

# L'EVOLUCIÓ DELS MÈTODES DE CàLCUL D'ESTRUCTURES DURANT EL SEGLE XX: DELS MÈTODES GRÀFICS A LA IRRUPCIÓ DELS COMPUTADORS

**JOSEP M. PONS POBLET; LLUÍS TORRES**

DEPARTAMENT D'ENGINYERIA MECÀNICA I DE LA CONSTRUCCIÓ  
INDUSTRIAL, UNIVERSITAT DE GIRONA.

*josepm.pons@udg.es; lluis.torres@udg.es*

*Paraules clau: mètodes de càlcul d'estructures, mètodes gràfics, mètode de Cross, mètode dels elements finits*

---

The evolution of the methods of structural analysis during the 20th century: from the graphic methods to the irruption of computers

*Summary: The methods of calculation used in engineering, and specifically in structural design, have experienced a great development throughout the 20th century. From the manual methodologies to the present systems, mainly based on computer calculations, they have increased of unimaginable way the calculation capacity, as well as the precision, reliability and speed of calculation.*

*The methods at the beginning of the century, that followed the previous graphical methods, with which they coexisted a long time, gave rise to iterative systems for solving equations. These methodologies evolved with the appearance of first computers, and the increase of the capacity of calculation, memory and speed, lead to an increase of the degree of sophistication and complexity of the used methods.*

*In this article the basic characteristics of the evolution of the methods of analysis of structures and its implications for the professional and educational world are exposed. This evolution is exemplified through three significant methods: the graphical methods, the Cross method and the Finite Element Method*

*Key words: methods of structures calculation, graphic methods, Cross method, finite element method*

---

Els mètodes de càlcul emprats a l'enginyeria, i concretament en el disseny estructural, han experimentat un gran desenvolupament en el decurs del segle xx. Des de les metodologies manuals als sistemes actuals basats gairebé de manera exclusiva en el càlcul per computador, han augmentat, de manera inimaginable per als tècnics de principis de segle, la capacitat de càlcul, la precisió, la fiabilitat i la rapidesa. Els mètodes de principis de segle, que van prendre en gran mesura el testimoni dels mètodes gràfics anteriors, amb els quals van coexistir durant un llarg temps, van donar pas a sistemes iteratius de resolució d'equacions. Aquests van evolucionar amb l'aparició dels primers ordinadors i, en la mesura que la capacitat de càlcul, memòria i rapidesa d'aquests ha anat augmentant, també ho ha fet el grau de sofisticació i complexitat dels mètodes emprats.

En aquesta comunicació es mostren els trets bàsics que marquen l'evolució dels mètodes de càlcul d'estructures i les seves implicacions en el món professional i docent. Aquesta evolució s'exemplifica amb tres mètodes significatius: els mètodes gràfics, el mètode de Cross i el mètode dels elements finits.

## 1. Mètodes gràfics

A principis de segle el mètode més usual per al càlcul d'elements estructurals era el mètode gràfic. Amb aquest mètode es resolien, amb l'ús dels elements gràfics habituals (escaires, cartabons...), les bigues o les estructures que es plantejaven segons es mostra a la figura 1.

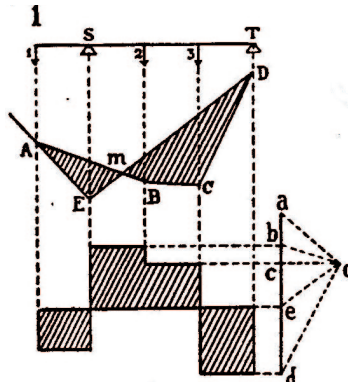


Figura 1. Diagrames d'esforços fets gràficament.

Entre aquests mètodes trobem:

- Mètode de Cremona. Serveix per trobar tots els esforços en un sistema triangulat. Està basat en la combinació de forces exteriors i reaccions amb els esforços de les barres, en un diagrama format per triangles i que es refereix a tota l'estructura. Exemple mostrat a la figura 2.

