

# PROGRAMA D'ÀLGEBRA D'ENSENYAMENT SECUNDARI PRESENTAT PER JOSEP MARIA BARTRINA I CAPELLA (1861-1946) PER A OPTAR A UNA CÀTEDRA DE MATEMÀTIQUES D'INSTITUT

**MARIA CINTA CABALLER VIVES; JOSEP LLOMBART PALET**  
UNIVERSITAT DEL PAÍS BASC.

Paraules clau: *matemàtiques, àlgebra, ensenyament secundari, institut, segles XIX i XX, Josep M. Bartrina i Capella*

---

Algebra Programme Presented by Josep Maria Bartrina i Capella (1861-1946) to Supply a Mathematics Teacher for the Vacancy in Secondary School

Summary: *Josép Maria Bartrina i Capella, after a brief period as Professor Auxiliary in the Faculty of Sciences of Valencia's University, taught Mathematics at Secondary Schools in Tapia de Casariego, Girona and Barcelona. When he finished his studies of Sciences Physics-Mathematics, as well as his Doctorate, he requested to be admitted to the contest public examination to supply Mathematics teachers for the vacancies in Secondary School in Las Palmas and Tapia de Casariego. Between the documents, that he contributed as soon as he took possession of the Mathematic's Chair of the Secondary School in Tapia de Casariego (1889), there is a Mathematics programs (the first course: Arithmetic and Elementary Algebra and the second course: Elementary Geometry and Rectilinear Trigonometry). The Algebra programme, which will be compared to other programs of this subject that were published between 1840 and 1919, will be analysed in this report.*

Key words: *mathematics, algebra, secondary teaching, secondary school, XIXth and XXth centuries, Josep M. Bartrina i Capella*

---

## Introducció

A partir dels inicis de l'ensenyament secundari a Espanya va ser habitual la publicació de programes marcant els continguts de les respectives assignatures, entre altres, els corresponents als cursos de matemàtiques elementals. Es tracta de programes de procedència molt diversa, entre els quals es poden trobar programes oficials que varen ser editats seguint les directrius de determinats plans d'estudis i programes elaborats pels responsables de les càtedres dels instituts. Entre aquests últims figuren programes impresos i programes manuscrits. Pel que fa als programes manuscrits, molts d'ells es poden localitzar dintre els expedients personals d'alguns catedràtics o en els expedients de les actes de diferents concursos celebrats per a cobrir les càtedres vacants. El programa que és objecte d'aquesta comunicació és un programa manuscrit que vam trobar a l'expedient personal de Josep Maria Bartrina i Capella a l'Arxiu General de l'Administració, Secció d'Educació i Ciència (AGA-EC). L'estudi d'aquest programa està inclòs dintre d'un treball molt més ampli que ha estat el meu tema d'investigació dels últims anys i que ha donat peu a la memòria titulada «El àlgebra en la enseñanza secundaria en España (1836-1936)» per a optar al grau de doctora en ciències matemàtiques. La tesi, que ha estat dirigida pel doctor Josep Llobart Palet, va ser defensada a la Universitat del País Basc el juny de 2006. Entre d'altres, algunes de les qüestions tractades a la memòria són els plans d'estudis; els programes d'àlgebra (hem analitzat vint-i-un programes publicats entre 1840 i 1919); els llibres de text (hem trobat seixanta-quatre primeres edicions de llibres de text d'àlgebra escrits per a l'ensenyament secundari que van ser publicades durant el període 1848-1927, de les quals n'hem estudiat vint-i-tres), i oposicions a diverses càtedres de matemàtiques dels instituts de secundària i escalafons de catedràtics de matemàtiques d'institut. Dels tretze escalafons que s'han examinat (1861-1935) s'ha obtingut informació de 321 catedràtics que prengueren possessió d'una càtedra des de 1833 fins a 1928, dels quals s'ha fet una recerca de les seves publicacions. També hem elaborat les biografies científicoacadèmiques d'un bon nombre d'aquests catedràtics de matemàtiques d'institut. L'examen dels programes i dels manuals, d'una banda, permet avaluar els continguts d'aquesta disciplina que es van transmetre als alumnes d'ensenyament secundari en el segle XIX i primer terç del segle XX. D'altra banda, ens permet conèixer el grau de modernitat dels autors d'aquestes publicacions, així com l'interès que tenien per als aspectes didàctics. Els vint-i-un programes d'àlgebra estudiats són: Juan Cortázar Abasolo (1840), Fernando González (1843), Ambrosio Moya de la Torre (1844 i 1845), Bernardo Fenollosa (1844), Joaquín Fernández Cardín (1844), José Sanjurjo (1844), Juan de Zafont (1844), Dirección General de Instrucción Pública (1846), Mariano Ascuenaga i José Naverán (1848), Carlos Botello del Castillo (1851), Gabino de Epalza (1857), programa d'àlgebra elemental de la Universidad de Sevilla (1860), José Barceló, Escuela Industrial de Alcoy (1860), José Rochano de Alemany (1880), Josep Maria Bartrina Capella (1885-1889), Manuel Burillo de Santiago (1892), Ezequiel Fernández García (1894), Ricardo Carapeto Zambrano (c. 1910), José Mingot Shelly (c. 1914) i Fernando Lo-

