va construir el primer rellotge de pèndol de la història, el qual va patentar, i l'any següent va publicar un llibret, l'*Horologium*, en què explicava els mecanismes d'aquest rellotge. Anteriorment, Galileu ja havia plantejat la idea d'aplicar el moviment d'oscil·lació pendular per a mesurar el temps, però mai va acabar de materialitzar la idea amb èxit. D'altra banda, tampoc el rellotge de Huygens va tenir gran aplicació a la navegació. El primer rellotge marí que permeté calcular la longitud amb una precisió acceptable es construeix el 1736 i el construeix el rellotger anglès John Harrison. Nogensmenys, amb tota aquesta recerca al voltant dels rellotges, Huygens aconseguí uns molt bons resultats teòrics, tant en física com en matemàtiques, que exposaria en el llibre *Horologium oscillatorium* (Huygens, 1673).

Huygens, que era prenewtonià, per tal d'aconseguir una bona base teòrica que li permetés fonamentar els resultats que havia trobat sobre el moviment oscil·latori del pèndol, introduí una hipòtesi inicial de tipus físic, a saber, que si un sistema de pesos es comença a moure per causa de la seva mateixa gravetat, el centre de gravetat del sistema no pot elevar-se a una altura superior a la que es trobava abans d'iniciar-se el moviment. Amb aquesta hipòtesi i el recurs de la geometria, Huygens aconseguí organitzar deductivament els seus descobriments sobre l'oscil·lació dels pèndols físics, i és precisament en aquesta faceta com a físic matemàtic que Huygens destaca amb notabilitat en la història de la matemàtica. Al llarg de la seva obra, desenvolupa conceptes i resol qüestions que enriqueixen la geometria, com són les definicions d'*evoluta* i *evolvent* o el descobriment de la *tautocronia cicloïdal*.

La formació inicial de Huygens com a matemàtic es dóna principalment entre els anys 1647-1649, quan va estudiar a la Universitat de Leiden, on Frans Van Schooten va ser el seu tutor. Schooten, el traductor al llatí de la *Géométrie* de Descartes, va explicar-li el mètode cartesià resolent problemes de geometria clàssica, en especial problemes trets de l'obra d'Apol·loni *Llocs plans*. En particular, Huygens s'interessà pel lloc geomètric següent:

> Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectae lineae et sint species quae ab omnibus fiunt dato spacio aequales punctum continget positione datam circumferentiam.[2]

2. «Si des de punts donats en nombre qualsevol tracem segments rectilinis cap a un altre punt i les espècies sobre aquests totes juntes igualen una extensió donada, aquest punt es troba en una circumferència donada en posició.»

Aquest lloc geomètric va ser conegut pels matemàtics de l'Europa del segle XVII a través de la traducció llatina de Commandino dels vuit llibres de Pappus d'Alexandria agrupats sota el nom de *Synagoge*. En aquesta col·lecció, Pappus reunia molts dels resultats de la matemàtica grega i, en particular, en el setè llibre, donava breu notícia del contingut dels dos llibres d'Apol·loni que formaven l'obra *Llocs plans*. Pappus dóna un llistat de vuit llocs geomètrics per a cada llibre. L'enunciat del lloc geomètric de què estem parlant ocupava la cinquena posició del segon llibre i és per això que, per abreujar, l'anomeno *el lloc II-5 d'Apol·loni*.

El lloc geomètric II-5 d'Apol·loni té una peculiaritat que consisteix en què, des que va ser redescobert al segle XVII, diferents matemàtics l'han utilitzat de diverses maneres i n'han proporcionat, doncs, diferents interpretacions del seu enunciat, enunciat que en el seu original és força abstracte, sobretot a causa del terme *species*, el qual no se sabia ben bé com interpretar. Qui primer va oferir una demostració del lloc II-5 fou Fermat cap al 1636, però no va ser publicada fins quaranta-tres anys més tard (Fermat, 1679). En aquesta demostració, d'entrada Fermat va interpretar el terme *species* com si fossin figures quadrades, però després, mitjançant un hàbil recurs algebraic, va fer una extensió ben notable. Segurament, la primera demostració publicada del lloc II-5, encara que no en tota la seva generalitat, es deu a F. Schooten i es troba al tercer llibre dels *Exercitationum mathematicarum* (Schooten, 1656). La demostració de Schooten segueix el nou mètode cartesià i no és general perquè Schooten va interpretar *species* com 'figures quadrades'. Huygens, deixeble de Schooten, va treballar el lloc II-5 cap al 1650. L'anomenava *propositio mirabilis* i, com Schooten, va interpretar *species* com 'quadrats', en va fer una demostració analítica que no va publicar i, més tard, la va fer intervenir en tractar un tema d'isocronia lligat al pèndol compost, que va incloure en la seva gran obra *Horologium oscillatorium* (Huygens, 1673).

La primera publicació en què hi ha una demostració amb tota generalitat i en termes geomètrics del lloc II-5 d'Apol·loni és la *Geometria magna in minimis* (Zaragozà, 1674).

A l'*Horologium oscillatorium*, allò que Huygens (1673) més bé li va anar del lloc II-5 va ser el fet que el centre de la circumferència, que és lloc geomètric dels punts que compleixen el requeriment d'Apol·loni, és precisament el «centre de gravetat d'aquests punts» quan aquests punts són pensats com petites esferes materials i, per tant, «pesen». La necessitat d'introduir aquesta versió «fisicomatemàtica» del lloc II-5 fa que Huygens elaborés la versió del lloc II-5 següent, que fou inclosa com a «proposició XII» a la part quarta de l'*Horologium oscillatorium* (Huygens, 1673):

> Donat en el pla un nombre qualsevol de punts, hi tracem, amb radi arbitrari, una circumferència que tingui com a centre «el centre de gravetat dels punts donats», llavors, si des dels punts donats tirem línies rectes a un punt d'aquesta circumferència, la suma dels quadrats d'aquestes rectes és una constant que no depèn del punt considerat en la circumferència traçada.