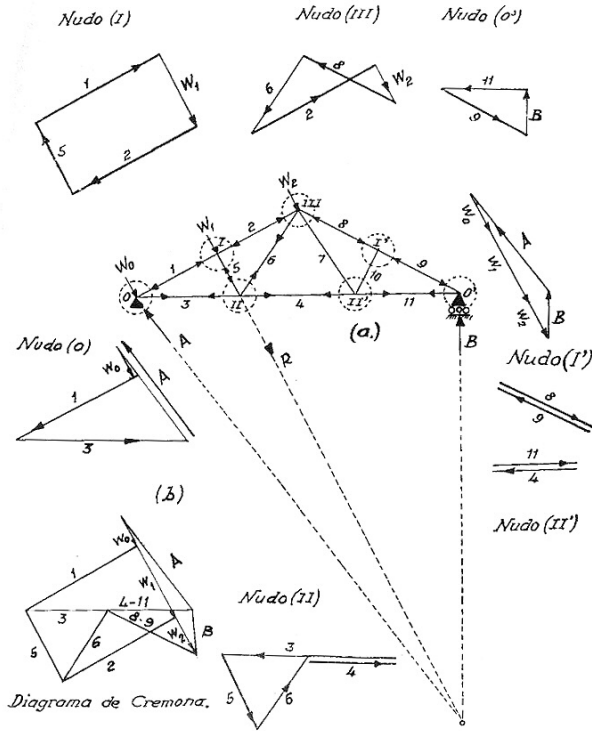


Figura 2. Exemple d'aplicació del mètode de Cremona.

- Mètode de Ritter. Degut a Ritter l'any 1860. El seu principal avantatge es troba en què pot determinar aïlladament l'esforç d'una barra sense esbrinar la resta. Per calcular la tensió d'una barra, prenem moments de totes les forces exteriors que actuen sobre les parts conservades respecte del punt en què es tallen les altres dues barres tallades. Exemple mostrat a la figura 3.

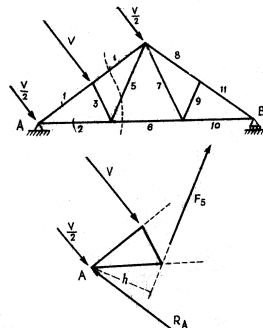


Figura 3. Exemple d'aplicació del mètode de Ritter.

- Mètode de Cullman. Consisteix a fer un tall que afecti tres barres i equilibrar la resultant de les forces exteriors que actuen sobre la part fixada amb les tensions de les tres barres les direccions de les quals són conegudes.

## 2. Mètode de Cross

L'any 1932 es presenta l'anomenat *mètode de Cross* degut a Hardy Cross, catedràtic de la Universitat d'Illinois. Fou publicat a la revista *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, volum 96. És un bon mètode per al càlcul d'estructures intraslacionals, bigues contínues i estructures hiperestàtiques senzilles. Està basat en el mètode de l'equilibri i el seu càlcul és senzill (Prenzlow, 1960:1).

[...] hace mucho tiempo que se han ido buscando procedimientos de cálculo más sencillos y más fáciles, de resultados más o menos exactos, y afortunadamente se han hallado tales métodos [...]

Quan l'estructura és translacional el mètode es complica quant més translacional és l'estructura (Prenzlow, 1960: 4).

[...] el campo de aplicación del método de Cross puede subdividirse en dos grandes dominios:

1. Estructuras sustentantes porticadas con nudos que si bien giran, no pueden desplazarse. Para ellos resulta particularmente sencillo el cálculo.
2. Estructuras sustentantes con nudos que tanto pueden girar como desplazarse. En este caso es preciso efectuar cálculos supletorios (estados de carga auxiliares), pero las consideraciones en que se fundan no son mucho más complicadas [...]

És un mètode d'aproximacions successives i per tant es pot escollir l'exactitud. El mètode, tal com el va il·lustrar Pey Cuñat (1954), consisteix, bàsicament, a desenvolupar l'evolució de l'estructura en quatre etapes fins arribar a l'estructura real:

— Etapa I (nusus sense girs): l'estructura és indeformable. Les barres estan completament encastades pels seus extrems en els nusos i aquests ni giren ni es desplacen. Apareixen, per tant, parells d'encastament perfecte. (figura 4)

— Etapa II (nusus giratoris però indesplaçables): es desfà la rigidesa i es permet el gir als nusos. (figura 5)

— Etapa III (nusus desplaçables però no giratoris): els nusos es consideren desplaçables però rígids; sense cap gir. (figura 6)

— Etapa IV (nusus giratoris desplaçats): s'admet que l'estructura s'ha desplaçat i ha girat. (figura 7)

Si l'estructura és indesplaçable, n'hi ha prou amb les etapes I i II; en cas de ser desplaçable calen, a més, les etapes III i IV.

A la figura 8 es mostra el diagrama de Cross d'un pòrtic.

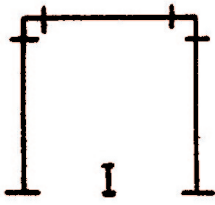


Figura 4. Etapa I del mètode de Cross.

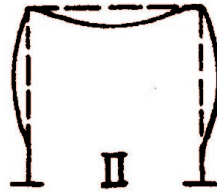


Figura 5. Etapa II del mètode de Cross.