rente de No (c. 1919). Entre tots aquests programes, ens ha cridat l'atenció el del professor Bartrina i Capella, que és el que presentem en aquest treball. Abans de comentar el seu programa d'àlgebra, donarem una breu biografia científicoacadèmica de Bartrina.

### **Biografia científicoacadèmica de Josep Maria Bartrina i Capella**

Josep Maria Bartrina i Capella va nèixer a València el 23 de juliol de 1861 i va morir a Barcelona el 24 de novembre de 1946. El 1882 va rebre el títol de llicenciat en ciències fisico-matemàtiques per la Universitat de València. Posteriorment, va cursar les assignatures de doctorat (astronomia i física-matemàtica). El 16 de novembre de 1888 va ser nomenat professor auxiliar de la Facultat de Ciències d'aquesta Universitat, i va cessar al juliol de 1889 quan va obtenir, mitjançant oposició, la càtedra de l'Institut de Tapia de Casariego. Al setembre de 1890, per concurs de trasllat, fou nomenat catedràtic de Matemàtiques de l'Institut de Girona i va passar a regir una càtedra de Matemàtiques de l'Institut de Barcelona gràcies a un altre concurs-oposició. Bartrina va ocupar aquesta càtedra des de 1894 fins a la data de la seva jubilació, el 1931. Ocupà el càrrec de director de l'institut barceloní entre 1921 i 1931, i va ésser nomenat director honorari d'aquest establiment el 1932. Al juny de 1913 fou elegit acadèmic numerari de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (RACAB) i va actuar com a director de la secció primera d'aquesta institució durant el bienni 1926-1928. Al 1926 obtingué la categoria d'*Officer de l'Instrucción Pública*. Bartrina i Capella és autor de diferents publicacions, entre les quals destaquen les memòries presentades a la RACAB i els llibres de text d'ensenyament secundari. Per ordre cronològic, aquestes són les publicacions del professor Bartrina i Capella:<sup>1</sup> (1885-1889) *Programas de los dos cursos de matemáticas correspondientes a los estudios de segunda enseñanza* (manuscrit); (1890) «Intima», *Álbum Literario*, 3, 140: 2; (1890) «El Tiempo», *Álbum Literario*, 3, 140: 2-3; (1896) *Tablas de logaritmos a cinco decimales para los 10.800 primeros números y para los senos, tangentes, cotangentes y cosenos de uno en uno, seguidas de diferentes tablitas útiles y de una colección de fórmulas usuales y precedidas de una extensa explicación sobre su manejo*, Barcelona, Pedro Ortega [8a ed., 1944]; (1898) *Elementos de geometría pura y de trigonometría rectilínea*, Barcelona, A. López Robert [3a ed., 1905. Inclou referències a les geometries no euclídiades i és un dels escassos textos de secundària de l'època en què es fa referència a aquestes geometries. La part dedicada a la geometria —*Elementos de geometría pura*— va arribar fins a la cinquena edició l'any 1923]; (1899) *Aritmética para el 1<sup>er</sup> curso de la 2<sup>a</sup> enseñanza*, Barcelona, La Acadèmia de Serra (arreglo por J. M. Bartrina Capella de la *Aritmética para las escuelas de la 1a enseñanza* publicada en 1858 por J. Bartrina Royo) [3a ed., 1918]; (1900) *Epítome de Geometría*, Barcelona; (1901) *Nociones de cosmografía y geografía física*, Barcelona, Tip. de J. Altés; (1903) *Nociones de aritmética universal*, Barcelona, Francisco J. Altés y Ala-