Cal fer dues observacions: la primera observació és que l'expressió «centre de gravetat de punts» és quelcom alliè al llenguatge emprat a la geometria d'Euclides. Cal, però, no perdre de vista que Huygens utilitzava la geometria com el llenguatge necessari per a donar validesa científica als resultats mecànics. Els propòsits de Huygens són físics i no pas geomètrics. La segona observació és que per a demostrar la seva versió del lloc II-5 d'Apol·loni, se serveix de la proposició I de l'*Horologium* (Huygens, 1673), en què, fent intervenir arguments de tipus físic relatiu a l'equilibri, demostra que si

1) a, b, c són pesos respectivament situats en els punts A, B, C (els quals estan en un mateix costat respecte d'una recta d'un pla),
2) G és el centre de gravetat d'aquests pesos a, b, c i
3) A', B', C', G' són les projeccions ortogonals dels punts A, B, C, G sobre la recta esmentada, llavors es compleix que: $a \cdot (AD) + b \cdot (BE) + c \cdot (CF) = (a + b + c) \cdot GH$.

Aquesta propietat del centre de gravetat és precisament la que després s'utilitzarà en els textos de geometria analítica per a donar una definició geomètrica del centre de gravetat.

L'ús que Huygens fa de la seva versió del lloc geomètric d'Apol·loni que demostra a la proposició XII es troba en la següent proposició XIII i diu així:

> Quan una figura que es troba en un pla se suspèn des de diversos punts d'aquest pla igualment distants del centre de gravetat de la figura, aquesta figura és isòcrona amb ella mateixa en oscil·lació lateral.

Per tal de demostrar-ho, considera el triangle ABC, el qual se suposa suspès d'un punt E que anomena *punt de suspensió*. Anomena D el centre de gravetat del triangle i pensa el triangle dividit en n parts iguals «suficientment petites».[3] Des dels centres de gravetat d'aquestes «parts petites», traça línies rectes que van a parar a l'eix d'oscil·lació que passa per E i és perpendicular al pla que conté el triangle ABC.[4]

A la proposició VI de la quarta part de l'*Horologium*, Huygens (1673) ha demostrat la fórmula que permet calcular la longitud l del pèndol simple isòcron a un pèndol compost. En el cas del triangle ABC, la fórmula s'escriuria com segueix (notació actual): $\frac{\sum (d_i)^2}{n \cdot DE} = 1$;

d_i és la distància del centre de gravetat d'un trosset i-èsim al punt de suspensió E, i DE és la distància entre el centre de gravetat del triangle ABC i el punt de suspensió E.

3. «Intelligatur figura *ABC* divisa in particulas minimas aequales [...]» (Huygens, 1673: XVIII, 281)
4. «[...] a quarum omnium centris gravitatis, ad punctum *E*, rectae ductae sint» (Huygens, 1673: XVIII, 281)

Si el mateix triangle *ABC* és suspès per un altre punt *C* de la circumferència centrada en el centre de gravetat del triangle *ABC*, aplicant la fórmula anterior es té que: $\frac{\sum(h_i)^2}{n \cdot DC} = q$,

on q és la longitud del pèndol simple isòcron al pèndol compost triangle *ABC* quan aquest és suspès del punt *C*, h_i és la distància del centre de gravetat d'un trosset i-èsim al nou punt de suspensió *C* i *DC* és la distància entre el centre de gravetat *D* del triangle *ABC* i el nou punt de suspensió *C*.

Ara és quan el lloc II-5 d'Apol·loni intervé en la versió de Huygens, que diu que per ser *E* i *C* punts que es troben sobre una mateixa circumferència centrada en el centre de gravetat del triangle *ABC*, es té que $\sum(d_i)^2 = \sum(h_i)^2$ i, per tant, com que $DC = DE$, resulta que ha d'ésser $q = l$, cosa que ens diu que el triangle *ABC*, tant si és suspès del punt *E* com si és suspès del punt *C*, oscil·la amb el mateix període.

A la proposició XVI de la quarta part, amplia l'anterior resultat demostrant que quan una figura qualsevol —una línia, una superfície o un sòlid— oscil·la al voltant d'eixos paral·lels igualment distants del centre de gravetat de la figura, hi ha isocronisme.

Bibliografia

BLACKWELL, R. (1986), *Christiaan Huygens' The Pendulum Clock*, Iowa, Iowa University Press.

FERMAT, P. (1679), *Varia opera mathematica*. A: TANNERY, P.; HENRY, C. (ed.) (1891-1912), *Oeuvres de Fermat*, París, P. Gauthier Villars.

HUYGENS, C. (1673), *Horologium oscillatorium*. A: NIJNOFF, M. (ed.) (1950), *Oeuvres Complètes de Huygens*, vol. 11 i 18, La Haia, Société Hollandaise des Sciences.

SCHOOTEN, F. (1656), *Exercitationum mathematicarum, liber III*, Leiden, Ex Officina Johannis Elsevirii.

ZARAGOZÀ, J. (1674), *Geometria magna in minimis*, Toledo, [s. n.].