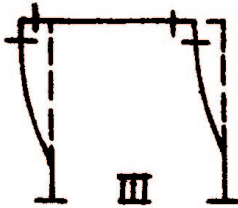


Figura 6. Etapa III del mètode de Cross.

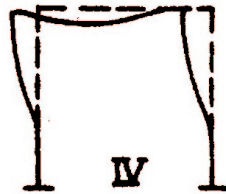


Figura 7. Etapa IV del mètode de Cross.

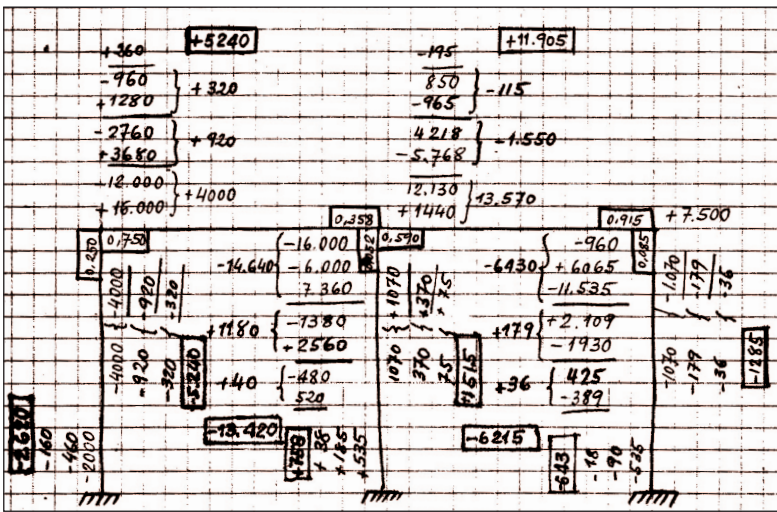


Figura 8. Diagrama de Cross d'un portic.

### 3. Mètode dels elements finits

La teoria de l'elasticitat ens dona les equacions necessàries per resoldre el problema elàstic. Aquest problema és a voltes irresoluble o bé molt complicat. Així doncs, i gràcies a l'ús de la informàtica, han aparegut nous mètodes per a la seva resolució. El mètode dels elements finits n'és un d'ells.

La filosofia del mètode dels elements finits consisteix a substituir el medi continu per un conjunt d'elements que estaran relacionats entre si pels nodes.

Aquests elements tenen dimensions finites i el seu nombre també és finit. Estant aquests elements relacionats entre si únicament pels nodes, la resolució de l'equilibri del model es reduirà a la resolució d'un sistema finit d'equacions d'equilibri nodal abordable numèricament. Podem estudiar un sòlid continu com el mostrat a la figura 9. A la figura 10 es mostra el model discretitzat.

Aquest mètode també és aplicable a problemes amb geometria complexa que serien inabordables amb els mètodes convencionals.



Figura 9. Sòlid continu.

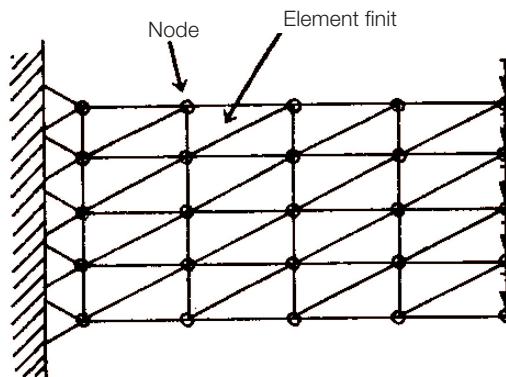


Figura 10. Model discretitzat en elements finits, segons apareix a Roure (1989: 5).

## Bibliografia

FORNONS, J. M. (1982), *El método de los elementos finitos en la ingeniería de estructuras*, Barcelona, Boixareu Editores.

— (1990), *Teoría de estructuras*, Barcelona, CPDA, UPC.

PEY CUÑAT, A. (1954), *Apuntes de construcciones industriales y proyectos*, Terrassa, Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros de Industrias Textiles.

PRENZLOW, C. (1960), *Cálculo de estructuras por el método de Cross*, Buenos Aires, G. Gili.

RODRÍGUEZ AVIAL, F. (1962), «*Resistencia de materiales*», Madrid, CPDA.

— (1982), *Resistencia de materiales*, Madrid, Dossat.

ROURE FERNÁNDEZ, F. (1989), *Introducción al método de los elementos finitos*, Barcelona, CPDA, UPC.

SALIGER, R. (1950), *Estática aplicada*, Barcelona; Madrid, Labor.