1. Per a obtindre aquestes referències s'ha utilitzat Bernalte (1988), Llombart (1990), Montanuy (1993), Real (1949), Pérez del Pulgar (1913), Rebiun y Vea (1995).

bart [4a ed., 1922]; (1903) *Rudimentos de geometría*, Barcelona, Francisco J. Altés y Alabart [4a ed., 1910]; (1908) «Tratado didáctico de las geometrías no-euclídeas», *Memorias de la RACAB*, 3a època, vii, 2: 17-290; (1910) *Aritmética para el segundo año del bachillerato*, Barcelona, Francisco J. Altés y Alabart [3a ed., 1920]; (1914) «Las construcciones geométricas», *Memorias de la RACAB*, 3a època, xi, 14 [Discurs de recepció a la RACAB]; (1916) «Poliedros de Arquímedes, convexos y estrellados», *Memorias de la RACAB*, 3a època, xiii, 6; (1918) *Programa de la asignatura de nociones de álgebra y trigonometría para el 4º año de bachillerato*, Barcelona; (1922) «Las leyes gráficas en los espacios no-euclídeos», *Memorias de la RACAB*, 3a època, xvii, 9: 231-262; (1928) *Compendio de geometría*, Barcelona, Núñez; (1932) «La métrica de las figuras ficticias en la geometría pseudoesférica», *Memorias de la RACAB*, 3a època, xxii, 5: 123-172; (1940) «Estudios de geometría analítica no-euclídea», *Memorias de la RACAB*, 3a època, xxv, 17: 379-447. En el conjunt de la seva obra es descobreix una preocupació constant pels aspectes didàctics i innovadors, i resulta de gran interès la seva vinculació amb la difusió a Espanya de les geometries no euclídiades. La monografia *Tratado didáctico de las geometrías no-euclídeas* va ser mereixedora del premi Agell (1907) concedit per la RACAB.

### **Programa d'àlgebra de Josep Maria Bartrina i Capella<sup>2</sup>**

Aquest programa d'àlgebra és part dels programes de matemàtiques manuscrits que Bartrina i Capella va presentar entre la documentació exigida per a concórrer als exercicis de l'oposició que se celebrà per a cobrir les vacants de les càtedres de matemàtiques dels instituts de les Canàries i Tapia de Casariego. Es tracta d'un extens manuscrit de 262 pàgines, a través de les quals Bartrina desenvolupa minuciosament els programes dels elements de matemàtiques (*elementos matemáticos*). Les primeres seixanta-dues pàgines corresponen a un pròleg en què l'autor proposa una sèrie de canvis, que exposarem a continuació, sobre els programes clàssics amb la idea de millorar els aspectes didàctics. En relació amb l'àlgebra, Bartrina entén aquesta disciplina com l'estudi de les equacions. En cap dels programes revisats hem trobat aquesta definició de l'àlgebra, «entendida como la teoría de las ecuaciones algebraicas», presentada el 1879 per Serret en el seu llibre de text *Curso de álgebra superior*. Pel que fa al tema de les progressions, Bartrina es decanta per incloure'l dintre de l'àlgebra, i senyala que «unos autores colocan las progresiones en la Aritmética y otros en los elementos del Álgebra: [...] pero nosotros los colocamos en el Álgebra, y después de los logaritmos, porque ciertas cuestiones que a ellas se refieren exigen el conocimiento de estos y de las ecuaciones». Així mateix, aposta per la inclusió de conceptes com el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple d'expressions algebraïques, o la teoria dels determinants en els llibres d'àlgebra de secundària. Quant a la primera qüestió, indica: «Hemos traído a los Ele-

2. Malgrat que la totalitat dels programes estan datats a 1 d'abril de 1889, el pròleg està signat per Bartrina i Capella a maig de 1885.

mentos los teoremas relativos a [...] la teoría del máximo común divisor y mínimo múltiplo, reforma aceptada ya en muchos tratados, pero hasta el día, según creemos desechada de las obras que se consagran especialmente a la segunda enseñanza. Con solo observar que estas teorías son necesarias para el cálculo de las fracciones, en su simplificación y reducción a su común denominador, queda justificada nuestra innovación si tal puede llamarse». Quant a la teoria dels determinants, Bartrina, a més de ser partidari de l'estudi d'aquesta classe de funcions, reivindica que apareguin com un capítol del llibre i no en forma d'apèndix: «Hemos incluido en el Programa el estudio de las determinantes, si bien con cierta parquedad, principalmente porque estas funciones hacen posible la discusión de las fórmulas generales de las incógnitas en los sistemas de muchas; ecuaciones de primer grado, y por su importante aplicación a la eliminación en las de grados superiores. En lo que nos hemos separado de varios autores, [...] es en encarnar los determinantes en el cuerpo de la doctrina, [...] al paso que los tratadistas aludidos las establecen en apéndices. ¿Es que estas funciones singulares constituyen una mera curiosidad científica? Si así fuera; acaso no merecieran ni los honores de un apéndice; pero constituyendo el fundamento de demostraciones esenciales, entendemos que deben incluirse en los Elementos con anterioridad a las demostraciones y discusiones que necesiten de su apoyo». D'altra banda, insisteix en la utilització del mètode d'eliminació de Gauss per a la resolució dels sistemes d'equacions lineals «tan necesario para dar regularidad a los cálculos cuando las ecuaciones son muchas [...] como ocurre siempre que se aplica el método de los cuadrados mínimos a la compensación de errores en las redes geodesias, y en general a la coordinación de los resultados en las ciencias de observación. Con decir que este método es el que exclusivamente se sigue en todos los negociados de cálculo de Europa, quedaría justificada su introducción en los Elementos [...]». Després del pròleg segueix el programa del primer curs de matemàtiques (aritmètica i àlgebra elemental) i, finalment, el programa del segon curs (geometria elemental i trigonometria rectilínia). El programa d'aritmètica i àlgebra està estructurat en seixanta-tres lliçons, i corresponen a l'àlgebra les últimes trenta-una (lliçons 33-63). No se'ns escapa que el programa de Bartrina és força ambiciós. Tinguem en compte que els batxillers espanyols de l'època considerada eren molt joves comparats amb els d'altres països europeus o amb els dels Estats Units. A Espanya es podia accedir al títol de batxillerat, aproximadament, amb 14 anys. L'assignatura d'àlgebra s'estudiava amb 10-12 anys i només excepcionalment a edats posteriors. Avui en dia es comença a impartir amb 14 anys (resolució d'equacions d'una incògnita). L'àlgebra lineal (determinants, resolució de sistemes utilitzant el mètode de Gauss, etc.) s'estudia a segon de batxillerat, amb 17 o 18 anys.

### **Resolució de sistemes d'equacions lineals. Algorisme de Gauss**

Finalment, com a recordatori, donarem una senzilla referència de l'algorisme de Gauss, molt utilitzat per a la resolució de sistemes d'equacions lineals. Cal dir que avui en dia aquest tema es troba en la majoria dels textos de segon curs de batxillerat, així com en tots els llibres

d'àlgebra lineal dels primers cursos de les carreres tècniques i de ciències on s'inclou l'estudi dels sistemes d'equacions lineals.

Donat el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

S'estableix la matriu ampliada del sistema (en files):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

Aquesta matriu es transforma utilitzant operacions elementals amb les files de la matriu, de tal manera que siguin zeros tots els números situats per sota de la diagonal principal de la matriu dels coeficients:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & \dots & a'_{3n} & b'_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & b'_n \end{bmatrix}$$

La matriu transformada es correspon a un sistema escalonat d'equacions equivalent al sistema inicial:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

A partir del qual es determinen, successivament, les arrels del sistema d'equacions.

## Com a conclusió

Entre els vint-i-un programes d'àlgebra d'ensenyament secundari, publicats entre 1840 i 1919, que han estat objecte d'estudi, el de J. M. Bartrina té unes connotacions especials que ens permeten considerar-lo com un autor «modern». Corroboren aquesta afirmació altres treballs de Bartrina i Capella dels quals ja hem donat compte en anteriors reunions científiques. Avui dia, el mètode d'eliminació de Gauss per a resoldre sistemes d'equacions lineals s'ensenyava als nostres alumnes de batxillerat, encara que no estigui del tot generalitzat. Malgrat això, fa 120 anys que un matemàtic de casa nostra, Josep Maria Bartrina i Capella, ja demanava que aquest mètode s'incloués en els estudis de matemàtiques de secundària.

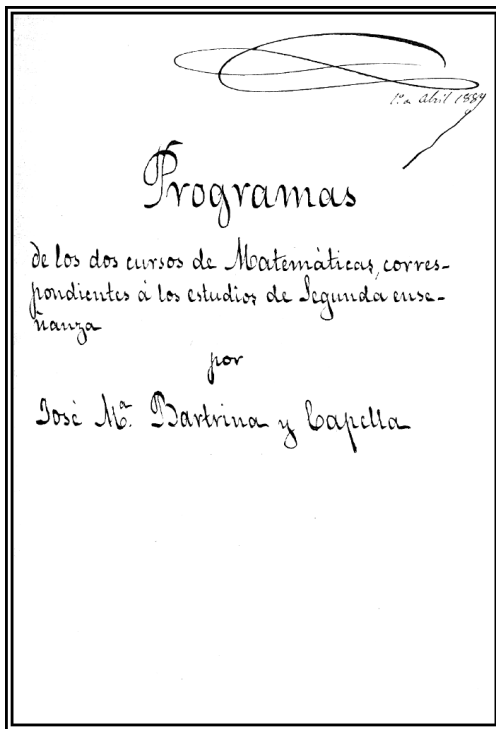


Figura 1. Portada del manuscrit «Programas de los dos cursos de Matemáticas correspondientes a los estudios de segunda enseñanza por José María Bartrina y Capella». Font: AGA-EC, lligall 8000: «Expediente personal de José María Bartrina Capella».



Figura 2. Josep Maria Bartrina i Capella. Font: Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (fotografia obtinguda per mediació de Fina Fortuny, bibliotecària de la RACAB).

## Fonts i bibliografia

ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN. SECCIÓN DE EDUCACIÓN Y CIENCIA [AGA-EC], lligall 8000: «Expediente de José María Bartrina Capella. Programas de los dos cursos de Matemáticas, correspondientes a los estudios de segunda enseñanza por José María Bartrina y Capella (1885-1889)».

AGA-EC, lligall 5.191: «Expediente para proveer por oposición las cátedras de Matemáticas de los Institutos de Las Palmas y Tapia (1889)».

BERNALTE MIRALLES, A. *et al.* (1988), «Introducción de las geometrías no-euclídeas en España». A: ESTEBAN, M. *et al.* (coord.), *Estudios sobre historia de la ciencia y de la técnica*, Valladolid, Junta de Castilla y León, 969-977.

CABALLER VIVES, M. C. (2006), «El álgebra en la enseñanza secundaria en España (1836-1936)», Departament de Física Teòrica i Història de la Ciència. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea. [Tesi doctoral dirigida pel doctor J. Llobart Palet]

LLOMBART PALET, J. (1990), «El estudio de las geometrías no euclídeas a comienzos del siglo xx en España. La obra de José María Bartrina y Capella (1861-1946)». A: ESPAÑOL, L. (ed.), *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962)*, Logronyo, Instituto de Estudios Riojanos, 341-352.

MONTANUY FILLAT, M. *et al.* (1993), «La productividad científica a la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (1771-1991): estudi bibliomètric». A: NAVARRO, V. *et al.* (coord.), *Actes de les II Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Barcelona*, SCHCT, 107-113.

PÉREZ DEL PULGAR, J. A. (1913), «Nota bibliográfica de la memoria de la RACAB titulada "Tratado didáctico de las geometrías no euclídeas" de J. M. Bartrina», *Revista de la Real Sociedad Matemática Española*, II, 193-200.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS Y ARTES (1949), *Nómina del personal académico del año 1948-1949 de la Real Academia de Ciencias i Artes de Barcelona. Reseña necrológica*.

REBIUN (Red de Bibliotecas Universitarias). <<http://www.crue.org>>

SERRET, J. M. (1879), *Cours d'algèbre superieure*, París, Gauthier-Villars. 2 v.

VEA MUNIESA, F. (1995), *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX*, Saragossa, Universidad de Zaragoza. (Cuadernos de Historia de la Ciencia; 9)